

## MULTIVARIÁTNÁ ANALÝZA 2

### 1. KVADRATICKÉ FORMY

**Definícia 1.1.** Nech  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sú nezávislé,  $N(0, 1)$  rozdelené náhodné veličiny. Potom

$$Y = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$$

má rozdelenie  $\chi_n^2$  (centrálne chí kvadrát rozdelenie s  $n$  stupňami voľnosti).

**Veta 1.2.** Nech  $Y \sim \chi_n^2$ .  $Y$  má hustotu

$$f_n(y) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} e^{-\frac{y}{2}} y^{\frac{n}{2}-1} & \text{pre } y > 0, \\ 0 & \text{inde.} \end{cases}$$

*Dôkaz.* Pozri [Anděl, str. 79].

*Poznámka.*  $\chi_n^2$  rozdelenie je špeciálny prípad gama rozdelenia s parametrami  $a, p$  ( $a > 0, p > 0$ ), ktoré má hustotu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a^p}{\Gamma(p)} e^{-ax} x^{p-1} & \text{pre } x > 0, \\ 0 & \text{inde.} \end{cases}$$

Označujeme ho  $\Gamma(a, p)$ . Platí, že  $\chi_n^2$  je rozdelenie  $\Gamma(\frac{1}{2}, \frac{n}{2})$ .  
( $\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-t} t^{p-1} dt$ ,  $p > 0$ .)

**Definícia 1.3.** Nech  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sú nezávislé,  $X_i \sim N(\mu_i, 1)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Nech  $\lambda = \sum_{i=1}^n \mu_i^2 \neq 0$ . Náhodná veličina

$$Y = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$$

má necentrálne  $\chi^2$  rozdelenie s  $n$  stupňami voľnosti a koeficientom necentrality  $\lambda$ . Označujeme ho  $\chi_{n,\lambda}^2$ .

**Veta 1.4.** Nech  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sú nezávislé,  $X_i \sim N(\mu_i, 1)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej veličiny  $Y = \sum_{i=1}^n X_i^2$ , (teda  $\chi_{n,\lambda}^2$ , kde  $\lambda = \sum_{i=1}^n \mu_i^2$ ) závisí len od  $n$  a  $\lambda$  (nezávisí od jednotlivých  $\mu_1, \dots, \mu_n$ ).

*Dôkaz.* Pozri [Anděl, str. 80].

**Lema 1.5.** Nech  $X \sim N(\mu, 1)$ . Náhodná veličina  $X^2$  má hustotu

$$f_{X^2}(t) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{t+\mu^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{t}} \left( 1 + \frac{\mu^2 t}{2!} + \frac{(\mu^2 t)^2}{4!} + \dots \right) & t > 0, \\ 0 & t \leq 0. \end{cases}$$

*Dôkaz.*  $X^2$  má distribučnú funkciu pre  $t > 0$

$$F_{X^2}(t) = P\{X^2 < t\} = P\{-\sqrt{t} < X < \sqrt{t}\} = \int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}} dx.$$

Preto je hľadaná hustota pre  $t > 0$

$$\begin{aligned} f_{X^2}(t) &= \frac{dF_{X^2}(t)}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\sqrt{t}-\mu)^2}{2}} + \frac{1}{2\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(-\sqrt{t}-\mu)^2}{2}} = \\ &= \frac{e^{-\frac{t+\mu^2}{2}}}{2\sqrt{t}\sqrt{2\pi}} \left( e^{\mu\sqrt{t}} + e^{-\mu\sqrt{t}} \right) = \\ &= \frac{e^{-\frac{t+\mu^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{t}} \left( 1 + \frac{\mu^2 t}{2!} + \frac{(\mu^2 t)^2}{4!} + \dots \right). \end{aligned}$$

Samozrejme pre  $t \leq 0$  je  $f_{X^2}(t) = 0$ .  $\square$

*Poznámka.* Použili sme vzorec

$$\frac{d}{dy} \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx + \beta'(y) f[\beta(y), y] - \alpha'(y) f[\alpha(y), y].$$

Počítajme teraz charakteristickú funkciu náhodnej veličiny  $\xi = X^2$ .

$$\begin{aligned} \psi_{\xi}(t) &= \mathcal{E}(e^{it\xi}) = \int_0^{\infty} e^{itx} f_{\xi}(x) dx = \\ &= \int_0^{\infty} e^{itx} \frac{e^{-\frac{x+\mu^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{x}} \left( 1 + \frac{\mu^2 x}{2!} + \frac{(\mu^2 x)^2}{4!} + \dots \right) dx. \end{aligned}$$

Postupne pre prvý člen

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{itx} e^{-\frac{x+\mu^2}{2}} x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{e^{-\frac{\mu^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x(\frac{1}{2}-it)} x^{-\frac{1}{2}} dx =$$

(substitúcia  $x(\frac{1}{2}-it) = w$ )

$$= \frac{e^{-\frac{\mu^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-w} \frac{w^{\frac{1}{2}-1}}{\sqrt{\frac{1}{2}-it}} dw = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2}-it}} e^{-\frac{\mu^2}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

Pre druhý člen

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{itx} e^{-\frac{x+\mu^2}{2}} x^{-\frac{1}{2}} \frac{\mu^2 x}{2!} dx = \frac{\mu^2 e^{-\frac{\mu^2}{2}}}{2!\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x(\frac{1}{2}-it)} x^{\frac{3}{2}-1} dx =$$

(substitúcia  $x(\frac{1}{2}-it) = w$ )

$$= \frac{\mu^2 e^{-\frac{\mu^2}{2}}}{2!\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-w} \frac{w^{\frac{3}{2}-1}}{\sqrt{(\frac{1}{2}-it)^3}} dw = \frac{\mu^2}{2!\sqrt{2\pi}\sqrt{(\frac{1}{2}-it)^3}} e^{-\frac{\mu^2}{2}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right).$$

Pre tretí člen

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{itx} e^{-\frac{x+\mu^2}{2}} x^{-\frac{1}{2}} \frac{(\mu^2)^2 x^2}{4!} dx = \frac{(\mu^2)^2 e^{-\frac{\mu^2}{2}}}{4! \sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-x(\frac{1}{2}-it)} x^{\frac{5}{2}-1} dx =$$

(substitúcia  $x(\frac{1}{2}-it) = w$ )

$$= \frac{(\mu^2)^2 e^{-\frac{\mu^2}{2}}}{4! \sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-w} \frac{w^{\frac{5}{2}-1}}{\sqrt{(\frac{1}{2}-it)^5}} dw = \frac{(\mu^2)^2}{4! \sqrt{2\pi} \sqrt{(\frac{1}{2}-it)^5}} e^{-\frac{\mu^2}{2}} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right),$$

atď.

Dostávame

$$\begin{aligned} \psi_\xi(t) &= \frac{e^{-\frac{\mu^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) (\mu^2)^0}{0! \left(\frac{1}{2}-it\right)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) (\mu^2)^1}{2! \left(\frac{1}{2}-it\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) (\mu^2)^2}{4! \left(\frac{1}{2}-it\right)^{\frac{5}{2}}} + \dots \right] = \\ &= \frac{e^{-\frac{\mu^2}{2}}}{\sqrt{\pi} \sqrt{1-2it}} \left[ \frac{\sqrt{\pi} (\mu^2)^0}{0! \left(\frac{1}{2}-it\right)^0} + \frac{\sqrt{\pi} \frac{1}{2} (\mu^2)^1}{2.1! \left(\frac{1}{2}-it\right)^1} + \frac{\sqrt{\pi} \frac{3}{2} \frac{1}{2} (\mu^2)^2}{4.3.2! \left(\frac{1}{2}-it\right)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{\pi} \frac{5}{2} \frac{3}{2} \frac{1}{2} (\mu^2)^3}{6.5.4.3! \left(\frac{1}{2}-it\right)^3} + \frac{\sqrt{\pi} \frac{7}{2} \frac{5}{2} \frac{3}{2} \frac{1}{2} (\mu^2)^4}{8.7.6.5.4! \left(\frac{1}{2}-it\right)^4} + \dots \right] = \\ &= \frac{e^{-\frac{\mu^2}{2}}}{\sqrt{1-2it}} \left[ \frac{(\mu^2)^0}{0! 4^0 \left(\frac{1}{2}-it\right)^0} + \frac{(\mu^2)^1}{1! 4^1 \left(\frac{1}{2}-it\right)^1} + \frac{(\mu^2)^2}{2! 4^2 \left(\frac{1}{2}-it\right)^2} + \dots \right] = \\ (1.1) \quad &= \frac{e^{-\frac{\mu^2}{2}} e^{\frac{\mu^2}{2(1-2it)}}}{\sqrt{1-2it}} = \frac{e^{\frac{it\mu^2}{1-2it}}}{\sqrt{1-2it}}. \end{aligned}$$

Ak máme  $X_1, X_2, \dots, X_k$  nezávislé,  $X_i \sim N(\mu_i, 1)$ , tak charakteristická funkcia

$$(1.2) \quad \psi_{X_i^2}(t) = \frac{e^{\frac{it\mu_i^2}{1-2it}}}{\sqrt{1-2it}}$$

a charakteristická funkcia náhodnej veličiny  $Y = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_k^2$  je

$$(1.3) \quad \psi_Y(t) = \psi_{X_1^2}(t) \psi_{X_2^2}(t) \dots \psi_{X_k^2}(t) = \frac{e^{\frac{it}{1-2it} \sum_{j=1}^k \mu_j^2}}{(1-2it)^{\frac{k}{2}}} = \frac{e^{\frac{it\lambda}{1-2it}}}{(1-2it)^{\frac{k}{2}}},$$

kde  $\lambda = \sum_{j=1}^k \mu_j^2$ .

**Veta 1.6.** Nech náhodné premenné  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sú nezávislé,  $X_i \sim N(\mu_i, 1)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Potom

$$T = \sum_{i=1}^n \gamma_i X_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n b_i X_i + c$$

má  $\chi_{k,\delta}^2$  rozdelenie práve vtedy ak

- (i)  $\gamma_i = 0$  alebo 1 pre  $i = 1, 2, \dots, n$ ,
- (ii) ak  $\gamma_i = 0 \Rightarrow b_i = 0$  pre  $i = 1, 2, \dots, n$ ,
- (iii)  $c = \sum_{i=1}^n b_i^2$ .

Ak sú podmienky (i), (ii) a (iii) splnené, tak  $k = \sum_{i=1}^n \gamma_i$  a  $\delta = \sum_{i=1}^n \gamma_i (\mu_i + b_i)^2$ .

*Dôkaz.* Porovnáme charakteristické funkcie  $\psi_T(\cdot)$  a  $\psi_Y(\cdot)$ , kde  $Y \sim \chi_{k,\delta}^2$ . Platí

$$\begin{aligned} \psi_T(t) &= \mathcal{E}(e^{itT}) = \mathcal{E}\left(e^{\left[ \sum_{\substack{j=1 \\ \gamma_j \neq 0}}^n \gamma_j X_j^2 + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ \gamma_j \neq 0}}^n b_j X_j + c + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ \gamma_j = 0}}^n b_j X_j \right]}\right) = \\ &= \mathcal{E}\left(e^{\left[ \sum_{\substack{j=1 \\ \gamma_j \neq 0}}^n \gamma_j (X_j + \frac{b_j}{\gamma_j})^2 + c - \sum_{\substack{j=1 \\ \gamma_j \neq 0}}^n \frac{b_j^2}{\gamma_j} + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ \gamma_j = 0}}^n b_j X_j \right]}\right) = \\ &= e^{\left[ c - \sum_{\substack{j=1 \\ \gamma_j \neq 0}}^n \frac{b_j^2}{\gamma_j} \right]} \mathcal{E}\left(e^{i2 \sum_{\substack{j=1 \\ \gamma_j = 0}}^n b_j X_j}\right) \prod_{\substack{j=1 \\ \gamma_j \neq 0}}^n \mathcal{E}\left(e^{it \gamma_j (X_j + \frac{b_j}{\gamma_j})^2}\right) = \\ &= e^{\left[ c - \sum_{\substack{j=1 \\ \gamma_j \neq 0}}^n \frac{b_j^2}{\gamma_j} \right]} \prod_{\substack{j=1 \\ \gamma_j = 0}}^n \psi_{\xi_j}(2b_j t) \prod_{\substack{j=1 \\ \gamma_j \neq 0}}^n \psi_{\xi_j^2}(\gamma_j t), \end{aligned}$$

kde  $\xi_i \sim N\left(\mu_i + \frac{b_i}{\gamma_i}, 1\right)$  ak  $\gamma_i \neq 0$  a  $\xi_i \sim N(\mu_i, 1)$  ak  $\gamma_i = 0$ . Podľa (1.2) je

$$(1.4) \quad \psi_T(t) = e^{\left[ c - \sum_{\substack{j=1 \\ \gamma_j \neq 0}}^n \frac{b_j^2}{\gamma_j} \right]} e^{i2t \sum_{\substack{j=1 \\ \gamma_j = 0}}^n \mu_j b_j - 2t^2 \sum_{\substack{j=1 \\ \gamma_j = 0}}^n b_j^2} \times \frac{1}{\prod_{\substack{j=1 \\ \gamma_j \neq 0}}^n \sqrt{1 - 2it\gamma_j}} e^{it \sum_{\substack{j=1 \\ \gamma_j \neq 0}}^n \frac{\gamma_j (\mu_j + \frac{b_j}{\gamma_j})^2}{1 - 2it\gamma_j}}.$$

Podľa (1.3) pre charakteristickú funkciu  $Y \sim \chi_{k,\delta}^2$  platí

$$(1.5) \quad \psi_Y(t) = \frac{1}{\prod_{j=1}^k \sqrt{1 - 2it}} e^{\frac{it\delta}{1-2it}}.$$

Porovnaním (1.4) a (1.5) musí platiť pre každé  $t \in \mathcal{R}$

$$\prod_{\substack{j=1 \\ \gamma_j \neq 0}}^n \sqrt{1 - 2it\gamma_j} = \prod_{l=1}^k \sqrt{1 - 2it}$$

a súčasne

$$e^{it \left( c - \sum_{\substack{j=1 \\ \gamma_j \neq 0}}^n \frac{b_j^2}{\gamma_j} \right)} e^{i2t \sum_{\gamma_j=0}^n \mu_j b_j - 2t^2 \sum_{\gamma_j=0}^n b_j^2} e^{it \sum_{\substack{j=1 \\ \gamma_j \neq 0}}^n \frac{\gamma_j \left( \mu_j + \frac{b_j}{\gamma_j} \right)^2}{1 - 2it\gamma_j}} = e^{\frac{it\delta}{1 - 2it}},$$

z čoho je jasne vidieť, ako dokončíme dôkaz.  $\square$

**Veta 1.7.** *Nech  $\xi \sim N_n(\mu, \mathbf{I})$ ,  $\mathbf{A}_{n,n}$  je symetrická,  $\mathbf{b} \in \mathcal{R}^n$  a  $c \in \mathcal{R}$ . Náhodná premenná  $T = \xi' \mathbf{A} \xi + 2\mathbf{b}' \xi + c$  má  $\chi_{k,\delta}^2$  rozdelenie práve vtedy ak*

- (i)  $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ ,
- (ii)  $\mathbf{b} \in \mu(\mathbf{A})$ ,
- (iii)  $c = \mathbf{b}' \mathbf{b}$ .

*Ak sú podmienky (i),(ii) a (iii) splnené, tak  $k = h(\mathbf{A})$ ,  $\delta = (\mathbf{b} + \mu)' \mathbf{A} (\mathbf{b} + \mu)$ .*

*Dôkaz.* Pre  $\mathbf{A}$  existuje ortogonálna matica  $\mathbf{P}$ , že platí  $\mathbf{P}' \mathbf{A} \mathbf{P} = \mathbf{\Lambda}$  (diagonálna matica),  $\mathbf{P}' \mathbf{P} = \mathbf{P} \mathbf{P}' = \mathbf{I}$  (pozri napr. Rao, str. 62). Potom  $\eta = \mathbf{P}' \xi \sim N(\mathbf{P}' \mu, \mathbf{I})$  a  $\xi = \mathbf{P} \eta$ . Preto

$$T = \xi' \mathbf{A} \xi + 2\mathbf{b}' \xi + c = \eta' \mathbf{P}' \mathbf{A} \mathbf{P} \eta + 2\mathbf{b}' \mathbf{P} \eta + c = \eta' \mathbf{\Lambda} \eta + 2\mathbf{b}' \mathbf{P} \eta + c.$$

Podľa vety 1.6 má  $T$  rozdelenie  $\chi_{k,\delta}^2$  práve vtedy ak

- (i)  $\{\mathbf{\Lambda}\}_{ii} = 0$  alebo 1 pre  $i = 1, 2, \dots, n \Leftrightarrow \mathbf{\Lambda}^2 = \mathbf{\Lambda} \Leftrightarrow \mathbf{P}' \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{P}' \mathbf{A} \mathbf{P} = \mathbf{P}' \mathbf{A}^2 \mathbf{P} = \mathbf{P}' \mathbf{A} \mathbf{P} \Leftrightarrow \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ ,
- (ii)  $\{\mathbf{\Lambda}\}_{ii} = 0 \Rightarrow \{\mathbf{P}' \mathbf{b}\}_i = 0$ , čo je ekvivalentné s tým, že  $\mathbf{P}' \mathbf{b} \in \mu(\mathbf{\Lambda}) \Leftrightarrow \mathbf{P} \mathbf{P}' \mathbf{b} = \mathbf{b} \in \mu(\mathbf{P} \mathbf{P}' \mathbf{A} \mathbf{P}) = \mu(\mathbf{A} \mathbf{P}) = \mu(\mathbf{A})$ ,
- (iii)  $c = (\mathbf{b}' \mathbf{P}) \mathbf{P}' \mathbf{b} = \mathbf{b}' \mathbf{b}$ .

Ak sú podmienky (i),(ii) a (iii) splnené, potom podľa vety 1.6  $k = \sum_{i=1}^n \{\mathbf{\Lambda}\}_{ii} = \text{tr} \mathbf{\Lambda} = h(\mathbf{\Lambda}) = h(\mathbf{P} \mathbf{\Lambda} \mathbf{P}') = h(\mathbf{A})$  a  $\delta = \sum_{i=1}^n \{\mathbf{\Lambda}\}_{ii} (\{\mathbf{P}' \mathbf{b}\}_i + \{\mathbf{P}' \mu\}_i)^2 = (\mathbf{b}' \mathbf{P} + \mu' \mathbf{P}) \mathbf{\Lambda} (\mathbf{P}' \mathbf{b} + \mathbf{P}' \mu) = (\mathbf{b} + \mu)' \mathbf{P} \mathbf{\Lambda} \mathbf{P}' (\mathbf{b} + \mu) = (\mathbf{b} + \mu)' \mathbf{A} (\mathbf{b} + \mu)$ .  $\square$

**Veta 1.8.** *Nech  $\xi \sim N_n(\mu, \Sigma)$ ,  $\mathbf{A}_{n,n}$  je symetrická,  $\mathbf{b} \in \mathcal{R}^n$  a  $c \in \mathcal{R}$ . Náhodná premenná  $T = \xi' \mathbf{A} \xi + 2\mathbf{b}' \xi + c$  má  $\chi_{k,\delta}^2$  rozdelenie práve vtedy ak*

- (i)  $\Sigma \mathbf{A} \Sigma \mathbf{A} \Sigma = \Sigma \mathbf{A} \Sigma \Leftrightarrow (\Sigma \mathbf{A})^3 = (\Sigma \mathbf{A})^2$ ,
- (ii)  $\Sigma(\mathbf{A} \mu + \mathbf{b}) \in \mu(\Sigma \mathbf{A} \Sigma)$ ,
- (iii)  $(\mathbf{A} \mu + \mathbf{b})' \Sigma (\mathbf{A} \mu + \mathbf{b}) = \mu' \mathbf{A} \mu + 2\mathbf{b}' \mu + c$ .

*Ak sú podmienky (i),(ii) a (iii) splnené, tak  $k = \text{tr}(\mathbf{A} \Sigma)$  a  $\delta = (\mathbf{b} + \mathbf{A} \mu)' \Sigma \mathbf{A} \Sigma (\mathbf{b} + \mathbf{A} \mu)$ .*

*Dôkaz.* Faktorizujeme maticu  $\Sigma = \mathbf{J} \mathbf{J}'$ , kde  $\mathbf{J}$  je typu  $n \times h(\Sigma)$  (pozri Anděl, str. 64). Vieme, že  $P\{\xi = \mu + \mathbf{J} \eta\} = 1$ , kde  $\eta \sim N_{h(\Sigma)}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$  (Anděl, str. 76). Teda

$$\begin{aligned} T &= \xi' \mathbf{A} \xi + 2\mathbf{b}' \xi + c = (\mu + \mathbf{J} \eta)' \mathbf{A} (\mu + \mathbf{J} \eta) + 2\mathbf{b}' (\mu + \mathbf{J} \eta) + c = \\ &= \eta' \mathbf{J}' \mathbf{A} \mathbf{J} \eta + 2(\mathbf{A} \mu + \mathbf{b})' \mathbf{J} \eta + \mu' \mathbf{A} \mu + 2\mathbf{b}' \mu + c. \end{aligned}$$

Podľa vety 1.7 má  $T$  rozdelenie  $\chi_{k,\delta}^2$  práve vtedy ak

- (1)  $\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J} = \mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}$ ,
- (2)  $\mathbf{J}'(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}) \in \mu(\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J})$ ,
- (3)  $(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b})'\mathbf{J}\mathbf{J}'(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}) = \boldsymbol{\mu}'\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + 2\mathbf{b}'\boldsymbol{\mu} + c$ .

Ďalej platí

$$\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J} = \mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J} \Rightarrow \mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{J}' = \mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{J}',$$

čiže

$$\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma},$$

a tiež naopak

$$\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma} \Rightarrow \mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{J}' = \mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{J}' \Rightarrow$$

$$(\mathbf{J}'\mathbf{J})^{-1}\mathbf{J}'\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{J}(\mathbf{J}'\mathbf{J})^{-1} = (\mathbf{J}'\mathbf{J})^{-1}\mathbf{J}'\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{J}(\mathbf{J}'\mathbf{J})^{-1},$$

čiže

$$\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J} = \mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J},$$

čo dokazuje prvú časť (i).

Ekvivalencia

$$\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma} \Leftrightarrow (\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A})^3 = (\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A})^2$$

je jedným smerom ( $\Rightarrow$ ) zrejímavá. Ku opaku potrebujeme nasledovné tvrdenie

$$(1.6) \quad \exists \mathbf{D}_{n,n} : \boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\mathbf{D}.$$

Tvrdenie (1.6) dokážeme takto:

$$h(\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}) = h(\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{J}') \geq h((\mathbf{J}'\mathbf{J})^{-1}\mathbf{J}'\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{J}(\mathbf{J}'\mathbf{J})^{-1}) = h(\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}).$$

Podľa Anděl, str. 62 je

$$(1.7) \quad h(\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}) = h(\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}) \geq h(\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}) = h(\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\mathbf{J}),$$

ale

$$h(\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\mathbf{J}) = h(\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}) \geq h((\mathbf{J}'\mathbf{J})^{-1}\mathbf{J}'\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}) =$$

$$(1.8) \quad = h(\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}) = h(\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}),$$

a preto z (1.7) a (1.8)

$$h(\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}) = h(\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\mathbf{J}) \leq h(\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}) \leq h(\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}),$$

teda

$$h(\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}) = h(\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}).$$

Pretože zrejme  $\mu(\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}) \subset \mu(\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma})$  a hodnoty matíc vytvárajúcich tieto podpriestory sa rovnajú, platí

$$\mu(\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}) = \mu(\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma})$$

a dostávame vzťah (1.6).

Z predpokladu  $(\Sigma \mathbf{A})^3 = (\Sigma \mathbf{A})^2$  pomocou (1.6) dostávame

$$\Sigma \mathbf{A} \Sigma \mathbf{A} \Sigma \mathbf{A} \mathbf{D} = \Sigma \mathbf{A} \Sigma \mathbf{A} \mathbf{D} \Rightarrow \Sigma \mathbf{A} \Sigma \mathbf{A} \Sigma = \Sigma \mathbf{A} \Sigma,$$

čím sme (i) úplne dokázali.

Podme teraz dokázať (ii), čiže dokázať, že

$$\mathbf{J}'(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}) \in \mu(\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}) \Leftrightarrow \Sigma(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}) \in \mu(\Sigma\mathbf{A}\Sigma).$$

Ak  $\mathbf{J}'(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}) \in \mu(\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J})$ , tak  $\mathbf{J}\mathbf{J}'(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}) \in \mu(\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}) = \mu(\Sigma\mathbf{A}\mathbf{J}) = \mu(\Sigma\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\Sigma) = \mu(\Sigma\mathbf{A}\Sigma\mathbf{A}\Sigma) = \mu(\Sigma\mathbf{A}\Sigma)$  (podľa (i)).

