Provedení jednofaktorové analýzy rozptylu pomocí modulu ANOVA

Popis problému: V roce 1997 dostalo ministerstvo školství za úkol připravit nové podklady pro testování dětí při zařazování do zvláštních škol. V první fázi došlo ke standardizaci testu WISC- III, což je celosvětově nejužívanější test inteligence pro děti. Má 13 subtestů:

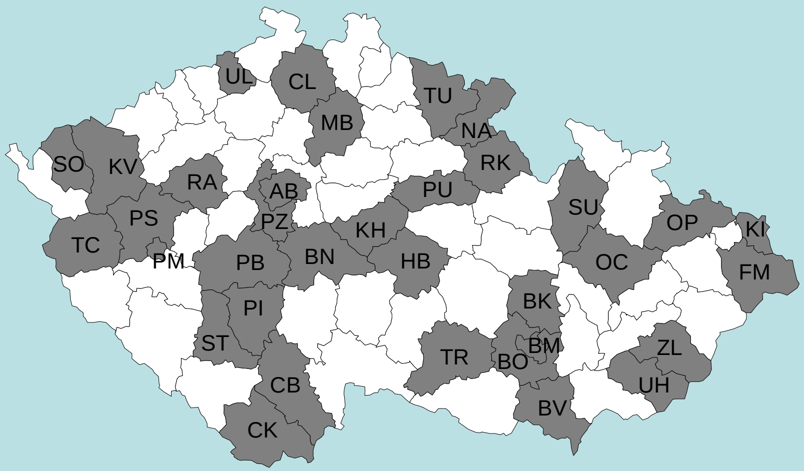
Doplňování obrázků
Vědomosti
Kódování
Podobnosti
Řazení obrázků
Počty
Kostky
Slovník
Skládanky
Porozumění
Hledání symbolů
Opakování čísel
Bludiště

Počet správných odpovědí v každém subtestu (tj. hrubé skóre) se podle tabulek norem převede na vážené skóre. Ze součtu vážených skóre se v převodních tabulkách odečte vážené skóre IQ.

Zjišťuje se verbální IQ, performační IQ, celkové IQ a čtyři faktorově založené indexové skóry: slovní porozumění (IQ_F1), percepční uspořádání (IQ_F2), koncentrovanost (IQ_F3) a rychlost zpracování (IQ_F4).

Celkové IQ má průměr 100, směrodatnou odchylku 15 a řídí se normálním rozložením.

Samotné testování souboru 1455 dětí ve věku 6 – 16 let proběhlo v březnu a dubnu r. 2000 na základních školách ve 35 okresech a provedlo ho 130 pracovníků okresních pedagogicko – psychologických poraden.



Charakteristiky výběrového souboru – pohlaví a národnost

Věk	**N**	**Pohlaví**				**Národnost**			
		CH		**D**		**CZ**		**ROM**	
		n	%	n	%	n	%	n	%
6	132	63	47,7	69	52,3	125	94,7	7	5,3
7	132	68	51,5	64	48,5	125	94,7	7	5,3
8	129	62	48,1	67	51,9	122	94,6	7	5,4
9	135	68	50,4	67	49,6	126	93,3	9	6,7
10	131	67	51,1	64	48,9	122	93,1	9	6,9
11	128	64	50,0	64	50,0	119	93,0	9	7,0
12	137	71	51,8	66	48,2	130	94,9	7	5,1
13	135	70	51,9	65	48,1	126	93,3	9	6,7
14	146	73	50	73	50	137	93,8	9	6,2
15	125	62	49,6	63	50,4	116	92,8	9	7,2
16	125	63	50,4	62	49,6	118	94,4	7	5,6
SUM	1455	731	50,2	724	49,8	1366	93,9	89	6,1

Legenda: CH … chlapci, D … dívky
CZ … děti a dospívající z většinové populace,
ROM … děti a dospívající, příslušníci romské komunity

Charakteristiky výběrového souboru – sídlo a typ školy

Věk	N	Sídlo				Typ školy				
		M > 8 tis,		V < 8 tis,		MŠ	ZŠ	ZvŠ	SŠ	UČ
		n	%	n	%	procento četnosti				
6	132	77	58,2	55	41,8	18,3	80,2	1,5		
7	132	73	55,6	59	44,4		96,9	3,1		
8	129	83	64,2	46	35,8		97,7	2,3		
9	135	73	53,8	62	46,2		97,0	3,0		
10	131	72	60,0	79	40,0		97,0	3,0		
11	128	65	54,2	69	45,8		90,6	2,4	7,0	
12	137	92	66,9	45	33,1		92,7	2,9	4,4	
13	135	71	52,9	64	47,1		85,6	3,0	11,3	
14	146	88	60,2	58	39,8		93,0	2,8	4,2	
15	125	71	56,9	54	43,1		71,0	3,2	25,8	
16	125	98	78,6	27	21,4		8,9	2,4	52,8	35,8
SUM	1455	874	60,1	581	39,9	1,7	83,2	2,7	9,4	3,0

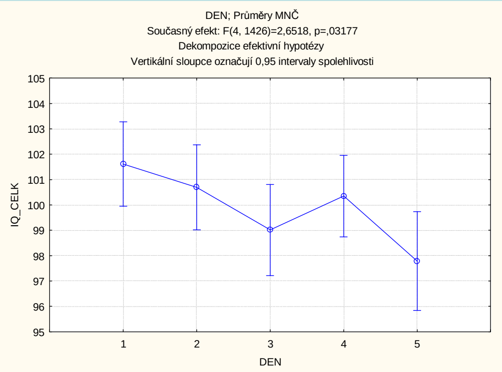
Legenda:
M>8tis - probandi ze sídel větších než 8.000 obyvatel
V<8tis - probandi ze sídel menších než 8.000 obyvatel
MŠ - děti navštěvující mateřskou školu, ZŠ - základní školu, ZvŠ - zvláštní školu
SŠ - studenti gymnázií a středních odborných škol
UČ - studenti integrovaných střeních škol, středních odborných učilišť a odborných učilišť

Kolísání intelektové výkonnosti v průběhu pracovního týdne

Stejně jako jiné fyziologické a psychologické charakteristiky vykazuje intelektová výkonnost kolísání v čase. Zde se zaměříme na kolísání v průběhu pracovního týdne. Údaj o tom, ve kterém dnu týdne bylo vyšetření provedeno, byl zaznamenán u 1431 dětí. Data, kterými se budeme zabývat, jsou uložena v souboru kolisani_IQ_v_tydnu.sta. Nejprve zjistíme průměry IQ_celk v jednotlivých dnech týdne:
Statistika – ANOVA – Jednofaktorová ANOVA – OK – Proměnné – Seznam závislých proměnných IQ_celk, Kategor. Nezávislá proměnná DEN – OK – Záložka Průměry – Pozorované, nevážené.

