Regresní analýza trendu v časových řadách

Pojem časové řady: Časovou řadou rozumíme řadu hodnot $y_{t_1}, \dots, y_{t_n}$ určitého ukazatele uspořádanou podle přirozené časové posloupnosti $t_1 < \dots < t_n$. Jsou-li časové intervaly (t_1, t_2), ..., (t_{n-1}, t_n) stejně dlouhé (ekvidistantní), zjednodušeně zapisujeme časovou řadu jako $y_1, \dots, y_n$. Přitom ukazatel je veličina, která charakterizuje nějaký jev v určitém prostoru a určitém čase (okamžiku či intervalu).

Druhy časových řad

a) Časová řada okamžiková: příslušný ukazatel udává, kolik jevů existuje v daném časovém okamžiku (např. počet obyvatelstva k určitému dnu).

b) Časová řada intervalová: příslušný ukazatel udává, kolik jevů vzniklo či zaniklo v určitém časovém intervalu (např. počet sňatků během roku). Nejsou-li jednotlivé časové intervaly ekvidistantní, musíme provést očištění časové řady od důsledků kalendářních variací.

Příklad: Máme k dispozici údaje o tržbě obchodní organizace (v tis. Kč) v jednotlivých měsících roku 2013: 2400, 2134, 2407, 2445, 2894, 3354, 3515, 3515, 3225, 3063, 2694, 2600. Vypočtěte očištěné údaje.

Řešení: Průměrná délka měsíce je 365/12 dne. Očištěná hodnota

pro leden $y_1^{(o)} = 2400 \cdot \frac{365}{12 \cdot 31} = 2354{,}84$,

pro únor $y_2^{(o)} = 2134 \cdot \frac{365}{12 \cdot 28} = 2318{,}18$.

Pro ostatní měsíce analogicky dostaneme

2361,71; 2478,96; 2839,54; 3400,58, 3448,86; 3448,86; 3269,79; 3005,36; 2731,42; 2551,08.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Vytvoříme nový datový soubor o třech proměnných: trzba, dm (délky jednotlivých měsíců) a ot (očištěná tržba) a 12 případech. Do proměnné trzba zapíšeme zjištěné hodnoty. Do proměnné dm vložíme délky jednotlivých měsíců, tj. 31, 28, 30, …, 31. Do Dlouhého jména proměnné ot napíšeme =trzba*365/(12*dm).

	1 trzba	2 dm	3 ot
1	2400	31	2354,839
2	2134	28	2318,185
3	2407	31	2361,707
4	2445	30	2478,958
5	2894	31	2839,543
6	3354	30	3400,583
7	3515	31	3448,858
8	3515	31	3448,858
9	3225	30	3269,792
10	3063	31	3005,363
11	2694	30	2731,417
12	2600	31	2551,075

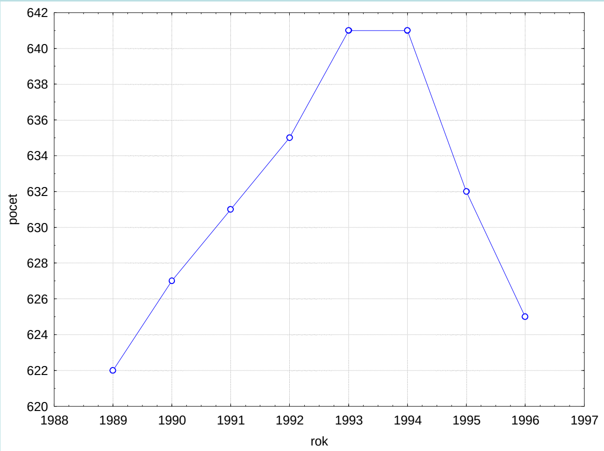
Grafické znázornění okamžikové časové řady
Použijeme spojnicový diagram. Na vodorovnou osu vynášíme časové okamžiky $t_1, \ldots, t_n$, na svislou osu odpovídající hodnoty $y_1, \ldots, y_n$. Dvojice bodů (t_i, y_i), $i = 1, \ldots, n$ spojíme úsečkami.

Příklad: Časová řada obsahuje údaje o počtu zaměstnanců určité akciové společnosti v letech 1989 – 1996 vždy k 31.12.

1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
622	627	631	635	641	641	632	625

Znázorněte tuto časovou řadu graficky.

Řešení pomocí systému STATISTICA:
Vytvoříme datový soubor o dvou proměnných nazvaných rok a pocet a 8 případech.
Grafy – Bodové grafy – odškrtneme Lineární proložení – Proměnné X – rok, Y – počet – OK – OK. 2x klikneme na pozadí grafu – vybereme Graf: obecné – zaškrtneme Spojnice – OK.



Grafické znázornění intervalové časové řady

Použijeme sloupkový diagram. Je to soustava obdélníků, kde šířka obdélníku je rovna délce intervalu a výška odpovídá hodnotě ukazatele v daném intervalu. Ke znázornění intervalové časové řady lze použít i spojnicový diagram, přičemž na vodorovnou osu vynášíme středy příslušných intervalů.

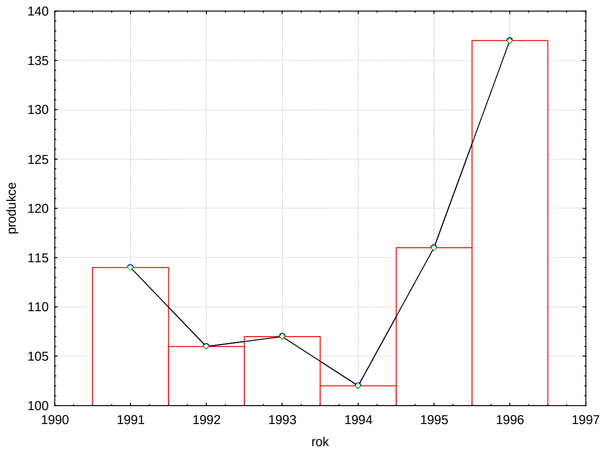
Příklad: Máme k dispozici údaje o produkci určitého podniku (v tisících výrobků) v letech 1991-1996.