Naopak ak  $\Sigma(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}) \in \mu(\Sigma\mathbf{A}\Sigma)$ , tak  $(\mathbf{J}'\mathbf{J})^{-1}\mathbf{J}'\mathbf{J}\mathbf{J}'(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}) = \mathbf{J}'(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}) \in \mu((\mathbf{J}'\mathbf{J})^{-1}\mathbf{J}'\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{J}') = \mu(\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{J}') \subset \mu(\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J})$ , čím sme dokázali (ii). Samozrejme (iii) už máme dokázané (je ekvivalentné (1)). Dôkaz vety už dokončíme jednoducho. Podľa vety 1.7 je totiž  $k = h(\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}) = \text{tr}(\Sigma\mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{A}\Sigma)$  a  $\delta = [(\mathbf{J}'(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}))]' \mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}[\mathbf{J}'(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b})]] = (\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b})' \Sigma \mathbf{A} \Sigma (\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b})$ .  $\square$

Uvedieme bez dôkazu vety o nezávislosti kvadratických foriem. Podrobnejšie pozri [Rao, Mitra, kapitola 9].

**Veta 1.9.** *Nech  $\mathbf{Y} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$  a  $Q_1 = \mathbf{Y}'\mathbf{A}\mathbf{Y}$ ,  $Q_2 = \mathbf{Y}'\mathbf{B}\mathbf{Y}$  dve kvadratické formy. Nutné a postačujúce podmienky nezávislosti  $Q_1$  a  $Q_2$  sú*

(a)  $\Sigma\mathbf{A}\Sigma\mathbf{B}\Sigma = \mathbf{0}$ ,  $\Sigma\mathbf{A}\Sigma\mathbf{B}\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ ,  $\Sigma\mathbf{B}\Sigma\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$  a  $\boldsymbol{\mu}'\mathbf{A}\Sigma\mathbf{B}\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ , ak  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  sú symetrické, nemusia byť pozitívne semidefinítne, pričom  $\Sigma$  nemusí byť regulárna.

(b)  $\mathbf{A}\Sigma\mathbf{B}\Sigma = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{A}\Sigma\mathbf{B}\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ , ak  $\mathbf{A}$  je pozitívne semidefinítne.

(c)  $\mathbf{A}\Sigma\mathbf{B} = \mathbf{0}$ , ak  $\mathbf{A}$  aj  $\mathbf{B}$  sú pozitívne semidefinítne.

(d)  $\mathbf{A}\Sigma\mathbf{B} = \mathbf{0}$ , ak  $\Sigma$  je regulárna,  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  sú symetrické, nemusia byť pozitívne semidefinítne.

**Veta 1.10.** *Nech  $\mathbf{Y} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$  a  $Q_1 = \mathbf{Y}'\mathbf{A}\mathbf{Y} + 2\mathbf{a}'\mathbf{Y} + \alpha$ ,  $Q_2 = \mathbf{Y}'\mathbf{B}\mathbf{Y} + 2\mathbf{b}'\mathbf{Y} + \beta$  dve lineárne-kvadratické formy. Nutné a postačujúce podmienky nezávislosti  $Q_1$  a  $Q_2$  sú*

(a)  $\Sigma\mathbf{A}\Sigma\mathbf{B}\Sigma = \mathbf{0}$ ,  $\Sigma\mathbf{A}\Sigma\mathbf{b} = \mathbf{0}$ ,  $\Sigma\mathbf{B}\Sigma\mathbf{a} = \mathbf{0}$  a  $\mathbf{a}'\Sigma\mathbf{b} = 0$ , ak  $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ , pričom  $\Sigma$  nemusí byť regulárna.

(b)  $\mathbf{A}\Sigma\mathbf{B} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{B}\Sigma\mathbf{a} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{A}\Sigma\mathbf{b} = \mathbf{0}$  a  $\mathbf{a}'\Sigma\mathbf{b} = 0$ , ak  $\Sigma$  je regulárna, pričom  $\boldsymbol{\mu}$  môže byť aj nenulový vektor.

## 2. WISHARTOVO ROZDELENIE

### 2.1. ÚVODNÉ POZNÁMKY A DEFINÍCIA

Majme  $\mathbf{U}_i \sim N_p(\boldsymbol{\mu}_i, \Sigma)$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , ktoré sú nezávislé,  $\Sigma$  je pozitívne definitná matica. Označme  $\mathbf{U}_i = (U_{1i}, U_{2i}, \dots, U_{pi})'$ ,  $\mathbf{Y}_j = (U_{j1}, U_{j2}, \dots, U_{jk})'$ ,  $j = 1, 2, \dots, p$  a

$$\begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & \dots & U_{1k} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} & \dots & U_{2k} \\ \vdots & & & & \\ U_{p1} & U_{p2} & U_{p3} & \dots & U_{pk} \end{pmatrix} = \mathbf{U}'_{p,k}.$$

Teda

$$\mathcal{U}' = (\mathbf{U}_1 : \mathbf{U}_2 : \dots : \mathbf{U}_k) = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}'_1 \\ \mathbf{Y}'_2 \\ \vdots \\ \mathbf{Y}'_p \end{pmatrix}.$$

ďalej označme

$$\mathbf{M}'_{p,k} = \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} & \dots & \mu_{1k} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} & \dots & \mu_{2k} \\ \vdots & & & & \\ \mu_{p1} & \mu_{p2} & \mu_{p3} & \dots & \mu_{pk} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\mu}_1 : \boldsymbol{\mu}_2 : \dots : \boldsymbol{\mu}_k).$$

Pre pevný vektor  $\mathbf{l} \in \mathcal{R}^p$  sú náhodné veličiny

$$\mathbf{l}'\mathbf{U}_i \sim N(\mathbf{l}'\boldsymbol{\mu}_i, \mathbf{l}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{l} = \sigma_i^2), \quad i = 1, 2, \dots, k$$

nezávislé (lebo  $\mathbf{U}_i$  sú nezávislé). Náhodný vektor  $\mathcal{U}\mathbf{l} = {}_1\mathbf{Y}_{k,1}$  je lineárna kombinácia normálne rozdelených nezávislých náhodných vektorov, pričom

$$(2.1) \quad {}_1\mathbf{Y} \sim N_k(\mathbf{M}\mathbf{l}, \sigma_i^2 \mathbf{I}_{k,k}).$$

ak  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_k)'$  je vektor konštánt, tak

$$(2.2) \quad \mathcal{U}'\mathbf{b} = b_1\mathbf{U}_1 + \dots + b_k\mathbf{U}_k \sim N_p(\mathbf{M}'\mathbf{b}, \mathbf{b}'\mathbf{b}\boldsymbol{\Sigma}).$$

*Poznámka.* Nech

$$\mathbf{A}_{m,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \mathbf{B}_{r,s} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1s} \\ b_{21} & \dots & b_{2s} \\ \vdots & & \\ b_{r1} & \dots & b_{rs} \end{pmatrix}.$$

Kroneckerov súčin matíc  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  je

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & \dots & a_{1n}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} & \dots & a_{2n}\mathbf{B} \\ \vdots & & & \\ a_{m1}\mathbf{B} & a_{m2}\mathbf{B} & \dots & a_{mn}\mathbf{B} \end{pmatrix}_{mr,ns}.$$

Vlastnosti Kroneckerovho súčinu matíc pozri napr. v [Rao].

ak napíšeme “pod seba“ stĺpce matice  $\mathbf{K}$ , povieme, že sme vykonali na matici operáciu *vec*. Teda

$$\text{vec}\mathcal{U}' = \mathbf{U}_{kp,1} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{U}_k \end{pmatrix}.$$



Ukážte, že

$$(2.3) \quad \text{vec} \mathcal{U}' = \mathbf{U} \sim N_{kp}(\text{vec} \mathbf{M}', \mathbf{I}_{k,k} \otimes \boldsymbol{\Sigma}_{p,p})$$

a (2.2) sa dá zapísať ako

$$(2.4) \quad \mathcal{U}' \mathbf{b} = (\mathbf{b}' \otimes \mathbf{I}_{p,p}) \text{vec} \mathcal{U}' \sim N_p((\mathbf{b}' \otimes \mathbf{I}_{p,p}) \text{vec} \mathbf{M}', (\mathbf{b}' \otimes \mathbf{I}_{p,p})(\mathbf{I}_{p,p} \otimes \boldsymbol{\Sigma}_{p,p})(\mathbf{b} \otimes \mathbf{I}_{p,p})).$$

*Poznámka.* Nech  $\mathbf{b}_1 \neq \mathbf{b}_2$ ,  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in \mathcal{R}^k$ . Platí

$$\text{cov}(\mathcal{U}' \mathbf{b}_1, \mathcal{U}' \mathbf{b}_2) = (\mathbf{b}'_1 \otimes \mathbf{I}_{p,p})(\mathbf{I} \otimes \boldsymbol{\Sigma})(\mathbf{b}_2 \otimes \mathbf{I}_{p,p}) = \mathbf{b}'_1 \mathbf{b}_2 \otimes \boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{b}'_1 \mathbf{b}_2 \boldsymbol{\Sigma}.$$

ak  $\mathbf{b}'_1 \mathbf{b}_2 = 0$ , t.j. ak  $\mathbf{b}_1$  a  $\mathbf{b}_2$  sú ortogonálne, tak  $\mathcal{U}' \mathbf{b}_1$  a  $\mathcal{U}' \mathbf{b}_2$  sú nes Korelované, t.j. v tomto prípade nezávislé.

Podľa predchádzajúcej poznámky ľahko dokážeme nasledujúcu lemu

**Lema 2.1.** Ak  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_r$ ,  $r \leq k$  tvorí ortonormálny systém v  $\mathcal{R}^k$ , tak

$$\mathbf{V}_1 = \mathcal{U}' \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{V}_r = \mathcal{U}' \mathbf{b}_r$$

sú navzájom nezávislé a majú normálne rozdelenie, pričom  $\mathbf{V}_i \sim N_p(\mathbf{M}' \mathbf{b}_i, \boldsymbol{\Sigma})$ .

Ľahko dostaneme aj nasledujúci dôsledok

**Dôsledok 2.2.** Ak  $\mathbf{B}_{k,k}$  je ortogonálna matica ( $\mathbf{B}\mathbf{B}' = \mathbf{B}'\mathbf{B} = \mathbf{I}$ ), tak  $\mathbf{V}_i = (\mathbf{U}_1 \dots \mathbf{U}_k) \{\mathbf{B}\}_{.i} = \mathcal{U}' \{\mathbf{B}\}_{.i} \sim N_p(\mathbf{M}' \{\mathbf{B}\}_{.i}, \boldsymbol{\Sigma})$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  a  $\text{cov}(\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j) = (\{\mathbf{B}\}'_{.i} \otimes \mathbf{I}_{p,p})(\mathbf{I} \otimes \boldsymbol{\Sigma})(\{\mathbf{B}\}_{.j} \otimes \mathbf{I}) = \{\mathbf{B}\}'_{.i} \{\mathbf{B}\}_{.j} \otimes \boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{0}$  pre  $i \neq j$ , teda  $\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_k$  sú nezávislé.

**Definícia 2.3.** Združené rozdelenie prvkov matice  $\mathbf{S}_{p,p} = \sum_{i=1}^k \mathbf{U}_i \mathbf{U}_i' = \mathcal{U}' \mathcal{U}$  sa nazýva Wishartovo rozdelenie s  $k$  stupňami voľnosti a značí  $W_p(k, \boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{M})$ . Ak  $\mathbf{M} = \mathbf{0}$ , jedná sa o centrálné rozdelenie, označujeme ho  $W_p(k, \boldsymbol{\Sigma})$ .

*Poznámka.*

(i)  $\{\mathbf{S}\}_{ij} = \left\{ \sum_{l=1}^k \mathbf{U}_l \mathbf{U}_l' \right\}_{ij} = \sum_{l=1}^k U_{il} U_{jl} = \mathbf{Y}'_i \mathbf{Y}_j = \{\mathcal{U}' \mathcal{U}\}_{ij}$ , lebo

$$\mathbf{S}_{p,p} = \begin{pmatrix} \sum_{l=1}^k U_{1l}^2 & \sum_{l=1}^k U_{1l} U_{2l} & \dots & \sum_{l=1}^k U_{1l} U_{pl} \\ \sum_{l=1}^k U_{2l} U_{1l} & \sum_{l=1}^k U_{2l}^2 & \dots & \sum_{l=1}^k U_{2l} U_{pl} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{l=1}^k U_{pl} U_{1l} & \sum_{l=1}^k U_{pl} U_{2l} & \dots & \sum_{l=1}^k U_{pl}^2 \end{pmatrix}.$$

(ii) Pre  $p = 1$  a  $\mu_{11} = \mu_{12} = \dots = \mu_{1k} = 0$  sú  $\mathbf{U}_i = U_{1i} \sim N(0, \sigma^2)$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  nezávislé,  $\mathcal{U}' \mathcal{U} = \sum_{i=1}^k U_{1i}^2 \sim W_1(k, \sigma^2)$ . Pretože  $\frac{U_{1i}}{\sigma} \sim N(0, 1)$ , má  $\sum_{i=1}^k \frac{U_{1i}^2}{\sigma^2} \sim \chi_k^2$  rozdelenie a  $\mathcal{U}' \mathcal{U} \sim \sigma^2 \chi_k^2$  rozdelenie.

(iii) Pre  $k \geq p$  existuje hustota  $W_p(k, \boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{M})$  rozdelenia, ináč nie. Dôkaz je naznačený v [Rao, str. 641].

## 2.2. NIEKTORÉ VLASTNOSTI WISHARTOVHO ROZDELENIA

**Lema 2.4.** *Nech  $\mathbf{S} \sim W_p(k, \boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{M})$  a  $\mathbf{l} \in \mathcal{R}^p$ ,  $\mathbf{l} \neq \mathbf{0}$  je vektor konštant. Potom  $\mathbf{l}'\mathbf{S}\mathbf{l} \sim \sigma_1^2 \chi_{k,\delta}^2$  ( $\sigma_1^2 = \mathbf{l}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{l}$ ,  $\delta = \frac{\mathbf{l}'\mathbf{M}'\mathbf{M}\mathbf{l}}{\sigma_1^2}$ ).*

*Dôkaz.*  $\mathbf{S} = \sum_{i=1}^k \mathbf{U}_i \mathbf{U}_i'$ , preto  $\mathbf{l}'\mathbf{S}\mathbf{l} = \sum_{i=1}^k \mathbf{l}'\mathbf{U}_i \mathbf{U}_i' \mathbf{l} = \sum_{i=1}^k (\mathbf{l}'\mathbf{U}_i)^2 = \mathbf{l}'\mathbf{Y}' \mathbf{l} \mathbf{Y} \sim \sigma_1^2 \chi_{k,\delta}^2$ , kde  $\delta = \frac{\mathbf{l}'\mathbf{M}'\mathbf{M}\mathbf{l}}{\sigma_1^2}$ , lebo  $\mathbf{l}'\mathbf{Y} \sim N_k(\mathbf{M}\mathbf{l}, \sigma_1^2 \mathbf{I}_{k,k})$ . ak  $\mathbf{M} = \mathbf{0}$ , tak  $\delta = 0$ .  $\square$

**Lema 2.5.** *Nech  $\mathbf{U}_i \sim N_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  sú nezávislé,  $\mathbf{A}_{k,k}$  reálna symetrická matica.  $\mathbf{U}'\mathbf{A}\mathbf{U} \sim W_p(r, \boldsymbol{\Sigma})$  práve vtedy ak  $\forall \mathbf{l} \in \mathcal{R}^p$ ,  $\mathbf{l} \neq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{l}'\mathbf{Y}'\mathbf{A}\mathbf{l}\mathbf{Y} \sim \sigma_1^2 \chi_r^2$ , ( $\sigma_1^2 = \mathbf{l}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{l}'\mathbf{Y} = \mathbf{U}\mathbf{l}$ ). V tomto prípade  $r = h(\mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{A})$ .*

*Dôkaz.* Z lemy 2.4 vyplýva, že ak  $\mathbf{U}'\mathbf{A}\mathbf{U} \sim W_p(r, \boldsymbol{\Sigma})$ , tak  $\forall \mathbf{l} \in \mathcal{R}^p$   $\mathbf{l}'\mathbf{Y}'\mathbf{A}\mathbf{l}\mathbf{Y} \sim \sigma_1^2 \chi_r^2$ . Samozrejme z (2.1)  $\mathbf{l}'\mathbf{Y} \sim N_k(\mathbf{0}, \sigma_1^2 \mathbf{I}_{k,k})$ , čiže  $\frac{\mathbf{l}'\mathbf{Y}}{\sigma_1} \sim N_k(\mathbf{0}, \mathbf{I}_{k,k})$ . Teda podľa vety 1.8  $\left(\frac{\mathbf{l}'\mathbf{Y}}{\sigma_1}\right)' \mathbf{A} \frac{\mathbf{l}'\mathbf{Y}}{\sigma_1} \sim \chi_r^2 \Leftrightarrow \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$  a v tom prípade  $r = h(\mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{A})$ .

Naopak ak  $\forall \mathbf{l} \in \mathcal{R}^p$   $\mathbf{l}'\mathbf{Y}'\mathbf{A}\mathbf{l}\mathbf{Y} \sim \sigma_1^2 \chi_r^2$ , čo je podľa vety 1.8 ekvivalentné tomu, že  $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ , pričom v tom prípade  $h(\mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{A})$ .  $\mathbf{A}$  je reálna symetrická matica, idempotentná a  $h(\mathbf{A}) = r$ . Teda  $\mathbf{A}$  je pozitívne semidefinitná a preto existuje ortonormálny systém vektorov  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k \in \mathcal{R}^k$ , že  $\mathbf{A} = \sum_{j=1}^r \lambda_j \mathbf{b}_j \mathbf{b}_j'$ ,  $\mathbf{I} = \sum_{j=1}^k \mathbf{b}_j \mathbf{b}_j'$  (reálne čísla  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > 0$  sú vlastné čísla matice  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r$  im prislúchajúce charakteristické vektory). Z rovnosti  $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$  dostávame

$$\sum_{j=1}^r \lambda_j \mathbf{b}_j \mathbf{b}_j' \sum_{s=1}^r \lambda_s \mathbf{b}_s \mathbf{b}_s' = \sum_{t=1}^r \lambda_t \mathbf{b}_t \mathbf{b}_t'$$

čiže

$$\lambda_1^2 \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_1' + \lambda_2^2 \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_2' + \dots + \lambda_r^2 \mathbf{b}_r \mathbf{b}_r' = \lambda_1 \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_1' + \lambda_2 \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_2' + \dots + \lambda_r \mathbf{b}_r \mathbf{b}_r',$$

z čoho vyplýva, že  $\lambda_i^2 = \lambda_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ , čiže  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_r = 1$  (lebo  $\lambda_i > 0$ ). Môžeme písať  $\mathbf{A} = \sum_{j=1}^r \mathbf{b}_j \mathbf{b}_j'$  a tiež  $\mathbf{U}'\mathbf{A}\mathbf{U} = \sum_{j=1}^r \mathbf{U}'\mathbf{b}_j \mathbf{b}_j' \mathbf{U} = \sum_{j=1}^r \mathbf{V}_j \mathbf{V}_j'$ , pričom podľa lemy 2.1  $\mathbf{V}_i \sim N_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$  a  $V_1, V_2, \dots, V_r$  sú nezávislé. Z definície preto  $\mathbf{U}'\mathbf{A}\mathbf{U} \sim W_p(r, \boldsymbol{\Sigma})$ .  $\square$

**Veta 2.6.** *Nech  $\mathbf{S} \sim W_p(k, \boldsymbol{\Sigma})$  a  $\mathbf{B}_{p,q}$  matica konštant. Potom  $\mathbf{B}'\mathbf{S}\mathbf{B} \sim W_q(k, \mathbf{B}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B})$ .*

*Dôkaz.*  $\mathbf{B}'\mathbf{S}\mathbf{B} = \mathbf{B}'\mathbf{U}'\mathbf{U}\mathbf{B}$ , kde

$$\mathbf{U}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}'_1 \\ \mathbf{U}'_2 \\ \vdots \\ \mathbf{U}'_k \end{pmatrix}_{k,p} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}'_1 \\ \mathbf{V}'_2 \\ \vdots \\ \mathbf{V}'_k \end{pmatrix},$$

$\mathbf{U}_i \sim N_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$  sú nezávislé. Preto

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}'_1 \\ \mathbf{V}'_2 \\ \vdots \\ \mathbf{V}'_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}'_1 \mathbf{B} \\ \mathbf{U}'_2 \mathbf{B} \\ \vdots \\ \mathbf{U}'_k \mathbf{B} \end{pmatrix}$$

má riadky nezávislé,  $\text{cov}(\mathbf{B}'\mathbf{U}_i, \mathbf{B}'\mathbf{U}_j) = \mathbf{B}'\text{cov}(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_j)\mathbf{B} = \mathbf{0}$  a  $\mathbf{B}'\mathbf{U}_i \sim N_q(\mathbf{0}, \mathbf{B}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B})$ . Platí  $\mathbf{B}'\mathbf{S}\mathbf{B} = \sum_{i=1}^k \mathbf{V}_i \mathbf{V}_i' \sim W_q(k, \mathbf{B}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B})$  (priamo z definície).  $\square$

**Dôsledok 2.7.**

(a) Diagonálne submatice matice  $\mathbf{S}$  majú tiež Wishartovo rozdelenie, lebo ak

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} \end{pmatrix},$$

kde  $\mathbf{S}_{11}$  je rozmeru  $l \times l$ , tak

$$(\mathbf{I}_{l,l} \quad \mathbf{0}) \mathbf{S} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{l,l} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \mathbf{S}_{11}.$$

(b) ak  $\mathbf{S} \sim W_p(k, \mathbf{I})$  a ak pre  $\mathbf{B}_{p,q}$  platí  $\mathbf{B}'\mathbf{B} = \mathbf{I}$ , potom  $\mathbf{B}'\mathbf{S}\mathbf{B} \sim W_q(k, \mathbf{I})$ .

**Veta 2.8.** Nech  $\mathbf{S} \sim W_p(k, \mathbf{\Sigma})$  a  $\mathbf{a} \in \mathcal{R}^p$  je taký vektor konštant, že  $\mathbf{a}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{a} \neq 0$ .

Potom  $\frac{\mathbf{a}'\mathbf{S}\mathbf{a}}{\mathbf{a}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{a}} \sim \chi_k^2$ .

*Dôkaz.* Podľa vety 2.6 platí, že  $\mathbf{a}'\mathbf{S}\mathbf{a} \sim W_1(k, \mathbf{a}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{a})$ , čo znamená podľa poznámky

(ii) pod definíciou 2.3, že  $\frac{\mathbf{a}'\mathbf{S}\mathbf{a}}{\mathbf{a}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{a}} \sim \chi_k^2$ .  $\square$

**Veta 2.9.** Nech  $\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_n$  je náhodný výber z  $N_p(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$  (teda  $\mathcal{U}'\mathcal{U} \sim W_p(n, \mathbf{\Sigma})$ ),  $\mathbf{C}_{n,n}$  je symetrická matica. Platí

$$\mathcal{U}'\mathbf{C}\mathcal{U} \sim W_p(r, \mathbf{\Sigma}) \Leftrightarrow \mathbf{C}^2 = \mathbf{C}.$$

V takomto prípade  $r = \text{tr}(\mathbf{C})$ .

*Dôkaz.* Podľa lemy 2.5 je  $\mathcal{U}'\mathbf{C}\mathcal{U} \sim W_p(r, \mathbf{\Sigma}) \Leftrightarrow \forall \mathbf{l} \in \mathcal{R}^p \quad \mathbf{l}'\mathbf{Y}'\mathbf{C} \mathbf{l}\mathbf{Y} \sim \sigma_1^2 \chi_r^2$ , ( $\sigma_1^2 = \mathbf{l}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{l}\mathbf{Y} = \mathcal{U}\mathbf{l}$ ). V tomto prípade  $r = h(\mathbf{C}) = \text{tr}(\mathbf{C})$ . Pretože podľa (2.1) je  $\frac{\mathbf{l}\mathbf{Y}}{\sqrt{\mathbf{l}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{l}}} \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ , je podľa vety 1.7  $\mathbf{l}'\mathbf{Y}'\mathbf{C} \mathbf{l}\mathbf{Y} \sim \sigma_1^2 \chi_r^2 \Leftrightarrow \frac{\mathbf{l}'\mathbf{Y}'}{\sqrt{\mathbf{l}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{l}}} \mathbf{C} \frac{\mathbf{l}\mathbf{Y}}{\sqrt{\mathbf{l}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{l}}} \sim \chi_r^2 \Leftrightarrow \mathbf{C}^2 = \mathbf{C}$ . V tomto prípade  $r = h(\mathbf{C})$ .  $\square$

**Lema 2.10.** Nech  $\mathbf{S}_1 \sim W_p(n_1, \mathbf{\Sigma})$ ,  $\mathbf{S}_2 \sim W_p(n_2, \mathbf{\Sigma})$ .  $\mathbf{S}_1$  a  $\mathbf{S}_2$  sú nezávislé. Potom  $\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 \sim W_p(n_1 + n_2, \mathbf{\Sigma})$ .