	DEN; Nevážené průměry (kolisani_IQ_v_tydnu.sta) Současný efekt: F(4, 1426)=2,6518, p=,03177 Dekompozice efektivní hypotézy					
Č. buňky	DEN	IQ_CELK Průměr	IQ_CELK Sm.Ch.	IQ_CELK -95,00%	IQ_CELK +95,00%	N
1	ponděl	101,6149	0,846460	99,95445	103,2753	309
2	úterý	100,6908	0,853392	99,01675	102,3648	304
3	středa	99,0114	0,915764	97,21497	100,8078	264
4	čtvrtek	100,3495	0,820328	98,74036	101,9587	329
5	pátek	97,7867	0,991960	95,84081	99,7325	225

Vidíme, že nejlepší výsledky jsou dosahovány v pondělí, nejhorší v pátek.
Grafické znázornění: Na záložce Průměry, Pozorované nevážené zvolíme Graf.



Nyní ověříme předpoklady pro provedení analýzy rozptylu: Vrátíme se do ANOVA Výsledky, zvolíme Více výsledků, záložka Předpoklady.

Ověříme normalitu proměnné IQ_celk pro jednotlivé dny v týdnu:
Rozdělení prom. Uvnitř skupin – Norm. p-graf – Vyberte skupiny 1 až 5. Dostaneme 5 N-P grafů, které nesignalizují výraznější porušení normality. Pokud bychom chtěli testovat normalitu pomocí S-W testu, klikneme na pozadí N-P grafu a v okně, které se otevře, zvolíme Statistika a zaškrtneme Shapiro – Wilkův test. Zjistíme, že na hladině významnosti 0,05 je porušena normalita proměnné IQ_celk pouze v pondělí, ve všech ostatních případech je p-hodnota S-W testu větší než 0,05.

Dále ověříme homogenitu rozptylů:
Na záložce Předpoklady vybereme Levenův test.

Leveneův test homogenity rozptylů (kolisani_IQ_v_tydnu.s
Efekt: DEN
Stupně volnosti pro všechna F: 4, 1426

	PČ Efekt	PČ Chyba	F	p
IQ_CELK	36,24704	80,22983	0,451790	0,771150

Na hladině významnosti 0,05 nelze zamítnout hypotézu o shodě rozptylů v daných pěti skupinách.

Dále provedeme test hypotézy o shodě středních hodnot:
Vrátíme se do ANOVA, Výsledky – na záložce Detaily zvolíme Test všech efektů.

Efekt	Jednorozměrné testy významnosti pro IQ_CELK (kolisani_IQ_v_tydnu.st Sigma-omezená parametrizace Dekompozice efektivní hypotézy SČ	Stupně volnosti	PČ	F	p
Abs. člen	14016168	1	14016168	63307,95	0,000000
DEN	2348	4	587	2,65	0,031774
Chyba	315712	1426	221		

Testová statistika F_A nabývá hodnoty 2,65, počet stupňů volnosti čitatele je 4, jmenovatele 1426, odpovídající p-hodnota je 0,0318, tedy na hladině významnosti 0,05 zamítáme hypotézu o shodě středních hodnot proměnné IQ_celk. S rizikem omylu nejvýše 5 % jsme tedy prokázali, že aspoň jedna dvojice dnů v týdnu se liší z hlediska intelektové výkonnosti.
Pomocí poměru determinace posoudíme, jak velký vliv na IQ_celk má den v týdnu.

$$P^2 = \frac{S_A}{S_T} = \frac{2348}{315712 + 2348} = 0{,}0074$$

Poměr determinace získáme v ANOVA Výsledky na záložce Detaily – Celkové R.

Závislá proměnné	Test SČ celého modelu vs. SČ reziduí (kolisani_IQ_v_tydnu.sta) Vícenás. R	Vícenás. R2	Upravené R2	SČ Model	SV Model	PČ Model	SČ Rezid.	SV Rezid.	PČ Rezid.	F	p
IQ_CELK	0,085928	0,007384	0,004599	2348,413	4	587,1034	315711,6	1426	221,3967	2,651817	0,031774

Poměr determinace najdeme ve sloupci Vícenás. R2.

Mnohonásobné porovnávání provedeme na záložce Post – hoc. Vybereme HSD nestejné N.

Č. buňky	HSD při nestejných N; proměnná IQ_CELK (kolisani_IQ_v_tydnu.s Přibližné pravděpodobnosti pro post hoc testy Chyba: meziskup. PČ = 221,40, sv = 1426,0					
	DEN	{1} 101,61	{2} 100,69	{3} 99,011	{4} 100,35	{5} 97,787
1	ponděl		0,940419	0,260904	0,828467	0,049856
2	úterý	0,940419		0,693243	0,998605	0,233079
3	středa	0,260904	0,693243		0,839999	0,906869
4	čtvrtek	0,828467	0,998605	0,839999		0,357902
5	pátek	0,049856	0,233079	0,906869	0,357902	

Vidíme, že na hladině významnosti 0,05 se liší pondělí a pátek.

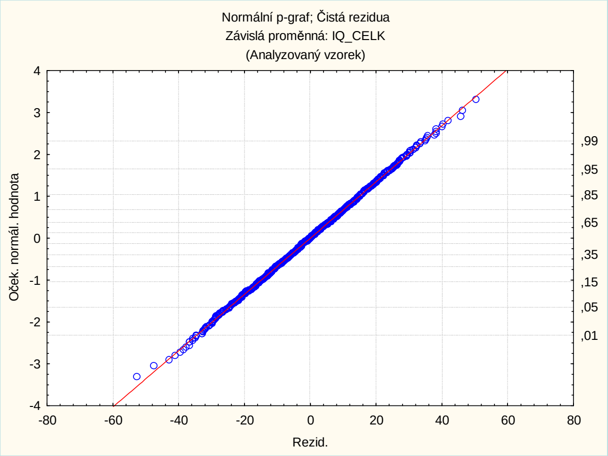
Dále můžeme stanovit homogenní skupiny dnů podle Tukeyovy HSD metody. Homogenní skupiny nás informují o tom, které výběry by mohly být považovány za výběry z téhož rozložení (jsou tedy rovnocenné z hlediska vlivu sledovaného faktoru).

V ANOVA Výsledky na záložce Pos - hoc vybereme Zobrazit Homogenní skupiny - HSD nestejné N.

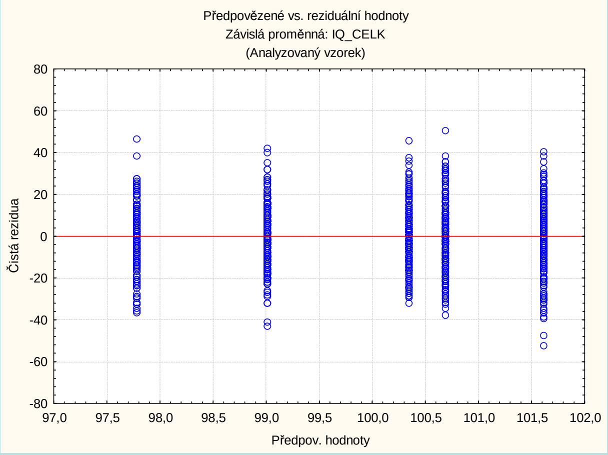
Č. buňky	DEN	IQ_CELK Průměr	1	2
5	pátek	97,7867	****	
3	středa	99,0114	****	****
4	čtvrtek	100,3495	****	****
2	úterý	100,6908	****	****
1	ponděl	101,6149		****

První skupina – dny s horšími výkony.
Druhá skupina – dny s lepšími výkony.
Pátek – den s nejhorším výkonem.
Pondělí – den s nejlepším výkonem.
Úterý, středa, čtvrtek – dny s neutrálními výkony.