1991	1992	1993	1994	1995	1996
114	106	107	102	116	137

Znázorněte tuto časovou řadu graficky.

Řešení pomocí systému STATISTICA:

Vytvoříme datový soubor o dvou proměnných nazvaných rok a produkce a 6 případech.
Grafy – Bodové grafy – odškrtneme Lineární proložení – Proměnné X – rok, Y – produkce – OK – OK. 2x klikneme na pozadí grafu – vybereme Graf: obecné – zaškrtneme Spojnice – Přidat nový graf – typ Sloupcový graf – OK. Do sloupců označených jako Nový1, Nový2 okopírujeme hodnoty proměnných rok a produkce. Ve Všech možnostech: Sloupce upravíme šířku sloupce na 1.



Aditivní model časové řady

Předpokládejme, že pro časovou řadu $y_1, \ldots, y_n$ platí model

$$y_t = f(t) + \varepsilon_t, \; t = 1, \ldots, n, \text{ kde}$$

$f(t)$ je neznámá trendová funkce (trend), kterou považujeme za systematickou (deterministickou) složku časové řady (popisuje hlavní tendenci dlouhodobého vývoje časové řady),

ε_t je náhodná složka časové řady zahrnující odchylky od trendu. Náhodná složka splňuje předpoklady

$E(\varepsilon_t) = 0$,

$D(\varepsilon_t) = \sigma^2$,

$C(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+h}) = 0$,

$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ (říkáme, že ε_t je bílý šum).

Odhad trendu časové řady pomocí klouzavých průměrů

Podstata klouzavých průměrů

Předpokládáme, že časová řada se řídí aditivním modelem

$y_t = f(t) + \varepsilon_t$, $t = 1, ..., n$.

Odhad trendu v bodě t získáme určitým zprůměrováním původních pozorování z jistého okolí uvažovaného časového okamžiku t. Můžeme si představit, že podél dané časové řady klouže okénko, v jehož rámci se průměruje.
Nejprve musíme zvolit délku okna h > 1, v němž se bude počítat průměrná hodnota h pozorovaných hodnot y_i, $i = z, z+1, \dots, z+h-1$ v po sobě jdoucích časech $t = t_z$, $t = t_{z+1}$, …, $t = t_{z+h-1}$. Hodnota z představuje začátek okna.

a) Nechť šířka h vyhlazovacího okénka je liché číslo: h = 2d + 1. Pak $\hat{y}_{z+d} = \frac{1}{2d+1}\sum_{i=1}^{2d+1} y_{z+i-1}$ pro z = 1, …, n – 2d. Vypočtený průměr se přiřadí časovému okamžiku, který odpovídá středu okna.

b) Nechť šířka h vyhlazovacího okénka je sudé číslo: h = 2d. Pak $\hat{y}_{z+d} = \frac{1}{4d}\left(\sum_{i=1}^{2d} y_{z+i-1} + \sum_{i=1}^{2d} y_{z+i}\right)$ pro z = 1, …, n – 2d. Odhad trendu v bodě t se vypočte jako průměr ze dvou klouzavých průměrů, které příslušejí časovým okamžikům nejblíže vlevo a vpravo od středu okna. Tento průměr se přiřadí nejblíže většímu okamžiku od středu okna.

Hodnoty centrovaného klouzavého průměru a trendové funkce $\widehat{f}(t)$ jsou definovány v časech $t = t_{d+1},\ t = t_{d+2},\ \ldots,\ t = t_{n-d}$.

Šířka vyhlazovacího okénka

Velmi důležitou otázkou je stanovení šířky vyhlazovacího okénka. Je-li okénko příliš široké, bude se odhad trendu blížit přímce (říkáme, že je přehlazen) a zároveň se ztratí velký počet členů na začátku a na konci časové řady. Je-li naopak okénko úzké, bude se odhad trendu blížit původním hodnotám (říkáme, že odhad je podhlazen). Nejčastěji se volí šířka okénka h = 3, 5, 7, pro čtvrtletní hodnoty pak 4.

Příklad: Časová řada 215, 219, 222, 235, 202, 207, 187, 204, 174, 172, 201, 272 udává roční objemy vývozu piva (v miliónech litrů) z Československa v letech 1980 až 1991.

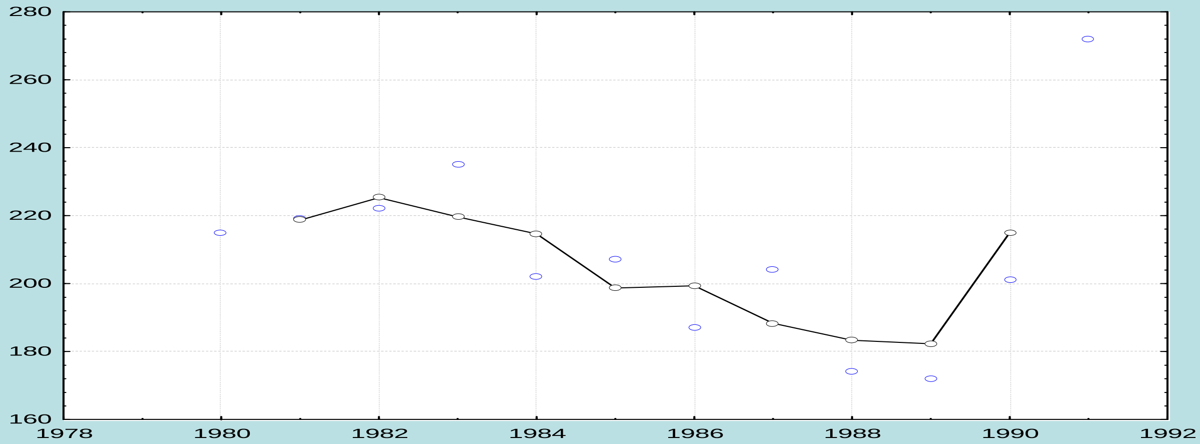
a) Odhadněte trend této časové řady pomocí klouzavých průměrů s vyhlazovacím okénkem šířky 3 a poté 5.
b) Graficky znázorněte průběh časové řady s odhadnutým trendem.