*Dôkaz.*  $\mathbf{S}_1 = \mathcal{U}'_1\mathcal{U}_1$ ,  $\mathbf{S}_2 = \mathcal{U}'_2\mathcal{U}_2$ , kde  $\mathcal{U}'_1 = (\mathbf{U}_1 \dotsc \mathbf{U}_{n_1})$ ,  $\mathcal{U}'_2 = (\mathbf{U}_{n_1+1} \dotsc \mathbf{U}_{n_1+n_2})$  a  $\mathbf{U}_i \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$ ,  $i = 1, 2, \dots, n_1 + n_2$  sú nezávislé. Preto ak označíme  $\mathcal{U}' =$

$(\mathcal{U}'_1 \dotsc \mathcal{U}'_2)_{p, n_1+n_2}$ , tak  $\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 = (\mathcal{U}'_1\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}'_2\mathcal{U}_2) = \mathcal{U}'\mathcal{U} \sim W_p(n_1 + n_2, \mathbf{\Sigma})$ .  $\square$

**Veta 2.11.** Nech  $\mathbf{C}_{n,n} = \mathbf{C}'$  je p.s.d. matica konštant,  $\mathbf{U}_i \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  nezávislé. Platí, že  $\mathcal{U}'_{p,n}\mathbf{C}\mathcal{U} \sim \sum_{i=1}^n \lambda_i W_p^{(i)}(1, \mathbf{\Sigma})$ , kde  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sú vlastné čísla matice  $\mathbf{C}$  a  $W_p^{(1)}(1, \mathbf{\Sigma}), \dots, W_p^{(n)}(1, \mathbf{\Sigma})$  sú nezávislé.

*Dôkaz.* Môžeme písať  $\mathbf{C} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{p}_i \mathbf{p}'_i$ ,  $\mathbf{I} = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i \mathbf{p}'_i$ , pričom  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$  sú vlastné čísla matice  $\mathbf{C}$  a  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$  ortonormálne vektory. Teda  $\mathcal{U}'\mathbf{C}\mathcal{U} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathcal{U}'\mathbf{p}_i \mathbf{p}'_i \mathcal{U} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{V}_i \mathbf{V}'_i$ , kde  $\mathbf{V}_i \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$  a sú nezávislé (lema 2.1). Z vety 2.9 vieme, že  $\mathcal{U}'\mathbf{p}_i \mathbf{p}'_i \mathcal{U} = \mathbf{V}_i \mathbf{V}'_i \sim W_p^{(i)}(1, \mathbf{\Sigma})$ .  $\square$

**Lema 2.12.** Pre matice príslušných rozmerov platí

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \text{vecABC} &= (\mathbf{C}' \otimes \mathbf{A})\text{vecB}, \\ \text{trAB} &= (\text{vecB}')'\text{vecA}. \end{aligned}$$

*Dôkaz.* Lemu dokážte ako cvičenie.

**Veta 2.13.** Nech  $\mathbf{U}_i \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \dots, \mathbf{U}_n$  sú nezávislé,  $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2$  symetrické a idempotentné.  $\mathcal{U}'\mathbf{C}_1\mathcal{U}$  a  $\mathcal{U}'\mathbf{C}_2\mathcal{U}$  sú nezávislé  $\Leftrightarrow \mathbf{C}_1\mathbf{C}_2 = \mathbf{0}$ .

*Dôkaz.* ak  $\mathcal{U}'\mathbf{C}_1$  a  $\mathcal{U}'\mathbf{C}_2$  sú nezávislé, tak sú nezávislé aj  $\mathcal{U}'\mathbf{C}_1\mathcal{U}$  a  $\mathcal{U}'\mathbf{C}_2\mathcal{U}$ .  $\mathcal{U}'\mathbf{C}_1$  a  $\mathcal{U}'\mathbf{C}_2$  sú nezávislé práve vtedy ak sú nezávislé  $\mathbf{I}\mathcal{U}'\mathbf{C}_1$  a  $\mathbf{I}\mathcal{U}'\mathbf{C}_2$  a to je práve vtedy ak sú nezávislé  $\text{vec}(\mathbf{I}\mathcal{U}'\mathbf{C}_1)$  a  $\text{vec}(\mathbf{I}\mathcal{U}'\mathbf{C}_2)$ , čiže podľa lemy 2.12 ak sú nezávislé vektory  $(\mathbf{C}'_1 \otimes \mathbf{I})\text{vec}\mathcal{U}'$  a  $(\mathbf{C}'_2 \otimes \mathbf{I})\text{vec}\mathcal{U}'$ , ktoré sú podľa (2.3) normálne rozdelené, pričom  $\text{vec}\mathcal{U}' \sim N_{np}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_{n,n} \otimes \boldsymbol{\Sigma}_{p,p})$ . Pretože  $(\mathbf{C}'_1 \otimes \mathbf{I})(\mathbf{I} \otimes \boldsymbol{\Sigma})(\mathbf{C}_2 \otimes \mathbf{I}) = (\mathbf{C}'_1\mathbf{C}_2 \otimes \boldsymbol{\Sigma}) = \mathbf{0}$ , sú  $\mathcal{U}'\mathbf{C}_1$  a  $\mathcal{U}'\mathbf{C}_2$  nezávislé. Teraz už ľahko dokončíme dôkaz.  $\square$

**Veta 2.14.** Nech  $\mathbf{S} \sim W_p(k, \boldsymbol{\Sigma})$ ,  $\boldsymbol{\Sigma}$  je regulárna,  $k \geq p - 1$ . Platí:

- (a)  $\frac{\{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\}_{pp}}{\{\mathbf{S}^{-1}\}_{pp}} \sim \chi^2_{k-(p-1)}$  a nezávisí od  $\{\mathbf{S}\}_{i,j}$   $i = 1, 2, \dots, p-1$ ,  $j = 1, 2, \dots, p-1$ .
- (b) Pre každý  $\mathbf{1} \in \mathcal{R}^p, \mathbf{1} \neq \mathbf{0}$  je  $\frac{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\mathbf{S}^{-1}\mathbf{1}} \sim \chi^2_{k-(p-1)}$ .

*Dôkaz.*  $\mathbf{S} = \sum_{i=1}^k \mathbf{U}_i\mathbf{U}_i'$ ,  $\mathbf{U}_i \sim N_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$ ,  $\mathbf{U}_i$  nezávislé,

$$\mathbf{U}_i = \begin{pmatrix} U_{1i} \\ U_{2i} \\ \vdots \\ U_{p-1,i} \\ U_{pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_i^* \\ U_{pi} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad \mathbf{U}_i^* \sim N_{p-1}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_{11}), \text{ kde}$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{pmatrix}, \quad h(\boldsymbol{\Sigma}_{11}) = p - 1. \text{ Ďalej označme}$$

$$\mathbf{U}_{k,1} = \begin{pmatrix} U_{p1} \\ U_{p2} \\ \vdots \\ U_{pk} \end{pmatrix} \sim N_k(\mathbf{0}, \{\boldsymbol{\Sigma}\}_{pp}\mathbf{I}_{k,k}), \quad \mathbf{u}_i = \begin{pmatrix} u_{1i} \\ u_{2i} \\ \vdots \\ u_{p-1,i} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^k \mathbf{U}_i^*(\mathbf{U}_i^*)' & \sum_{i=1}^k \mathbf{U}_i^*U_{pi} \\ \sum_{i=1}^k U_{pi}(\mathbf{U}_i^*)' & \sum_{i=1}^k U_{pi}^2 \end{pmatrix}.$$

Podľa lemy 4, Anděl, str. 121,  $P\{\sum_{i=1}^k \mathbf{U}_i^*(\mathbf{U}_i^*)' \text{ je pozitívne definitná}\} = 1$ , ak  $k \geq p - 1$ , teda  $P\{h(\sum_{i=1}^k \mathbf{U}_i^*(\mathbf{U}_i^*)') = p - 1\} = 1$ . Pre maticu

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{21} & \dots & u_{p-1,1} \\ u_{12} & u_{22} & \dots & u_{p-1,2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ u_{1k} & u_{2k} & \dots & u_{p-1,k} \end{pmatrix}$$

platí

$$\sum_{i=1}^k \mathbf{u}_i\mathbf{u}_i' = \mathbf{X}'\mathbf{X}, \quad \sum_{i=1}^k U_{pi}\mathbf{u}_i' = \mathbf{U}'\mathbf{X} \quad \text{a} \quad \sum_{i=1}^k \mathbf{u}_iU_{pi} = \mathbf{X}'\mathbf{U}.$$

(a)

$$\begin{aligned} \{\mathbf{S}^{-1}\}_{pp} &= \left\{ \sum_{i=1}^k U_{pi}^2 - \sum_{i=1}^k (\mathbf{U}_i^*)' U_{pi} \left( \sum_{i=1}^k \mathbf{U}_i^* (\mathbf{U}_i^*)' \right)^{-1} \sum_{i=1}^k U_{pi} \mathbf{U}_i^* \right\}^{-1} = \\ &= \left\{ \mathbf{U}' \mathbf{U} - \sum_{i=1}^k (\mathbf{U}_i^*)' U_{pi} \left( \sum_{i=1}^k \mathbf{U}_i^* (\mathbf{U}_i^*)' \right)^{-1} \sum_{i=1}^k U_{pi} \mathbf{U}_i^* \right\}^{-1} \end{aligned}$$

(pozri anděl, str. 66). Podmienené rozdelenie  $U_{p1}/\mathbf{U}_1^* = \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{U}_k^* = \mathbf{u}_k$  je to isté ako  $U_{p1}/\mathbf{U}_1^* = \mathbf{u}_1$  (lebo  $U_{p1}$  nezávisí od  $\mathbf{U}_2^*, \dots, \mathbf{U}_k^*$ ) a teda  $U_{p1}/\mathbf{U}_1^* = \mathbf{u}_1 \sim N(0 + \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} \mathbf{u}_1, \Sigma_{22} - \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12})$ , čo je  $N(\Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} \mathbf{u}_1, \{\Sigma^{-1}\}_{pp}^{-1})$ . analogicky  $U_{pi}/\mathbf{U}_i^* = \mathbf{u}_i \sim N(\Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} \mathbf{u}_i, \{\Sigma^{-1}\}_{pp}^{-1})$ ,  $i = 2, 3, \dots, k$  (pričom  $U_{pi}, U_{pj}$  pre  $i \neq j$  sú nezávislé). Preto

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_k \end{pmatrix} = \mathbf{U}/\mathbf{U}_1^* = \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{U}_k^* = \mathbf{u}_k \sim N\left( \begin{pmatrix} \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} \mathbf{u}_1 \\ \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} \mathbf{u}_k \end{pmatrix}, \{\Sigma^{-1}\}_{pp}^{-1} \mathbf{I} \right),$$

pričom podstatné je aj to, že

$$(2.6) \quad \begin{pmatrix} \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} \mathbf{u}_1 \\ \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} \mathbf{u}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}'_1 \Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12} \\ \mathbf{u}'_2 \Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12} \\ \vdots \\ \mathbf{u}'_k \Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12} \end{pmatrix} = \mathbf{X} \boldsymbol{\gamma}.$$

Dostávame, že rozdelenie  $\frac{1}{\{\mathbf{S}^{-1}\}_{pp}} / \mathbf{U}_1^* = \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{U}_k^* = \mathbf{u}_k$  je rozdelenie

$$\boldsymbol{\xi}' \boldsymbol{\xi} - \sum_{i=1}^k \mathbf{u}'_i \xi_i \left( \sum_{j=1}^k \mathbf{u}_j \mathbf{u}'_j \right)^{-1} \sum_{i=1}^k \mathbf{u}_i \xi_i = \boldsymbol{\xi}' (\mathbf{I} - \mathbf{X} (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}') \boldsymbol{\xi}.$$

Podľa vety 1.8 má kvadratická forma  $\boldsymbol{\xi}' (\mathbf{I} - \mathbf{X} (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}') \boldsymbol{\xi}$  rozdelenie  $\{\Sigma^{-1}\}_{pp}^{-1} \chi_{k-(p-1)}^2$ , ktoré vďaka (2.6) nezávisí od podmienky (teda od  $\{\mathbf{S}\}_{ij}$ ,  $i, j \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ ) a je preto aj nepodmieneným rozdelením. Dostávame, že

$$\frac{\{\Sigma^{-1}\}_{pp}}{\{\mathbf{S}^{-1}\}_{pp}} \sim \chi_{k-(p-1)}^2.$$

Pretože dôkaz sme úplne analogicky mohli urobiť pre  ${}_r \mathbf{U} = (U_{r1}, U_{r2}, \dots, U_{rk})'$ ,  $r \in \{1, 2, \dots, p\}$  platí,

$$\frac{\{\Sigma^{-1}\}_{rr}}{\{\mathbf{S}^{-1}\}_{rr}} \sim \chi_{k-(p-1)}^2, \quad r \in \{1, 2, \dots, p\}.$$

(b) Vezmime ortogonálnu maticu  $\mathbf{B}$ , ktorá má prvý riadok  $\frac{1}{\|\mathbf{1}\|} \mathbf{1}'$ . Podľa vety 2.6 platí  $\mathbf{B} \mathbf{S} \mathbf{B}' \sim W_p(k, \mathbf{B} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{B}')$ . Pretože

$$(\mathbf{B} \mathbf{S} \mathbf{B}')^{-1} = \mathbf{B} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{B}', \quad (\mathbf{B} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{B}')^{-1} = \mathbf{B} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{B}',$$

dostávame z (a)

$$\frac{\{\mathbf{B}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{B}'\}_{11}}{\{\mathbf{B}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}'\}_{11}} = \frac{\frac{1}{\|\mathbf{1}\|}\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}{\frac{1}{\|\mathbf{1}\|}\mathbf{1}'\mathbf{S}^{-1}\mathbf{1}} \sim \chi_{k-(p-1)}^2$$

(ortogonálnou transformáciou sa príslušné hodnoty v dôkaze (a) nemenia).  $\square$

K dôkazu vety 2.16 potrebujeme nasledujúce tvrdenie:

**Lema 2.15.** *Nech  $X \sim \chi_m^2$  a  $Y \sim \chi_n^2$  sú nezávislé. Potom  $\frac{X}{X+Y} \sim B\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)$ .*

*Dôkaz.* Pozri Rao, vztah (3b.1.12), dokážte ako cvičenie.

(náčrt dôkazu:  $U \sim \chi_m^2$ ,  $V \sim \chi_n^2$ , tak  $f_U(u) = \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma(\frac{m}{2})}e^{-\frac{u}{2}}u^{\frac{m}{2}-1}$  pre  $u > 0$ ,

$f_V(v) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}e^{-\frac{v}{2}}v^{\frac{n}{2}-1}$  pre  $v > 0$ ,

$$\mathbf{t} : \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{u}{u+v} \\ u+v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\tau} : \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} zy \\ z(1-y) \end{pmatrix}$$

$$D_{\boldsymbol{\tau}}(y, z) = \det\left(\begin{pmatrix} z & y \\ -z & 1-y \end{pmatrix}\right) = z$$

$$f_{U,V}(u, v) = f_U(u)f_V(v), \quad f_{\mathbf{t}(U,V)}(y, z) = [2^{\frac{m}{2}}\Gamma(\frac{m}{2})]^{-1}e^{-\frac{zy}{2}}(zy)^{\frac{m}{2}-1} \times$$

$$[2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})]^{-1}e^{-\frac{z(1-y)}{2}}[z(1-y)]^{\frac{n}{2}-1}z$$

$$f(y) = \int_0^{-\infty} f(y, z)dz = \frac{1}{B(\frac{m}{2}, \frac{n}{2})}y^{\frac{m}{2}-1}(1-y)^{\frac{n}{2}-1}$$

**Veta 2.16.** *Nech  $\mathbf{S}_1 \sim W_p(k_1, \boldsymbol{\Sigma})$ ,  $\mathbf{S}_2 \sim W_p(k_2, \boldsymbol{\Sigma})$  sú nezávislé,  $\boldsymbol{\Sigma}$  je regulárna. ak  $k_1 \geq p-1$ , tak  $\frac{|\mathbf{S}_1|}{|\mathbf{S}_1+\mathbf{S}_2|}$  má rozdelenie ako súčin  $\eta_1 \dots \eta_p$  nezávislých náhodných veličín,  $\eta_i \sim B\left(\frac{k_1-p+i}{2}, \frac{k_2}{2}\right)$  a nezávisí od  $\{\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2\}_{ij}$ ,  $i, j \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ .*

*Dôkaz.* Označme  $\mathbf{S}_1 = \sum_{i=1}^{k_1} \mathbf{U}_i \mathbf{U}_i'$ ,  $\mathbf{S}_2 = \sum_{i=k_1+1}^{k_1+k_2} \mathbf{U}_i \mathbf{U}_i'$  kde  $\mathbf{U}_i \sim N_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$ ,  $i = 1, 2, \dots, k_1 + k_2$  a nezávislé.

$$\mathbf{U}_i = \begin{pmatrix} U_{1i} \\ U_{2i} \\ \vdots \\ U_{p-1,i} \\ U_{pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_i^* \\ U_{pi} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, k_1 + k_2, \quad \mathbf{U}_i^* \sim N_{p-1}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_{11}), \text{ kde}$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{pmatrix}, \quad h(\boldsymbol{\Sigma}_{11}) = p-1.$$

ďalej označme

$$\mathbf{U}_{k_1+k_2,1} = \begin{pmatrix} U_{p1} \\ U_{p2} \\ \vdots \\ U_{p,k_1+k_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1)\mathbf{U}_{k_1,1} \\ (2)\mathbf{U}_{k_2,1} \end{pmatrix} \sim N_{k_1+k_2}(\mathbf{0}, \{\boldsymbol{\Sigma}\}_{pp}\mathbf{I}),$$

$$\mathbf{u}_i = \begin{pmatrix} u_{1i} \\ u_{2i} \\ \vdots \\ u_{p-1,i} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, k_1 + k_2,$$

$$\mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{k_1} \mathbf{U}_i^* (\mathbf{U}_i^*)' & \sum_{i=1}^{k_1} \mathbf{U}_i^* U_{pi} \\ \sum_{i=1}^{k_1} U_{pi} (\mathbf{U}_i^*)' & \sum_{i=1}^{k_1} U_{pi}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{k_1+k_2} \mathbf{U}_i^* (\mathbf{U}_i^*)' & \sum_{i=1}^{k_1+k_2} \mathbf{U}_i^* U_{pi} \\ \sum_{i=1}^{k_1+k_2} U_{pi} (\mathbf{U}_i^*)' & \sum_{i=1}^{k_1+k_2} U_{pi}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2)_{11} & (\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2)_{12} \\ (\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2)_{21} & (\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2)_{22} \end{pmatrix}.$$

Podľa lemy 4, anděl, str. 121,  $P\{\sum_{i=1}^{k_1} \mathbf{U}_i^* (\mathbf{U}_i^*)' \text{ je pozitívne definitná}\} = 1$ , (pretože  $k_1 \geq p-1$ ), teda  $P\{h(\sum_{i=1}^{k_1} \mathbf{U}_i^* (\mathbf{U}_i^*)') = p-1\} = 1$ . (Samozrejme aj  $P\{h(\sum_{i=1}^{k_1+k_2} \mathbf{U}_i^* (\mathbf{U}_i^*)') = p-1\} = 1$ . ďalej označme

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{21} & \dots & u_{p-1,1} \\ u_{12} & u_{22} & \dots & u_{p-1,2} \\ \vdots & & & \\ u_{1k_1} & u_{2k_1} & \dots & u_{p-1,k_1} \end{pmatrix}, \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} u_{1,k_1+1} & u_{2,k_1+1} & \dots & u_{p-1,k_1+1} \\ u_{1,k_1+2} & u_{2,k_1+2} & \dots & u_{p-1,k_1+2} \\ \vdots & & & \\ u_{1,k_1+k_2} & u_{2,k_1+k_2} & \dots & u_{p-1,k_1+k_2} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{pmatrix}.$$

úplne analogicky ako vo vete 2.14 (a jej dôkaze) dostávame

$$\sum_{i=1}^{k_1} \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i' = \mathbf{X}_1' \mathbf{X}_1, \sum_{i=1}^{k_1} U_{pi} \mathbf{u}_i' = {}^{(1)}\mathbf{U}' \mathbf{X}_1, \sum_{i=1}^{k_1} \mathbf{u}_i U_{pi} = \mathbf{X}_1' {}^{(1)}\mathbf{U}, \sum_{i=1}^{k_1} U_{pi}^2 = {}^{(1)}\mathbf{U}' {}^{(1)}\mathbf{U}$$

a

$$\sum_{i=k_1+1}^{k_1+k_2} \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i' = \mathbf{X}_2' \mathbf{X}_2, \sum_{i=k_1+1}^{k_1+k_2} U_{pi} \mathbf{u}_i' = {}^{(2)}\mathbf{U}' \mathbf{X}_2, \sum_{i=k_1+1}^{k_1+k_2} \mathbf{u}_i U_{pi} = \mathbf{X}_2' {}^{(2)}\mathbf{U}, \sum_{i=k_1+1}^{k_1+k_2} U_{pi}^2 = ({}^{(1)}\mathbf{U}' : {}^{(2)}\mathbf{U}') \begin{pmatrix} {}^{(1)}\mathbf{U} \\ {}^{(2)}\mathbf{U} \end{pmatrix}.$$

Konečne

$$\{\mathbf{S}_1^{-1}\}_{pp} = \{ {}^{(1)}\mathbf{U}' {}^{(1)}\mathbf{U} - \sum_{i=1}^{k_1} (\mathbf{U}_i^*)' U_{pi} (\sum_{i=1}^{k_1} \mathbf{U}_i^* (\mathbf{U}_i^*)')^{-1} \sum_{i=1}^{k_1} U_{pi} \mathbf{U}_i^* \}^{-1},$$

$$\{(\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2)^{-1}\}_{pp} = \{ ({}^{(1)}\mathbf{U}' : {}^{(2)}\mathbf{U}') \begin{pmatrix} {}^{(1)}\mathbf{U} \\ {}^{(2)}\mathbf{U} \end{pmatrix} - \sum_{i=1}^{k_1+k_2} (\mathbf{U}_i^*)' U_{pi} (\sum_{i=1}^{k_1+k_2} \mathbf{U}_i^* (\mathbf{U}_i^*)')^{-1} \sum_{i=1}^{k_1+k_2} U_{pi} \mathbf{U}_i^* \}^{-1}.$$

Pretože platí (anděl, str. 66)

$$\{\Sigma^{-1}\}_{pp} = (\Sigma_{22} - \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12})^{-1} = |\Sigma_{22} - \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12}|^{-1},$$

čiže

$$\{\Sigma^{-1}\}_{pp} = \frac{|\Sigma_{11}|}{|\Sigma_{11}| |\Sigma_{22} - \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12}|} = \frac{|\Sigma_{11}|}{|\Sigma|},$$

dostávame

$$(2.7) \quad \{\mathbf{S}_1^{-1}\}_{pp}^{-1} = \frac{|\mathbf{S}_1|}{|\mathbf{S}_{11}|} = {}^{(1)}\mathbf{U}' {}^{(1)}\mathbf{U} - \sum_{i=1}^{k_1} (\mathbf{U}_i^*)' U_{pi} \left( \sum_{i=1}^{k_1} \mathbf{U}_i^* (\mathbf{U}_i^*)' \right)^{-1} \sum_{i=1}^{k_1} U_{pi} \mathbf{U}_i^*,$$

$$(2.8) \quad \{(\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2)^{-1}\}_{pp}^{-1} = \frac{|\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2|}{|(\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2)_{11}|} = ({}^{(1)}\mathbf{U}' : {}^{(2)}\mathbf{U}') \begin{pmatrix} {}^{(1)}\mathbf{U} \\ {}^{(2)}\mathbf{U} \end{pmatrix} - \\ - \sum_{i=1}^{k_1+k_2} (\mathbf{U}_i^*)' U_{pi} \left( \sum_{i=1}^{k_1+k_2} \mathbf{U}_i^* (\mathbf{U}_i^*)' \right)^{-1} \sum_{i=1}^{k_1+k_2} U_{pi} \mathbf{U}_i^*.$$