Prozkoumáme chování reziduí:
Návrat do ANOVA Výsledky – Rezidua – Pravděp. graf reziduí



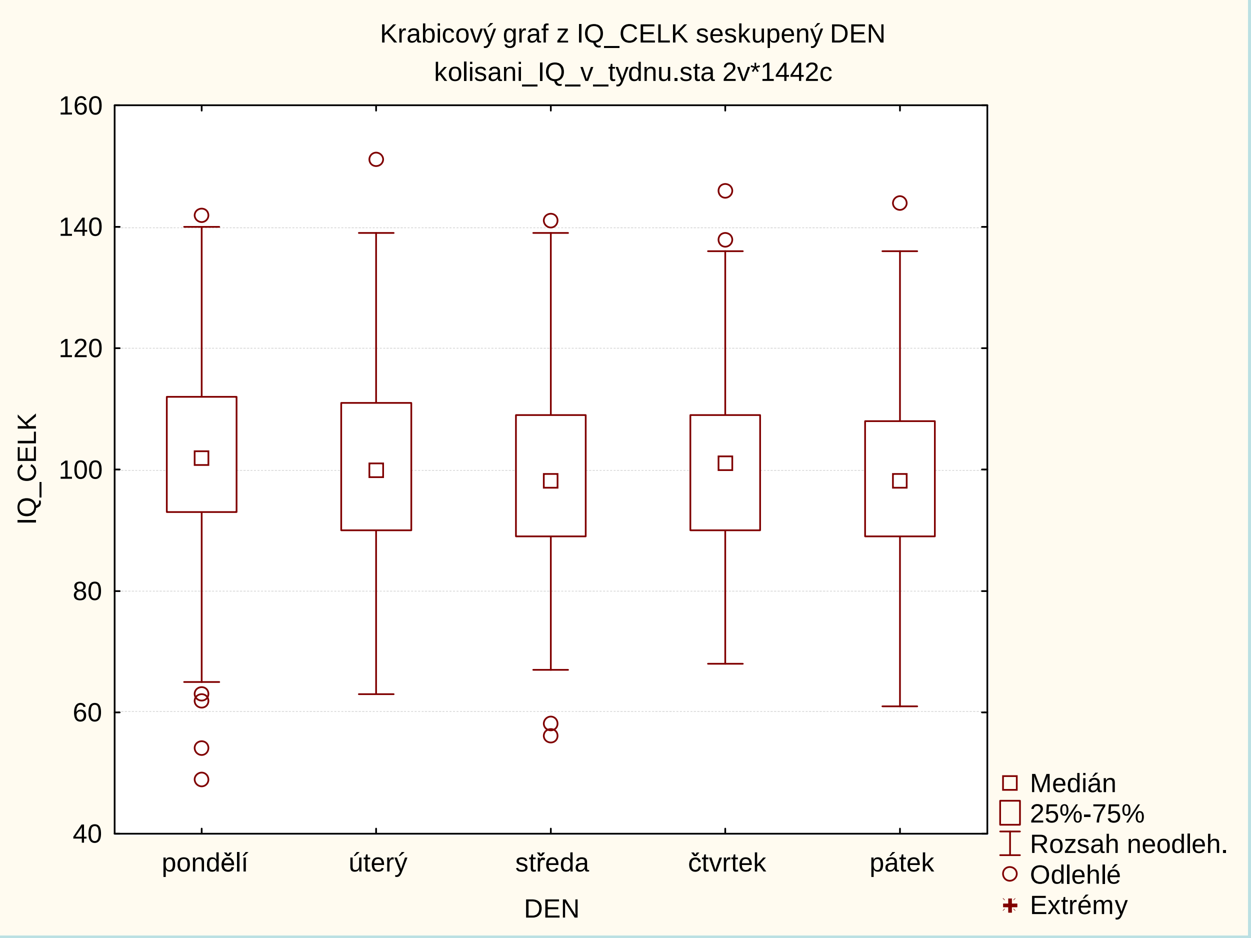
Normální pravděpodobnostní graf reziduí svědčí o tom, že rezidua se řídí normálním rozložením.
Návrat do ANOVA Výsledky – Rezidua – Před. & rezidua



V grafu není patrný žádný trend.

Na závěr znázorníme data pomocí krabicových diagramů.

Grafy – 2D Grafy – Krabicové grafy – Závisle proměnné IQ_celk, Grupovací prom. DEN – OK – OK.



Analýza rozptylu dvojného třídění

Zkoumáme vliv dvou faktorů A a B na závisle proměnnou veličinu X.
Např. zjišťujeme, zda výnosy určité plodiny (náhodná veličina X) jsou ovlivněny typem půdy (faktor A – řádkový faktor) a způsobem hnojení (faktor B – sloupcový faktor). Předpokládáme, že faktor A má a úrovní (tj. počet typů půdy) a faktor B má b úrovní (tj. počet způsobů hnojení).
Přitom máme n_{ij} pokusů takových, že na i-tém typu půdy byl použit j-tý způsob hnojení.
Výsledky (tzn. výnosy dané plodiny) těchto n_{ij} pokusů označíme $X_{ij1}, X_{ij2}, \dots, X_{ijn_{ij}}$.
Omezíme se na případy, kdy počet pozorování $n_{ij} = c \geq 1$ (jde o tzv. vyvážené třídění).
Výsledky lze zapsat do tabulky:

		faktor B			
		1	2	...	b
faktor A	1	$X_{111}, \dots, X_{11c}$	$X_{121}, \dots, X_{12c}$	…	$X_{1b1}, \dots, X_{1bc}$
	2	$X_{211}, \dots, X_{21c}$	$X_{221}, \dots, X_{22c}$	…	$X_{2b1}, \dots, X_{2bc}$
	⋮	⋮	⋮	…	⋮
	a	$X_{a11}, \dots, X_{a1c}$	$X_{a21}, \dots, X_{a2c}$	…	$X_{ab1}, \dots, X_{abc}$

Analogicky jako u analýzy rozptylu jednoduchého třídění předpokládáme, že data se řídí normálním rozložením, tj.

$X_{ij1}, X_{ij2}, \ldots, X_{ijc} \sim N(\mu_{ij}, \sigma^2)$, i = 1, …, a, j = 1, …, b

a jednotlivé náhodné výběry jsou stochasticky nezávislé.

Model můžeme zapsat ve tvaru:

$X_{ijk} = \mu_{ij} + \varepsilon_{ijk}$,

kde ε_{ijk} jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny s rozložením $N(0, \sigma^2)$.

Zajímá nás, zda všechny střední hodnoty jsou stejné.

