Úvod

Splajn je anglické slovo (spline) znamenající pružinu na rýsování křivek. Začátky teorie, která vyústila ve splajny, jsou dávné. Spočívala v propojení bodů křivky empiricky zadané několika body v rovině. Přesněji řečeno, je zadáno n čísel $x_1, x_2, ..., x_n$ na ose x a k nim jsou empiricky stanoveny hodnoty $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n)$ nějaké veličiny (např. fyzikální). Přirozený požadavek je proložit body $(x_i, f(x_i))$ křivku, která by vyjadřovala (pravděpodobný) průběh oné veličiny na celém intervalu (x_1, x_n). Pro tu funkci $f(x)$, kterou máme zkonstruovat, jsou ovšem požadovány některé vlastnosti, které jsou (podle zkušenosti) známy o zkoumané veličině, např. spojitost nebo i spojitost derivace apod. Tento postup, kterému říkáme *interpolace dat*, není ovšem úplně zadán. Nejpřirozenější postup je ten, že mezi uzly $(x_i, f(x_i))$ proložíme např. části polynomů a jejich styčné body podrobíme nějaké podmínce. To je princip tzv. interpolačních splajnů.

Je jasné, že nejen volba spojek mezi uzly, ale i chyby měření se podepíší na kvalitě a interpolační hodnotě získané funkce. Nezbývá než brát zadané uzly jen jako orientační body konstruované funkce a vytvořit funkci, která by s jistou přibližností, ale s předepsanou hladkostí aproximovala neznámou funkci, jež představuje průběh měřené veličiny. Metody počtu pravděpodobnosti a statistiky umožní nahradit nedostatek informací o aproximované funkci. Tuto přibližnou aproximaci nazýváme *vyhlazování dat*; je zprostředkována tzv. vyhlazovacími splajny, které budou spolu s interpolačními splajny na programu našeho zkoumání.

Ve stručnosti, co ve spisu je. Po úvodních výkladech, které řeší problém ve velké obecnosti (a je dobrým vodítkem i pro vícerozměrné splajny), jsou probrány otázky speciální, jejichž řešení nabízí konkrétní výpočetní algoritmy praktické užitné hodnoty. Úvahy jsou rozprostřeny pouze pro jednorozměrný případ, tedy pro funkce jedné proměnné. Podrobnosti o funkcích více proměnných nejsou diskutovány, i když dřívější obecné úvahy připravují půdu i pro ně. To je jedna věc, která ve spisu chybí. Vzhledem k úvodnímu charakteru textu to není mezera zásadní. Druhá spočívá v neexistenci kapitoly, pojednávající o odhadu chyb.

Nakonec je vhodné připravit čtenáře na to, jaké znalosti se od něho očekávají. Jsou to standardní znalosti z analýzy, základy funkcionální analýzy a základní pojmy ze stochastických procesů. Vypadá to zle. Čtenář však není ponechán na pospas monografiím, které by pohltily mnoho času i zájmu, ale možné mezery ve znalostech jsou doplněny tak, že použité věty z funkcionální analýzy jsou jednotlivě vypsány (s odkazy na literaturu) a pojmy ze statistiky i s potřebnými souvislosmi jsou vyloženy. Takže výzbroj čtenáře spočívá především ve schopnosti úsudku a ovšem v tréninku, kterým prošel v předchozích letech studia matematiky.

Nakonec malé vyhlédnutí za hranice tohoto skripta: jednorozměrný případně dvojrozměrný vyhlazovací splajn vyhladí šum digitálního záznamu zvuku na nosiči případně obrazu na fotografii. Výsledek: zvuk bez rušení, fotografie bez závoje.

Skriptum je určeno pro posluchače magisterských oborů programu matematika a programu aplikovaná matematika.

Závěrem děkuji kolegovi prof. RNDr. Jiřímu Hřebíčkovi, CSc za podnětné připomínky poskytované při psaní textu.

1. Splajny v Hilbertově prostoru ($H-$splajny)

V první kapitole nejprve pojednáme o nezbytných základech teorie splajnů jedné proměnné. Pojem interpolačního a vyhlazovacího splajnu zavedeme variační metodou jako minimizátory jistých funkcionálů, tak jak je do literatury uvedli r. 1968 Anselone a Laurent [2].

Ve vší stručnosti dále pojednáme o otázkách existence a jednoznačnosti splajnů v různých situacích a o otázkách spojených s nalezením algoritmu pro jejich konstrukci za značně obecných podmínek.

Rozvíjíme teorii pokud možno v obecné poloze a postupně specializujeme podmínky, jak to vyžaduje postupující prohlubování teorie. Ukončíme tento proces na takové úrovni obecnosti, která zahrnuje většinu případů vycházejících z praxe (pokud jde o splajny bez vedlejších podmínek jako: monotonie, konvexita a jiná omezení na výběr splajnů). Touto cestou je také vytvářen a aktualizován algoritmus pro konstrukci splajnu. Pro polynomické ($Lg-$)splajny jsou předloženy efektivní algoritmy a programy.

1.1. **Pojem interpolačního a vyhlazovacího splajnu.**

1.1.

Nechť

(1,1) X, Y, Z jsou (reálné) separabilní Hilbertovy prostory

(1,2) $T : X \to Y, A : X \to Z$ spojité lineární operátory.