Zhodne ako vo vete 2.14 sa ukáže, že

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi}_1 \\ \boldsymbol{\xi}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{U}/\mathbf{U}_1^* = \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{U}_{k_1+k_2}^* = \mathbf{u}_{k_1+k_2} \sim \\ \sim N_{k_1+k_2} \left( \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{21} \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} \mathbf{u}_1 \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} \mathbf{u}_{k_1+k_2} \end{pmatrix} = \mathbf{X}\boldsymbol{\gamma}, \{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\}_{pp}^{-1} \mathbf{I} \right),$$

pričom  $\boldsymbol{\xi}_1$  je  $k_1$  rozmerný a  $\boldsymbol{\xi}_2$  je  $k_2$  rozmerný náhodný vektor. Preto podmienené rozdelenie

$$\{(\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2)^{-1}\}_{pp}^{-1} / \mathbf{U}_1^* = \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{U}_{k_1+k_2}^* = \mathbf{u}_{k_1+k_2}$$

je rozdelenie kvadratickej formy

$$\boldsymbol{\xi}' \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}' \mathbf{X} (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \boldsymbol{\xi} \sim \{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\}_{pp}^{-1} \chi_{k_1+k_2-p+1}^2,$$

pričom nezáleží na podmienke a preto je totožné s nepodmieneným rozdelením. Rozdelenie

$$\{\mathbf{S}_1^{-1}\}_{pp}^{-1} / \mathbf{U}_1^* = \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{U}_{k_1+k_2}^* = \mathbf{u}_{k_1+k_2},$$

ktoré je rozdelením kvadratickej formy

$$\boldsymbol{\xi}'_1 \boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}'_1 \mathbf{X}_1 (\mathbf{X}'_1 \mathbf{X}_1)^{-1} \mathbf{X}'_1 \boldsymbol{\xi}_1 = \\ = (\boldsymbol{\xi}'_1 : \boldsymbol{\xi}'_2) \left( \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} (\mathbf{X}'_1 \mathbf{X}_1)^{-1} (\mathbf{X}'_1 : \mathbf{0}) \right) \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi}_1 \\ \boldsymbol{\xi}_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\xi}' \mathbf{A} \boldsymbol{\xi} \sim \\ \sim \{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\}_{pp}^{-1} \chi_{k_1-p+1}^2,$$

nezávisí na podmienke a je preto totožné s nepodmieneným rozdelením. Podľa vety 1.8 je

$$\{(\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2)^{-1}\}_{pp}^{-1} - \{\mathbf{S}_1^{-1}\}_{pp}^{-1} / \mathbf{U}_1^* = \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{U}_{k_1+k_2}^* = \mathbf{u}_{k_1+k_2} =$$

$$\boldsymbol{\xi}' \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{k_2, k_2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 [(\mathbf{X}'_1 \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}'_2 \mathbf{X}_2)^{-1} - (\mathbf{X}'_1 \mathbf{X}_1)^{-1}] \mathbf{X}'_1 \\ \mathbf{X}_2 (\mathbf{X}'_1 \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}'_2 \mathbf{X}_2)^{-1} \mathbf{X}'_1 \\ \mathbf{X}_1 (\mathbf{X}'_1 \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}'_2 \mathbf{X}_2)^{-1} \mathbf{X}'_2 \\ \mathbf{X}_2 (\mathbf{X}'_1 \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}'_2 \mathbf{X}_2)^{-1} \mathbf{X}'_2 \end{pmatrix} \right\} \boldsymbol{\xi} =$$



$$= \boldsymbol{\xi}' \mathbf{B} \boldsymbol{\xi} \sim \{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\}_{pp}^{-1} \chi_{k_2}^2,$$

nezáleží od podmienky a je preto opäť totožné s nepodmieneným rozdelením. Mimo toho ľahko sa ukáže, že

$$\{(\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2)^{-1}\}_{pp}^{-1} - \{\mathbf{S}_1^{-1}\}_{pp}^{-1} / \mathbf{U}_1^* = \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{U}_{k_1+k_2}^* = \mathbf{u}_{k_1+k_2}$$

nezávisí od

$$\{\mathbf{S}_1^{-1}\}_{pp}^{-1} / \mathbf{U}_1^* = \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{U}_{k_1+k_2}^* = \mathbf{u}_{k_1+k_2}$$

(lebo  $\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{0}$ ). Preto

$$\frac{\{\mathbf{S}_1^{-1}\}_{pp}^{-1}}{\{(\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2)^{-1}\}_{pp}^{-1} - \{\mathbf{S}_1^{-1}\}_{pp}^{-1} + \{\mathbf{S}_1^{-1}\}_{pp}^{-1}} / \mathbf{U}_1^* = \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{U}_{k_1+k_2}^* = \mathbf{u}_{k_1+k_2}$$

je rozdelené ako

$$(2.9) \quad \frac{\chi_{k_1-p+1}^2}{\chi_{k_1-p+1}^2 + \chi_{k_2}^2},$$

pričom  $\chi_{k_2}^2$  a  $\chi_{k_1-p+1}^2$  v (2.9) sú nezávislé. Podľa lemy 2.15 má preto

$\frac{\{\mathbf{S}_1^{-1}\}_{pp}^{-1}}{\{(\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2)^{-1}\}_{pp}^{-1}}$  rozdelenie  $B\left(\frac{k_1-p+1}{2}, \frac{k_2}{2}\right)$  a nezávisí od  $\{\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2\}_{ij}$ ,  $i, j \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ .

Označme hlavný determinat rádu  $r$  matice  $\mathbf{C}_{p,p}$ , teda  $\det \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1r} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{r1} & c_{r2} & \dots & c_{rr} \end{pmatrix}$  ako  $|\mathbf{C}|_r$ ,  $r \in \{1, 2, \dots, p\}$ . Využijúc (2.7) a (2.8) dostávame, že rozdelenie

$$\begin{aligned} & \frac{|\mathbf{S}_1|}{|\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2|} / \mathbf{U}_1^* = \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{U}_{k_1+k_2}^* = \mathbf{u}_{k_1+k_2} = \\ & = \frac{|\mathbf{S}_1|_p}{|\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2|_p} \frac{|\mathbf{S}_1|_{p-1}}{|\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2|_{p-1}} \dots \frac{|\mathbf{S}_1|_1}{|\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2|_1} / \mathbf{U}_1^* = \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{U}_{k_1+k_2}^* = \mathbf{u}_{k_1+k_2}, \end{aligned}$$

pričom

$$= \frac{|\mathbf{S}_1|_p}{|\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2|_p} / \mathbf{U}_1^* = \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{U}_{k_1+k_2}^* = \mathbf{u}_{k_1+k_2} \sim B\left(\frac{k_1-p+1}{2}, \frac{k_2}{2}\right)$$

a nezávisí od

$$\frac{|\mathbf{S}_1|_{p-1}}{|\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2|_{p-1}} / \mathbf{U}_1^* = \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{U}_{k_1+k_2}^* = \mathbf{u}_{k_1+k_2},$$

ktoré má  $B\left(\frac{k_1-p+1}{2}, \frac{k_2}{2}\right)$  rozdelenie nezávislé od podmienky, atď. Teda  $\frac{|\mathbf{S}_1|}{|\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2|}$  má rozdelenie ako súčin  $\eta_1 \dots \eta_p$  navzájom nezávislých náhodných veličín, pričom  $\eta_i \sim B\left(\frac{k_1-p+i}{2}, \frac{k_2}{2}\right)$ .  $\square$

**Veta 2.17.** ak  $\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_n$  sú nezávislé,  $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$  rozdelené,  $\mathbf{S} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\mathbf{U}_i - \bar{\mathbf{U}})(\mathbf{U}_i - \bar{\mathbf{U}})'$ , kde  $\bar{\mathbf{U}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{U}_i$ , tak  $n\mathbf{S} \sim W_p(n-1, \boldsymbol{\Sigma})$ .

*Dôkaz.* (pozri aj Vetu 2.9)  $n\mathbf{S} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{U}_i - \bar{\mathbf{U}})(\mathbf{U}_i - \bar{\mathbf{U}})' = \sum_{i=1}^n \mathbf{U}_i \mathbf{U}_i' - n\bar{\mathbf{U}}\bar{\mathbf{U}}' = \mathcal{U}'\mathcal{U} -$

$\frac{1}{n}\mathcal{U}'\mathbf{1}_{n,1}\mathbf{1}'_{1,n}\mathcal{U} = \mathcal{U}'(\mathbf{I} - \frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}')\mathcal{U} = \mathcal{U}'\mathbf{A}\mathcal{U} = \tilde{\mathcal{U}}'\mathbf{A}\tilde{\mathcal{U}}$ , kde  $\tilde{\mathcal{U}}' = (\mathbf{U}_1 - \boldsymbol{\mu}, \dots, \mathbf{U}_n - \boldsymbol{\mu})$ , lebo  $(\boldsymbol{\mu}, \dots, \boldsymbol{\mu})\mathbf{A} = \mathbf{0}$ . Podľa lemy 2.5  $\tilde{\mathcal{U}}'\mathbf{A}\tilde{\mathcal{U}} \sim W_p(r, \boldsymbol{\Sigma}) \Leftrightarrow \forall \mathbf{l} \in \mathcal{R}^p \mathbf{l}'\tilde{\mathcal{U}}'\mathbf{A}\tilde{\mathcal{U}}\mathbf{l} \sim (\mathbf{l}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{l})\chi_r^2$ , pričom v tomto prípade  $r = h(\mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{A})$ . Pretože

$$\tilde{\mathcal{U}}\mathbf{l} = \begin{pmatrix} (\mathbf{U}_1 - \boldsymbol{\mu})'\mathbf{l} \\ (\mathbf{U}_2 - \boldsymbol{\mu})'\mathbf{l} \\ \vdots \\ (\mathbf{U}_n - \boldsymbol{\mu})'\mathbf{l} \end{pmatrix} = {}_1\tilde{\mathbf{Y}} \sim N_n(\mathbf{0}, (\mathbf{l}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{l})\mathbf{I})$$

(pozri (2.1)), má  $\mathbf{l}'\tilde{\mathcal{U}}'\mathbf{A}\tilde{\mathcal{U}}\mathbf{l}$  rozdelenie  $\chi_r^2$  (podľa vety 1.8) práve vtedy ak  $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ . V tomto prípade  $r = h(\mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{A})$ . Je zrejmé, že v našom prípade  $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$  a  $r = h(\mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{A}) = n-1$ , preto  $n\mathbf{S} \sim W_p(n-1, \boldsymbol{\Sigma})$ .  $\square$

**Veta 2.18.** ak  $\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_n$  sú nezávislé,  $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$  rozdelené, tak  $\bar{\mathbf{U}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{U}_i$  a  $n\mathbf{S} = \sum_{i=1}^n \mathbf{U}_i \mathbf{U}_i' - n\bar{\mathbf{U}}\bar{\mathbf{U}}'$  sú nezávislé, pričom  $\bar{\mathbf{U}} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \frac{1}{n}\boldsymbol{\Sigma})$  a  $n\mathbf{S} \sim W_p(n-1, \boldsymbol{\Sigma})$ .

*Dôkaz.* Nech  $\mathbf{C}_{n,n}$  je ortogonálna matica taká, že jej  $n$ -ty stĺpec je  $(\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}})'$ . Označme

$$(\mathbf{U}_1 \dot{\vdots} \mathbf{U}_n)\mathbf{C} = (\mathbf{V}_1 \dot{\vdots} \mathbf{V}_n).$$

Potom  $\mathbf{V}_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{U}_1 + \dots + \mathbf{U}_n) = \sqrt{n}\bar{\mathbf{U}}$  resp.  $\bar{\mathbf{U}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{V}_n$ ,

$$\begin{aligned} n\mathbf{S} &= \sum_{i=1}^n \mathbf{U}_i \mathbf{U}_i' - n\bar{\mathbf{U}}\bar{\mathbf{U}}' = (\mathbf{U}_1 \dot{\vdots} \mathbf{U}_n) \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1' \\ \mathbf{U}_2' \\ \vdots \\ \mathbf{U}_n' \end{pmatrix} - n\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{V}_n\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{V}_n' = \\ &= (\mathbf{V}_1 \dot{\vdots} \mathbf{V}_n)\mathbf{C}'\mathbf{C} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1' \\ \mathbf{V}_2' \\ \vdots \\ \mathbf{V}_n' \end{pmatrix} - \mathbf{V}_n\mathbf{V}_n' = \sum_{i=1}^n \mathbf{V}_i\mathbf{V}_i' - \mathbf{V}_n\mathbf{V}_n' = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{V}_i\mathbf{V}_i'. \end{aligned}$$

Pretože  $\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_n$  sú nezávislé, dostávame tvrdenie lemy (pomocou vety 2.17).  $\square$

### 3. HOTELLINGOVO $T^2$ ROZDELENIE

Nech  $\mathbf{S}_{p,p}$  je matica náhodných veličín (náhodná matica)  $\mathbf{d}_{p,1}$  náhodný vektor nezávislý na  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{S} \sim W_p(k, \boldsymbol{\Sigma})$ ,  $\mathbf{d} \sim N_p(\boldsymbol{\delta}, c^{-1}\boldsymbol{\Sigma})$ . Hotellingova zovšeobecnená štatistika  $T^2$  je definovaná ako

$$T^2 = ck\mathbf{d}'\mathbf{S}^{-1}\mathbf{d} = \frac{k\mathbf{d}'\mathbf{S}^{-1}\mathbf{d}}{\mathbf{d}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{d}}c\mathbf{d}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{d}.$$

V nasledujúcom budeme uvažovať  $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{0}$ ,  $c = 1$ ,  $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{I}$ , teda  $\mathbf{S} \sim W_p(k, \mathbf{I})$ ,  $\mathbf{d} \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ . Hotellingovo  $T^2(p, k)$  rozdelenie je

$$T^2 = k\mathbf{d}'\mathbf{S}^{-1}\mathbf{d}$$

a píšeme  $k\mathbf{d}'\mathbf{S}^{-1}\mathbf{d} \sim T^2(p, k)$ .

**Veta 3.1.** *Nech  $\mathbf{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$  a  $\mathbf{S} \sim W_p(k, \boldsymbol{\Sigma})$  sú navzájom nezávislé,  $\boldsymbol{\Sigma}$  regulárna. Potom*

$$k(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})' \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) \sim T^2(p, k).$$

*Dôkaz.*  $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{U}'$ ,  $\mathbf{I} = \mathbf{U}\mathbf{U}'$ ,  $\boldsymbol{\Lambda} = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ ,  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p > 0$ ,  $\boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} = \mathbf{U}\text{diag}\{\lambda_1^{-\frac{1}{2}}, \dots, \lambda_p^{-\frac{1}{2}}\}\mathbf{U}'$ ,  $\boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}} = \mathbf{U}\text{diag}\{\lambda_1^{\frac{1}{2}}, \dots, \lambda_p^{\frac{1}{2}}\}\mathbf{U}'$ . Položíme  $\mathbf{d}^* = \boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})$ ,  $\mathbf{S}^* = \boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{S}\boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}$ , teda  $(\mathbf{S}^*)^{-1} = \boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}\mathbf{S}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}$ . Zrejme  $\mathbf{d}^* \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ ,  $\mathbf{S}^* \sim W_p(k, \mathbf{I})$  a preto podľa definície  $k(\mathbf{d}^*)'(\mathbf{S}^*)^{-1}\mathbf{d}^* = k(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})'\mathbf{S}^{-1}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) \sim T^2(p, k)$ .  $\square$

**Dôsledok 3.2.** *Majme  $\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_n$  nezávislé,  $\mathbf{U}_i \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ ,  $\boldsymbol{\Sigma}$  regulárna,  $\bar{\mathbf{U}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{U}_i$ ,  $\mathbf{S} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\mathbf{U}_i - \bar{\mathbf{U}})(\mathbf{U}_i - \bar{\mathbf{U}})'$ ,  $\mathbf{S}_* = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\mathbf{U}_i - \bar{\mathbf{U}})(\mathbf{U}_i - \bar{\mathbf{U}})'$ . Potom*

$$(n-1)(\bar{\mathbf{U}} - \boldsymbol{\mu})' \mathbf{S}_*^{-1} (\bar{\mathbf{U}} - \boldsymbol{\mu}) = n(\bar{\mathbf{U}} - \boldsymbol{\mu})' \mathbf{S}_*^{-1} (\bar{\mathbf{U}} - \boldsymbol{\mu}) \sim T^2(p, n-1).$$

*Dôkaz.*  $\bar{\mathbf{U}} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \frac{1}{n}\boldsymbol{\Sigma})$ , teda  $\sqrt{n}\bar{\mathbf{U}} \sim N_p(\sqrt{n}\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ ,  $\mathbf{S}_* = \frac{n}{n-1}\mathbf{S}$ , čiže  $(n-1)\mathbf{S}_*^{-1} = n\mathbf{S}_*^{-1}$ , ďalej  $n\mathbf{S} \sim W_p(n-1, \boldsymbol{\Sigma})$  (pozri vetu 2.17),  $\bar{\mathbf{U}}$  a  $\mathbf{S}$  sú nezávislé (veta 2.18), teda

$$\begin{aligned} (n-1)\sqrt{n}(\bar{\mathbf{U}} - \boldsymbol{\mu})'(n\mathbf{S})^{-1}\sqrt{n}(\bar{\mathbf{U}} - \boldsymbol{\mu}) &= (n-1)(\bar{\mathbf{U}} - \boldsymbol{\mu})'\mathbf{S}_*^{-1}(\bar{\mathbf{U}} - \boldsymbol{\mu}) = \\ &= n(\bar{\mathbf{U}} - \boldsymbol{\mu})'\mathbf{S}_*^{-1}(\bar{\mathbf{U}} - \boldsymbol{\mu}) \sim T^2(p, n-1). \quad \square \end{aligned}$$

**Veta 3.3.**

$$T^2(p, m) = \frac{mp}{m-p+1} F_{p, m-p+1}.$$

*Dôkaz.* Podľa definície má  $T^2(p, m)$  rozdelenie náhodná veličina  $m\mathbf{d}'\mathbf{S}^{-1}\mathbf{d}$ , kde  $\mathbf{d} \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ ,  $\mathbf{S} \sim W_p(m, \mathbf{I})$ . Teda náhodná veličina

$$(3.1) \quad \frac{m\mathbf{d}'\mathbf{S}^{-1}\mathbf{d}}{\mathbf{d}'\mathbf{d}} \mathbf{d}'\mathbf{d} = m \frac{\mathbf{d}'\mathbf{d}}{\frac{\mathbf{d}'\mathbf{d}}{\mathbf{d}'\mathbf{S}^{-1}\mathbf{d}}}.$$

Podľa vety 2.14 (b) menovateľ v (3.1) nezáleží od  $\mathbf{d}$  a má  $\chi_{m-p+1}^2$  rozdelenie (pre ľubovoľnú realizáciu náhodného vektora  $\mathbf{d}$  má  $\chi_{m-p+1}^2$  rozdelenie), čitateľ v (3.1) má podľa vety 1.7  $\chi_p^2$  rozdelenie. Preto (3.1) je podiel dvoch nezávislých náhodných veličín, s  $\chi^2$  rozdelením, a síce rozdelenie (3.1) je

$$T^2(p, m) = \frac{m\chi_p^2}{\chi_{m-p+1}^2} = \frac{mp \frac{\chi_p^2}{p}}{(m-p+1) \frac{\chi_{m-p+1}^2}{m-p+1}} = \frac{mp}{m-p+1} F_{p, m-p+1}. \quad \square$$

**Lema 3.4.** Súčin  $k$  navzájom nezávislých náhodných veličín s rozdelením  $B(\gamma_i, \delta_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  takých, že  $\gamma_i = \gamma_{i+1} + \delta_{i+1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, k-1$  má rozdelenie  $B(\gamma_k, \delta_1 + \dots + \delta_k)$ .

*Dôkaz.* Pozri viac v Rao, 3a.3.

**Lema 3.5.** Nech  $\mathbf{d} \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{I})$  a  $\mathbf{S} \sim W_p(m, \mathbf{I})$  sú nezávislé, teda  $m\mathbf{d}'\mathbf{S}^{-1}\mathbf{d} \sim T^2(p, m)$ ,  $m \geq p-1$ . Platí

$$\left(1 + \frac{T^2(p, m)}{m}\right)^{-1} = \frac{|\mathbf{S}|}{|\mathbf{S} + \mathbf{d}\mathbf{d}'|} \sim B\left(\frac{m-p+1}{2}, \frac{p}{2}\right).$$

*Dôkaz.* Podľa anděl, str. 63 pre determinant štvorcovej matice  $\begin{pmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{d} \\ \mathbf{d}' & -1 \end{pmatrix}$  platí

$$\begin{vmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{d} \\ \mathbf{d}' & -1 \end{vmatrix} = -|\mathbf{S} + \mathbf{d}\mathbf{d}'| = -|\mathbf{S}|(1 + \mathbf{d}'\mathbf{S}^{-1}\mathbf{d}),$$

teda

$$\left(1 + \frac{T^2(p, m)}{m}\right)^{-1} = (1 + \mathbf{d}'\mathbf{S}^{-1}\mathbf{d})^{-1} = \frac{|\mathbf{S}|}{|\mathbf{S} + \mathbf{d}\mathbf{d}'|},$$

pričom  $\mathbf{S} \sim W_p(m, \mathbf{I})$ ,  $\mathbf{d}\mathbf{d}' \sim W_p(1, \mathbf{I})$ , (nezávisí od  $\mathbf{S}$ ) a podľa lemy 2.10  $\mathbf{S} + \mathbf{d}\mathbf{d}' \sim W_p(m+1, \mathbf{I})$ . Preto podľa vety 2.16 má  $\frac{|\mathbf{S}|}{|\mathbf{S} + \mathbf{d}\mathbf{d}'|}$  rozdelenie ako súčin navzájom nezávislých náhodných veličín s rozdelením beta a parametrami

$$\left(\frac{m-p+1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{m-p+2}{2}, \frac{1}{2}\right), \dots, \left(\frac{m}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Podľa lemy 3.4 má tento súčin  $B\left(\frac{m-p+1}{2}, \frac{p}{2}\right)$  rozdelenie.  $\square$

**Dôsledok 3.6.** Nech  $\bar{\mathbf{X}}$  a  $\mathbf{S}$  je aritmetický priemer a výberová kovariančná matica z výberu rozsahu  $n$  z rozdelenia  $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ . Potom

$$\frac{n-p}{p}(\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu})'\mathbf{S}^{-1}(\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}) \sim F_{p, n-p}.$$

*Dôkaz.* Podľa dôsledku 3.2 má  $(n-1)(\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu})'\mathbf{S}^{-1}(\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}) \sim T^2(p, n-1)$  rozdelenie, čiže podľa vety 3.3 má

$$\begin{aligned} \frac{n-p}{p}(\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu})'\mathbf{S}^{-1}(\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}) &\sim \frac{n-p}{p(n-1)}T^2(p, n-1) = \\ &= \frac{n-p}{p(n-1)} \frac{p(n-1)}{n-1-p+1} F_{p, n-1-p+1} = F_{p, n-p} \end{aligned}$$

rozdelenie.  $\square$

4. INÉ ROZDELENIA VYSKYTUJÚCE SA PRI  
MULTIVARIÁTNÝCH ŠTATISTICKÝCH ANALÝZACH

**Definícia 4.1.** *Nech  $\mathbf{A} \sim W_p(m, \mathbf{I})$ ,  $\mathbf{B} \sim W_p(n, \mathbf{I})$  sú nezávislé,  $m \geq p-1$ . Potom hovoríme, že náhodná veličina*

$$\Lambda = \frac{|\mathbf{A}|}{|\mathbf{A} + \mathbf{B}|} = |\mathbf{I} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}|^{-1}$$

má Wilksovo lambda-rozdelenie s parametrami  $p, m, n$ . Označujeme ho  $\Lambda(p, m, n)$

**Veta 4.2.** *Wilksovo  $\Lambda(p, m, n)$  rozdelenie,  $m \geq p-1$ , je totožné s rozdelením súčinnu  $\eta_1 \dots \eta_p$  nezávislých náhodných veličín, pričom  $\eta_i \sim B\left(\frac{m-p+i}{2}, \frac{n}{2}\right)$ .*

*Dôkaz.* ak  $\mathbf{A} \sim W_p(m, \mathbf{I})$ ,  $\mathbf{B} \sim W_p(n, \mathbf{I})$  sú nezávislé, tak podľa vety 2.16 má

$$\Lambda = \frac{|\mathbf{A}|}{|\mathbf{A} + \mathbf{B}|} = |\mathbf{I} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}|^{-1}$$

rovnaké rozdelenie ako súčin  $\eta_1 \dots \eta_p$  nezávislých náhodných veličín, pričom  $\eta_i \sim B\left(\frac{m-p+i}{2}, \frac{n}{2}\right)$ .  $\square$

*Poznámka.* ak  $\mathbf{S}_1 \sim W_p(k_1, \mathbf{I})$ ,  $\mathbf{S}_2 \sim W_p(k_2, \mathbf{I})$  sú nezávislé,  $k_1 \geq p-1$ , tak

$$\Lambda = \frac{|\mathbf{S}_1|}{|\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2|}$$

má rozdelenie rovnaké ako súčin  $\eta_1 \dots \eta_p$  nezávislých náhodných veličín, pričom  $\eta_i \sim B\left(\frac{k_1-p+i}{2}, \frac{k_2}{2}\right)$ , čo je podľa vety 2.16 to isté ako rozdelenie

$$\frac{|\mathbf{G}_1|}{|\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2|},$$

kde  $\mathbf{G}_1 \sim W_p(k_1, \mathbf{\Sigma})$ ,  $\mathbf{G}_2 \sim W_p(k_2, \mathbf{\Sigma})$  sú nezávislé,  $\mathbf{\Sigma}$  je regulárna a  $k_1 \geq p-1$ . Teda  $\Lambda$  nezáleží od  $\mathbf{\Sigma}$  a môžeme ju zdefinovať ako

$$\Lambda = \frac{|\mathbf{G}_1|}{|\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2|},$$

kde  $\mathbf{G}_1 \sim W_p(k_1, \mathbf{\Sigma})$ ,  $\mathbf{G}_2 \sim W_p(k_2, \mathbf{\Sigma})$  sú nezávislé,  $\mathbf{\Sigma}$  je regulárna a  $k_1 \geq p-1$ .