Přístup k problému se liší podle toho, zda faktory A, B jsou nezávislé (pak se jedná o analýzu rozptylu dvojného třídění bez interakcí) nebo se mohou nějakým způsobem ovlivňovat (jde o analýzu rozptylu dvojného třídění s interakcemi).

Označení

$$n = abc,$$

$$X_{ij.} = \sum_{k=1}^{c} X_{ijk},$$

$$M_{ij.} = \frac{1}{c} X_{ij.},$$

$$X_{i..} = \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{c} X_{ijk},$$

$$M_{i..} = \frac{1}{bc} X_{i..},$$

$$X_{...} = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{c} X_{ijk},$$

$$M_{...} = \frac{1}{n} X_{...}$$

Analogické označení zavedeme i pro jiné kombinace indexů.

Dvojné třídění bez interakcí

Předpokládáme, že řádkový faktor A a sloupcový faktor B se neovlivňují (např. to znamená, že každý ze čtyř způsobů hnojení působí stejně na každém ze tří druhů půdy).

Náhodné veličiny X_{ijk} se řídí modelem

M0: $X_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ijk}$ pro $i = 1, \ldots, a$, $j = 1, \ldots, b$, $k = 1, \ldots, c$, přičemž

ε_{ijk} jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny s rozložením $N(0, \sigma^2)$,

μ je společná část střední hodnoty závisle proměnné veličiny,

α_i je efekt faktoru A na úrovni i,

β_j je efekt faktoru B na úrovni j.

Parametry μ, α_i, β_j neznáme. Požadujeme, aby platily tzv. reparametrizační rovnice:

$$\sum_{i=1}^{a} \alpha_i = 0, \sum_{j=1}^{b} \beta_j = 0.$$

Podobně jako v analýze rozptylu jednoduchého třídění se počítají součty čtverců.

$$S_T = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\left(X_{ijk} - M_{...}\right)^2$$ … celkový součet čtverců,

počet stupňů volnosti $f_T = n – 1$,

$$S_A = bc\sum_{i=1}^{a}\left(M_{i..} - M_{...}\right)^2$$ … součet čtverců pro řádkový faktor A,

počet stupňů volnosti $f_A = a – 1$,

$$S_B = ac\sum_{j=1}^{b}\left(M_{.j.} - M_{...}\right)^2$$ … součet čtverců pro sloupcový faktor B,

počet stupňů volnosti $f_B = b – 1$,

$$S_E = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\left(X_{ijk} - M_{ij.}\right)^2$$ … reziduální součet čtverců,

počet stupňů volnosti $f_E = n – a – b + 1$.

Lze dokázat, že $S_T = S_A + S_B + S_E$.

Celkový průměr $M_{...}$ … bodový odhad střední hodnoty μ,

sčítanec $M_{i..} - M_{...}$ … bodový odhad efektu α_i (tj. působení řádkového faktoru A na úrovni i),

sčítanec $M_{.j.} - M_{...}$ … bodový odhady efektu β_j (tj. působení sloupcového faktoru B na úrovni j)

Odhad $\hat{X}_{ijk}$ pozorování X_{ijk} má tedy tvar:

$$\hat{X}_{ijk} = M_{...} + \left(M_{i..} - M_{...}\right) + \left(M_{.j.} - M_{...}\right).$$

Pokud by nezáleželo na sloupcovém faktoru B, platila by hypotéza $\beta_1 = \ldots = \beta_b = 0$ a místo modelu

M0: $X_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ijk}$

bychom dostali model

M1: $X_{ijk} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ijk}$

Platnost uvedené hypotézy ověřujeme pomocí testové statistiky

$F_B = \dfrac{S_B / f_B}{S_E / f_E}$, která se řídí rozložením F(b-1,n-a-b+1), je-li model M1 správný.

Hypotézu o nevýznamnosti sloupcového faktoru tedy zamítneme na hladině významnosti α, když platí:

$F_B \geq F_{1-\alpha}(b-1,n-a-b+1)$.

Kdyby nezáleželo ani na řádkovém faktoru, platila by hypotéza $\alpha_1 = \ldots = \alpha_a = 0$ a dostali bychom model

M2: $X_{ijk} = \mu + \varepsilon_{ijk}$

Rozdíl mezi modely

M1: $X_{ijk} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ijk}$ a M2: $X_{ijk} = \mu + \varepsilon_{ijk}$

ověřujeme pomocí testové statistiky

$F_A = \dfrac{S_A / f_A}{S_E / f_E}$, která se řídí rozložením F(a-1, n-a-b+1), je-li model M2 správný.

Hypotézu o nevýznamnosti řádkového faktoru tedy zamítneme na hladině významnosti α, když platí:

$F_A \geq F_{1-\alpha}(a-1, n-a-b+1)$.

Při uvedeném postupu tedy zjišťujeme, zda záleží na sloupcovém efektu B. Pokud ne, platí model M1 a ptáme se, zda záleží na řádkovém efektu A, tj. zda platí model M2.

Postup lze samozřejmě provést i v jiném pořadí – nejdřív zkoumáme řádkový efekt A (tj. ověřujeme platnost modelu M1': $X_{ijk} = \mu + \beta_j + \varepsilon_{ijk}$) a poté sloupcový efekt B. Lze ukázat, že oba řetězce M0 → M1 → M2 a M0 → M1'→ M2' dají stejné výsledky. (To platí pouze za předpokladu, že $n_{ij} = c$ pro všechna i, j.)

Výsledky výpočtů zapisujeme do tabulky analýzy rozptylu dvojného třídění bez interakcí.

Zdroj variability	součet čtverců	st. vol.	podíl S/f	$F = \frac{S/f}{S_E/f_E}$
řádkový efekt A	S_A	f_A = a-1	S_A/f_A	$F_A = \frac{S_A/f_A}{S_E/f_E}$
sloupcový efekt B	S_B	f_B = b-1	S_B/f_B	$F_B = \frac{S_B/f_B}{S_E/f_E}$
reziduální	S_E	f_E = n-a-b+1	S_E/f_E	-
celkem	S_T	f_T = n-1	-	-

Scheffého a Tukeyova metoda mnohonásobného porovnávání

Zjistíme-li, že existují významné rozdíly mezi řádky, můžeme pomocí Scheffého nebo Tukeyovy metody zjistit, které dvojice řádků se významně liší. Určíme tedy, které rozdíly α_i - α_t jsou nenulové (na dané hladině významnosti).

Podle **Scheffého metody** zamítneme rovnost $\alpha_i = \alpha_t$, když

$$\left|M_{i..} - M_{t..}\right| > \sqrt{\frac{2(a-1)}{bc} \cdot \frac{S_E}{n-a-b+1} \cdot F_{1-\alpha}(a-1, n-a-b+1)}$$

a podle **Tukeyovy metody**, když

$$\left|M_{i..} - M_{t..}\right| > \sqrt{\frac{1}{bc} \cdot \frac{S_E}{n-a-b+1}}\, q_{1-\alpha}(a, n-a-b+1),$$ kde $q_{1-\alpha}(a,n-a-b+1)$ najdeme v tabulkách kvantilů studentizovaného rozpětí.