Zvolme prvek $z \in Z$. Pokud operátorová rovnice $Ax = z$ má řešení, definujeme:

Definice 1.2. *Prvek $s \in X$ se nazývá interpolační splajn prvku $z \in Z$ vzhledem k operátorům T a A, když*

$$Z||Ts||_Y = \min_{x \in A^{-1}(z)} ||Tx||_Y. \tag{1}$$

Říkáme také, že s je splajn interpolující prvek $z \in Z$ vzhledem k T a A.

Za situace, kdy

1) $A^{-1}(z) = \emptyset$

anebo

2) $A^{-1} \neq \emptyset$, ale prvek z je nepřesně vybrán, takže interpolace prvku z je nežádoucí,

zavedeme "korekční" parametr $\rho > 0$ a definujeme

Definice 1.3. *Prvek $s_\rho \in X$ se nazývá vyhlazovací splajn prvku $z \in Z$ vzhledem k operátorům T a A a parametru $\rho > 0$, když*

$$\Phi_\rho(s_\rho) = \rho||Ts_\rho||_Y^2 + ||As_\rho - z||_Z^2 = \min_{x \in X} \rho||Tx||_Y^2 + ||Ax - z||_Z^2. \tag{1}$$

Mluvíme také o splajnu vyhlazujícím prvek $z \in Z$ vzhledem k T, A a ρ. Číslo $\rho > 0$ se nazývá parametr vyhlazení.

Poznámka 1.4.

V případě, že prostor Z je kartézská $N-$tá mocnina prostoru reálných čísel $E, Z = E^N$, definujeme obecnější verzi vyhlazovacího splajnu prvku $z = [z_1, ..., z_n]^T \in E^N$ vzhledem k T a A s vyhlazovacím parametrem v této obecnější podobě: $\rho = [\rho_1, ..., \rho_n]^T \in E^N, \rho_i > 0, i = 1(1)N$. Extremální podmínka 1.3(1) pro vyhlazovací splajn v této obecnější verzi zní pak takto

$$||Ts_\rho||_Y^2 + ||As_\rho - z||_1^2 = \min_{x \in X}[||Tx||_Y^2 + ||Ax - z||_1^2], \tag{1}$$

kde norma $||.||_1$ je definována vztahem

$$||x||_1^2 = \sum_{i=1}^{N}(1/\rho_i)x_i^2.$$

Požadavek 1.4(1) můžeme přepsat ve tvaru

$$\begin{aligned} &||Ts_\rho||_Y^2 + (As_\rho - z)^T Q(As_\rho - z) = \\ &= \min_{x \in X}[||Tx||_Y^2 + (Ax - z)^T Q(Ax - z)], \end{aligned} \tag{2}$$

kde $Q = \mathrm{diag}(1/\rho_1, ..., 1/\rho_N)$, (diagonální matice)
nebo též

$$||Tx||_Y^2 + \sum_{i=1}^{N}(1/\rho_i)[(Ax)_i - z_i]^2 = \min_{\in X}! \tag{3}$$

Předešlou úvahu můžeme ještě zobecnit. Označme $||.||_Z^e$ ekvivalentní normu k normě $||.||_Z$. Pak prvek $s_e \in X$ se nazývá *vyhlazovací splajn prvku $z \in Z$ vzhledem k operátorům T a A a normě $||.||_Z^e$*, když

$$\Phi_e(s_e) = ||Ts_e||_Y^2 + (||As_e - z||_Z^e)^2 = \min_{x \in X}[||Tx||_Y^2 + (||Ax - z||_Z^e)^2]. \tag{4}$$

1.5.

Extremální problém 1.3(1) se obvykle přeformulovává následujícím způsobem.

Lineární prostor
$V = Y \times Z$ *(kartézský součin prostorů* Y *a* Z*) přejde v Hilbertův prostor, když definujeme skalární součin*

$$(v', v'')_V = \rho(y', y'')_Y + (z', z'')_Z,$$

kde $v' = (y', z')$ *a* $v'' = (y'', z'')$ *jsou prvky ve* V*, s příslušnou normou*

$$||v||_V^2 = \rho||y||_Y^2 + ||z||_Z^2 \text{ pro } v = (y, z) \in V.$$

Pak zobrazení

$$S : x \mapsto (Tx, Ax)$$

je spojitý lineární operátor $S : X \to V$*. Pro* $p = (0, z) \in V$ *pak obdržíme*
ekvivalentní definici vyhlazovacího splajnu s_ρ, definice 1.3*:*
s_ρ *je řešení variační úlohy*

$$||Ss_\rho - p||_V^2 = \min_{x \in X} ||Sx - p||_V^2, \text{ kde } p = (0, z) \in V. \qquad (1)$$

Už v této obecné poloze se jeví základní rysy splajnů vyjádřené následujícími charakteristikami 1.6(1) a 1.6(2).