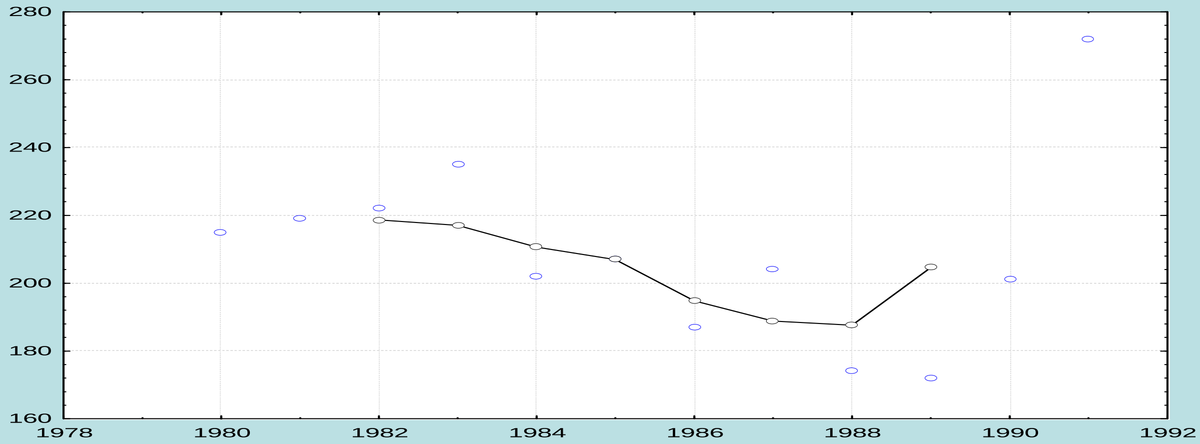
Řešení pomocí systému STATISTICA:

Vytvoříme datový soubor export_piva.sta o dvou proměnných ROK a VYVOZ a dvanácti případech. Statistiky – Pokročilé lineární/nelineární modely – Časové řady/predikce – Proměnné Y – OK– OK (transformace, autokorelace, křížˇ. korelace, grafy) – Vyhlazování – zaškrtneme N-bod. klouzavý průměr, N = 3 – OK (Transformovat vybrané řady) – vykreslí se graf, vrátíme se do Transformace proměnných – Uložit proměnné. Otevře se nový spreadsheet, kde v proměnné VYVOZ_1 jsou uloženy klouzavé průměry pro N = 3. Totéž uděláme pro případ N = 5. Ve spreadsheetu se proměnná VYVOZ_1 přepíše na VYVOZ_2 a nová proměnná se uloží jako VYVOZ_1. Nově vzniklé proměnné nazveme KP3 a KP5. K datovému souboru přidáme proměnnou ROK, do jejíhož Dlouhého jména napíšeme =1979+v0.

	export_piva.sta			
	1 rok	2 VYVOZ	3 KP3	4 KP5
1	1980	215,000		
2	1981	219,000	218,667	
3	1982	222,000	225,333	218,600
4	1983	235,000	219,667	217,000
5	1984	202,000	214,667	210,600
6	1985	207,000	198,667	207,000
7	1986	187,000	199,333	194,800
8	1987	204,000	188,333	188,800
9	1988	174,000	183,333	187,600
10	1989	172,000	182,333	204,600
11	1990	201,000	215,000	
12	1991	272,000		

Grafické znázornění časové řady s odhadnutým trendem provedeme pomocí vícenásobných bodových grafů.





Cíl regresní analýzy trendu

Regresní analýza trendu má objasnit vztah mezi závisle proměnnou veličinou Y a časem t.

Předpokládáme, že trend f(t) závisí (lineárně či nelineárně) na neznámých parametrech $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_k$ a známých funkcích $\varphi_0(t), \varphi_1(t), ..., \varphi_k(t)$, které již neobsahují žádné neznámé parametry, tj.

$f(t) = g(\beta_0, \beta_1, ..., \beta_k; \varphi_0(t), \varphi_1(t), ..., \varphi_k(t))$.

Odhady $b_0, b_1, ..., b_k$ neznámých parametrů $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_k$ lze získat např. metodou nejmenších čtverců a pak vyjádřit odhad $\hat{f}(t)$ neznámého trendu v bodě t pomocí odhadů $b_0, b_1, ..., b_k$ a funkcí $\varphi_0(t), \varphi_1(t), ..., \varphi_k(t)$, tj.

$\hat{f}(t) = g(b_0, b_1, ..., b_k; \varphi_0(t), \varphi_1(t), ..., \varphi_k(t))$.

Nejdůležitější typy trendových funkcí

Volba typu trendové funkce se provádí

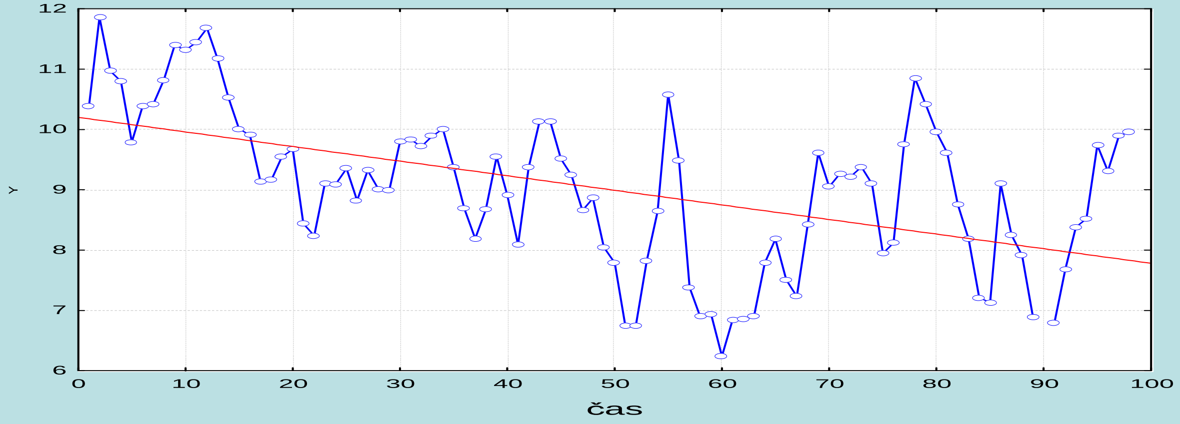
- na základě teoretických znalostí a zkušeností se zkoumanou veličinou Y_t
- pomocí grafu časové řady
- pomocí informativních testů založených na jednoduchých charakteristikách časové řady

a) Lineární trend

Analytické vyjádření: $f(t) = \beta_0 + \beta_1 t$

Informativní test: 1. diference ($\Delta y_t = y_t - y_{t-1}, t = 2, \ldots, n$) jsou přibližně konstantní.