Jestliže zjistíme významný rozdíl mezi sloupci, určujeme podobně, které dvojice sloupců se mezi sebou liší, tj. které rozdíly $\beta_j - \beta_t$ jsou nenulové.

Podle **Scheffého metody** zamítneme rovnost $\beta_j = \beta_t$, když

$$\left|M_{.j.} - M_{.t.}\right| > \sqrt{\frac{2(b-1)}{ac} \cdot \frac{S_E}{n-a-b+1} \cdot F_{1-\alpha}(b-1, n-a-b+1)}$$

a podle **Tukeyovy metody**, když

$$\left|M_{.j.} - M_{.t.}\right| > \sqrt{\frac{1}{ac} \cdot \frac{S_E}{n-a-b+1}}\, q_{1-\alpha}(b, n-a-b+1).$$

Příklad:

Byl zaznamenán prodej určitého zboží (v kusech) během tří stejně dlouhých časových období. Přitom byl sledován jednak vliv balení zboží (řádkový faktor A, úroveň 1 – balení v sáčku, úroveň 2 – balení v krabičce) a jednak vliv druhu reklamy (sloupcový faktor B, úroveň 1 – bez reklamy, úroveň 2 – reklama v novinách, úroveň 3 – reklama v TV a novinách). Výsledky prodeje jsou zaznamenány v tabulce:

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="3">Faktor B</td></tr>
<tr><td>Bez reklamy</td><td>Reklama v novinách</td><td>Reklama v TV a novinách</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Faktor A</td><td>Balení v sáčku</td><td>1</td><td>1</td><td>6</td></tr>
<tr><td>Balení v krabičce</td><td>3</td><td>4</td><td>9</td></tr>
</table>

Na hladině významnosti 0,05 je třeba posoudit vliv reklamy a i vliv balení zboží na jeho prodej.

Řešení:

		Faktor B		
		Bez reklamy	Reklama v novinách	Reklama v TV a novinách
Faktor A	Balení v sáčku	1	1	6
	Balení v krabičce	3	4	9

Data zpracujeme pomocí analýzy rozptylu dvojného třídění bez interakcí s jedním pozorováním v každé podtřídě. Přitom a = 2, b = 3, c = 1, n = 6. Nejprve provedeme pomocné výpočty:
$X_{1..} = 8$, $X_{2..} = 16$, $M_{1..} = 8/3$, $M_{2..} = 16/3$, $X_{...} = 24$, $M_{...} = 24/6 = 4$, $X_{.1.} = 4$, $X_{.2.} = 5$, $X_{.3.} = 15$,
$M_{.1.} = 4/2 = 2$, $M_{.2.} = 5/2$, $M_{.3.} = 15/2$

$$S_A = bc\sum_{i=1}^{a}\left(M_{i..} - M_{...}\right)^2 = 3\left[\left(\frac{8}{3}-4\right)^2 + \left(\frac{16}{3}-4\right)^2\right] = \frac{32}{3} = 10,\overline{6},$$

$$S_B = ac\sum_{j=1}^{b}\left(M_{.j.} - M_{...}\right)^2 = 2\left[(2-4)^2 + \left(\frac{5}{2}-4\right)^2 + \left(\frac{15}{2}-4\right)^2\right] = 37,$$

$$S_T = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\left(X_{ijk} - M_{...}\right)^2 = (1-4)^2 + (1-4)^2 + (6-4)^2 + (3-4)^2 + (4-4)^2 + (9-4)^2 = 48,$$

$$S_E = S_T - S_A - S_B = 0,\overline{3}.$$

Výsledky zapíšeme do tabulky analýzy rozptylu dvojného třídění bez interakcí.

Zdroj variability	součet čtverců	st. vol.	podíl S/f	$F = \dfrac{S/f}{S_E/f_E}$
způsob balení	$10,\overline{6}$	1	$10,\overline{6}$	63,99
druh reklamy	37	2	18,5	110,98
reziduální	$0,\overline{3}$	2	$0,1\overline{6}$	-
celkem	48	5	-	-

Odpovídající kvantily:
pro řádkový efekt $F_{0,95}(1,2) = 18,1$,
pro sloupcový efekt $F_{0,95}(2,2) = 19$.
Protože $F_A = 63,99 \geq 18,1$, zamítáme na hladině významnosti 0,05 hypotézu, že způsob balení nemá vliv na prodej zboží.
Podobně $F_B = 110,98 \geq 19$, tedy na hladině významnosti 0,05 zamítáme hypotézu, že druh reklamy nemá vliv na prodej zboží.

Protože faktor B má tři úrovně, lze pomocí Scheffého nebo Tukeyovy metody zjistit, které druhy reklamy se od sebe liší na hladině významnosti 0,05.
Nejprve vypočítáme absolutní hodnoty rozdílů sloupcových průměrů
(přitom $M_{.1.} = 4/2 = 2$, $M_{.2.} = 5/2$, $M_{.3.} = 15/2$):

$$\left|M_{.1.} - M_{.2.}\right| = \left|2 - \frac{5}{2}\right| = 0{,}5, \left|M_{.1.} - M_{.3.}\right| = \left|2 - \frac{15}{2}\right| = 5{,}5, \left|M_{.2.} - M_{.3.}\right| = \left|\frac{5}{2} - \frac{15}{2}\right| = 5$$

Pravá strana Scheffého vzorce je:

$$\sqrt{\frac{2(b-1)}{ac} \cdot \frac{S_E}{n-a-b+1} \cdot F_{1-\alpha}(b-1, n-a-b+1)} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2}{2} \cdot 0{,}1\overline{6} \cdot 19} = 2{,}52.$$

Vidíme, že podle Scheffého metody se na hladině významnosti 0,05 liší sloupce 1, 3 (tj. bez reklamy a s reklamou v TV a novinách) a sloupce 2, 3 (tj. s reklamou jen v novinách a reklamou v TV a novinách).
Pravá strana Tukeyova vzorce je:

$$\sqrt{\frac{1}{ac} \cdot \frac{S_E}{n-a-b+1}}\, q_{1-\alpha}(b, n-a-b+1) = \sqrt{\frac{0{,}1\overline{6}}{2}} \cdot q_{0,95}(3,2) = \sqrt{\frac{0{,}1\overline{6}}{2}} \cdot 8{,}33 = 2{,}4.$$