Věta 1.6. *Za předpokladu, že zobrazení* T *a* A *jsou surjektivní a* $N(A) + N(T)$ *je uzavřená množina v* X*, platí*

$$s \in X \text{ řeší } 1.2(1) \;\Leftrightarrow\; s \in A^{-1}(z) \text{ a } Ts \in (TN(A))^\perp, \qquad (1)$$

$$s_\rho \in X \text{ řeší } 1.5(1) \;\Leftrightarrow\; (Ss_\rho - p) \in (SX)^\perp, \qquad (2)$$

kde S *a* p *jsou definovány v* 1.5, $N(A) = \{x \in X : Ax = 0\}$ *je jádro (null space) zobrazení* A *a* $(\cdot)^\perp$ *značí ortogonální doplněk.* (viz [5] Satz 4.1, str. 91). □

1.2. **Existence a jednoznačnost interpolačního splajnu.**

Otázka existence a jednoznačnosti řešení úloh 1.2(1) a 1.5(1) má fundamentální význam. Odvodíme k tomu jisté dostatečné podmínky, které pro svou obecnost budou v dalším dobře aplikovatelné.

Věta 1.7. *Úloha* 1.2(1) *(interpolační splajn) má řešení pro každé* $z \in Z$*, pro něž* $A^{-1}(z) \neq \emptyset$*, jestliže je splněna podmínka*

$$TN(A) \text{ je uzavřená množina v } Y. \qquad (1)$$

(např. [23], 1, § 1.2, Teor.1.1).

Důkaz. Nechť $A^{-1}(z) \neq \emptyset$. Pro každé $x \in A^{-1}(z)$ platí $A^{-1}(z) = x + N(A)$. Z předešlé rovnice vyplývá

$$TA^{-1}(z) = Tx + TN(A).$$

Z 1.7(1) plyne, že $TA^{-1}(z)$ je uzavřená množina v Y. Podmínka 1.2(1) říká, že Ts je prvek v $TA^{-1}(z)$ s nejmenší vzdáleností od $0 \in Y$. Takový prvek v $TA^{-1}(z)$ existuje vzhledem k uzavřenosti $TA^{-1}(z)$. □

Věta 1.8. *Úloha* 1.2(1) (*interpolační splajn*) *má nejvýš jedno řešení pro každé $z \in Z$, pro něž $A^{-1}(z) \neq \emptyset$, je-li splněna podmínka*

$$N(T) \cap N(A) = \emptyset. \tag{1}$$

(např. [23] 1, § 1.2, Teor.1.1)

Důkaz. Předpokládejme, že $A^{-1}(z) \neq \emptyset$ a že existují dvě řešení s_1 a s_2 úlohy 1.2(1). Oba prvky $f_1 = Ts_1$ a $f_2 = Ts_2$, $f_1, f_2 \in TA^{-1}(z)$ mají podle 1.2(1) nejmenší vzdálenost od $0 \in Y$. Odtud $||f_1||_Y = ||f_2||_Y$. V dalším index Y budeme vynechávat. Platí

$$(f_1 + f_2)/2 \in TA^{-1}(z),$$

odkud

$$||f_1|| \leq ||(f_1 + f_2)/2|| \leq (||f_1|| + ||f_2||)/2 = ||f_1||,$$

tedy

$$||f_1|| = 1/2||f_1 + f_2||$$

a analogicky

$$||f_2|| = 1/2||f_1 + f_2||,$$

takže

$$||f_1 + f_2|| = ||f_1|| + ||f_2||.$$

Odtud

$$||f_1||^2 + 2(f_1, f_2) + ||f_2||^2 = ||f_1||^2 + 2||f_1|| \cdot ||f_2|| + ||f_2||^2$$

čili

$$(f_1, f_2)_Y = ||f_1||_Y \cdot ||f_2||_Y.$$

Tento zvláštní případ Schwarzovy nerovnosti nastává pouze v případě, že $f_1 = \lambda f_2,\ \lambda \geq 0$. Z rovnosti $||f_1||_Y = ||f_2||_Y$ pak plyne $\lambda = 1,\ f_1 = f_2 =: f$.

Z tohoto výsledku vyplývá

$$Ts_{1,2} = f,\ As_{1,2} = z,$$

takže pro $g = s_1 - s_2$ platí $Tg = 0,\ Ag = 0$, tj.

$$g \in N(T) \cap N(A) = 0, \quad g = 0,\ s_1 = s_2. \qquad \square$$

Často nastává situace, popsaná v následující větě, za které je splněna podmínka 1.7(1), zaručující existenci splajnu.

Věta 1.9. *Nechť*

$$TX \text{ je uzavřená množina v } Y. \tag{1}$$

a nechť $N(T) \cap N(A) = 0$. *Je-li* $\dim N(T) < \infty$ *nebo je-li podprostor* $AN(T)$ *uzavřený, pak* $TN(A)$ *je uzavřená množina v* Y, *tj. je splněna podmínka* 1.7(1) *pro existenci splajnu* (např. [23] 1, §1.2, Teor.1.2).

Důkaz. Nechť $\{y_k\}$ je posloupnost prvků v $TN(A)$ konvergující v Y k prvku y. Prvek y patří do uzavřené množiny TX. Existují $x_k \in N(A)$ tak, že $y_k = Tx_k$. Posloupnost $\{x_k\}$ je ohraničená. Vskutku, uvažujme rozklad $x_k = x_{k1} + x_{k2}$, kde $x_{k1} \in N(T)$, $x_{k2} \in N(T)^{\perp}$. Zřejmě $Tx_{k2} = y_k$. Restrikce $\widetilde{T}$ operátoru T na podprostor $N(T)^{\perp}$ je spojité 1-1-značné zobrazení $N(T)^{\perp}$ na TX. Podle Banachovy věty o inverzním operátoru ([11] IV, 5.4, Teor.3 – $\sharp$ 1), operátor $\widetilde{T}^{-1}$ je spojitý. Odtud $||x_{k2}||_X = ||\widetilde{T}^{-1}y_k||_X \leq ||\widetilde{T}^{-1}|| \cdot ||y_k||_Y$. Protože konvergentní posloupnost $\{y_k\}$ je ohraničená, je také posloupnost $\{x_{k2}\}$ ohraničená.