*Poznámka.* ak  $\mathbf{S} \sim W_p(n-1, \mathbf{\Sigma})$ ,  $\mathbf{d} \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$  sú nezávislé, tak Wilksovo lambda-rozdelenie s parametrami  $p, n-1, 1$  je to isté ako rozdelenie náhodnej veličiny  $\frac{|\mathbf{S}|}{|\mathbf{S} + \mathbf{d}\mathbf{d}'|}$ , teda (podľa lemy 3.5)  $B\left(\frac{n-p}{2}, \frac{p}{2}\right)$ .

Zo vzťahov medzi beta rozdelením a  $F$  rozdelením možno odvodiť vzťahy medzi  $\Lambda$  a  $F$  rozdelením:

$$(a) \quad \frac{1 - \Lambda(p, m, 1)}{\Lambda(p, m, 1)} \sim \frac{p}{m - p + 1} F_{p, m-p+1}$$

$$\begin{aligned}
\text{(b)} \quad & \frac{1 - \Lambda(1, m, n)}{\Lambda(1, m, n)} \sim \frac{n}{m} F_{n, m} \\
\text{(c)} \quad & \frac{1 - \sqrt{\Lambda(p, m, 2)}}{\sqrt{\Lambda(p, m, 2)}} \sim \frac{p}{m - p + 1} F_{2p, 2(m-p+1)} \\
\text{(d)} \quad & \frac{1 - \sqrt{\Lambda(2, m, n)}}{\sqrt{\Lambda(2, m, n)}} \sim \frac{n}{m - 1} F_{2n, 2(m-1)}.
\end{aligned}$$

Pre ostatné hodnoty  $n$  a  $p$  za podmienky, že  $m$  je veľké, možno použiť Bartlettovu asymptotickú aproximáciu

$$- \left\{ m - \frac{1}{2}(p - n + 1) \right\} \ln \Lambda(p, m, n) \sim \chi_{np}^2.$$

Pri hľadaní simultánnych intervalov spoľahlivosti parametrov multivariátnych lineárnych modelov sa používa nasledovné rozdelenie.

**Definícia 4.3.** *Nech  $\mathbf{A} \sim W_p(m, \Sigma)$ ,  $\mathbf{B} \sim W_p(n, \Sigma)$  sú nezávislé,  $m > p - 1$ ,  $\Sigma$  je pozitívne definitná. Rozdelenie najväčšej vlastnej hodnoty  $\theta$  matice  $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}$  označujeme  $\theta(p, m, n)$ .*

Podľa Rao, str. 588 toto rozdelenie nezávisí od  $\Sigma$ . Poznamenávame tiež, že  $\theta$  môžeme definovať ako najväčší koreň rovnice

$$|\mathbf{B} - \theta(\mathbf{A} + \mathbf{B})| = 0.$$

ak  $\lambda$  je vlastná hodnota  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ , tak  $\frac{\lambda}{1 + \lambda}$  je vlastná hodnota  $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}$ . Keďže ide o monotónnu funkciu premennej  $\lambda$ ,  $\theta$  je dané vzťahom

$$\theta = \frac{\lambda_1}{1 + \lambda_1},$$

kde  $\lambda_1$  značí najväčšiu vlastnú hodnotu matice  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ . Pretože  $\lambda_1 > 0$ , platí  $0 < \theta < 1$ . Vzťahy medzi rozdeleniami  $\theta$ ,  $\Lambda$  a  $F$  sú:

$$\begin{aligned}
\text{(a)} \quad & \theta(p, m, n) \quad \text{a} \quad \theta(n, m + n - p, p) \quad \text{majú rovnaké rozdelenie,} \\
\text{(b)} \quad & \frac{\theta(1, m, n)}{1 - \theta(1, m, n)} = \frac{1 - \Lambda(1, m, n)}{\Lambda(1, m, n)} \sim \frac{n}{m} F_{n, m}, \\
\text{(c)} \quad & \frac{\theta(p, m, 1)}{1 - \theta(p, m, 1)} = \frac{1 - \Lambda(p, m, 1)}{\Lambda(p, m, 1)} \sim \frac{p}{m - p + 1} F_{p, m-p+1}.
\end{aligned}$$

## 5. METÓDA MAXIMÁLNEJ VIEROHODNOSTI A TEST POMEROM VIEROHODNOSTI

Združenú funkciu hustoty rozdelenia náhodného výberu  $\mathbf{X}_{np,1} = (\mathbf{X}'_1, \dots, \mathbf{X}'_n)'$  uvažovanú pri danom  $\mathbf{x}$  (realizácia  $\mathbf{X} \in \mathcal{R}^p$ ) ako funkciu vektorového parametra  $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{R}^q$  nazývame funkciou vierohodnosti

$$L(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^n f(\mathbf{x}_i; \boldsymbol{\theta}),$$

resp. jej logaritmus, teda

$$l(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) = l(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n, \boldsymbol{\theta}) = \ln L(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n \ln f(\mathbf{x}_i; \boldsymbol{\theta}).$$

Vierohodnostnými rovnicami rozumieme systém

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \ln f(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, q.$$

Majme náhodný výber  $\mathbf{X} = (\mathbf{X}'_1, \mathbf{X}'_2, \dots, \mathbf{X}'_n)'$ , kde  $\mathbf{X}_i \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ ,  $\boldsymbol{\Sigma}$  je regulárna. Potom

$$L(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = |2\pi\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu})},$$

čiže

$$l(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \ln L(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = -\frac{n}{2} \ln |2\pi\boldsymbol{\Sigma}| - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}).$$

Platí

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}) &= (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}) = \\ &= (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}) + (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}) + \\ &\quad + 2(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}), \end{aligned}$$

čiže

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}) &= \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}) + n(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}) + \\ + 2 \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}) &= \text{tr} \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}) + n(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}) = \\ &= \text{tr} \left[ \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})' \right\} \right] + n(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}) = \\ &= n \text{tr} \left\{ \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{S}^{(real)} \right\} + n(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}), \end{aligned}$$

lebo

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^{(real)} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})' \quad \text{a} \quad 2 \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}) = \\ &= 2 \left\{ n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}) - n \bar{\mathbf{x}}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}) \right\} = 0. \end{aligned}$$

Dostávame

$$l(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = -\frac{n}{2} \ln |2\pi\boldsymbol{\Sigma}| - \frac{n}{2} \text{tr} \left\{ \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{S}^{(real)} \right\} - \frac{n}{2} \text{tr} \left\{ \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})' \right\}.$$

ak  $n \geq p + 1$ , tak odhady metódou maximálnej vierohodnosti sú

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \bar{\mathbf{X}}, \quad \hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \mathbf{S}$$

(pozri Rao, str. 575,576).

**Definícia 5.1.**  $\mathbf{X} = (\mathbf{X}'_1, \mathbf{X}'_2, \dots, \mathbf{X}'_n)'$  je náhodný výber z rozdelenia závislého od parametra  $\boldsymbol{\theta}$ . Testujeme  $H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Omega_0 \not\asymp H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Omega_1 - \Omega_0$  ( $\Omega_1$  je oblasť v  $\mathcal{R}^q$ ,  $\Omega_0$  je podoblasť v  $\Omega_1$  hodnosti  $s$ ). Test pomerom vierohodnosti hypotézy  $H_0$  oproti  $H_1$  má testovaciu štatistiku (LR-štatistiku t.j. likelihood ratio štatistiku, presnejšie jej realizáciu)

$$\lambda(\mathbf{x}) = \frac{L_0}{L} = \frac{\max_{\boldsymbol{\theta} \in \Omega_0} L(\boldsymbol{\theta})}{\max_{\boldsymbol{\theta} \in \Omega_1} L(\boldsymbol{\theta})}.$$

Jeho kritická oblasť na hladine významnosti  $\alpha$  je  $R = \{\mathbf{x} : \lambda(\mathbf{x}) < c\}$ , kde  $c$  je určené tak, aby  $\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Omega_0} P\{\mathbf{x} \in R\} = \alpha$ .

**Veta 5.2.** Nech  $\lambda$  je testovacia štatistika pre test pomerom vierohodnosti  $H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Omega_0 \not\asymp H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Omega_1 - \Omega_0$  ( $\Omega_1$  je oblasť v  $\mathcal{R}^q$ ). Za určitých podmienok regulárnosti pre každý  $\boldsymbol{\theta} \in \Omega_0$  má  $-2 \ln \lambda$  asymptoticky (pre  $n \rightarrow \infty$ ) rozdelenie  $\chi^2_{q-s}$ , keď  $\Omega_0$  je podoblasť  $\Omega_1$  hodnosti  $s$ , ( $q > s$ ), ( $q - s$  možno chápať ako počet reštrikcií na parametre  $\theta_1, \dots, \theta_q$ ).

Ilustrácia:

(a) Nech  $\mathbf{X} = (\mathbf{X}'_1, \mathbf{X}'_2, \dots, \mathbf{X}'_n)'$  je náhodný výber z  $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ ,  $\boldsymbol{\Sigma}$  je známa pozitívne definitná matica.

$$H_0 : \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0 \not\asymp H_1 : \boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\mu}_0.$$

Potom

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) &= |2\pi\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu})} = \\ &= |2\pi\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{n}{2}} e^{\frac{n}{2} \text{tr} \{ \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{S}^{(real)} \}} e^{-\frac{n}{2} (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})}. \end{aligned}$$

ak platí  $H_0$ , tak  $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$  a

$$\begin{aligned} \max_{\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0} L(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) &= L(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma}) = \\ &= |2\pi\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2} \text{tr} [\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{S}^{(real)}]} e^{-\frac{n}{2} (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_0)} \end{aligned}$$

(je to jediné číslo). ak  $\boldsymbol{\mu}$  "nie je ohraničená",  $q = p$ , teda  $\max_{\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{R}^p} L(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$  sa dosahuje pre  $\boldsymbol{\mu} = \hat{\boldsymbol{\mu}} = \bar{\mathbf{x}}$  a preto

$$\begin{aligned} \max_{\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{R}^p} L(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) &= L(\mathbf{x}; \hat{\boldsymbol{\mu}}^{(real)}, \boldsymbol{\Sigma}) = \\ &= |2\pi\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2} \text{tr} [\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{S}^{(real)}]} e^{-\frac{n}{2} (\bar{\mathbf{x}} - \hat{\boldsymbol{\mu}}^{(real)})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \hat{\boldsymbol{\mu}}^{(real)})} = \\ &= |2\pi\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2} \text{tr} [\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{S}^{(real)}]}. \end{aligned}$$

Preto testovacia štatistika (vlastne jej realizácia) je

$$\begin{aligned} -2 \ln \lambda(\mathbf{x}) &= -2 \ln \frac{|2\pi\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2} \text{tr} [\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{S}^{(real)}]} e^{-\frac{n}{2} (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_0)}}{|2\pi\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2} \text{tr} [\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{S}^{(real)}]}} = \\ &= n(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_0). \end{aligned}$$



Je to realizácia štatistiky  $n(\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)$ , ktorá má za platnosti  $H_0$  podľa vety 1.8  $\chi_p^2$  rozdelenie. (Poznamenávame len, že  $h(\Omega_0) = s = 0$ , teda aj podľa tvrdenia vety 5.2 sedí pre asymptotiku, že  $q - s = p - 0 = p$ .)

(b) (Hotellingov jednovýberový  $T^2$ -test.) Majme náhodný výber  $\mathbf{X} = (\mathbf{X}'_1, \mathbf{X}'_2, \dots, \mathbf{X}'_n)'$  z  $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ ,  $\boldsymbol{\Sigma}$  je neznáma pozitívne definitná matica.

$$H_0 : \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\mu}_0.$$

$\boldsymbol{\Sigma}$  sa musí odhadnúť vzhľadom na  $H_0$  ako aj "bez ohraničenia". Dá sa ukázať, že odhady získané metódou maximálnej vierohodnosti (ich realizácie) sú

$$\text{za platnosti } H_0 : \hat{\boldsymbol{\mu}}^{(real)} = \boldsymbol{\mu}_0, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{(real)} = \mathbf{S}^{(real)} + \mathbf{d}\mathbf{d}', \text{ kde } \mathbf{d} = \bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_0,$$

$$\text{"bez ohraničenia": } \hat{\boldsymbol{\mu}}^{(real)} = \bar{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{(real)} = \mathbf{S}^{(real)}.$$

Dostávame, že za platnosti  $H_0$

$$\begin{aligned} \max_{\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}_0} L(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) &= L(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}_0, \mathbf{S}^{(real)} + \mathbf{d}\mathbf{d}') = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{np}{2}} |\mathbf{S}^{(real)} + \mathbf{d}\mathbf{d}'|^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{n}{2} \{tr(\mathbf{S}^{(real)} + \mathbf{d}\mathbf{d}')^{-1} \mathbf{S}^{(real)} + \mathbf{d}'(\mathbf{S}^{(real)} + \mathbf{d}\mathbf{d}')^{-1} \mathbf{d}\}} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{np}{2}} |\mathbf{S}^{(real)} + \mathbf{d}\mathbf{d}'|^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{n}{2} tr(\mathbf{S}^{(real)} + \mathbf{d}\mathbf{d}')^{-1} (\mathbf{S}^{(real)} + \mathbf{d}\mathbf{d}')} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{np}{2}} |\mathbf{S}^{(real)} + \mathbf{d}\mathbf{d}'|^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{np}{2}}. \end{aligned}$$

ďalej

$$\begin{aligned} \max_{\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{R}^p} L(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) &= L(\mathbf{x}; \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{S}^{(real)}) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{np}{2}} |\mathbf{S}^{(real)}|^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{n}{2} tr(\mathbf{S}^{(real)})^{-1} \mathbf{S}^{(real)} - (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}})' (\mathbf{S}^{(real)})^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}})} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{np}{2}} |\mathbf{S}^{(real)}|^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{np}{2}}, \end{aligned}$$

teda testovacia štatistika (LR - štatistika) je

$$\begin{aligned} -2 \ln \lambda(\mathbf{X}) &= -2 \ln \left( \frac{|\mathbf{S}|}{|\mathbf{S} + (\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)(\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)'|} \right)^{\frac{n}{2}} = \\ (5.1) \quad &= -n \ln \left( \frac{|\mathbf{S}|}{|\mathbf{S} + (\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)(\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)'|} \right). \end{aligned}$$

Za platnosti  $H_0$  je  $\sqrt{n}(\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0) \sim N_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$ ; podľa vety 2.18  $n\mathbf{S} \sim W_p(n-1, \boldsymbol{\Sigma})$ , pričom  $\sqrt{n}(\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)$  a  $n\mathbf{S}$  sú nezávislé. Preto podľa poznámky za vetou 4.2

$$\frac{|n\mathbf{S}|}{|n\mathbf{S} + n(\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)(\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)'|} = \frac{|\mathbf{S}|}{|\mathbf{S} + (\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)(\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)'|}$$

má  $\Lambda(p, n-1, 1)$  rozdelenie. Podľa lemy 3.5 je to totožné s rozdelením  $(1 + \frac{T^2(p, n-1)}{n-1})^{-1}$ , čo je rozdelenie náhodnej veličiny  $(1 + (\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)' \mathbf{S}^{-1} (\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0))^{-1}$  (pozri dôkaz lemy 3.5) a podľa poznámky za vetou 4.2 to je  $B\left(\frac{n-p}{2}, \frac{p}{2}\right)$  rozdelenie.

asymptoticky má teda podľa vety 5.2

$$-2 \ln \lambda(\mathbf{X}) = -n \ln \left( \frac{|\mathbf{S}|}{|\mathbf{S} + (\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)(\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)'|} \right) = n \ln(1 + (\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)' \mathbf{S}^{-1} (\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0))$$

$\chi_p^2$  rozdelenie.

ak chceme použiť neasymptotický test, tak za platnosti  $H_0$  má náhodná veličina

$$(1 + (\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)' \mathbf{S}^{-1} (\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0))^{-1}$$

$B\left(\frac{n-p}{2}, \frac{p}{2}\right)$  rozdelenie, alebo podľa dôsledku 3.6 má za platnosti  $H_0$  štatistika

$$\frac{n-p}{p} (\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)' \mathbf{S}^{-1} (\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)$$

$F_{p, n-p}$  rozdelenie.

(c) Hypotézu

$$H_0 : \boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \boldsymbol{\Sigma} \neq \boldsymbol{\Sigma}_0$$

( $\boldsymbol{\mu}$  nepoznáme), pričom máme výber z  $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$  rozdelenia o rozsahu  $n$  testujeme tak, že získame odhady metódou maximálnej vierohodnosti.

Za platnosti  $H_0$  :  $\hat{\boldsymbol{\mu}}^{(real)} = \bar{\mathbf{x}}$ ,  $\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \boldsymbol{\Sigma}_0$ ,

“bez ohraničenia“ :  $\hat{\boldsymbol{\mu}}^{(real)} = \bar{\mathbf{x}}$ ,  $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{(real)} = \mathbf{S}^{(real)}$ .

Preto za platnosti  $H_0$  je

$$\max_{\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}_0} l(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = l(\mathbf{x}; \bar{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\Sigma}_0) = -\frac{np}{2} \ln 2\pi - \frac{n}{2} \ln |\boldsymbol{\Sigma}_0| - \frac{n}{2} \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \mathbf{S}^{(real)})$$

a “bez ohraničenia“ je

$$\max_{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}} l(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = l(\mathbf{x}; \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{S}^{(real)}) = -\frac{np}{2} \ln 2\pi - \frac{n}{2} \ln |\mathbf{S}^{(real)}| - \frac{np}{2}.$$

Teda testovacia LR - štatistika je

$$-2 \ln \lambda(\mathbf{X}) = n \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \mathbf{S}) - n \ln |\mathbf{S} \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}| - np.$$

Táto náhodná veličina má zložité rozdelenie, ale asymptoticky má  $\chi_m^2$  rozdelenie, kde  $m = \frac{1}{2}p(p+1)$ .

(d) Hypotézu

$$H_0 : \boldsymbol{\Sigma}_{12} = \mathbf{0}$$

( $\boldsymbol{\mu}$  nepoznáme), pričom máme výber z  $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$  rozdelenia o rozsahu  $n$  testujeme tak, že normálne rozdelený náhodný vektor rozdelíme na podvektory s  $p_1$  a  $p_2$

zložkami,  $p_1 + p_2 = p$ . Predpokladajme rovnaké delenie kovariančnej matice  $\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}$ . Dá sa ukázať, že odhady metódou maximálnej vierohodnosti za

platnosti  $H_0$  sú:  $\hat{\boldsymbol{\mu}} = \bar{\mathbf{X}}$ ,  $\hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_{22} \end{pmatrix}$  ( $\mathbf{S}_{11}$  a  $\mathbf{S}_{22}$  sú príslušné submatice matice  $\mathbf{S}$ ). Test pomerom vierohodnosti má testovaciu štatistiku

$$\begin{aligned} -2 \ln \lambda(\mathbf{X}) &= 2 \left\{ -\frac{np}{2} \ln 2\pi - \frac{n}{2} \ln |\mathbf{S}| - \frac{n}{2} \text{tr}(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{S}) + \frac{np}{2} \ln 2\pi + \right. \\ &+ \frac{n}{2} \ln |\mathbf{S}_{11}||\mathbf{S}_{22}| + \frac{n}{2} \text{tr} \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_{22}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} \end{pmatrix} \left. \right\} = n \ln \frac{|\mathbf{S}_{11}||\mathbf{S}_{22}|}{|\mathbf{S}|} = \\ &= -n \ln \frac{|\mathbf{S}|}{|\mathbf{S}_{11}||\mathbf{S}_{22}|} = -n \ln \frac{|\mathbf{S}_{11}||\mathbf{S}_{22} - \mathbf{S}_{21}\mathbf{S}_{11}^{-1}\mathbf{S}_{12}|}{|\mathbf{S}_{11}||\mathbf{S}_{22}|} = -n \ln |\mathbf{I} - \mathbf{S}_{22}^{-1}\mathbf{S}_{21}\mathbf{S}_{11}^{-1}\mathbf{S}_{12}|. \end{aligned}$$

Tato štatistika má asymptoticky  $\chi^2$  rozdelenie s  $p_1 p_2$  stupňami voľnosti ( $p_1 p_2 = q$ ,  $s = 0$ ).

(e) Hypotéza

$$H_0 : \Sigma = \text{diag} \quad (\text{špeciálny prípad (c)})$$

( $\boldsymbol{\mu}$  nepoznáme), pričom máme výber z  $N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$  rozdelenia o rozsahu  $n$  je tá istá ako hypotéza

$$H_0 : \mathbf{R} = \mathbf{I}$$

( $\mathbf{R}$  je korelačná matica). Tvrdí, že zložky vektora  $\mathbf{X}$  sú nezávislé. Test pomerom vierohodnosti má testovaciu štatistiku (jej realizáciu)

$$-2 \ln \lambda = -n \ln |\mathbf{R}_{\mathbf{X}, \mathbf{X}}|$$

( $\mathbf{R}_{\mathbf{X}, \mathbf{X}}$  je výberová korelačná matica). Táto štatistika má asymptoticky  $\chi^2$  rozdelenie s  $\frac{1}{2}p(p-1)$  stupňami voľnosti ( $q = \frac{p(p+1)}{2} + p$ ,  $s = 2p$ ).

## 6. LINEÁRNY MODEL A METÓDA NAJMENŠÍCH ŠTVORCOV

### 6.1. ÚVOD

Majme lineárny regresný model (LRM)

$$(6.1) \quad \mathbf{Y}_{n,1} = \mathbf{X}_{n,p}\boldsymbol{\beta}_{p,1} + \boldsymbol{\varepsilon}_{n,1},$$

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0}, \quad \text{cov}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2 \mathbf{I}.$$

**Veta 6.1.**  $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})$  nadobúda minimum (vzhľadom na  $\boldsymbol{\beta}$ ) pre  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ , ktoré je (ľubovoľným) riešením normálnych rovníc

$$(6.2) \quad \mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{X}'\mathbf{Y}.$$

Toto minimum je rovnaké pre všetky riešenia rovníc (6.2).

*Dôkaz.*  $\mu(\mathbf{X}') = \mu(\mathbf{X}'\mathbf{X}) \implies \mathbf{X}'\mathbf{Y} \in \mu(\mathbf{X}'\mathbf{X}) \implies (6.2)$  sú vždy riešiteľné. Ich ľubovoľné riešenie označme  $\hat{\beta}$ . Platí

$$\begin{aligned} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta)'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta) &= (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\beta} + \mathbf{X}\hat{\beta} - \mathbf{X}\beta)'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\beta} + \mathbf{X}\hat{\beta} - \mathbf{X}\beta) = \\ &= (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\beta})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\beta}) + (\hat{\beta} - \beta)' \mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\beta} - \beta) \geq (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\beta})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\beta}). \end{aligned}$$

Teraz už dôkaz ľahko dokončíme.  $\square$

Označme ešte

$$\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{X}\hat{\beta}$$

a

$$R_0^2 = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\beta})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\beta}) = \mathbf{Y}'(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\mathbf{Y}.$$

## 6.2. MATICA PLÁNU $\mathbf{X}$ MÁ PLNÚ HODNOSŤ

Nech  $h(\mathbf{X}_{n,p}) = p \leq n$ .

**Veta 6.2.** *Majme LRM (6.1), pričom  $h(\mathbf{X}) = p$ . Platí*

- (a)  $\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$ ,  $\mathcal{E}(\hat{\beta}) = \beta$   
 (b)  $\text{cov}\hat{\beta} = \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ .

*Dôkaz.* Pozri anďel.

**Veta 6.3.** *Pre ľubovoľné  $\mathbf{p} \in \mathcal{R}^p$  má odhad  $\widehat{\mathbf{p}'\beta} = \mathbf{p}'\hat{\beta}$  minimálnu disperziu zo všetkých lineárnych nevychýlených odhadov funkcie  $\mathbf{p}'\beta$ .*

*Dôkaz.* Pozri anďel.

**Veta 6.4.**

$$\mathcal{E}\left(\frac{R_0^2}{n-p}\right) = \sigma^2.$$

*Dôkaz.*

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\left(\frac{R_0^2}{n-p}\right) &= \frac{1}{n-p} \mathcal{E}(\mathbf{Y}'(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\mathbf{Y}) = \\ &= \frac{1}{n-p} \{[\beta'\mathbf{X}'(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\mathbf{X}\beta + \text{tr}[(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\sigma^2\mathbf{I}]\} = \sigma^2. \quad \square \end{aligned}$$

**Veta 6.5.** *V LRM (6.1) nech  $\mathbf{Y} \sim N_n(\mathbf{X}\beta, \sigma^2\mathbf{I})$ ,  $h(\mathbf{X}) = p \leq n$  Platí*

- (a)  $\hat{\beta} \sim N_n(\beta, \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1})$ ,  
 (b)  $\frac{R_0^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-p}^2$ ,  
 (c)  $\hat{\beta}$  a  $R_0^2$  sú nezávislé,  
 (d)  $(\hat{\beta} - \beta)' \mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\beta} - \beta) \sim \sigma^2 \chi_p^2$  a nezávisí od  $R_0^2$ .