Příklad lineárního trendu:

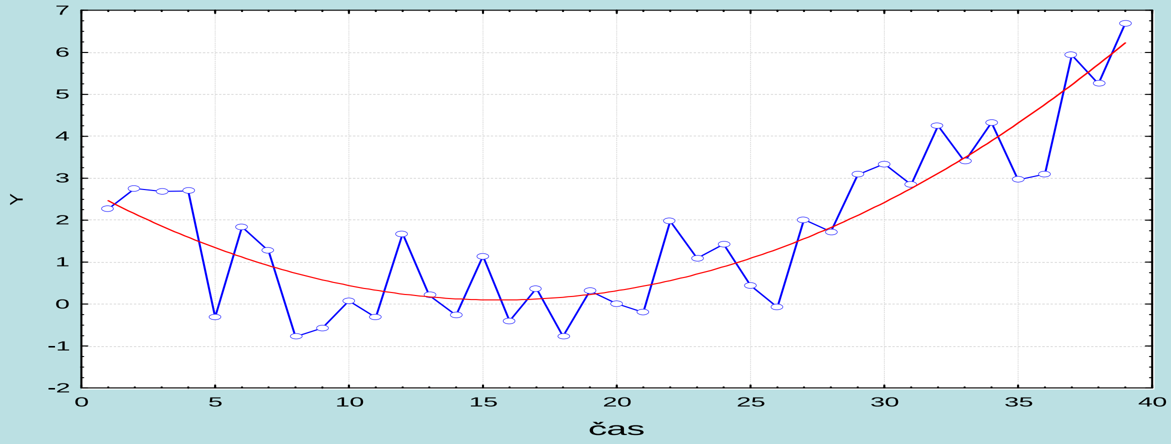


b) Kvadratický trend

Analytické vyjádření: $f(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2$

Informativní test: 1. diference mají přibližně lineární trend, 2. diference ($\Delta^{(2)} y_t = \Delta y_t - \Delta y_{t-1} = y_t - 2y_{t-1} + y_{t-2}, t = 3, \ldots, n$) jsou přibližně konstantní.

Příklad kvadratického trendu:



c) Exponenciální trend

Analytické vyjádření: $f(t) = \beta_0 \beta_1^{\,t}$.

Informativní test: koeficienty růstu $\left(k_t = \dfrac{y_t}{y_{t-1}}, t = 2, \ldots, n\right)$ jsou přibližně konstantní.

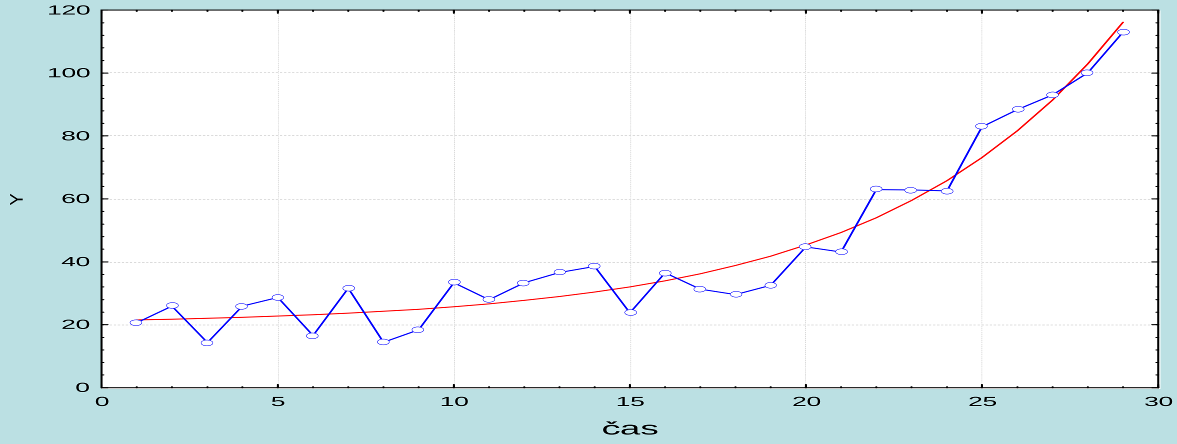
Příklad exponenciálního trendu:

d) Modifikovaný exponenciální trend

Analytické vyjádření: $f(t) = \alpha + \beta_0 \beta_1^{\,t}$.

Informativní test: řada podílů sousedních 1. diferencí je přibližně konstantní.