Dále $A(x_k) = A(x_{k1} + x_{k2}) = 0$, tedy $A(x_{k1}) = -A(x_{k2})$. Označme symbolem $\widetilde{A}$ restrikci operátoru A na podprostor $N(T)$. Protože $\widetilde{A}$ je spojité 1-1-značné zobrazení $N(T)$ na $AN(T)$ a $AN(T)$ je podle předpokladu uzavřený nebo konečnědimenzionální, tedy zase uzavřený podprostor, podle citované Banachovy věty $\widetilde{A}^{-1}$ je spojité zobrazení. Odtud

$$||x_{k1}|| = ||\widetilde{A}^{-1}Ax_{k1}|| = ||\widetilde{A}^{-1}Ax_{k2}|| \leq ||\widetilde{A}^{-1}|| \cdot ||A|| \cdot ||x_{k2}||.$$

Ohraničenost posloupnosti $\{x_k\}$ je tím potvrzena.

Existuje podposloupnost $\{x_{k'}\}$ posloupnosti $\{x_k\}$, která slabě konverguje k nějakému prvku (řekněme) x ([16] III, §24, Teor.3 – $\sharp$ 2). Potom $Ax_{k'} \overset{sl}{\to} Ax$, $Tx_{k'} \overset{sl}{\to} Tx$ ([16] III, §25, Teor.3 – $\sharp$ 3). Platí však $Ax_{k'} = 0$ pro všechna k' a $Tx_{k'} \to y$. Odtud $Ax = 0, Tx = y$, takže $y \in TN(A)$. □

Důsledek 1.10. *Nechť* TX *je uzavřená množina v* $Y, N(A) \cap N(T) = 0$ *a* $\dim Z < \infty$. *Pak* $TN(A)$ *je uzavřená množina v* Y, *tj. je splněna podmínka* 1.7(1) *pro existenci splajnu.* □

Poznámka 1.11. *Je-li* TX *uzavřená podmnožina v* Y, *můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat* $TX = Y$, *neboť* TX *je v tom případě Hilbertovým prostorem.*

Důkaz. Z podmínky $\dim Z < \infty$ plyne $\dim AN(T) < \infty$ a z podmínky $N(T) \cap N(A) = 0$ plyne, že A je 1-1 na $N(T)$. Odtud $\dim N(T) < \infty$. Tvrzení plyne z věty 1.9.

1.3. **Existence a jednoznačnost vyhlazovacího splajnu.**

Věta 1.12. *Nechť* $N(T) \cap N(A) = 0$ *a nechť*

$$SX \text{ je uzavřená podmnožina ve } V. \tag{1}$$

Pak úloha 1.5(1) (*vyhlazovací splajn*) *má přesně jedno řešení.* (např. [23] 1, §1.2, Teor.1.3)

Důkaz. Operátor S je injektivní. Vskutku, je-li $Sx = 0$, pak $Tx = 0$ a $Ax = 0$. Vzhledem k podmínce $N(T) \cap N(A) = 0$ platí $x = 0$. Norma $||Sx - p||_V$ dosahuje minima pro $Sx \in SX$, pro něž je vzdálenost p od Sx minimální. Takový prvek Sx, řekněme $f \in SX$, existuje v důsledku uzavřenosti SX ve V a je jediný, což se dokáže analogicky jako jednoznačnost prvku TS v důkazu věty 1.8. Hledaný prvek s_ρ je roven $S^{-1}f$. □

1.13.

Připomeňme následující dobře známá fakta. Z definice operátoru T^* adjungovaného k $T \in \mathcal{L}[X,Y]$

$$(Tx, y)_Y = (x, T^*y)_X, \ \forall\, x \in X, \ \forall\, y \in Y, \tag{1}$$

plynou přímo vztahy

$$\overline{\Re(T)}^{\perp} = N(T^*), \quad \Re(T^*)^{\perp} = N(T), \tag{2}$$

a odtud

$$\overline{\Re(T)} = N(T^*)^{\perp}, \quad \overline{\Re(T^*)} = N(T)^{\perp}, \tag{3}$$

kde $\Re(T) = T(X)$ značí range (obor hodnot) operátoru T v Y. Dále připomeňme „closed-range theorem“ (např. [27], str. 205):

$$\Re(T^*) \text{ je uzavřené v } X \Leftrightarrow \Re(T) \text{ je uzavřené v } Y. \tag{4}$$

Věta 1.14. *Nechť platí* $N(T) \cap N(A) = 0$, $TX = Y$ *a jedna z podmínek* $AX = Z$ *nebo* $\dim Z < \infty$. *Pak* $SX = N(S^*)^{\perp}$ *je uzavřená množina ve* V.