*Dôkaz.*

(a) zřejmé;

(b)  $\frac{R_0^2}{\sigma^2} = \mathbf{Y}' \frac{\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'}{\sigma^2} \mathbf{Y} = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta)' \frac{\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'}{\sigma^2} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta)$  má  $\chi_{h(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')}^2$  rozdelenie podľa vety 1.8;

(c)  $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$  a  $\mathbf{Y}'\frac{\mathbf{I}-\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'}{\sigma^2}\mathbf{Y}$  sú nezávislé, lebo  $\frac{\mathbf{I}-\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'}{\sigma^2}$  je pozitívne semidefinitná matica a  $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\sigma^2\mathbf{I}\frac{\mathbf{I}-\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'}{\sigma^2}=\mathbf{0}$ , teda podľa anděl, str. 81 (alebo podľa vety 1.10) sú  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  a  $R_0^2$  nezávislé;

(d)  $(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})'\frac{\mathbf{X}'\mathbf{X}}{\sigma^2}(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})=(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'\frac{\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'}{\sigma^2}(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})$  má podľa vety 1.8  $\chi_p^2$  rozdelenie;  $R_0^2=(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})'(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})=(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{I}-\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})$  a podľa vety 1.9 sú  $(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})$  a  $R_0^2$  nezávislé.  $\square$

*Poznámka.* Hypotézu

$$H_0: \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_0 \quad \text{vs} \quad H_1: \boldsymbol{\beta} \neq \boldsymbol{\beta}_0$$

testujeme štatistikou

$$\frac{(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta}_0)'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta}_0)}{R_0^2} \frac{n-p}{p},$$

ktorá má za platnosti  $H_0$  rozdelenie  $F_{p,n-p}$ .

Zadefinujeme

$$R_H^2 = \min_{\boldsymbol{\beta}: \mathbf{A}\boldsymbol{\beta}=\mathbf{c}} (\mathbf{Y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}).$$

**Veta 6.6.** *Nech  $\mathbf{A}_{q,p}$  má hodnotu  $h(\mathbf{A})=q$ ,  $\mathbf{c} \in \mathcal{R}^q$ . Platí (za predpokladu normality rozdelenia  $\mathbf{Y}$ )*

- (a)  $R_H^2 - R_0^2 = (\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c})'(\mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}')^{-1}(\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c})$ ,
- (b)  $\mathcal{E}(R_H^2 - R_0^2) = \sigma^2 q + (\mathbf{A}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{c})'(\mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}')^{-1}(\mathbf{A}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{c})$ ,
- (c) ak platí  $\mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{c}$ , tak  $F = \frac{n-p}{q} \frac{R_H^2 - R_0^2}{R_0^2}$  má  $F_{q,n-p}$  rozdelenie.

*Dôkaz.* Platí

$$(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) = (\mathbf{Y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})'(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) + (\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})$$

(pozri aj v dôkaze vety 6.1).

$$\begin{aligned} R_H^2 &= \min_{\boldsymbol{\beta}: \mathbf{A}\boldsymbol{\beta}=\mathbf{c}} (\mathbf{Y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) = \\ &= \min_{\boldsymbol{\beta}: \mathbf{A}\boldsymbol{\beta}=\mathbf{c}} \left[ (\mathbf{Y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})'(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) + (\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta}) \right] = \\ &= (\mathbf{Y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})'(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) + \min_{\boldsymbol{\beta}: \mathbf{A}\boldsymbol{\beta}=\mathbf{c}} (\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta}). \end{aligned}$$

Hľadáme teda

$$\min_{\boldsymbol{\beta}: \mathbf{A}\boldsymbol{\beta}=\mathbf{c}} (\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta}),$$

čiže

$$\min_{\boldsymbol{\beta}: \mathbf{A}\boldsymbol{\beta}=\mathbf{c}} \left[ \hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} - 2\hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \right].$$

Metódou neurčitých Lagrangeových multiplikátorov dostávame

$$\Phi(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\lambda}) = \hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} - 2\hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + 2\boldsymbol{\lambda}'(\mathbf{A}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{c})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \beta} = -2\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\beta} + 2\mathbf{X}'\mathbf{X}\beta + 2\mathbf{A}'\lambda = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = 2(\mathbf{A}\beta - \mathbf{c}) = \mathbf{0}$$

(lebo  $\frac{\partial \mathbf{m}'\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{m}$ ,  $\frac{\partial \mathbf{x}'\mathbf{M}\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{M}\mathbf{x}$ , pozri Rao, str.98).

Dostávame rovnice

$$\mathbf{X}'\mathbf{X}\beta + \mathbf{A}'\lambda = \mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\beta}$$

$$\mathbf{A}\beta = \mathbf{c},$$

ktorých riešenie  $\hat{\beta}_H$  nás zaujíma. Platí postupne

$$\hat{\beta}_H = -(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}'\lambda + \hat{\beta}$$

$$\mathbf{A}\hat{\beta} - \mathbf{c} = \mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}'\lambda$$

$$(\mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}')^{-1}(\mathbf{A}\hat{\beta} - \mathbf{c}) = \lambda,$$

teda

$$\hat{\beta}_H = \hat{\beta} - (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}'(\mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}')^{-1}(\mathbf{A}\hat{\beta} - \mathbf{c}).$$

Preto

$$R_H^2 - R_0^2 = \min_{\beta: \mathbf{A}\beta = \mathbf{c}} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta)'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta) - (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\beta})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\beta}) =$$

$$\min_{\beta: \mathbf{A}\beta = \mathbf{c}} (\hat{\beta} - \beta)' \mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\beta} - \beta) = (\hat{\beta} - \hat{\beta}_H)' \mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\beta} - \hat{\beta}_H) =$$

$$= (\mathbf{A}\hat{\beta} - \mathbf{c})'(\mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}')^{-1}(\mathbf{A}\hat{\beta} - \mathbf{c}).$$

(b) Zrejme  $\mathbf{A}\hat{\beta} - \mathbf{c} \sim N_q(\mathbf{A}\beta - \mathbf{c}, \sigma^2\mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}')$ . Preto

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(R_H^2 - R_0^2) &= (\mathbf{A}\beta - \mathbf{c})'(\mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}')^{-1}(\mathbf{A}\beta - \mathbf{c}) + \\ &\quad + \text{tr}[(\mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}')^{-1}\sigma^2\mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}'] = \end{aligned}$$

$$= \sigma^2 q + (\mathbf{A}\beta - \mathbf{c})'(\mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}')^{-1}(\mathbf{A}\beta - \mathbf{c}).$$

(c) ak platí  $H$ :  $\mathbf{A}\beta = \mathbf{c}$ , tak  $\mathbf{A}\hat{\beta} - \mathbf{c} \sim N_q(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}')$  a

$$(\mathbf{A}\hat{\beta} - \mathbf{c})' \frac{(\mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}')^{-1}}{\sigma^2} (\mathbf{A}\hat{\beta} - \mathbf{c}) =$$

$$= (\mathbf{A}\hat{\beta} - \mathbf{c})' \frac{(\mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}')^{-\frac{1}{2}} \mathbf{I} [(\mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}')^{-\frac{1}{2}}]' }{\sigma^2} (\mathbf{A}\hat{\beta} - \mathbf{c}) =$$

$$= \frac{R_H^2 - R_0^2}{\sigma^2} \sim \chi_q^2$$

(podľa vety 1.8). Vo vete 6.5 sme dokázali, že  $\frac{R_0^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-p}^2$ . ďalej máme

$$R_0^2 = \mathbf{Y}'(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\mathbf{Y}.$$

Pretože

$$\text{cov}((\mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}')^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c}), (\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\mathbf{Y}) = \mathbf{0},$$

sú  $R_H^2 - R_0^2$  a  $R_0^2$  nezávislé. Za platnosti  $H : \mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{c}$  má

$$(6.3) \quad F = \frac{\frac{R_H^2 - R_0^2}{\sigma^2 q}}{\frac{R_0^2}{\sigma^2(n-p)}} = \frac{n-p}{q} \frac{R_H^2 - R_0^2}{R_0^2}$$

$F_{q, n-p}$  rozdelenie.  $\square$

*Poznámka.* Hypotézu

$$H : \mathbf{A}_{q,p}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{c}_{q,1}$$

testujeme pomocou štatistiky (6.3).

*Príklad.* Testovanie hypotézy

$$H_0 : \mathbf{A}'_i\boldsymbol{\beta} = c_i \quad \not\asymp \quad H_1 : \mathbf{A}'_i\boldsymbol{\beta} \neq c_i.$$

Testovacia štatistika je

$$t_i = \frac{\mathbf{A}'_i\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{A}'_i\boldsymbol{\beta}}{s\sqrt{\mathbf{A}'_i(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}_i}} = \frac{\mathbf{A}'_i\hat{\boldsymbol{\beta}} - c_i}{s\sqrt{\mathbf{A}'_i(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}_i}} \sim t_{n-p},$$

kde  $s^2 = \frac{R_0^2}{n-p}$ . Vskutku  $R_0^2 \sim \sigma^2\chi_{n-p}^2$  (podľa vety 6.5 (b)). Za platnosti  $H_0$  je  $\mathbf{A}'_i\hat{\boldsymbol{\beta}} \sim N(\mathbf{A}'_i\boldsymbol{\beta} = c_i, \sigma^2\mathbf{A}'_i(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}_i)$  (pomocou vety 6.5 (a)),  $R_0^2$  a  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  su nezávislé (podľa vety 6.5 (c)), teda

$$\frac{\frac{\mathbf{A}'_i\hat{\boldsymbol{\beta}} - c_i}{\sigma\sqrt{\mathbf{A}'_i(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}_i}}}{\sqrt{\frac{R_0^2}{\sigma^2(n-p)}}} = \frac{\mathbf{A}'_i\hat{\boldsymbol{\beta}} - c_i}{s\sqrt{\mathbf{A}'_i(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}_i}} \sim t_{n-p}.$$

100(1 -  $\alpha$ )%–ný interval spoľahlivosti pre  $\mathbf{A}'_i\boldsymbol{\beta}$  je

$$\left( \mathbf{A}'_i\hat{\boldsymbol{\beta}} - t_{n-p}(1 - \frac{\alpha}{2})s\sqrt{\mathbf{A}'_i(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}_i}, \mathbf{A}'_i\hat{\boldsymbol{\beta}} + t_{n-p}(1 - \frac{\alpha}{2})s\sqrt{\mathbf{A}'_i(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}_i} \right).$$

ak chceme testovať, či súčasne platí

$$H_0 : \mathbf{A}'_i\boldsymbol{\beta} = c_i \quad i = 1, 2, \dots, k \quad \not\asymp \quad H_1 : \exists i \in \{1, 2, \dots, k\} \mathbf{A}'_i\boldsymbol{\beta} \neq c_i.$$

potom sú tu možnosti:

(a) Bonferroniho metóda je založená na tzv. Bonferroniho nerovnosti, ktorá tvrdí, že ak  $E_1, E_2, \dots, E_k$  sú náhodné udalosti, tak

$$P\left(\bigcap_{i=1}^k E_i\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^k P(E_i^C) = 1 - \sum_{i=1}^k (1 - P(E_i)).$$

Dôkaz tejto nerovnosti sa zakladá na rovnosti  $(\bigcap_{i=1}^r E_i)^C = \bigcup_{i=1}^r E_i^C$ , z ktorej vyplýva, že

$$P\left(\bigcap_{i=1}^k E_i\right) = 1 - P\left[\left(\bigcap_{i=1}^k E_i\right)^C\right] = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^k E_i^C\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^k (1 - P(E_i)),$$

čo vyplýva zo subaditívnosti pravdepodobnostnej miery  $P$ , a síce  $P\left(\bigcup_{i=1}^k E_i^C\right) \leq \sum_{i=1}^k P(E_i^C)$ . Pomocou Bonferroniho nerovnosti dostávame

$$P\left(\bigcap_{i=1}^k \left\{ \mathbf{A}'_i \boldsymbol{\beta} \in \left( \mathbf{A}'_i \hat{\boldsymbol{\beta}} \pm t_{n-p} \left(1 - \frac{\alpha}{2k}\right) s \sqrt{\mathbf{A}'_i (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{A}_i} \right) \right\}\right) \geq 1 - k \frac{\alpha}{k} = 1 - \alpha.$$

(b) Metóda maximálneho modulu.

Nech  $\mathbf{A}'_1 \hat{\boldsymbol{\beta}}, \dots, \mathbf{A}'_k \hat{\boldsymbol{\beta}}$  sú nezávislé, t.j.  $\mathbf{A}'_i (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{A}'_j = 0$  pre  $i \neq j$ ,

$t_i = \frac{\mathbf{A}'_i \hat{\boldsymbol{\beta}} - c_i}{s \sqrt{\mathbf{A}'_i (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{A}_i}} \sim t_{n-p}$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , nech ďalej  $v(k, n-p, \alpha)$  je  $\alpha$ -kritická hodnota rozdelenia  $\max_{1 \leq i \leq k} |t_i|$ , teda

$$1 - \alpha = P\left\{ \max_{1 \leq i \leq k} |t_i| \leq v(k, n-p, \alpha) \right\} = P\{|t_i| \leq v(k, n-p, \alpha) \quad \forall i\}.$$

Pravdepodobnosť, že  $k$  intervalov

$$\mathbf{A}'_i \hat{\boldsymbol{\beta}} \pm v(k, n-p, \alpha) s \sqrt{\mathbf{A}'_i (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{A}_i}, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

súčasne pokryje všetkých  $k$  lineárnych kombinácií  $\mathbf{A}'_i \boldsymbol{\beta}$  je  $1 - \alpha$ . Hodnoty  $v(k, n-p, \alpha)$  sú napr. v Lamoš, Potocký, tab. VII. ak sú  $\mathbf{A}'_i \hat{\boldsymbol{\beta}}$  lineárne závislé, treba  $v$  nahradiť inou hodnotou, pozri napr. Hahn, Hendrickson, Biometrika 58, 1971. Intervaly v tomto prípade zostanú rovnaké.

(c) Scheffeho metóda.

Je založená na vete 6.8, ktorá zase vychádza z nasledujúcej lemy

**Lema 6.7.** *Nech  $\mathbf{M}_{t,t}$  je pozitívne definitná matica. Pre ľubovoľný  $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^t$  platí*

$$\mathbf{x}'\mathbf{M}\mathbf{x} \leq 1 \iff (\mathbf{h}'\mathbf{x})^2 \leq \mathbf{h}'\mathbf{M}^{-1}\mathbf{h} \quad \forall \mathbf{h} \in \mathcal{R}^t.$$

*Dôkaz.* pozri anděl, str. 147.



**Veta 6.8.** *Nech lineárny priestor  $\mathcal{B} \subset \mathcal{R}^p$  je generovaný vektormi  $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_k$ , čiže  $\mathcal{B} = \mu(\mathbf{A}_1 \dotsc \mathbf{A}_k)_{p,k}$  a nech  $h(\mathbf{A}_1 \dotsc \mathbf{A}_k) = k$ . Potom*

$$P \left\{ |\mathbf{A}'\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{A}'\boldsymbol{\beta}| \leq s \sqrt{k F_{k,n-p}(1-\alpha) \mathbf{A}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{A}} \quad \forall \mathbf{A} \in \mathcal{B} \right\} = 1 - \alpha.$$

*Dôkaz.* Označme  $\mathbf{A}' = (\mathbf{A}_1 \dotsc \mathbf{A}_k)$ , teda  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}'_1 \\ \vdots \\ \mathbf{A}'_k \end{pmatrix}_{k,p}$ , pričom  $k(\mathbf{A}) = k$ . Podľa vety 6.6 (c) má

$$\begin{aligned} & \frac{(n-p)(\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{A}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}')^{-1}(\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{A}\boldsymbol{\beta})}{k(n-p)s^2} = \\ & = \frac{(\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{A}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}')^{-1}(\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{A}\boldsymbol{\beta})}{ks^2} \sim F_{k,n-p} \end{aligned}$$

rozdelenie. Teda

$$P \left\{ (\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{A}\boldsymbol{\beta})' \frac{(\mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}')^{-1}}{ks^2 F_{k,n-p}(1-\alpha)} (\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{A}\boldsymbol{\beta}) \leq 1 \right\} = 1 - \alpha$$

a podľa lemy 6.7 je

$$P \left\{ \left[ \mathbf{h}'(\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{A}\boldsymbol{\beta}) \right]^2 \leq [ks^2 F_{k,n-p}(1-\alpha)] \mathbf{h}'\mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{h} \quad \forall \mathbf{h} \in \mathcal{R}^k \right\} = 1 - \alpha,$$

čiže

$$P \left\{ \left[ (\mathbf{A}'\mathbf{h})'(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) \right]^2 \leq ks^2 F_{k,n-p}(1-\alpha) (\mathbf{A}'\mathbf{h})'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{h} \quad \forall \mathbf{h} \in \mathcal{R}^k \right\} = 1 - \alpha,$$

čo je to isté ako

$$P \left\{ (\mathbf{A}'\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{A}'\boldsymbol{\beta})^2 \leq ks^2 F_{k,n-p}(1-\alpha) \mathbf{A}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A} \quad \forall \mathbf{A} \in \mu(\mathbf{A}') = \mathcal{B} \right\} = 1 - \alpha. \quad \square$$

### 6.3. MATICA PLÁNU $\mathbf{X}$ NEMÁ PLNÚ HODNOSŤ

Nech  $h(\mathbf{X}_{n,p}) = r < p \leq n$ .

Normálne rovnice majú veľa rôznych riešení, pričom jedno riešenie  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  nemôžeme považovať za odhad  $\boldsymbol{\beta}$ . Treba odstrániť nejednoznačnosť. Robí sa to nasledujúcim spôsobom. Uvažujme maticu  $\mathbf{B}_{p-r,p}$ , ktorej riadky sú nezávislé, t.j.  $h(\mathbf{B}) = p - r$ , pričom tieto riadky nezávisia od riadkov matice plánu  $\mathbf{X}$ . Preto  $h \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}_{n+p-r,p} = p$

(matica plnej hodnosti v stĺpcoch). Pre maticu  $\begin{pmatrix} \mathbf{X}_{n,p} \\ \mathbf{B}_{p-r,p} \end{pmatrix} = \mathbf{F}_{n+p-r,p}$  platí, že  $h(\mathbf{F}) = p$ . Preto  $p \times p$  matica  $\mathbf{F}'\mathbf{F} = (\mathbf{X}' \ \mathbf{B}') \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = \mathbf{X}'\mathbf{X} + \mathbf{B}'\mathbf{B}$  je regulárna

( $\mu(\mathbf{F}'\mathbf{F}) = \mu(\mathbf{F}')$ , čiže aj  $h(\mathbf{F}'\mathbf{F}) = h(\mathbf{F}') = h(\mathbf{F}) = p$ ). K normálnym rovniciam  $\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{X}'\mathbf{Y}$  pridáme rovnice  $\mathbf{B}'\mathbf{B}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$  a dostávame

$$\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{B}'\mathbf{B}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{F}'\mathbf{F}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{X}'\mathbf{Y},$$

ktorých riešenie

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{F}'\mathbf{F})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$$

je jediné. Pre toto  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  platí

$$\mathcal{E}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = (\mathbf{F}'\mathbf{F})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{F}'\mathbf{F})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X} + \mathbf{B}'\mathbf{B})\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}.$$

Dostávame teda “zúženie“ systému normálnych rovníc, ktorý má takto jediné riešenie (postup pri analýze rozptylu).

**Definícia 6.9.**  $\mathbf{A}'\boldsymbol{\beta}$  je lineárne nevychýlene odhadnuteľná ak existuje pre ňu lineárny nevychýlený odhad, t.j. ak existuje  $\mathbf{l} \in \mathcal{R}^n$ , že  $\mathcal{E}_{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{l}'\mathbf{Y}) = \mathbf{A}'\boldsymbol{\beta} \quad \forall \boldsymbol{\beta} \in \mathcal{R}^p$ .

**Lema 6.10.**  $\mathbf{A}'\boldsymbol{\beta}$  je lineárne nevychýlene odhadnuteľná práve vtedy ak  $\mathbf{A} \in \mu(\mathbf{X}')$ .

*Dôkaz.* nájdete v anděl.

**Veta 6.11.** Nech  $\mathbf{A}'\boldsymbol{\beta}$  je lineárne nevychýlene odhadnuteľná,  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  je ľubovoľné riešenie normálnych rovníc, t.j.  $\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{X}'\mathbf{Y}$ . Potom

(a)  $\mathbf{A}'\hat{\boldsymbol{\beta}}$  je jednoznačný,

(b)  $\mathbf{A}'\hat{\boldsymbol{\beta}}$  je NNLO (najlepší nevychýlený lineárny odhad)  $\mathbf{A}'\boldsymbol{\beta}$ , t.j. pre každý iný lineárny nevychýlený odhad  $\widetilde{\mathbf{A}}'\boldsymbol{\beta}$  funkcie  $\mathbf{A}'\boldsymbol{\beta}$  platí  $\mathcal{D}(\widetilde{\mathbf{A}}'\boldsymbol{\beta}) - \mathcal{D}(\mathbf{A}'\hat{\boldsymbol{\beta}}) \geq 0$ .

*Dôkaz.* Nájdete v anděl.

Skôr ako ukážeme test hypotézy  $H : \mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$ , dokážeme si dve lemy.

**Lema 6.12.** Nech  $\mathbf{A}_{m,k}, \mathbf{B}_{n,k}$  sú ľubovoľné pevné matice,  $h(\mathbf{B}) = r \leq \min\{n, k\}$ . Platí

$$(6.4) \quad h \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = h[\mathbf{A}(\mathbf{I} - \mathbf{B}'(\mathbf{B}\mathbf{B}')^{-1}\mathbf{B})] + h(\mathbf{B}).$$

*Dôkaz.* Matica  $(\mathbf{B}'\mathbf{I} - \mathbf{B}'(\mathbf{B}\mathbf{B}')^{-1}\mathbf{B})_{k,n+k}$  má hodnotu  $k$ , lebo každý stĺpec matice  $\mathbf{B}'$ , teda  $\mathbf{B}'\mathbf{e}_i$  je kolmý na všetky stĺpce matice  $\mathbf{I} - \mathbf{B}'(\mathbf{B}\mathbf{B}')^{-1}\mathbf{B}$ , teda na  $(\mathbf{I} - \mathbf{B}'(\mathbf{B}\mathbf{B}')^{-1}\mathbf{B})\mathbf{e}_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ . lebo  $\mathbf{e}_i'\mathbf{B}(\mathbf{I} - \mathbf{B}'(\mathbf{B}\mathbf{B}')^{-1}\mathbf{B})\mathbf{e}_j = 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ . Teda  $\mathbf{B}'$  má  $r$  lineárne nezávislých stĺpcov,  $\mathbf{I} - \mathbf{B}'(\mathbf{B}\mathbf{B}')^{-1}\mathbf{B}$  má  $k - r$  lineárne nezávislých stĺpcov (lebo  $h(\mathbf{I} - \mathbf{B}'(\mathbf{B}\mathbf{B}')^{-1}\mathbf{B}) = k - r$ ). Tiež  $\mathbf{B}'\mathbf{e}_i$  je kolmé na  $(\mathbf{I} - \mathbf{B}'(\mathbf{B}\mathbf{B}')^{-1}\mathbf{B})\mathbf{e}_j$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ , teda  $(\mathbf{B}'\mathbf{I} - \mathbf{B}'(\mathbf{B}\mathbf{B}')^{-1}\mathbf{B})_{k,n+k}$  má  $k$  lineárne nezávislých stĺpcov, teda  $h(\mathbf{B}'\mathbf{I} - \mathbf{B}'(\mathbf{B}\mathbf{B}')^{-1}\mathbf{B}) = k$  (plná hodnota v riadkoch). Teraz

$$\begin{aligned} h \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} &= h \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} (\mathbf{B}'\mathbf{I} - \mathbf{B}'(\mathbf{B}\mathbf{B}')^{-1}\mathbf{B}) = h \begin{pmatrix} \mathbf{A}\mathbf{B}' & \mathbf{A}(\mathbf{I} - \mathbf{B}'(\mathbf{B}\mathbf{B}')^{-1}\mathbf{B}) \\ \mathbf{B}\mathbf{B}' & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \\ &= h \left[ \begin{pmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{A}\mathbf{B}'(\mathbf{B}\mathbf{B}')^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}\mathbf{B}' & \mathbf{A}(\mathbf{I} - \mathbf{B}'(\mathbf{B}\mathbf{B}')^{-1}\mathbf{B}) \\ \mathbf{B}\mathbf{B}' & \mathbf{0} \end{pmatrix} \right] = \\ &= h \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A}(\mathbf{I} - \mathbf{B}'(\mathbf{B}\mathbf{B}')^{-1}\mathbf{B}) \\ \mathbf{B}\mathbf{B}' & \mathbf{0} \end{pmatrix} = h(\mathbf{B}) + h[\mathbf{A}(\mathbf{I} - \mathbf{B}'(\mathbf{B}\mathbf{B}')^{-1}\mathbf{B})]. \quad \square \end{aligned}$$

**Lema 6.13.** ak  $h(\mathbf{X}_{n,p}) = r < p \leq n$ ,  $\mathbf{A}_{q,p}$  má hodnotu  $h(\mathbf{A}) = q$ ,  $h\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{A} \end{smallmatrix}\right) = r + q$  (riadky  $\mathbf{A}$  sú lineárne nezávislé s riadkami  $\mathbf{X}$ ), tak ľubovoľné  $\boldsymbol{\theta} \in \mu(\mathbf{X})$  sa dá písať ako  $\mathbf{X}\boldsymbol{\delta}$ , kde  $\mathbf{A}\boldsymbol{\delta} = \mathbf{0}$ .