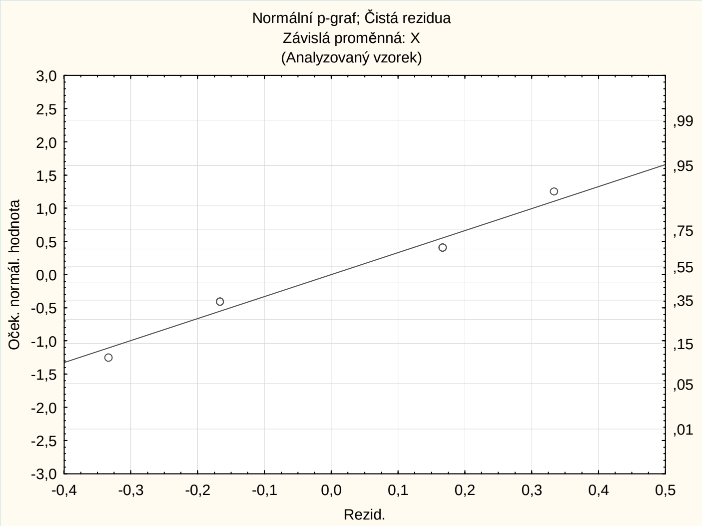
Podle Tukeyovy metody se na hladině významnosti 0,05 také liší sloupce 1, 3 a sloupce 2, 3.
Výhodnější je hodnota získaná Tukeyovou metodou, protože je menší.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Načteme datový soubor baleni_a_reklama.sta o třech proměnných X, A, B a 6 případech, kde X – prodej, A – typ balení (1 – sáček, 2 – krabička), B – druh reklamy (1 – bez reklamy, 2 – reklama v novinách, 3 – reklama v TV a novinách).
Statistiky – ANOVA – ANOVA hlavních efektů – Rychlé nastavení – OK – Závisle proměnná X, Kategor. nezáv. prom. A, B – OK – Možnosti – Parametrizace – odškrtneme Sigma-omezená, zaškrtneme Bez abs. členu – OK –Všechny efekty.
Dostaneme tabulku analýzy rozptylu dvojného třídění bez interakcí.

Efekt	SČ	Stupně volnosti	PČ	F	p
A	10,66667	1	10,66667	64,0000	0,015268
B	37,00000	2	18,50000	111,0000	0,008929
Chyba	0,33333	2	0,16667		

Vidíme, že p-hodnota pro testovou statistiku F_A je 0,015268, tedy na hladině významnosti 0,05 zamítáme hypotézu, že typ balení nemá vliv na prodej zboží. Podobně p-hodnota pro testovou statistiku F_B je 0,008929, což znamená, že na hladině významnosti 0,05 zamítáme hypotézu, že druh reklamy nemá vliv na prodej zboží.
Podívejme se ještě na rezidua: Návrat do ANOVA Výsledky – Rezidua – P-graf reziduí.



Nejsou patrné žádné zvláštnosti.

Abychom zjistili, které dvojice druhů reklamy se liší na hladině významnosti 0,05, použijeme Schefféého (resp. Tukeyovu) metodu mnohonásobného porovnávání.
Návrat do ANOVA Výsledky – Více výsledků – Post-hoc – Efekt B –Tukeyův HSD.

Č. buňky	Tukeyův HSD test; proměnná X (baleni_a_reklama.sta) Přibližné pravděpodobnosti pro post hoc testy Chyba: meziskup. PČ = ,16667, sv = 2,0000 B	{1} 2,0000	{2} 2,5000	{3} 7,5000
1	bez reklamy		0,548301	0,010156
2	reklama v novinach	0,548301		0,012218
3	reklama v TV a novinach	0,010156	0,012218	

Vidíme, že na hladině významnosti 0,05 se liší dvojice (1,3) a (2,3).

Dvojné třídění s interakcemi

Nyní předpokládáme, že faktory A a B se mohou ovlivňovat (např. některý způsob hnojení má zcela specifický vliv na určitý typ půdy). Náhodné veličiny X_{ijk} se řídí modelem
M0: $X_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijk}$ pro i = 1, …, a, j = 1, …, b, k = 1, …, c, přičemž
γ_{ij} je interakce mezi faktorem A na úrovni i a faktorem B na úrovni j. V této situaci předpokládáme, že $c \geq 2$. Parametry μ, α_i, β_j neznáme. Požadujeme, aby platily tzv. reparametrizační rovnice: $\sum_{i=1}^{a} \alpha_i = 0, \sum_{j=1}^{b} \beta_j = 0, \sum_{i=1}^{a} \gamma_{ij} = 0, \sum_{j=1}^{b} \gamma_{ij} = 0.$

Nyní můžeme utvořit modely
M1: $X_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ijk}$, M2: $X_{ijk} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ijk}$, M3: $X_{ijk} = \mu + \varepsilon_{ijk}$
(Lze samozřejmě použít i jiný řetězec modelů, kdy postupně klademe rovny nule parametry α_i, β_j, γ_{ij} v jiném pořadí.)
Vypočítáme součty čtverců S_T, S_A, S_B, S_{AB}, S_E, přičemž
$S_{AB} = c\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left[\left(M_{ij.} - M_{i..}\right) - \left(M_{.j.} - M_{...}\right)\right]^2$ je součet čtverců pro interakce,
počet stupňů volnosti $f_{AB} = (a-1)(b-1)$.
Vliv interakcí je prokázán na hladině významnosti α, když

$$F_{AB} = \frac{S_{AB}/f_{AB}}{S_E/f_E} \geq F_{1-\alpha}\left((a-1)(b-1), n-ab\right).$$

Výsledky zapisujeme do tabulky analýzy rozptylu dvojného třídění s interakcemi:

Zdroj variability	součet čtverců	st. vol.	podíl S/f	$F = \dfrac{S/f}{S_E/f_E}$
řádkový faktor A	S_A	$f_A = a-1$	S_A/f_A	$F_A = \dfrac{S_A/f_A}{S_E/f_E}$
sloupcový faktor B	S_B	$f_B = b-1$	S_B/f_B	$F_B = \dfrac{S_B/f_B}{S_E/f_E}$
interakce A,B	S_{AB}	$f_{AB} = (a-1)(b-1)$	S_{AB}/f_{AB}	$F_{AB} = \dfrac{S_{AB}/f_{AB}}{S_E/f_E}$
reziduální	S_E	$f_E = n-ab$	S_E/f_E	-
celkem	S_T	$f_T = n-1$	-	-

Je třeba si povšimnout, že součet $S_{AB} + S_E$ resp. $f_{AB} + f_E$ dá hodnotu S_E resp. f_E v tabulce bez interakcí.

Možné problémy v analýze rozptylu dvojného třídění s interakcemi

a) Ukáže-li se vliv interakcí nevýznamný, vzniká otázka, zda testovat vliv řádků resp. sloupců pomocí tabulky s interakcemi nebo provést novou analýzu rozptylu, ale tentokrát bez interakcí. Převládá názor, že je zapotřebí dokončit analýzu rozptylu s interakcemi.

b) Pokud interakce vyjdou významné a řádky a sloupce rovněž, zpravidla se nedoporučuje provádět mnohonásobné porovnávání, protože by se mohlo stát, že některá interakce by byla mnohem výraznější než příslušný řádkový resp. sloupcový efekt.

c) Nejsou-li interakce významné a řádky resp. sloupce ano, pak lze provést mnohonásobné porovnávání zcela analogicky jako v případě třídění bez interakcí, avšak je jiný počet stupňů volnosti f_E.

Tabulka odhadů různých parametrů a rozptylů těchto odhadů

parametr	odhad	rozptyl odhadu
μ	$M_{...}$	σ^2/n
$\mu + \alpha_i$	$M_{i..}$	σ^2/bc
$\mu + \beta_j$	$M_{.j.}$	σ^2/ac
$\mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij}$	$M_{ij.}$	σ^2/c
α_i	$M_{i..} – M_{...}$	$\sigma^2(a-1)/n$
β_j	$M_{.j.} – M_{...}$	$\sigma^2(b-1)/n$
γ_{ij}	$(M_{ij.} - M_{i..}) – (M_{.j.} – M_{...})$	$\sigma^2(a-1)(b-1)/n$

Neznámý rozptyl σ^2 nahradíme jeho odhadem $s^2 = \dfrac{S_e}{n - ab}$.