Důkaz. Nechť $v = [y, z]$ je prvek ve V. Pak $S^*v = \rho T^*y + A^*z$ a tedy $S^*V = T^*Y + A^*Z = \Re(T^*) + \Re(A^*)$, takže podle 1.13(3) $S^*V = N(T)^{\perp} + N(A)^{\perp}$, neboť podle closed range theorem 1.13(4) a podle 1.13(3) $N(T)^{\perp} = \overline{\Re(T^*)} = \Re(T^*)$ a podobně pro A. (V alternativním případě $\dim Z < \infty$ je $\dim AX < \infty$ a tedy $\Re(A)$ i $\Re(A^*)$ jsou uzavřené.) Ze vztahu $0 = N(T) \cap N(A)$ plyne $X = 0^{\perp} = N(T)^{\perp} + N(A)^{\perp} = S^*V = \Re(S^*)$. Ježto $\Re(S^*)$ je uzavřeno v X, je podle 1.13(4) $\Re(S) = SX$ uzavřeno ve V a podle 1.13(3) je $SX = \Re(S) = \overline{\Re(S)} = N(S^*)^{\perp}$. □

Vztah mezi interpolačním a vyhlazovacím splajnem objasňuje následující věta.

Věta 1.15. *Nechť $z \in Z$. Nechť existuje přesně jeden splajn s_ρ vyhlazující prvek z a nechť existuje přesně jeden splajn $\hat{s}$ interpolující prvek As_ρ. Pak $\hat{s} = s_\rho$.*

Poznámka 1.16. *Méně přesně řečeno, vyhlazovací splajn je interpolačním splajnem za předpokladu existence a jednoznačnosti obou typů splajnů (např. za podmínek* 1.7(1), 1.8(1) *a* 1.12(1).)

Důkaz věty 1.15. Máme-li sestrojen splajn s_ρ vyhlazující prvek $z \in Z$, definujeme $z_\rho = As_\rho$. Splajn $\hat{s}$ interpolující prvek z_ρ je jednoznačně určený minimizátor výrazu $\min_{x \in A^{-1}(z_\rho)} ||Tx||_Y^2$ (množina $A^{-1}(z_\rho)$ je neprázdná, protože $s_\rho \in A^{-1}(z_\rho)$).

Platí

$$\Phi_\rho(\hat{s}) = \rho||T\hat{s}||_Y^2 + ||A\hat{s} - z||_Z^2 = \rho||T\hat{s}||_Y^2 + ||As_\rho - z||_Z^2 \leq$$

$$\leq \rho||Ts_\rho||_Y^2 + ||As_\rho - z||_Z^2 = \Phi_\rho(s_\rho).$$

Nerovnost $\Phi_\rho(\hat{s}) \geq \Phi_\rho(s_\rho)$ je evidentní, takže $\Phi_\rho(\hat{s}) = \Phi_\rho(s_\rho)$. Ježto $\Phi_\rho(x)$ má jediný minimizátor v X, totiž s_ρ, platí $\hat{s} = s_\rho$. □

1.4. **Nalezení splajnu. Analýza problému.**

1.17. *Algoritmus pro interpolační splajn.*

V tomto a v dalších odstavcích budeme postupně zesilovat podmínky, až se nám v určitém stadiu podaří vypracovat v praxi použitelný algoritmus pro vytvoření splajnu. Tyto podmínky – jak uvidíme – budou ještě do té míry obecné, aby zahrnovaly většinu prakticky zajímavých případů.

1.18.

Vyjdeme z definice 1.2 interpolačního splajnu s, definovaného vztahy $||Ts||_Y = \min_{x \in A^{-1}(z)} ||Tx||_Y$, za speciálního předpokladu, že

$$\text{prostor } Z = E^N, \tag{1}$$

$$\text{operátor } A = (\lambda_1, ..., \lambda_N), \tag{2}$$

kde λ_i jsou nezávislé spojité lineární funkcionály na X, $i = 1(1)N$.

Předpokládejme dále, že jsou splněny podmínky 1.9(1) a 1.8(1), které zaručují existenci a jednoznačnost splajnu interpolujícího prvek $z = r = [r_1, ..., r_N]^T \in E^N$. Označme

$$k_i, \ i = 1(1)N, \ \textit{reprezentanty} \text{ funkcionálů } \lambda_i \text{ v } X, \tag{3}$$

$$\text{tj. } \lambda_i x = (k_i, x)_X \text{ pro libovolné } x \in X.$$

Požadavek, aby splajn s interpoloval vektor $r = [r_1, ..., r_N]^T \in E^N$ je tedy vyjádřen podmínkou

$$(k_i, s)_X = r_i,\ i\ = 1(1)N. \tag{4}$$

Označme K lineární obal lineárně nezávislého systému prvků $k_1, ..., k_N$

$$K\ = \mathrm{span}\{k_i\}_1^N. \tag{5}$$

Zřejmě $N = \dim K < \infty$, takže K je uzavřený podprostor v X.
Dále zřejmě

$$N(A) = K^\perp. \tag{6}$$

Odtud $K \cong X/K^\perp = X/N(A) \cong AX$ (přiřazení prvků: $x \mapsto [x]$ a $z = Ax \mapsto [x] \in A^{-1}(z)$), tedy $\dim K = \dim AX$, čili

$$AX = E^N. \tag{7}$$

dle closed-range theorem 1.13(4) odtud plyne, že

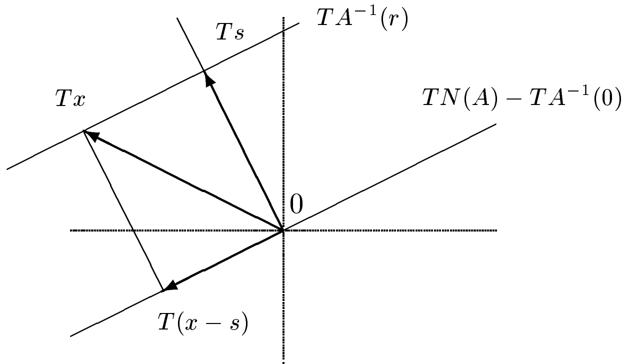
$$\Re(A^*) \text{ je uzavřená podmnožina v } X. \tag{8}$$

Označení a pojmy zavedené v 1.18 budou v dalším používány bez odkazování.