*Dôkaz.* Zrejme  $\mu(\mathbf{X}) \supset \mu(\mathbf{X}(\mathbf{I} - \mathbf{A}'(\mathbf{A}\mathbf{A}')^{-1}\mathbf{A}))$ . ale podľa (6.4) je hodnota  $h(\mathbf{X}(\mathbf{I} - \mathbf{A}'(\mathbf{A}\mathbf{A}')^{-1}\mathbf{A})) = h\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{A} \end{smallmatrix}\right) - h(\mathbf{A}) = r + q - q = r = h(\mathbf{X})$ , teda  $\mu(\mathbf{X}) = \mu(\mathbf{X}(\mathbf{I} - \mathbf{A}'(\mathbf{A}\mathbf{A}')^{-1}\mathbf{A}))$  t.j. každé  $\boldsymbol{\theta} \in \mu(\mathbf{X})$  sa dá písať ako  $\mathbf{X}\boldsymbol{\delta}$ , kde  $\mathbf{A}\boldsymbol{\delta} = \mathbf{0}$ .  $\square$

ak chceme testovať  $H : \mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$  keď  $h(\mathbf{X}) = r < p$ ,  $h(\mathbf{A}_{q,p}) = q$ , pričom  $h\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{A} \end{smallmatrix}\right) = r + q$ , tak podľa lemy 6.13

$$R_H^2 = \min_{\boldsymbol{\beta}: \mathbf{A}\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) = \min_{\boldsymbol{\gamma}} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\gamma})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\gamma}) = R_0^2$$

a  $H_0$  nevieme testovať (podľa vety 6.6).

**Definícia 6.14.** Hypotéza  $H_0 : \mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$  je testovateľná, ak riadky matice  $\mathbf{A}$  sú lineárne kombinácie riadkov matice  $\mathbf{X}$ , t.j. ak existuje matica  $\mathbf{M}_{q,n}$ , že  $\mathbf{A} = \mathbf{M}\mathbf{X}$ .

*Poznámka.* Hypotéza  $H_0 : \mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$  je testovateľná, ak každá lineárna kombinácia  $\mathbf{A}'_i\boldsymbol{\beta} = \{\mathbf{A}\}_i\boldsymbol{\beta}$  je lineárne nevychýlene odhadnuteľná.

*Poznámka.* ak máme  $H_0 : \mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{c}$ , tak vezmeme  $\boldsymbol{\beta}_0$  – ľubovoľné riešenie systému  $\mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{c}$  a vytvoríme  $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_0$ . Model  $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$  prepíšeme na model  $\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}_0 = \mathbf{X}(\boldsymbol{\beta} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}_0) + \boldsymbol{\varepsilon}$ , čiže (pri označení observačného vektora  $\mathbf{Y}^* = \mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}_0$ ) dostávame model  $\mathbf{Y}^* = \mathbf{X}\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ . V tomto modeli testujeme hypotézu  $\mathbf{A}\boldsymbol{\delta} = \mathbf{0}$ . Pôvodná hypotéza  $H_0 : \mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{c}$  je teda testovateľná práve vtedy ak hypotéza  $\mathbf{A}\boldsymbol{\delta} = \mathbf{0}$  je testovateľná v “novom” modeli, teda ak  $\mathbf{A} = \mathbf{M}\mathbf{X}$ .

**Veta 6.15.** Nech  $H_0 : \mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{c}$ , kde  $\mathbf{A}_{q,p}$  má hodnotu  $h(\mathbf{A}) = q \leq r$ , je testovateľná, t.j.  $\mathbf{A} = \mathbf{M}\mathbf{X}$  ( $\mathbf{Y}$  je normálne rozdelený). Nech

$$R_0^2 = \min_{\boldsymbol{\beta}} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}),$$

$$R_H^2 = \min_{\boldsymbol{\beta}: \mathbf{A}\boldsymbol{\beta}=\mathbf{c}} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}).$$

ak  $H_0$  platí, tak

(a)  $R_H^2 - R_0^2 = (\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c})'(\mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}')^{-1}(\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c})$ , kde  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  je ľubovoľné riešenie normálnych rovníc  $\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{X}'\mathbf{Y}$ ,

$$(b) \frac{n-r}{q} \frac{R_H^2 - R_0^2}{R_0^2} \sim F_{q, n-r}.$$

*Dôkaz.* pozri anděl.

## 7. VIACROZMERNÁ REGRESNÁ ANALÝZA

### 7.1. ÚVOD

Na každom z  $n$  objektov robíme merania  $p$  znakov. Výsledky meraní na  $i$ -tom

objekte sú realizácie náhodného vektora

$$\mathbf{Y}'_i = (Y_{i1}Y_{i2}\dots Y_{ip}) = (x_{i1}x_{i2}\dots x_{iq}) \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1p} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2p} \\ \vdots & & & \\ \beta_{q1} & \beta_{q2} & \dots & \beta_{qp} \end{pmatrix} + \varepsilon'_i,$$

pričom  $Y_{il}$  je meranie  $l$ -tého znaku na  $i$ -tom objekte. Všetky merania dávajú maticu  $\mathbf{Y}_{n,p}$  náhodných veličín (jej  $i$ -ty riadok značí  $p$  meraní na  $i$ -tom objekte), teda

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \dots & Y_{1p} \\ Y_{21} & Y_{22} & \dots & Y_{2p} \\ \vdots & & & \\ Y_{n1} & Y_{n2} & \dots & Y_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1q} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2q} \\ \vdots & & & \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1p} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2p} \\ \vdots & & & \\ \beta_{q1} & \beta_{q2} & \dots & \beta_{qp} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \vdots \\ \varepsilon'_n \end{pmatrix}$$

čiže

$$(7.1) \quad \mathbf{Y}_{n,p} = \mathbf{X}_{n,q} \mathbf{B}_{q,p} + \boldsymbol{\varepsilon}_{n,p}.$$

V modeli (7.1) je  $\mathbf{X}_{n,q}$  daná pevná známa matica,  $\mathbf{B}$  matica neznámych parametrov,  $\boldsymbol{\varepsilon}_i = (\varepsilon_{i1}\varepsilon_{i2}\dots\varepsilon_{ip})'$  je chybový vektor na  $i$ -tom objekte a

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n,p} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \dots & \varepsilon_{1p} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \dots & \varepsilon_{2p} \\ \vdots & & & \\ \varepsilon_{n1} & \varepsilon_{n2} & \dots & \varepsilon_{np} \end{pmatrix}$$

je matica náhodných chýb. Platí  $\boldsymbol{\varepsilon}_i \sim N_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$  sú navzájom nezávislé,  $\mathbf{B}_{q,p} = (\boldsymbol{\beta}_1, \dots, \boldsymbol{\beta}_p)$ . Vektor meraní  $i$ -tého znaku je  $(Y_{1i}Y_{2i}\dots Y_{ni})' = \mathbf{Z}_i \in \mathcal{R}^n$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ . Teda

$$\mathcal{E}(\mathbf{Z}_j) = \mathbf{X}_{n,q} \boldsymbol{\beta}_j, \quad \boldsymbol{\beta}_j = \begin{pmatrix} \beta_{1j} \\ \beta_{2j} \\ \vdots \\ \beta_{qj} \end{pmatrix} \in \mathcal{R}^q,$$

$$\text{cov}(\mathbf{Z}_j) = \sigma_{jj} \mathbf{I}, \quad j = 1, 2, \dots, p,$$

$$\sigma_{jj} = \{\boldsymbol{\Sigma}\}_{jj}$$

$$\begin{aligned} \text{cov}(\mathbf{Z}_i, \mathbf{Z}_j) &= \begin{pmatrix} \text{cov}(Y_{1i}, Y_{1j}) & \text{cov}(Y_{1i}, Y_{2j}) & \dots & \text{cov}(Y_{1i}, Y_{nj}) \\ \text{cov}(Y_{2i}, Y_{1j}) & \text{cov}(Y_{2i}, Y_{2j}) & \dots & \text{cov}(Y_{2i}, Y_{nj}) \\ \vdots & & & \\ \text{cov}(Y_{ni}, Y_{1j}) & \text{cov}(Y_{ni}, Y_{2j}) & \dots & \text{cov}(Y_{ni}, Y_{nj}) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_{ij} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{ij} & & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{ij} \end{pmatrix} = \sigma_{ij} \mathbf{I}_{n,n} = \{\boldsymbol{\Sigma}\}_{ij} \mathbf{I}_{n,n}. \end{aligned}$$

Iné vyjadrenie modelu je

$$vec\mathbf{Y} = \mathbf{Z}_{np,1} = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_1 \\ \mathbf{Z}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{Z}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{X} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix}_{pq,1} + vec\boldsymbol{\varepsilon},$$

čiže

$$vec\mathbf{Y} = (\mathbf{I}_{p,p} \otimes \mathbf{X}_{n,q})vec\mathbf{B} + vec\boldsymbol{\varepsilon},$$

$$cov(vec\mathbf{Y}) = \boldsymbol{\Sigma}_{p,p} \otimes \mathbf{I}_{n,n}.$$

ak  $h(\mathbf{X}) = q \leq n$ , tak najlepší lineárny nevychýlený odhad  $\beta_i$  je

$$\hat{\beta}_i = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Z}_i$$

a nevychýlený odhad  $\sigma_{ii}$  je

$$\frac{\mathbf{Z}_i'(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\mathbf{Z}_i}{n - q} = \frac{R_0^2(i, i)}{n - q} = \hat{\sigma}_{ii}.$$

Teda NNLO parametrov  $\mathbf{B}$  je

$$\hat{\mathbf{B}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}.$$

Označme

$$R_0^2(i, j) = (\mathbf{Z}_i - \mathbf{X}\hat{\beta}_i)'(\mathbf{Z}_j - \mathbf{X}\hat{\beta}_j).$$

Pre vektor  $\mathbf{Z}_i + \mathbf{Z}_j$  platí

$$\mathcal{E}(\mathbf{Z}_i + \mathbf{Z}_j) = \mathbf{X}(\beta_i + \beta_j), \quad cov(\mathbf{Z}_i + \mathbf{Z}_j) = (\sigma_{ii} + 2\sigma_{ij} + \sigma_{jj})\mathbf{I}.$$

NNLO  $\beta_i + \beta_j$  je

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'(\mathbf{Z}_i + \mathbf{Z}_j) = \hat{\beta}_i + \hat{\beta}_j.$$

Nevychýleným odhadom

$$\begin{aligned} \sigma_{ii} + \widehat{2\sigma_{ij}} + \sigma_{jj} &= \frac{(\mathbf{Z}_i + \mathbf{Z}_j)'(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')(\mathbf{Z}_i + \mathbf{Z}_j)}{n - q} = \\ &= \frac{R_0^2(i, i)}{n - q} + \frac{R_0^2(j, j)}{n - q} + 2\frac{R_0^2(i, j)}{n - q}, \end{aligned}$$

teda nevychýleným odhadom  $\sigma_{ij}$  je

$$\hat{\sigma}_{ij} = \frac{R_0^2(i, j)}{n - q}.$$

Matica

$$\mathbf{R}_0 = \begin{pmatrix} R_0^2(1, 1) & R_0^2(1, 2) & \dots & R_0^2(1, p) \\ R_0^2(2, 1) & R_0^2(2, 2) & \dots & R_0^2(2, p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_0^2(p, 1) & R_0^2(p, 2) & \dots & R_0^2(p, p) \end{pmatrix}$$

je zvyškovou maticou súčtov štvorcov a súčinov. Nevychýleným odhadom matice  $\Sigma$  je teda

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{n-q} \mathbf{R}_0.$$

Dá sa písať

$$\mathbf{R}_0 = \mathbf{Y}'(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\mathbf{Y} = \mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y}.$$

ak sú merania na jednotlivých objektoch nezávislé a majú mnohorozmerné normálne rozdelenie s tou istou kovariančnou maticou  $\Sigma$ , potom môžeme považovať  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  za náhodný výber z  $N_p(\mathbf{0}, \Sigma)$ . V takom prípade má  $\text{vec}\varepsilon$  rozdelenie  $N_{np}(\mathbf{0}, \Sigma_{p,p} \otimes \mathbf{I}_{n,n})$  (vyplýva z definície mnohorozmerného normálneho rozdelenia). Preto v takom prípade  $\text{vec}\mathbf{Y} \sim N_{np}((\mathbf{I}_{p,p} \otimes \mathbf{X})\text{vec}\mathbf{B}, \Sigma_{p,p} \otimes \mathbf{I}_{n,n})$ . Platí veta

**Veta 7.1.** *Nech v modeli (7.1) je  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  náhodný výber z  $N_p(\mathbf{0}, \Sigma)$ . Potom*

(a)  $\hat{\mathbf{B}}$  má normálne rozdelenie (rozumie sa tým, že  $\text{vec}\hat{\mathbf{B}}$  má mnohorozmerné normálne rozdelenie).

(b)  $\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y} \sim W_p(n-q, \Sigma)$

(c)  $\hat{\mathbf{B}}$  a  $\hat{\Sigma}$  sú nezávislé (rozumie sa tým, že  $\text{vec}\hat{\mathbf{B}}$  a  $\text{vec}\hat{\Sigma}$  sú nezávislé).

*Dôkaz.*

(a) Pretože  $\hat{\mathbf{B}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$ , je  $\text{vec}\hat{\mathbf{B}} = \text{vec}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y} = \text{vec}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}\mathbf{I} = (\mathbf{I} \otimes (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\text{vec}\mathbf{Y}$ , z čoho je tvrdenie (a) evidentné.

(b)  $\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y} = \mathbf{Y}'\mathbf{P}'\mathbf{P}\mathbf{Y} = (\mathbf{P}\mathbf{Y})'\mathbf{P}(\mathbf{X}\mathbf{B} + \varepsilon) = \varepsilon'\mathbf{P}\varepsilon \sim W_p(w, \Sigma) \iff \mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$ , (pozri vetu 2.9), čo je splnené. V tomto prípade  $w = \text{tr}\mathbf{P} = n - q$

(c)  $\text{vec}\hat{\mathbf{B}} = (\mathbf{I} \otimes (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\text{vec}\mathbf{Y}$  a  $\text{vec}\hat{\Sigma} = \frac{1}{n-q}\text{vec}\mathbf{R}_0 = \frac{1}{n-q}\text{vec}(\mathbf{Y}'(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\mathbf{Y}) = \frac{1}{n-q}\text{vec}(\mathbf{Y}'(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\mathbf{Y})$ . Stačí ak ukážeme, že  $(\mathbf{I} \otimes (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\text{vec}\mathbf{Y}$  a  $\text{vec}(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\mathbf{Y} = (\mathbf{I} \otimes (\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\text{vec}\mathbf{Y}$  sú nezávislé. Pretože

$$\begin{aligned} & (\mathbf{I} \otimes (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')[\text{cov}(\text{vec}\mathbf{Y})](\mathbf{I} \otimes (\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')) = \\ & = (\mathbf{I} \otimes (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')(\Sigma \otimes \mathbf{I})(\mathbf{I} \otimes (\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')) = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

dostávame aj tretie tvrdenie vety.  $\square$

## 7.2. TESTOVANIE HYPOTÉZ

V modeli

$$\mathbf{Y}_{n,p} = \mathbf{X}_{n,q}\mathbf{B}_{q,p} + \varepsilon_{n,p},$$

kde  $h(\mathbf{X}) = q(\leq n)$ ,  $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \vdots \\ \varepsilon'_n \end{pmatrix}$ , pričom  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  je náhodný výber z  $N_p(\mathbf{0}, \Sigma)$ ,

testujeme hypotézu

$$H_0 : \mathbf{C}_1\mathbf{B} = \mathbf{D},$$

$\mathbf{C}_1$  je známa  $g \times q$  matica,  $h(\mathbf{C}_1) = g$ ,  $\mathbf{D}$  je známa  $g \times p$  matica.

**Veta 7.2.** V modeli (7.1) nech  $h(\mathbf{X}) = q$ ,  $n - q \geq p - 1$ ,  $\Sigma$  je regulárna,  $\mathbf{B}_0$  je ľubovoľné riešenie rovníc  $\mathbf{C}_1\mathbf{B} = \mathbf{D}$ . Označme  $\mathbf{Y}_+ = \mathbf{Y} - \mathbf{X}\mathbf{B}_0$ . Za platnosti  $H_0 : \mathbf{C}_1\mathbf{B} = \mathbf{D}$ ,  $(h(\mathbf{C}_1) = g)$  má

$$\Lambda = \frac{|\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y}|}{|\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y} + \mathbf{Y}'_+\mathbf{P}_2\mathbf{Y}_+|}$$

Wilksovo  $\Lambda(p, n - q, g)$  rozdelenie, pričom  $\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$ ,  $\mathbf{P}_2 = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}'_1(\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}'_1)^{-1}\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$ .

Dôkaz.

$$\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y} = (\mathbf{X}\mathbf{B} + \boldsymbol{\varepsilon})'\mathbf{P}(\mathbf{X}\mathbf{B} + \boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\varepsilon}'\mathbf{P}\boldsymbol{\varepsilon}.$$

Podľa vety 2.9 má  $\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y}$  rozdelenie  $W_p(r, \Sigma)$  práve vtedy ak  $\mathbf{P}^2\mathbf{P}$ , pričom v takomto prípade  $r = \text{tr}\mathbf{P}$ . Ľahko sa vidí, že naozaj  $\mathbf{P}^2\mathbf{P}$  a  $r = \text{tr}\mathbf{P} = n - q$ , teda  $\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y} \sim W_p(n - q, \Sigma)$ . Tiež platí

$$\mathbf{Y}'_+\mathbf{P}_2\mathbf{Y}_+ = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\mathbf{B}_0)'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}'_1(\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}'_1)^{-1}\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\mathbf{B}_0)$$

a za platnosti  $H_0$  je

$$\begin{aligned} & \mathbf{Y}'_+\mathbf{P}_2\mathbf{Y}_+ = \\ & = (\mathbf{X}(\mathbf{B} - \mathbf{B}_0) + \boldsymbol{\varepsilon})'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}'_1(\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}'_1)^{-1}\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'(\mathbf{X}(\mathbf{B} - \mathbf{B}_0) + \boldsymbol{\varepsilon}) = \\ & = \boldsymbol{\varepsilon}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}'_1(\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}'_1)^{-1}\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Podľa vety 2.9 má  $\mathbf{Y}'_+\mathbf{P}_2\mathbf{Y}_+$  rozdelenie  $W_p(g, \Sigma)$ . Podľa vety 2.13 sú  $\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y}$  a  $\mathbf{Y}'_+\mathbf{P}_2\mathbf{Y}_+$  nezávislé, lebo

$$(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}'_1(\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}'_1)^{-1}\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' = \mathbf{0}.$$

Podľa poznámky pod vetou 4.2 má

$$\frac{|\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y}|}{|\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y} + \mathbf{Y}'_+\mathbf{P}_2\mathbf{Y}_+|}$$

Wilksovo  $\Lambda(p, n - q, g)$  rozdelenie.  $\square$

Hypotézu  $H_0 : \mathbf{C}_1\mathbf{B} = \mathbf{D}$  teda testujeme pomocou  $\Lambda(p, n - q, g)$  rozdelenia. Zamietame ju pre malé hodnoty  $\Lambda$ .

*Poznámka.* Podobne v modeli (7.1), kde  $h(\mathbf{X}) = q$ ,  $\Sigma$  je regulárna, môžeme testovať všeobecnejšiu hypotézu

$$H_0 : \mathbf{C}_1\mathbf{B}\mathbf{M}_1 = \mathbf{D},$$

kde  $\mathbf{M}_1$  je známa  $p \times r$  matica s  $h(\mathbf{M}_1) = r$ . Z modelu (7.1) totiž vyplýva model

$$(7.2) \quad \mathbf{Y}_{n,p}\mathbf{M}_1 = \mathbf{X}_{n,q}\mathbf{B}_{q,p}\mathbf{M}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_{n,p}\mathbf{M}_1,$$

v ktorom je matica observácií  $\mathbf{Y}\mathbf{M}_1$ , matica plánu  $\mathbf{X}$  a matica “neznámych parametrov“  $\mathbf{B}\mathbf{M}_1$ , pričom  $\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon} \sim W_p(n, \Sigma)$  a podľa vety 2.6 má  $\mathbf{M}'_1\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{M}_1 \sim W_p(r, \mathbf{M}'_1\Sigma\mathbf{M}_1)$  rozdelenie.  $(\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{M}_1)'$  je preto náhodný výber z  $N_p(\mathbf{0}, \mathbf{M}'_1\Sigma\mathbf{M}_1)$  rozdelenia. Teraz už úplne analogicky ako vo vete 7.2 dostávame, že za platnosti  $H_0 : \mathbf{C}_1\mathbf{B}\mathbf{M}_1 = \mathbf{D}$  má

$$\frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{H} + \mathbf{E}|}$$

$\Lambda(r, n - q, g)$  rozdelenie, pričom  $\mathbf{E} = (\mathbf{Y}\mathbf{M}_1)'\mathbf{P}(\mathbf{Y}\mathbf{M}_1)$  a  $\mathbf{H} = [(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\mathbf{B}_0)\mathbf{M}_1]'\mathbf{P}_2[(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\mathbf{B}_0)\mathbf{M}_1]$ .

## 7.3. INTERVALY SPOĽAHLIVOSTI PRE PARAMETRE MODELU

Pomocou kapitoly 7.2 nájdeme intervaly spoľahlivosti pre lineárne kombinácie  $\mathbf{b}'\mathbf{C}_1\mathbf{B}\mathbf{A}$  (alebo  $\mathbf{b}'\mathbf{C}_1\mathbf{B}\mathbf{M}_1\mathbf{A}$ ) v prípadoch, že  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{b}$  sú pevne dané;  $\mathbf{A}$  je pevne dané a pre každé  $\mathbf{b}$ ; pre každé  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{b}$ .