Příklad:

Byly zkoumány výnosy sena (v q/ha) v závislosti na typu půdy (řádkový faktor A, úroveň 1 – normální půda, úroveň 2 – kyselá půda) a na způsobu hnojení (sloupcový faktor B, úroveň 1 – bez hnojení, úroveň 2 – hnojení chlévskou mrvou, úroveň 3 – hnojení vápenatým hnojivem). Každá kombinace faktorů A a B byla realizována čtyřikrát nezávisle na sobě. Výnosy sena jsou uvedeny v tabulce:

		B		
		Bez hnojení	Chlévská mrva	Vápenaté hnojivo
A	Normální půda	28 32 30 30	37 36 39 36	34 38 37 36
	Kyselá půda	31 27 30 29	34 34 30 38	42 40 41 39

Na hladině významnosti 0,05 máme posoudit vliv typu půdy a způsobu hnojení (včetně případných interakcí) na výnosy sena.

Řešení:

Použijeme analýzu rozptylu dvojného třídění s interakcemi. Přitom a = 2, b = 3, c = 4, n = abc = 24. Nebudeme provádět pomocné výpočty, ale rovnou uvedeme tabulku výsledků.

Zdroj variability	součet čtverců	st. vol.	podíl S/f	$F = \dfrac{S/f}{S_E/f_E}$
typ půdy	0,166	1	0,166	0,04
způsob hnojení	318,25	2	159,125	41,81
interakce	55,084	2	27,542	7,24
reziduální	68,5	18	3,8056	-
celkem	442	23	-	-

Odpovídající kvantily:

pro řádkový efekt $F_{0,95}(1,18) = 4,41$, pro sloupcový efekt $F_{0,95}(2,18) = 3,55$, pro interakce $F_{0,95}(2,18) = 3,55$.

Protože $F_A = 0,04 < 4,41$, nezamítáme na hladině významnosti 0,05 hypotézu, že typ půdy neovlivňuje výnos sena.

Dále $F_B = 41,81 \geq 3,55$, tedy na hladině významnosti 0,05 se prokázal rozdíl mezi použitými způsoby hnojení.

Jelikož $F_{AB} = 7,24 \geq 3,55$, zamítáme na hladině významnosti 0,05 hypotézu o nevýznamnosti interakcí (tj. aspoň jeden způsob hnojení působí jinak na půdu normální než kyselou).

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Načteme datový soubor seno.sta se třemi proměnnými A, B, X a 24 případy, kde X – výnos sena, A – typ půdy, B – způsob hnojení. Jednotlivé varianty proměnných A a B mají tento význam: u proměnné A je 1 – normální půda, 2 – kyselá půda, u proměnné B je 1 – bez hnojení, 2 – chlévská mrva, 3 – vápenaté hnojivo.

Nejprve spočítáme průměry ve všech 6 skupinách:
Statistiky – ANOVA – Typ analýzy ANOVA s interakcemi. Metoda specifikace: Rychlé nastavení – OK, Proměnné – Seznam závislých proměnných X, Kategor. nezáv, prom. (faktory) A, B – OK – Možnosti – Parametrizace – zaškrtneme Bez absolutního členu – odškrtneme Sigma omezená – OK – Průměry – Pozorované, nevážené.

A*B; Nevážené průměry (seno.sta)
Současný efekt: F(2, 18)=7,2372, p=,00494
Dekompozice typu III

Č. buňky	A	B	X Průměr	X Sm.Ch.	X -95,00%	X +95,00%	N
1	normální	bez hnojení	30,00000	0,975392	27,95078	32,04922	4
2	normální	chlévská mrva	37,00000	0,975392	34,95078	39,04922	4
3	normální	vápenaté hnojivo	36,25000	0,975392	34,20078	38,29922	4
4	kyselá	bez hnojení	29,25000	0,975392	27,20078	31,29922	4
5	kyselá	chlévská mrva	34,00000	0,975392	31,95078	36,04922	4
6	kyselá	vápenaté hnojivo	40,50000	0,975392	38,45078	42,54922	4

Nyní provedeme testování hypotéz o vlivu faktorů:
Návrat do ANOVA:Výsledky – Detaily – Všechny efekty.

Dostaneme tabulku analýzy rozptylu dvojného třídění s interakcemi.

Efekt	Jednorozměrné testy významnosti pro X (seno.sta) Přeparametrizovaný model Dekompozice typu III				
	SČ	Stupně volnosti	PČ	F	p
A	0,1667	1	0,1667	0,04380	0,836585
B	318,2500	2	159,1250	41,81387	0,000000
A*B	55,0833	2	27,5417	7,23723	0,004938
Chyba	68,5000	18	3,8056		

Vidíme, že p-hodnota pro testovou statistiku F_B je velmi blízká 0, tedy na hladině významnosti 0,05 zamítáme hypotézu, že způsob hnojení nemá vliv na výnosy sena. Podobně p-hodnota pro testovou statistiku F_{AB} je 0,004938, což znamená, že na hladině významnosti 0,05 zamítáme hypotézu, že způsob hnojení působí na oba typy půd stejně.

Vzhledem k tomu, že rozsahy výběrů v daných šesti skupinách jsou větší než 1 (c = 4), lze ověřit předpoklad o homogenitě rozptylů. Vrátíme se do ANOVA Výsledky a zvolíme Více výsledků – Předpoklady – Levenův test.