Tvrzení 1.19. *Nechť* $r \in A(X)$. *Platí*

$$Ts \in (TK^\perp)^\perp \tag{1}$$

Důkaz. Podle věty o projekci (např. [18] Th. 2, §3.3, str.51 - ♯ 10, viz také obrázek a větu 2.1) je Ts ortogonální k varietě $TA^{-1}(r)$ (ovšem také k podprostoru $TA^{-1}(0)$), tedy také k prvku $T(x - s)$ pro libovolné $x \in A^{-1}(r)$, tj. $(Ts, T(x - s))_Y = 0$. Odtud vyplývá $Ts \in [TN(A)]^\perp$. Vztah 1.19(1) pak plyne z 1.18(6).



□

Věta 1.20. *Nechť platí* 1.18(1) *a* 1.18(2). *Nechť* $\dim N(T) = q < \infty$ *a* $\dim K = N < \infty$. *Nechť platí* 1.8(1) *a* $TX = Y$. *Pak pro* $H = K \cap N(T)^\perp$ *platí*

$$(TK^\perp)^\perp = T^{*-1}H,\ T^*[TK^\perp]^\perp = H, \tag{1}$$

$$\dim{(T^{*-1}H)} = \dim{H} = N - q. \tag{2}$$

□

Poznámka 1.21. *Podmínky věty* 1.20 *zaručují existenci a jednoznačnost splajnu, interpolujícího libovolné* $z \in Z$, *pro něž* $A^{-1}(z) \neq \emptyset$ – viz důsledek 1.10

Důkaz věty 1.20. Ze vztahu 1.13(1) plyne $y \in (TM)^{\perp} \equiv T^{*}y \in M^{\perp}$ pro libovolný podprostor $M \subseteq X$. Odtud

$$T^{*}(TM)^{\perp} = M^{\perp} \cap \ \Re(T^{*}). \tag{1}$$

(1)Položme $M = K^{\perp}$ a $H = K \cap N(T)^{\perp}$. Pak podle 1.20(1) (existenci T^{*-1} zaručuje 1.13(2))

$$(TK^{\perp})^{\perp} = T^{*-1}[K \cap N(T)^{\perp}] = T^{*-1}H,$$

neboť

1) v důsledku 1.13(3) je $\overline{\Re(T^{*})} = N(T)^{\perp}$ a

2) podle closed-range theorem 1.13(4) je $\Re(T^{*})$ uzavřeno v X, protože $\Re(T)$ je uzavřeno v Y;

tudíž $\Re(T^{*}) = N(T)^{\perp}$.

Z 1.21(1) plyne 1.20(1)

$$T^{*}(TK^{\perp})^{\perp} = K \cap N(T)^{\perp} = H.$$

Konečně platí 1.20(2), $\dim H = N - q$. K důkazu
zaprvé odvodíme vztahy

$$A^{*}[AN(T)]^{\perp} = N(T)^{\perp} \cap \Re(A^{*}) = N(T)^{\perp} \cap \ K \ = H;$$

(použijeme zde 1.20(1) – kde klademe A místo T a $N(T)$ za M – a přihlédneme k 1.18(6), 1.13(3) a 1.18(8));
zadruhé dokážeme postupně

$\dim{[AN(T)]} = \dim{N(T)} = q$

(uvažme, že A je 1-1 na $N(T)$)

$\dim{[AN(T)]^{\perp}} = N - q$

$\dim{[AN(T)]^{\perp}} = \dim{A^{*}[AN(T)]^{\perp}} = N - q$

(podle 1.13(2) a 1.18(7) je A^{*} prosté zobrazení na E^{N}),

$\dim{(A^{*-1}H)} = \dim{H} = N - q.$ □

1.22.

Na základě předešlého je možno sestrojit algoritmus konstrukce interpolačního splajnu v následujících čtyřech krocích:

KROK 1. Najdeme bázi prostoru $H = K \cap N(T)^{\perp}$ a to tak, že najdeme lineárně nezávislé prvky $h_1, ..., h_{N-q}$ v K, ortogonální k $N(T)$

$$h_i = \sum_{j=1}^{N} h_{ij} k_j, \; i \; = 1(1)N - q. \tag{1}$$

KROK 2. Definujeme

$$f_i = T^{*-1} h_i, \; i \; = 1(1)N - q. \tag{2}$$

Kroky 1. a 2. budou v dalším (odst. 1.7) za speciálních podmínek popsány podrobněji.