Příklad modifikovaného exponenciálního trendu

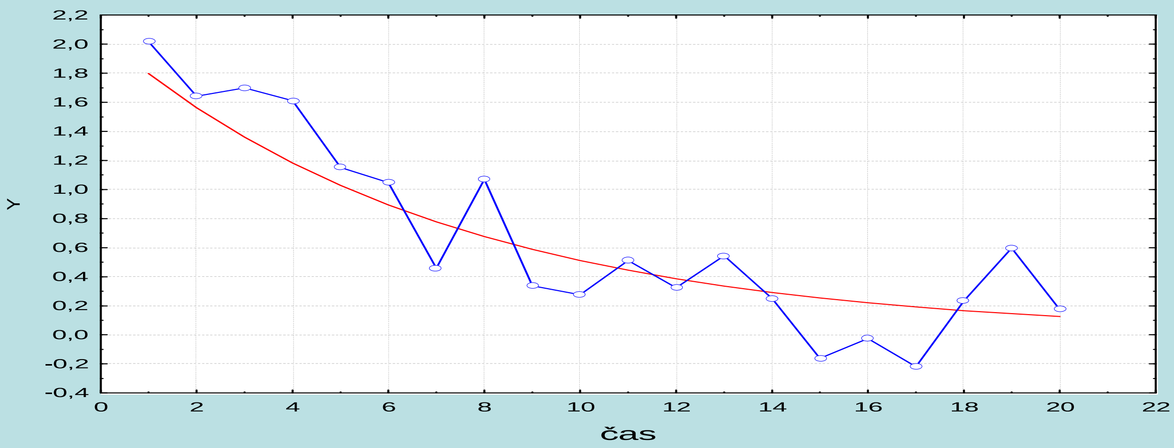


e) Logistický trend

Analytické vyjádření: $f(t) = \dfrac{\alpha}{1+\beta_0\beta_1^{\,t}}$

Informativní test: průběh 1. diferencí je podobný Gaussově křivce a podíly $\dfrac{1/y_{t+2} - 1/y_{t+1}}{1/y_{t+1} - 1/y_t}$ jsou přibližně konstantní.

Příklad logistického trendu:

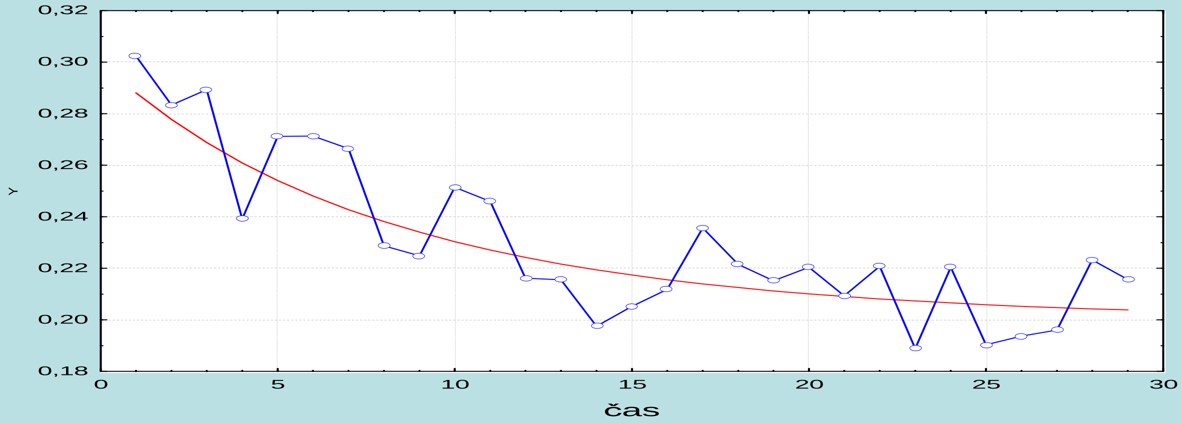


f) Gompertzova křivka

Analytické vyjádření: $f(t) = \alpha\beta_0^{\beta_1^t}$

Informativní test: podíly $\dfrac{\ln y_{t+2} - \ln y_{t+1}}{\ln y_{t+1} - \ln y_t}$ jsou přibližně konstantní.

Příklad Gompertzovy křivky



Příklad:
Je dána časová řada potratů (v tisících) v ČR v letech 1990 až 2007 – viz datový soubor potrat_1990_2007.sta.

Předpokládejte, že tato časová řada má kubický trend. Odhadněte parametry trendové funkce.

Vypočtěte index determinace ID^2.

Proveďte celkový F-test.

Proveďte dílčí t-testy.

Proveďte analýzu reziduí.

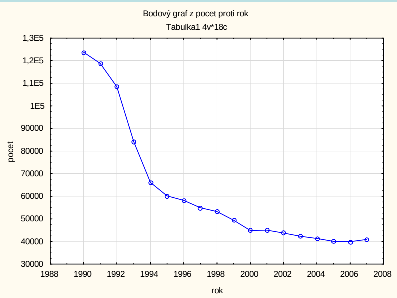
Sestrojte 95% intervaly spolehlivosti pro parametry trendové funkce.

Stanovte střední absolutní procentuální chybu predikce (MAPE).

Graficky znázorněte průběh časové řady s odhadnutým trendem, 95% pásem spolehlivosti a 95% predikčním pásem.

Řešení v systému STATISTICA:
Vytvoříme datový soubor o 5 proměnných rok, počet, t, t2, t3 a 18 případech. Do proměnné rok uložíme 1990 až 2007, do proměnné počet zapíšeme zjištěné hodnoty, do proměnné t uložíme pořadová čísla 1 až 18, do proměnné t2 druhé mocniny pořadových čísel, do proměnné t3 třetí mocniny pořadových čísel.

Grafické znázornění časové řady:
Grafy – Bodové grafy – Proměnné X ROK, Y POCET – OK – vypneme Lineární proložení– OK.
Formát – Všechny možnosti – Graf: Obecné – zaškrtneme Spojnice – OK. Vznikne spojnicový diagram.



Trendová funkce $\hat{f}(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3$

Získání odhadů parametrů:
Statistiky – Vícenásobná regrese – Proměnné Závislé, Nezávislé t, t2, t3 - OK

N=18	Výsledky regrese se závislou proměnnou : pocet (potrat_1990_2007.sta) R= ,98734800 R2= ,97485606 Upravené R2= ,96946808 F(3,14)=180,93 p<,00000 Směrod. chyba odhadu : 4856,5					
	b*	Sm.chyba z b*	b	Sm.chyba z b	t(14)	p-hodn.
Abs.člen			151202,6	5726,843	26,40243	0,000000
t	-4,24339	0,487857	-22092,2	2539,917	-8,69801	0,000001
t2	5,73022	1,150334	1525,7	306,288	4,98136	0,000201
t3	-2,37604	0,704909	-35,8	10,615	-3,37071	0,004572

Odhadnutá trendová funkce má tedy tvar:

$\hat{f}(t) = 151202{,}6 - 22092{,}2t + 1525{,}7t^2 - 35{,}8t^3$, kde t = 1, …, 18.