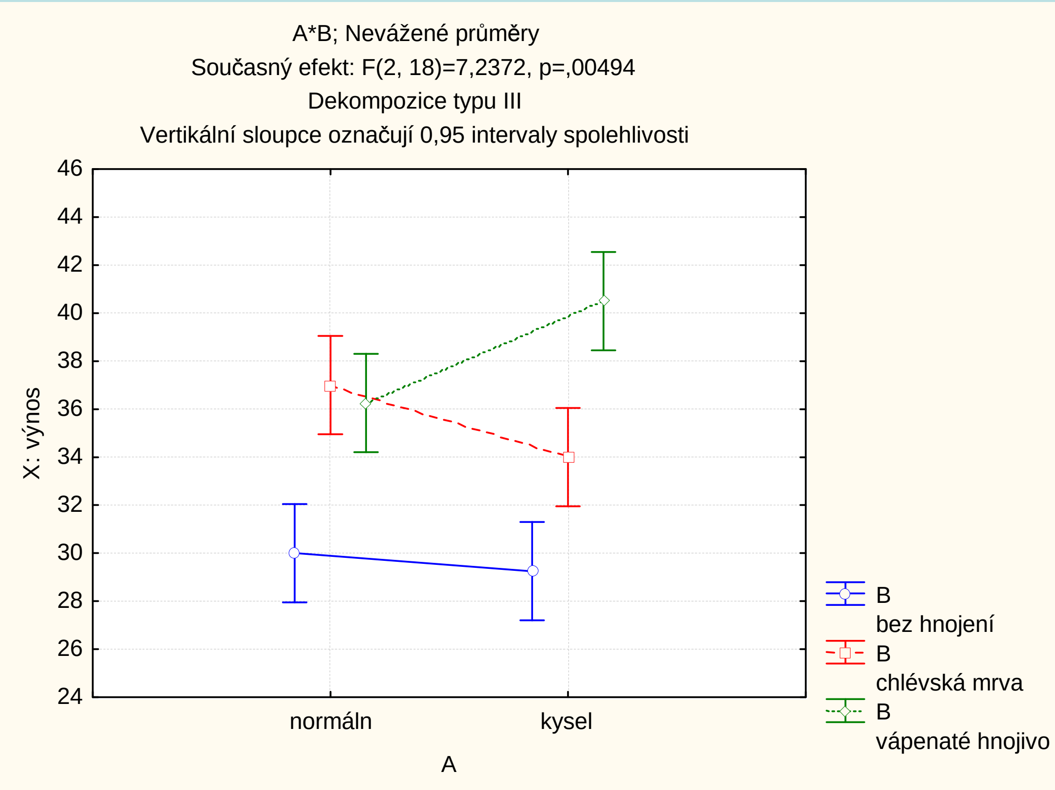
	Leveneův test homogenity rozptylů (seno.sta) Efekt: A*B Stupně volnosti pro všechna F: 5, 18			
	PČ Efekt	PČ Chyba	F	p
X	0,600000	1,555556	0,385714	0,852058

Zjistíme, že p-hodnota je 0,852058, tudíž tedy na hladině významnosti 0,05 nezamítáme hypotézu o homogenitě rozptylů.

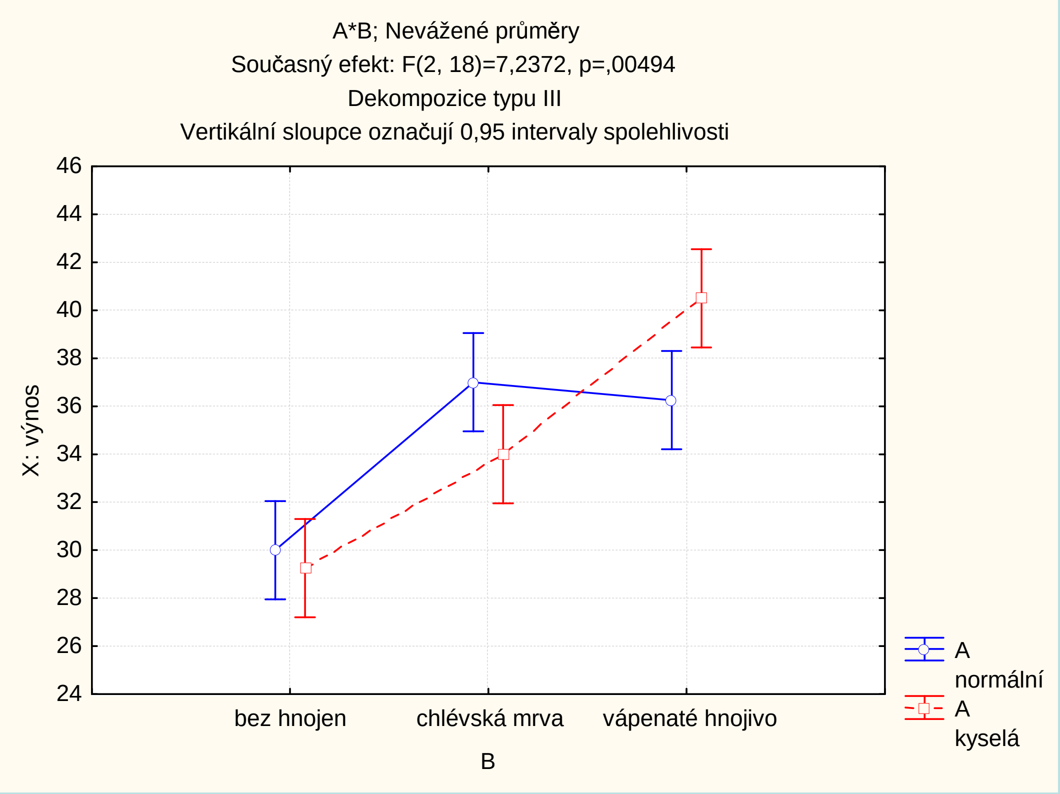
Normalitu všech šesti výběrů můžeme orientačně posoudit rovněž v Předpokladech pomocí N-P plotu.

Ve všech šesti případech lze konstatovat vcelku dobrou shodu s normálním rozložením.

Průměrné výnosy sena (spolu s 95% intervaly spolehlivosti) na normální a kyselé půdě při daných třech způsobech hnojení lze znázornit graficky. V ANOVA Výsledky zvolíme Průměry – Pozorované, nevážené – Graf.
Lze vykreslit graf závislosti průměrného výnosu sena na typu půdy:



nebo graf závislosti průměrného výnosu sena na způsobu hnojení:



V grafu se objevuje křížení, které je typické pro případ, kdy působí interakce mezi faktory A, B.

Analýza reziduí neodhalí žádné zvláštnosti.

Nyní pomocí Tukeyovy metody mnohonásobného porovnávání zjistíme, které dvojice výběrů se liší na hladině významnosti 0,05. Vrátíme se do Anova: Výsledky – klikneme na Více výsledků – Post hoc – Efekt B - Tukeyův HSD.

	Tukeyův HSD test; proměnná X (seno.sta) Přibližné pravděpodobnosti pro post hoc testy Chyba: meziskup. PČ = 3,8056, sv = 18,000			
Č. buňky	B	{1} 29,625	{2} 35,500	{3} 38,375
1	bez hnojení		0,000171	0,000149
2	chlévská mrva	0,000171		0,022412
3	vápenaté hnojivo	0,000149	0,022412	

Vidíme, že na hladině významnosti 0,05 se liší všechny tři dvojice skupin:

Upozornění: Systém STATISTICA umí provádět analýzu rozptylu dvojného třídění i v případě, že třídění není vyvážené. Ukážeme to na následujícím příkladě.

Příklad: V rámci psychologického výzkumu bylo vyšetřeno 856 žáků základních škol. Kromě jiného se zjišťoval jejich inteligenční kvocient (proměnná IQ), vzdělání matky a vzdělání otce (proměnná VZDEL_M, VZDEL_O, mají varianty Z … základní, S … středoškolské, V … vysokoškolské) a místo trvalého bydliště (proměnná SIDLO, má varianty 1 … město, 2 … venkov). Data jsou uložena v souboru IQ_zaku.sta. Na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že proměnné VZDEL_M a SIDLO neovlivňují variabilitu hodnot proměnné IQ. Použijte analýzu rozptylu dvojného třídění s interakcemi.

Výsledek: Na hladině významnosti 0,05 zamítáme hypotézu o nevýznamnosti obou faktorů i jejich interakcí.