KROK 3. Podle 1.19(1) a 1.20(1)

$$Ts \in (TK^{\perp})^{\perp} = T^{*-1} H.$$

Odtud

$$Ts = \sum_{i=1}^{N-q} \mu_i f_i \tag{3}$$

pro některá čísla $\mu_i, \; i \; = 1(1)N - q$, která vypočteme takto:

$$\sum_{i=1}^{N-q} \mu_i (f_i, f_j)_Y = (Ts, f_j)_Y = (s, T^* f_j)_X = (s, h_j)_X =$$

$$= (s, \sum_{i=1}^{N} h_{jik} k_i)_X = \sum_{i=1}^{N} h_{ji} (k_i, s)_X \overset{1.18(4)}{=} \sum_{i=1}^{N} h_{ji} r_i.$$

Odtud dostáváme systém lineárních rovnic pro neznámé μ_i

$$\sum_{j=1}^{N-q} (f_i, f_j)_Y \mu_j \; = \sum_{j=1}^{N} h_{ij} r_j, \; i \; = 1(1)N - q, \tag{4}$$

jehož matice $A = ((f_i, f_j)_Y)$ je symetrická a kladně definitní Gramova matice prvků $f_1, ..., f_{N-q}$.
V maticovém tvaru se 1.22(4) vyjádří takto:

$$A\mu = Hr, \tag{5}$$

kde

$$\mu = [\mu_1, ..., \mu_{N-q}]^T \in E^{N-q}, \;\; r = [r_1, ..., r_N]^T \in E^N,$$

$$A = ((f_i, f_j)_Y) \text{ je Gramova } [(N-q)\times(N-q)] - \text{matice} \qquad (6)$$
$$H = (h_{ij}) \text{ je } [(N-q)\times N] - \text{matice.}$$

KROK 4.

$$s = T^{-1}Ts = T^{-1}\sum_{i=1}^{N-q}\mu_i f_i. \qquad (7)$$

1.5. **Algoritmus pro vyhlazovací splajn.**

1.23.

Stále předpokládáme, že platí 1.18(1), 1.18(2), 1.8(1) a 1.9 (1). Připomeňme, že vyhlazovací splajn s_ρ podle definice 1.3 (viz též poznámku 1.4) je minimizátor funkcionálu (na X)

$$\Phi_\rho(x) = ||Tx||_Y^2 + \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\rho_i}((k_i, x)_X - r_i)^2. \qquad (1)$$

Prvek s_ρ nabývá na funkcionálu k_i hodnoty, kterou budeme značit r_i^ρ, $(k_i, s_\rho)_X = r_i^\rho$ analogicky ke 1.18(4).

Připomeňme dále, že podle věty 1.15 splajn interpolující prvek $r_\rho = [r_1^\rho, ..., r_N^\rho]^T$ je splajn vyhlazující prvek $r = [r_1, ..., r_N]^T$ – pokud máme zaručenu jednoznačnou existenci obou typů splajnu (např. pokud platí 1.9(1), 1.8(1), 1.12 (1); viz také důsledek 1.10 a větu 1.14). Lze tedy použít výsledků odst. 1.18.

Nechť tedy platí 1.9(1), 1.8 (1) a 1.12(1). Tak jako v 1.22(6) budeme značit symbolem A Gramovu matici systému prvků $f_1, ..., f_{N-q}$,

$$A = ((f_i, f_j)_Y) \text{ a } H = (h_{ij}).$$

Podle 1.22(5) a 1.22(3) platí

$$\left.\begin{aligned} A\mu_\rho = Hr_\rho, \quad \mu_\rho = [\mu_1^\rho, ..., \mu_{N-q}^\rho]^T \in E^{N-q}, \\ r_\rho = [r_1^\rho, ..., r_N^\rho]^T \in E^N, \quad Ts_\rho = \textstyle\sum_{i=1}^{N-q}\mu_i f_i. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Nechť dále

$$Q = \mathrm{diag}(1/\rho_1, ..., 1/\rho_N).$$

Odtud dostáváme

$$||Ts_\rho||_Y^2 = \sum_{i,j=1}^{N-q}\mu_i^\rho\mu_j^\rho(f_i, f_j)_Y = (A\mu_\rho\mu_\rho)_{E^N}.$$

Funkcionál $\Phi_\rho(x)$ na prostoru interpolačních splajnů se na základě předešlého dá přepsat jako funkcionál na vektorech r_ρ, a to

$$\Psi_\rho(r_\rho) := \Phi_\rho(s_\rho) = (A\mu_\rho, \mu_\rho)_{E^N} + (r_\rho - r)^T Q(r_\rho - r). \qquad (3)$$

Podmínka minima funkcionálu $\Psi_\rho(r_\rho) = \Phi_\rho(s_\rho)$ je následující

$$\frac{\partial \Psi_\rho(r_\rho)}{\partial r_s^\rho} = 0, \quad s \ = 1(1)N.$$

S použitím 1.23(3) obdržíme

$$\frac{\partial \Psi_\rho(r_\rho)}{\partial r_s^\rho} = \frac{\partial}{\partial r_s^\rho}(A\mu_\rho, \mu_\rho) + (2/\rho_s)(r_s^\rho - r_s) = 0$$