Index determinace je 0,975, tedy kubická trendová funkce vysvětluje variabilitu dané časové řady z 97,5 %.

N=18	Výsledky regrese se závislou proměnnou : pocet (potrat_1990_2007.sta) R= ,98734800 R2= ,97485606 Upravené R2= ,96946808 F(3,14)=180,93 p<,00000 Směrod. chyba odhadu : 4856,5					
	b*	Sm.chyba z b*	b	Sm.chyba z b	t(14)	p-hodn.
Abs.člen			151202,6	5726,843	26,40243	0,000000
t	-4,24339	0,487857	-22092,2	2539,917	-8,69801	0,000001
t2	5,73022	1,150334	1525,7	306,288	4,98136	0,000201
t3	-2,37604	0,704909	-35,8	10,615	-3,37071	0,004572

Testová statistika celkového F-testu je 180,93, p-hodnota je blízká 0, tedy na hladině významnosti 0,05 zamítáme hypotézu o nevýznamnosti modelu jako celku.

Všechny čtyři dílčí t-testy mají p-hodnoty menší než 0,05, tedy na hladině významnosti 0,05 zamítáme hypotézy o nulovosti parametrů β_0, β_1, β_2, β_3.

Posouzení nezávislosti reziduí pomocí Durbinovy – Watsonovy statistiky:

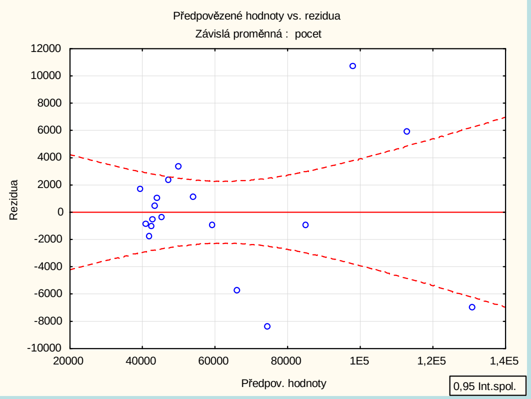
Statistiky – Vícenásobná regrese – proměnná Závislá: y, nezávislá t, t2, t3 – OK – na záložce Residua/předpoklady/předpovědi vybereme Reziduální analýza - Detaily – Durbin-Watsonova statistika:

	Durbin-Watson.d	Sériové korelace
Odhad	1,326973	0,262189

Hodnota D-W statistiky je poněkud nízká, ale podle testu autokorelace je vše v pořádku.

Posouzení homoskedasticity reziduí

Reziduální analýza – Bodové grafy – Předpovědi vs. rezidua



Testování nulovosti střední hodnoty reziduí:

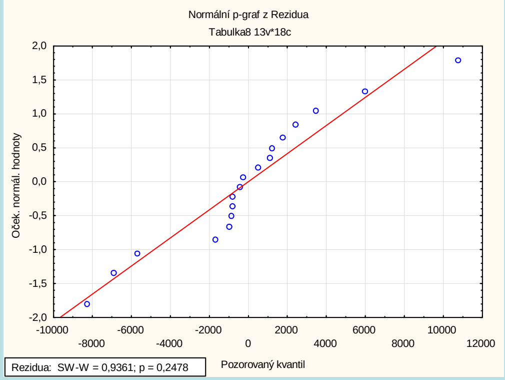
Pro proměnnou Rezidua z tabulky uložené pomocí Reziduální analýzy provedeme jednovýběrový t-test: Statistiky - Základní statistiky/tabulky – t-test, samost. vzorek – OK – proměnné Rezidua – OK.

Proměnná	Test průměrů vůči referenční konstantě (hodnotě) (Tabulka8) Průměr	Sm.odch.	N	Sm.chyba	Referenční konstanta	t	SV	p
Rezidua	-0,000217	4407,230	18	1038,794	0,00	-0,000000	17	1,000000

Na hladině významnosti 0,05 nezamítáme hypotézu, že střední hodnota reziduí je 0.

Ověření normality reziduí

Sestrojíme N-P plot reziduí a současně provedeme S-W test:



S-W test poskytuje p-hodnotu 0,2478, tedy na hladině významnosti 0,05 nezamítáme hypotézu o normalitě reziduí.

Sestrojení 95% intervalů spolehlivosti pro parametry trendu:

Ve výstupní tabulce výsledků regrese přidáme za proměnnou Úroveň p dvě nové proměnné dm (pro dolní meze 95% intervalů spolehlivosti) a hm (pro horní meze 95% intervalů spolehlivosti). Do Dlouhého jména proměnné dm resp. hm napíšeme: =v3-v4*VStudent(0,975;14) resp. =v3+v4*VStudent(0,975;1)

	Výsledky regrese se závislou proměnnou : pocet (potrat_1990_2007.sta) R= ,98734800 R2= ,97485606 Upravené R2= ,96946808 F(3,14)=180,93 p<,00000 Směrod. chyba odhadu : 4856,5							
N=18	b*	Sm.chyba z b*	b	Sm.chyba z b	t(14)	p-hodn.	dm =v3-v4*	hm =v3+v4
Abs.člen			151202,6	5726,843	26,40243	0,000000	138919,722	163485,435
t	-4,24339	0,487857	-22092,2	2539,917	-8,69801	0,000001	-27539,807	-16644,647
t2	5,73022	1,150334	1525,7	306,288	4,98136	0,000201	868,806265	2182,64988
t3	-2,37604	0,704909	-35,8	10,615	-3,37071	0,004572	-58,549301	-13,01365