Nech  $\mathbf{B}$  sú skutočné parametre (ich skutočná hodnota). Položíme tentokrát  $\mathbf{Y}_+ = \mathbf{Y} - \mathbf{X}\mathbf{B}$ . Nech  $\mathbf{A} \in \mathcal{R}^p$ ,  $\mathbf{b} \in \mathcal{R}^g$  sú pevne dané. Podľa lemy 2.12

$$\begin{aligned} \mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}_+\mathbf{A} &= \text{vec}(\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}_+\mathbf{A}) = \\ &= \text{vec}(\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{A}) = (\mathbf{A}' \otimes \mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\text{vec}\boldsymbol{\varepsilon}, \end{aligned}$$

pričom  $\text{cov}(\text{vec}\boldsymbol{\varepsilon}) = \text{cov}(\text{vec}\mathbf{Y}) = \boldsymbol{\Sigma}_{p,p} \otimes \mathbf{I}_{n,n}$  (pozri kapitolu 7.1). Preto

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}_+\mathbf{A}) &= \mathcal{D}((\mathbf{A}' \otimes \mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\text{vec}\boldsymbol{\varepsilon}) = \\ &= (\mathbf{A}' \otimes \mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I})(\mathbf{A} \otimes \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}'_1\mathbf{b}) = (\mathbf{A}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A})(\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}'_1\mathbf{b}). \end{aligned}$$

Už v kapitole 7.2 sme ukázali, že  $\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y} = \mathbf{Y}'(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\mathbf{Y} \sim W_p(n - q, \boldsymbol{\Sigma})$  a teda pre  $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$  je podľa vety 2.8

$$\frac{\mathbf{A}'\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y}\mathbf{A}}{\mathbf{A}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}} \sim \chi_{n-q}^2.$$

Samozrejme

$$\frac{\mathbf{A}'\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y}\mathbf{A}}{\mathbf{A}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}} \sim \chi_{n-q}^2 = \frac{\mathbf{A}'\boldsymbol{\varepsilon}'\mathbf{P}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{A}}{\mathbf{A}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}} = \frac{(\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{A})'\mathbf{P}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{A}}{\mathbf{A}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}}$$

a

$$\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}_+\mathbf{A} = \mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{A},$$

pričom  $\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}'_1\mathbf{A} \\ \boldsymbol{\varepsilon}'_2\mathbf{A} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varepsilon}'_n\mathbf{A} \end{pmatrix} \sim N_n(\mathbf{0}, (\mathbf{A}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A})\mathbf{I}_{n,n})$ . Podľa vety 1.10 sú

$$\frac{\mathbf{A}'\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y}\mathbf{A}}{\mathbf{A}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}} \quad \text{a} \quad \mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}_+\mathbf{A}$$

nezávislé, lebo

$$\frac{\mathbf{P}}{\mathbf{A}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}}(\mathbf{A}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A})\mathbf{I}_2\frac{1}{2}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}'_1\mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Pretože  $\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}_+\mathbf{A} = \mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{A}$  má  $N_1(0, (\mathbf{A}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A})(\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}'_1\mathbf{b}))$  rozdelenie, má  $\frac{(\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}_+\mathbf{A})^2}{(\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}'_1\mathbf{b})(\mathbf{A}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A})}$  rozdelenie  $\chi_1^2$  a je nezávislé od  $\frac{\mathbf{A}'\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y}\mathbf{A}}{\mathbf{A}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}}$ , ktoré má  $\chi_{n-q}^2$  rozdelenie. Dostávame, že

$$\frac{(\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}_+\mathbf{A})^2}{(\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}'_1\mathbf{b})(\mathbf{A}'\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y}\mathbf{A})} \sim \frac{1}{n-q}F_{1,n-q}.$$



Pre pevné  $\mathbf{A} \in \mathcal{R}^p$ ,  $\mathbf{b} \in \mathcal{R}^g$

$$P\left\{\frac{(\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}\mathbf{A} - \mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}\mathbf{B}\mathbf{A})^2}{(\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}'_1\mathbf{b})(\mathbf{A}'\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y}\mathbf{A})} \leq \frac{1}{n-q}F_{1,n-q}(1-\alpha)\right\} = 1-\alpha,$$

čiže

$$P\left\{(\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}\mathbf{A} - \mathbf{b}'\mathbf{C}_1\mathbf{B}\mathbf{A})^2 \leq \frac{1}{n-q}F_{1,n-q}(1-\alpha)\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}'_1\mathbf{b}\mathbf{A}'\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y}\mathbf{A}\right\} = 1-\alpha,$$

čo je to isté ako

$$(7.3) \quad P\left\{\mathbf{b}'\mathbf{C}_1\mathbf{B}\mathbf{A} \in \left(\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}\mathbf{A} - \sqrt{\frac{1}{n-q}F_{1,n-q}(1-\alpha)\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}'_1\mathbf{b}\mathbf{A}'\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y}\mathbf{A}}, \mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}\mathbf{A} + \sqrt{\frac{1}{n-q}F_{1,n-q}(1-\alpha)\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}'_1\mathbf{b}\mathbf{A}'\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y}\mathbf{A}}\right)\right\} = 1-\alpha.$$

*Poznámka.* Tento výsledok dostaneme aj keď uvažujeme regresný model  $\mathbf{Y}\mathbf{A} = \mathbf{X}\mathbf{B}\mathbf{A} + \boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{A}$ , kde observačný vektor je  $\mathbf{Y}\mathbf{A}$ , vektor parametrov je  $\mathbf{B}\mathbf{A}$  a chybový vektor  $\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{A}$  (pozri príklad za vzťahom (6.3)).

Hľadáme teraz intervaly spoľahlivosti, ktoré súčasne pokrývajú všetky  $\mathbf{b}'\mathbf{C}_1\mathbf{B}\mathbf{A}$ , kde  $\mathbf{A} \in \mathcal{R}^p$  je pevné, ale  $\mathbf{b}$  sa mení a môže byť ľubovoľné z  $\mathcal{R}^g$ . Budeme potrebovať nasledujúcu lemu.

**Lema 7.3.** *Nech  $\mathbf{A}_{t,t}, \mathbf{N}_{t,t}$  sú symetrické matice, pričom  $\mathbf{N}$  je pozitívne definitná. Potom*

a.) pre ľubovoľné  $\mathbf{c} \in \mathcal{R}^t$ ,  $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$

$$(7.4) \quad \max_{\substack{\mathbf{x} \in \mathcal{R}^t \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{0}}} \frac{(\mathbf{c}'\mathbf{x})^2}{\mathbf{x}'\mathbf{N}\mathbf{x}} = \mathbf{c}'\mathbf{N}^{-1}\mathbf{c},$$

pričom maximum sa dosahuje pre  $\mathbf{x} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{c}$ ;

b.)

$$(7.5) \quad \max_{\substack{\mathbf{x} \in \mathcal{R}^t \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{0}}} \frac{\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}}{\mathbf{x}'\mathbf{N}\mathbf{x}} = \lambda_1,$$

kde  $\lambda_1$  je najväčšia vlastná hodnota matice  $\mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}$ .

*Dôkaz.* Schwarzova nerovnosť tvrdí, že pre ľubovoľné dva vektory  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{R}^t$  platí  $(\mathbf{x}'\mathbf{y})^2 \leq \mathbf{x}'\mathbf{x} \mathbf{y}'\mathbf{y}$ . Maticu  $\mathbf{N}$  môžeme písať ako  $\mathbf{N}^{\frac{1}{2}}\mathbf{N}^{\frac{1}{2}}$ , maticu  $\mathbf{N}^{-1}$  môžeme písať ako  $\mathbf{N}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{N}^{-\frac{1}{2}}$  (pozri anďel, str. 64). Preto pre vektory  $\mathbf{u} = \mathbf{N}^{\frac{1}{2}}\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{N}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{y}$  ( $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  ľubovoľné z  $\mathcal{R}^t$ ) platí

$$(\mathbf{u}'\mathbf{v})^2 = (\mathbf{x}'\mathbf{N}^{\frac{1}{2}}\mathbf{N}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{y})^2 = (\mathbf{x}'\mathbf{y})^2 \leq \mathbf{u}'\mathbf{u} \mathbf{v}'\mathbf{v} = \mathbf{x}'\mathbf{N}\mathbf{x} \mathbf{y}'\mathbf{N}^{-1}\mathbf{y},$$

čiže pre ľubovoľné  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{R}^t$

$$(7.6) \quad (\mathbf{x}'\mathbf{y})^2 \leq \mathbf{x}'\mathbf{N}\mathbf{x} \mathbf{y}'\mathbf{N}^{-1}\mathbf{y}.$$

a.) Vezmime ľubovoľné  $\mathbf{c} \in \mathcal{R}^t$ ,  $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ . Pre každé  $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^t$  platí zo (7.6)

$$(\mathbf{c}'\mathbf{x})^2 \leq \mathbf{x}'\mathbf{N}\mathbf{x} \mathbf{c}'\mathbf{N}^{-1}\mathbf{c},$$

čiže pre každé  $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^t$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  platí

$$\frac{(\mathbf{c}'\mathbf{x})^2}{\mathbf{x}'\mathbf{N}\mathbf{x}} \leq \mathbf{c}'\mathbf{N}^{-1}\mathbf{c},$$

teda

$$\max_{\substack{\mathbf{x} \in \mathcal{R}^t \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{0}}} \frac{(\mathbf{c}'\mathbf{x})^2}{\mathbf{x}'\mathbf{N}\mathbf{x}} \leq \mathbf{c}'\mathbf{N}^{-1}\mathbf{c},$$

pričom je ľahko vidieť, že maximum sa dosahuje pre  $\mathbf{x} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{c}$ .

b.) Označme  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_t$  korene rovnice  $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{N}| = 0$ . Pretože

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{N}| = 0 \iff |\mathbf{A}\mathbf{N}^{-1} - \lambda\mathbf{I}||\mathbf{N}| = 0 \iff |\mathbf{A}\mathbf{N}^{-1} - \lambda\mathbf{I}| = 0,$$

sú  $\lambda_1, \dots, \lambda_t$  aj práve všetky vlastné hodnoty matice  $\mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}$ . Podľa Rao, 1c.3 (II) existuje matica  $\mathbf{R}$ , ktorá je regulárna a platí

$$(7.7) \quad \mathbf{A} = \mathbf{R}^{-1'}\mathbf{\Lambda}\mathbf{R}^{-1}, \quad \mathbf{N} = \mathbf{R}^{-1'}\mathbf{R}^{-1},$$

kde

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \lambda_t \end{pmatrix}.$$

Pretože každý vektor  $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^t$  môžeme písať ako  $\mathbf{R}^{-1}\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{u} \in \mathcal{R}^t$  (čiže  $\mathcal{R}^t = \{\mathbf{R}^{-1}\mathbf{u}, \mathbf{u} \in \mathcal{R}^t\}$ ), platí zo (7.7)

$$\max_{\substack{\mathbf{u} \in \mathcal{R}^t \\ \mathbf{u} \neq \mathbf{0}}} \frac{\mathbf{u}'\mathbf{A}\mathbf{u}}{\mathbf{u}'\mathbf{N}\mathbf{u}} = \max_{\substack{\mathbf{u} \in \mathcal{R}^t \\ \mathbf{u} \neq \mathbf{0}}} \frac{\mathbf{u}'\mathbf{R}^{-1'}\mathbf{\Lambda}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{u}}{\mathbf{u}'\mathbf{R}^{-1'}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{u}} = \max_{\substack{\mathbf{x} \in \mathcal{R}^t \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{0}}} \frac{\mathbf{x}'\mathbf{\Lambda}\mathbf{x}}{\mathbf{x}'\mathbf{x}} = \lambda_1,$$

lebo

$$\frac{\mathbf{x}'\mathbf{\Lambda}\mathbf{x}}{\mathbf{x}'\mathbf{x}} = \frac{\sum_{i=1}^t \lambda_i x_i^2}{\sum x_i^2} \leq \lambda_1 \frac{\sum x_i^2}{\sum x_i^2} = \lambda_1$$

a rovnosť sa dosahuje napr. pre  $\mathbf{x} = (1, 0, \dots, 0)'$ .  $\square$

Podľa (7.4) sa maximum výrazu

$$(7.8) \quad \frac{(\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y} + \mathbf{A})^2}{(\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}_1\mathbf{b})(\mathbf{A}'\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y}\mathbf{A})}$$

dosahuje vzhľadom na  $\mathbf{b}$  ( $\mathbf{A}$  je pevné, teda  $\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}_+\mathbf{A}$  je “fixné“) ak

$$\mathbf{b} = (\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}'_1)^{-1}\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}_+\mathbf{A}$$

a toto maximum je

$$(7.9) \quad \frac{\mathbf{A}'\mathbf{Y}'_+[\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}'_1(\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}'_1)^{-1}\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}_+\mathbf{A}]}{\mathbf{A}'\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y}\mathbf{A}} =$$

$$= \frac{\mathbf{A}'[\mathbf{Y}'_+\mathbf{P}_2\mathbf{Y}_+]\mathbf{A}}{\mathbf{A}'\mathbf{E}\mathbf{A}} = \frac{\mathbf{A}'\mathbf{H}\mathbf{A}}{\mathbf{A}'\mathbf{E}\mathbf{A}}.$$

Ľahko sa ukáže (pozri vetu 7.2 a vetu 2.9), že  $\mathbf{H} = \mathbf{Y}'_+\mathbf{P}_2\mathbf{Y}_+ \sim W_p(g, \mathbf{\Sigma})$  (tentokrát  $\mathbf{Y}_+ = \mathbf{Y} - \mathbf{X}\mathbf{B}$ ),  $\mathbf{E} = \mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y} \sim W_p(n - q, \mathbf{\Sigma})$ , pričom  $\mathbf{H}$  a  $\mathbf{E}$  sú nezávislé (podľa vety 2.13). Preto podľa vety 2.8 má

$$\frac{\mathbf{A}'\mathbf{H}\mathbf{A}}{\mathbf{A}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{A}} \sim \chi_g^2$$

a

$$\frac{\mathbf{A}'\mathbf{E}\mathbf{A}}{\mathbf{A}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{A}} \sim \chi_{n-q}^2$$

a posledné dve náhodné veličiny sú nezávislé. Dostávame, že

$$(7.10) \quad \frac{n - q}{g} \frac{\mathbf{A}'\mathbf{H}\mathbf{A}}{\mathbf{A}'\mathbf{E}\mathbf{A}} \sim F_{g, n-q}.$$

Zo vzťahov (7.8) a (7.10) dostávame, že pre pevné  $\mathbf{A} \in \mathcal{R}^p$

$$P \left\{ \frac{(\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}_+\mathbf{A})^2}{(\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}'_1\mathbf{b})(\mathbf{A}'\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y}\mathbf{A})} \leq \right.$$

$$\left. \leq \frac{g}{n - q} F_{g, n-q}(1 - \alpha) \quad \text{pre každé } \mathbf{b} \in \mathcal{R}^g \right\} = 1 - \alpha,$$

čiže

$$P \left\{ (\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}\mathbf{A} - \mathbf{b}'\mathbf{C}_1\mathbf{B}\mathbf{A})^2 \leq \right.$$

$$\left. \leq \frac{g}{n - q} F_{g, n-q}(1 - \alpha) \mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}'_1\mathbf{b}\mathbf{A}'\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y}\mathbf{A} \quad \text{pre každé } \mathbf{b} \in \mathcal{R}^g \right\} =$$

$$= 1 - \alpha.$$

Teda intervaly spoľahlivosti, ktoré súčasne pokrývajú všetky kombinácie  $\mathbf{b}'\mathbf{C}_1\mathbf{B}\mathbf{A}$  ( $\mathbf{A}$  pevné,  $\mathbf{b} \in \mathcal{R}^g$  sa mení) s pravdepodobnosťou  $1 - \alpha$  sú

$$(7.11) \quad \mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}\mathbf{A} \pm \sqrt{\frac{g}{n - q} F_{g, n-q}(1 - \alpha) \mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}'_1\mathbf{b}\mathbf{A}'\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y}\mathbf{A}}.$$

*Poznámka.* Tento výsledok sa zhoduje s vetou 6.8 (Scheffeho metóda), ak uvažujeme regresný model  $\mathbf{Y}\mathbf{A} = \mathbf{X}\mathbf{B}\mathbf{A} + \varepsilon\mathbf{A}$ .

Teraz preberme prípad, keď “sa menia“ vektory  $\mathbf{A}$  aj  $\mathbf{b}$  ( $\mathbf{A} \in \mathcal{R}^p$ ,  $\mathbf{b} \in \mathcal{R}^g$ ). Podľa (7.5) je

$$\max_{\substack{\mathbf{A} \in \mathcal{R}^p \\ \mathbf{A} \neq \mathbf{0}}} \frac{\mathbf{A}'\mathbf{H}\mathbf{A}}{\mathbf{A}'\mathbf{E}\mathbf{A}} = \lambda_1,$$

kde  $\lambda_1$  je najväčšia vlastná hodnota matice  $\mathbf{H}\mathbf{E}^{-1}$ . Poznamenávame len, že  $\mathbf{E} \sim W_p(n-q, \mathbf{\Sigma})$  a preto  $\mathbf{E} = \sum_{i=1}^{n-q} \xi_i \xi_i'$ , kde  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-q}$  sú nezávislé  $N_p(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$  rozdelené a podľa anděl, str.121 platí pre  $n-q \geq p$ , že  $P\{\mathbf{E} \text{ je pozitívne definitná matica}\} = 1$ . Podľa Kubáček, Kubáčková, Volaufová, str. 445 je  $\mathbf{H} + \mathbf{E}$  pozitívne definitná matica ( $\mathbf{H}$  je pozitívne semidefinitná a  $\mathbf{E}$  je pozitívne definitná matica). Preto  $\lambda = -1$  nemôže byť vlastným číslom matice  $\mathbf{H}\mathbf{E}^{-1}$ . ak by totiž  $-1$  bola vlastným číslom matice  $\mathbf{H}\mathbf{E}^{-1}$ , tak  $|\mathbf{H}\mathbf{E}^{-1} + \mathbf{I}| = 0$ , ale  $|\mathbf{H}\mathbf{E}^{-1} + \mathbf{I}| = |(\mathbf{H} + \mathbf{E})\mathbf{E}^{-1}| = |\mathbf{H} + \mathbf{E}||\mathbf{E}^{-1}| \neq 0$ . ďalej máme, že  $\lambda (\neq -1)$  je vlastným číslom matice  $\mathbf{H}\mathbf{E}^{-1}$  práve vtedy ak

$$\begin{aligned} |\mathbf{H}\mathbf{E}^{-1} - \lambda\mathbf{I}| = 0 &\iff \left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^p |\mathbf{H}\mathbf{E}^{-1} - \lambda\mathbf{I}||\mathbf{E}| = 0 \iff \\ &\iff \left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^p |\mathbf{H} - \lambda\mathbf{E}| = 0 \iff |\mathbf{H}\frac{1}{1+\lambda} - \frac{\lambda}{1+\lambda}\mathbf{E}| = 0 \iff \\ &\iff |\mathbf{H}\left(1 - \frac{1}{1+\lambda}\right) - \frac{\lambda}{1+\lambda}\mathbf{E}| = 0 \iff |\mathbf{H} - \frac{\lambda}{1+\lambda}(\mathbf{H} + \mathbf{E})| = 0 \iff \\ &\iff |(\mathbf{H} + \mathbf{E})[(\mathbf{H} + \mathbf{E})^{-1}\mathbf{H} - \frac{\lambda}{1+\lambda}\mathbf{I}]| = 0 \iff |(\mathbf{H} + \mathbf{E})^{-1}\mathbf{H} - \frac{\lambda}{1+\lambda}\mathbf{I}| = 0, \end{aligned}$$

čiže práve vtedy ak  $\frac{\lambda}{1+\lambda}$  je vlastné číslo matice  $(\mathbf{H} + \mathbf{E})^{-1}\mathbf{H}$ . Funkcia  $\frac{\lambda}{1+\lambda}$  je rastúca pre  $\lambda \in (-\infty, \infty)$ , preto ak  $\lambda_1$  je najväčšia vlastná hodnota matice  $\mathbf{H}\mathbf{E}^{-1}$ , tak  $\frac{\lambda_1}{1+\lambda_1}$  je najväčšia vlastná hodnota matice  $(\mathbf{H} + \mathbf{E})^{-1}\mathbf{H}$ . Nasledujúce ekvivalencie nám dokazujú, že  $\lambda$  je vlastná hodnota  $\mathbf{E}^{-1}\mathbf{H}$  práve vtedy ak je vlastnou hodnotou  $\mathbf{H}\mathbf{E}^{-1}$ :

$$\begin{aligned} (7.12) \quad |\mathbf{H}\mathbf{E}^{-1} - \lambda\mathbf{I}| = 0 &\iff |\mathbf{H}\mathbf{E}^{-\frac{1}{2}} - \lambda\mathbf{E}^{\frac{1}{2}}||\mathbf{E}^{-\frac{1}{2}}| = 0 \iff \\ &\iff |\mathbf{E}^{\frac{1}{2}}||\mathbf{E}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{H}\mathbf{E}^{-\frac{1}{2}} - \lambda\mathbf{I}||\mathbf{E}^{-\frac{1}{2}}| = 0 \iff |\mathbf{E}^{-\frac{1}{2}}||\mathbf{E}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{H}\mathbf{E}^{-\frac{1}{2}} - \lambda\mathbf{I}||\mathbf{E}^{\frac{1}{2}}| = 0 \iff \\ &\iff |\mathbf{E}^{-1}\mathbf{H} - \lambda\mathbf{I}| = 0. \end{aligned}$$

ak  $\lambda$  je vlastná hodnota matice  $\mathbf{E}^{-1}\mathbf{H}$  (teda práve aj matice  $\mathbf{H}\mathbf{E}^{-1}$ ), tak zo (7.12) je  $\lambda \geq 0$ . Preto  $\theta = \frac{\lambda_1}{1+\lambda_1}$  - najväčšia vlastná hodnota matice  $(\mathbf{H} + \mathbf{E})^{-1}\mathbf{H}$  musí byť v intervale  $(0, 1)$ . Keď  $\theta$  považujeme za náhodnú premennú (najväčšiu vlastnú hodnotu náhodnej matice  $(\mathbf{H} + \mathbf{E})^{-1}\mathbf{H}$ ), tak  $\theta$  má podľa definície 4.3  $\theta(p, n-q, g)$  rozdelenie. Platí tiež pre  $\alpha$ -kritickú hodnotu rozdelenia  $\theta$ , t.j. pre také  $\theta_\alpha$ , že  $P\{\theta > \theta_\alpha\} = \alpha$ , že

$$P\{\theta \leq \theta_\alpha\} = 1 - \alpha,$$

čiže

$$P\left\{\frac{\lambda_1}{1+\lambda_1} = \theta \leq \theta_\alpha\right\} = 1 - \alpha,$$

$$P\{\lambda_1 \leq (1 + \lambda_1)\theta_\alpha\} = 1 - \alpha,$$

$$P\{\lambda_1(1 - \theta_\alpha) \leq \theta_\alpha\} = 1 - \alpha,$$

$$(7.13) \quad P\{\lambda_1 \leq \frac{\theta_\alpha}{1 - \theta_\alpha}\} = 1 - \alpha$$

(pretože  $\lambda_1 \geq 0$ , je  $\theta \in (0, 1)$ ). Vráťme sa teraz k (7.9). ak  $\mathbf{A} \in \mathcal{R}^p$ ,  $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$  (pevné), tak

$$\max_{\substack{\mathbf{b} \in \mathcal{R}^g \\ \mathbf{b} \neq \mathbf{0}}} \frac{(\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y} + \mathbf{A})^2}{(\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}'_1\mathbf{b})(\mathbf{A}'\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y}\mathbf{A})} = \frac{\mathbf{A}'\mathbf{H}\mathbf{A}}{\mathbf{A}'\mathbf{E}\mathbf{A}}.$$

(pozri (7.10)). Podľa (7.5) je zase

$$\max_{\substack{\mathbf{A} \in \mathcal{R}^p \\ \mathbf{A} \neq \mathbf{0}}} \frac{\mathbf{A}'\mathbf{H}\mathbf{A}}{\mathbf{A}'\mathbf{E}\mathbf{A}} = \lambda_1,$$

kde  $\lambda_1$  je najväčšia vlastná hodnota matice  $\mathbf{E}^{-1}\mathbf{H}$ . Podľa (7.13)  $P\{\lambda_1 \leq \frac{\theta_\alpha}{1 - \theta_\alpha}\} = 1 - \alpha$ . Preto

$$\begin{aligned} & P\left\{(\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}\mathbf{A} - \mathbf{b}'\mathbf{C}_1\mathbf{B}\mathbf{A})^2 \leq \right. \\ & \left. \leq \frac{\theta_\alpha}{1 - \theta_\alpha} \mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}'_1\mathbf{b}\mathbf{A}'\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y}\mathbf{A} \quad \text{pre každé } \mathbf{A} \in \mathcal{R}^p \text{ a každé } \mathbf{b} \in \mathcal{R}^g \right\} = \\ & = 1 - \alpha, \end{aligned}$$

čiže intervaly spoľahlivosti, ktoré súčasne pokrývajú všetky lineárne kombinácie  $\mathbf{b}'\mathbf{C}_1\mathbf{B}\mathbf{A}$  s pravdepodobnosťou  $1 - \alpha$  sú

$$\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}\mathbf{A} \pm \sqrt{\frac{\theta_\alpha}{1 - \theta_\alpha} \mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}'_1\mathbf{b}\mathbf{A}'\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y}\mathbf{A}}.$$

ak chceme viesť intervaly spoľahlivosti pre lineárne kombinácie  $\mathbf{b}'\mathbf{C}_1\mathbf{B}\mathbf{M}_1\mathbf{A}$ , kde  $\mathbf{M}_1$  je matica  $p \times r$  s hodnotou  $h(\mathbf{M}_1) = r$ , postupujeme tak, že vytvoríme model (7.2) a v ňom postupujeme úplne analogicky ako v tejto kapitole.

*Príklad (Lamoš, Potocký, str.246).* V tabuľke sú uvedené hmotnosť pšenice  $Y_i$  a hmotnosť slamy  $Z_i$  z  $i$ -teho pozemku,  $i = 1, 2, \dots, 7$ .  $x_{1i} = 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, 7$  a  $x_{2i}$  znamená množstvo hnojiva použitého na  $i$ -tom pozemku. Za predpokladu, že závislosť  $Y_i$  a  $Z_i$  od  $x_{1i}$  a  $x_{2i}$  je lineárna, nájdite regresné koeficienty. Potom testujte hypotézu o tom, či závislosť je významná, t.j. overte, či  $\beta_2 = \gamma_2 = 0$ . Hladina významnosti  $\alpha = 0.05$ .

pozemok	1	2	3	4	5	6	7
$Y$	30	35	31	18	28	18	29
$Z$	35	38	30	20	30	22	28
$x_2$	15	21	18	9	14	9	12

*Riešene.* Model je

$$Y_i = \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i}$$

$$Z_i = \gamma_1 x_{1i} + \gamma_2 x_{2i}$$