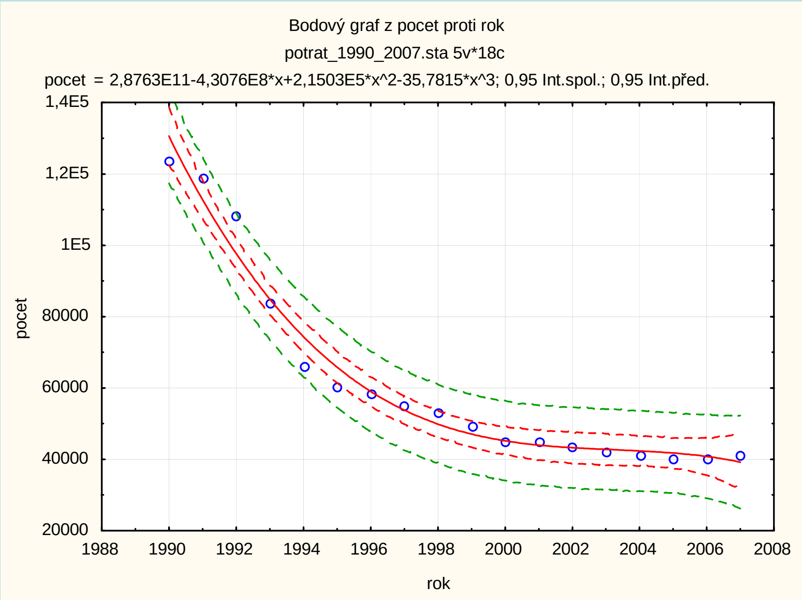
Vidíme, že $138920 < \beta_0 < 163485$ s pravděpodobností aspoň 0,95, $-27540 < \beta_1 < -16645$, $868{,}8 < \beta_2 < 2182{,}6$
$-58{,}5 < \beta_3 < -13$ s pravděpodobností aspoň 0,95.

Výpočet MAPE:

Ve tabulce s uloženými rezidui odstraníme proměnné 8 – 13, přidáme proměnnou chyby a do jejího Dlouhého jména napíšeme =100*abs(v7/v2). Pak spočteme průměr této proměnné a zjistíme, že MAPE = 4,27%.

Graf časové řady s proloženým kvadratickým trendem a pásem spolehlivosti a predikčním pásem získáme takto:

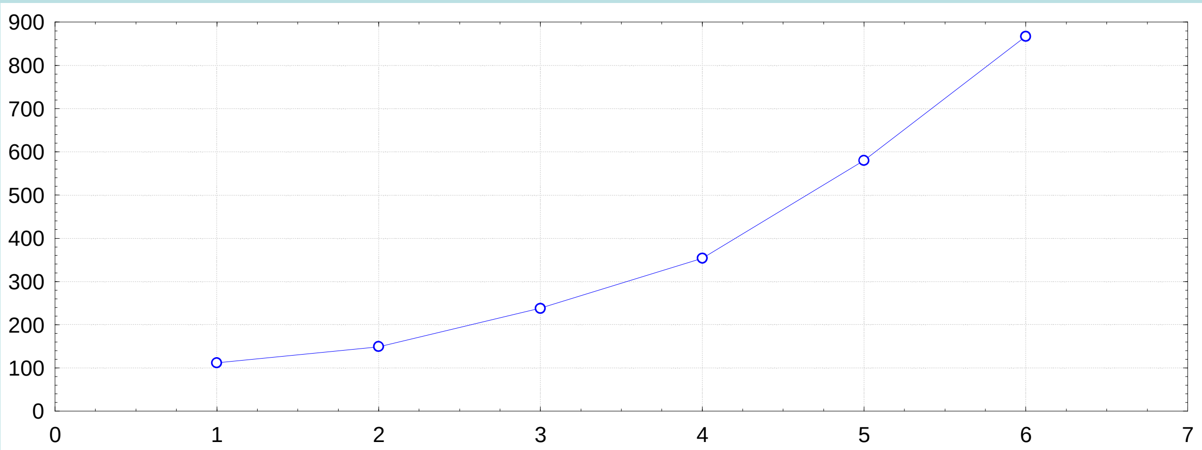
Grafy – Bodové grafy – Proměnné X ROK, Y POCET – OK – Detaily Proložení Polynomiální. Ve vytvořeném grafu 2x klikneme na pozadí, vybereme Graf: Regresní pásy – Přidat nový pár pásů – Typ Spolehlivostní – OK. Totéž provedeme ještě jednou a nyní zaškrtneme Typ Predikční.



Příklad: Časová řada 112, 149, 238, 354, 580, 867 udává zisk (v tisících dolarů) jisté společnosti v prvních šesti letech její existence.
a) Graficky znázorněte průběh této časové řady.
b) Vypočtěte koeficienty růstu a graficky je znázorněte.
c) Z grafu časové řady a chování koeficientů růstu lze usoudit, že časová řada má exponenciální trend $f(t) = \beta_0 \beta_1^t$.
Odhadněte jeho parametry.
d) Najděte odhad zisku společnosti v 7. a 8. roce její existence.
e) Zjistěte index determinace a sestrojte graf $\left(y_t, \hat{f}(t)\right)$, t = 1, ..., 6.

Řešení pomocí systému STATISTICA:
Vytvoříme datový soubor se dvěma proměnnými čas a Y a 6 případy.

ad a) Graficky znázorníme průběh této časové řady:
Grafy – Bodové grafy – Proměnné čas, Y – OK – vypneme proložení – OK.



ad b) Výpočet koeficientů růstu:
Statistiky – Pokročilé lineární/nelineární modely – Časové řady/predikce – Proměnné Y – OK – OK (transformace, autokorelace, kříž. korelace, grafy) – Posun – Posun řad vzad - OK (transformovat vybrané řady) – návrat do transformace proměnných – Uložit proměnné.
Ve výstupní tabulce máme proměnné Y a Y_1:

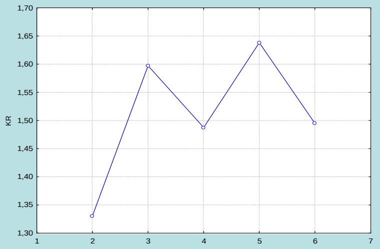
	1 Y	2 Y_1
0		112,000
1	112,000	149,000
2	149,000	238,000
3	238,000	354,000
4	354,000	580,000
5	580,000	867,000
6	867,000	
7		

Za proměnnou Y_1 přidáme proměnnou KR a do jejího Dlouhého jména napíšeme =v2/v1.

	1 Y	2 Y_1	3 KR
0		112,000	
1	112,000	149,000	1,330357
2	149,000	238,000	1,597315
3	238,000	354,000	1,487395
4	354,000	580,000	1,638418
5	580,000	867,000	1,494828
6	867,000		
7			

Vytvoření grafu koeficientů růstu:

Klikneme pravým tlačítkem na název proměnné KR – Grafy bloku dat – Spojnicový graf: celé sloupce



Vidíme, že koeficienty růstu jsou přibližně konstantní.

ad c) Parametry modelu $f(t) = \beta_0 \beta_1^{\,t}$ odhadneme pomocí nelineární regrese:

Statistiky – Pokročilé lineární/nelineární odhady - Nelineární odhady - Vlastní regrese(MNČ) - OK. Do odhadované funkce vepíšeme y=beta0*beta1^cas - OK

Otevře se okno s názvem Odhad nelineárního modelu metodou nejmenších čtverců. Na liště Základní výsledky máme na výběr mezi Levenbergovou - Marquardtovou a Gaussovou - Newtonovou iterační metodou - jednu z nich zvolíme.

Na liště Detailní výsledky máme v případě problémů možnost změnit počet iterací, požadovanou přesnost a počáteční hodnoty parametrů.

Pokračujeme OK - otevře se okno Výsledky. Na liště Základ zvolíme Souhrn: Odhady parametru a získáme tabulku:

	Model je: y=beta0*beta1^cas (zisk_spolecnosti.sta) Záv.prom.:Y Hladina spolehlivosti:95.0% (alfa =0.050)					
	Odhad	Standard chyba	t-hodn. sv = 4	p-hodn.	Dol. sp. Mez	Hor. sp. Mez
beta0	65,35424	3,575415	18,27879	0,000053	55,42730	75,28119
beta1	1,53973	0,015590	98,76297	0,000000	1,49644	1,58301

Odhadnutý model má tvar: $y = 65{,}35424 \cdot 1{,}53973^{cas}$

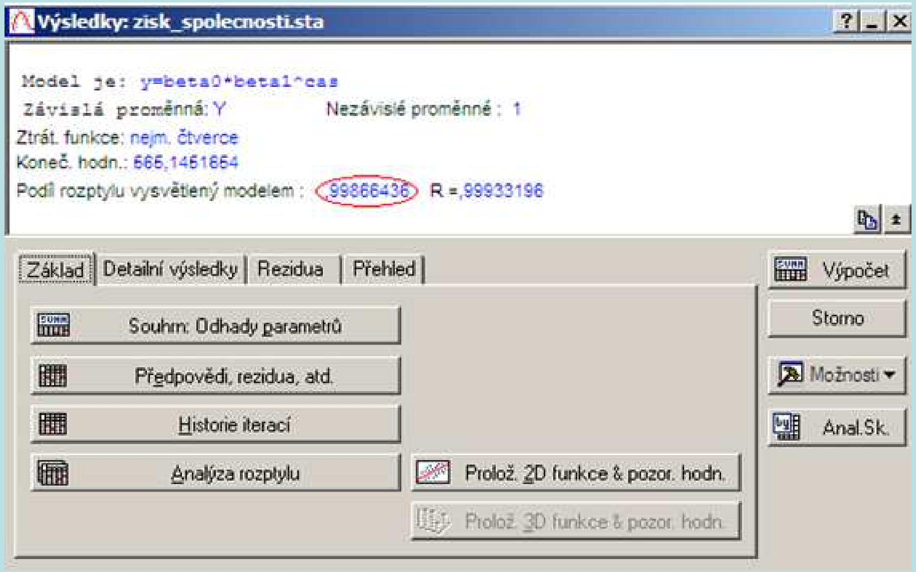
Oba parametry jsou významné na hladině významnosti 0,05.

ad d) Odhad zisku společnosti v 7. a 8. roce existence: Ve výstupní tabulce regrese odstaníme všechny proměnné kromě proměnné Odhad a sloupec parametrů transponujeme (Data – Transponovat – Soubor – OK)
Přidáme dvě nové proměnné Y7, Y8 a do Dlouhého jména proměnné Y7 napíšeme =v1*v2^7 (resp. do Dlouhého jména proměnné Y8 napíšeme =v1*v2^8).

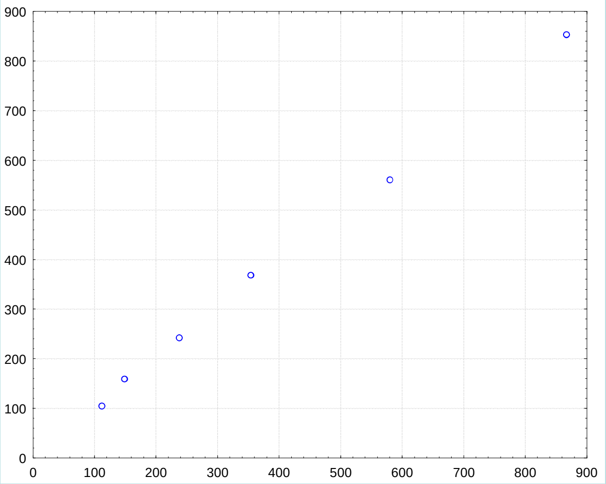
	1 beta0	2 beta1	3 y7	4 y8
Odhad	65,3542445	1,53972973	1340,866	2064,571

Předpověď zisku v 7. roce existence společnosti je tedy 1340,866 tisíc dolarů a v 8. roce 2064,571 tisíc dolarů.

ad e) Index determinace je ID^2 = 0,9987, jak je uvedeno v záhlaví tabulky regresní analýzy.



Graf závislosti predikovaných hodnot na hodnotách časové řady vytvoříme tak, že na liště Rezidua vybereme Pozorování vs. Předpovědi.



Jak index determinace, tak graf $\left(y_t, \hat{f}(t)\right)$ svědčí o tom, že model byl zvolen správně.

Můžeme též nakreslit dvourozměrný tečkový diagram s odhadnutou regresní křivkou:
Na liště Základ vybereme Prolož. 2D funkce & pozor. hodn.