Protože A nezávisí na r_ρ, bude platit

$$\frac{\partial}{\partial r_s^\rho}(A\mu_\rho, \mu_\rho) = 2(\frac{\partial(A\mu_\rho)}{\partial r_s^\rho}, \mu_\rho) = 2(\frac{\partial(Hr_\rho)}{\partial r_s^\rho}, \mu_\rho) =$$

$$= 2(\frac{\partial r_\rho}{\partial r_s^\rho}, H^T\mu_\rho) = 2[H^T\mu_\rho]_s.$$

Závěrem

$$H^T\mu_\rho + Qr_\rho = Qr,$$

odkud s pomocí 1.23(2) plynou rovnice pro výpočet vektoru μ_ρ

$$(A + HQ^{-1}H^T)\mu_\rho = Hr. \qquad (4)$$

Rovněž odtud plyne vyjádření r_ρ

$$r_\rho = r - Q^{-1}H^T\mu_\rho. \qquad (5)$$

Algoritmus pro konstrukci vyhlazovacího splajnu spočívá v následujících čtyřech krocích.

KROKY 1. a 2. se shodují s kroky 1. a 2. interpolačního splajnu (odst. 1.18).

KROK 3. Řešíme systém 1.23(4) pro neznámé složky vektoru μ_ρ a tím najdeme $Ts_\rho = \sum_{i=1}^{N-q} \mu_i^\rho f_i$ a podle 1.23(5) určíme r_ρ.

KROK 4. je týž jako v případě interpolačního splajnu (odst. 1.18).

Jak bylo v odst. 1.22 řečeno, kroky 1. a 2. algoritmu budou podrobněji rozvedeny v 1.7 po další specializaci výchozích předpokladů.

1.6. Lg-splajny.

1.24.

Lg-splajny jsou splajny jistého typu v tzv. *Sobolevových prostorech.*

Nechť X je lineární prostor reálných funkcí f na intervalu $[0,T]$, jejichž q-tá derivace existuje skoro všude, je integrovatelná s kvadrátem, (tj. $f^{(q)} \in L_2[0,T]$) a derivace $f^{(i)}$, $i < q$, jsou absolutně spojité na $[0,T]$.

Prostor X se stane Hilbertovým prostorem, definujeme-li na X skalární součin s odpovídající normou takto:

$$(f,g) = \sum_{i=1}^{q} \int_0^T f^{(i)}(t)g^{(i)}(t)dt, \tag{1}$$

$$||f||^2 = \sum_{i=0}^{q} \int_0^T (f^{(i)})^2(t)dt = \sum_{i=0}^{q} ||f^{(i)}||^2_{L_2[0,T]}. \tag{2}$$

Tento prostor nazýváme Sobolevovým prostorem a značíme $W^{q,2}[0,T]$. Je-li nutné, skalární součin 1.6(1) resp. normu 1.6(2) značíme $(.,.)_{W^{q,2}}$ resp. $||.||_{W^{q,2}}$.

Poznamenejme, že Sobolevovým prostorem se také nazývá lineární prostor X případně s jiným skalárním součinem.

Definice 1.25. *Lg-splajn je H-splajn, pro nějž*

$$X \text{ je Sobolevův prostor } \mathrm{W^{q,2}[0,T]}, \tag{1}$$

$$Y = L_2[0,T], \tag{2}$$

$$T = L : f \mapsto \sum_{j=0}^{q} a_j f^{(j)}, \text{ kde } a_j \in C^j[0,T],\ j = 0(1)q-1,\ a_q = 1. \tag{3}$$

Zvlášť důležitý je případ (jímž se budeme zabývat)

$$Z = E^N,\ N \text{ je přirozené číslo}, \tag{4}$$
$$A : f \mapsto [\lambda_1 f, ..., \lambda_N f]^T \in E^N, \tag{5}$$

kde $\Lambda = \{\lambda_i\}_1^N$ je lineárně nezávislý systém spojitých lineárních funkcionálů na $W^{q,2}[0,T]$.

Zřejmě $L \in \mathcal{L}[W^{q,2}, L_2]$ je surjektivní operátor. Podle 1.18(7) také operátor $A \in \mathcal{L}[W^{q,2}, E^N]$ je surjektivní.

1.26.

Vyšetříme, kdy při předešlé specifikaci prostorů X, Y a Z a operátorů T a A má každý z problémů 1.2(1) (interpolace) a 1.5(1) (vyhlazení) přesně jedno řešení.

Podrobněji řečeno, jde o řešení problémů

$$\int_0^T (Ls)^2 = \min_{f\ \in\ A^{-1}(r)} \int_0^T (Lf)^2, \tag{1}$$

kde $A^{-1}(r) = \{f \in W^{q,2} : \lambda_i f = r_i,\ i\ = 1(1)N\}$

$$\int_0^Y (Ls_\rho)^2 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{\rho_i}[(As_\rho)_i - r_i]^2 =$$

$$= \min_{f \in W^{q,2}} \{\int_0^T (Lf)^2 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{\rho_i}[(Af)_i - r_i]^2\}. \tag{2}$$

Stačí přeformulovat na novou situaci podmínky 1.7(1), 1.8(1) a 1.12(1) (věty 1.7, 1.8 a 1.12). Podle věty 1.9 podmínka 1.7(1) platí, platí-li 1.8(1) (neboť $LW^{q,2} = L_2$ a $\dim N(L) = q < \infty$). Podle věty 1.14 platí podmínka 1.12(1), platí-li 1.8(1). Zbývá tedy vyšetřit, kdy je splněna podmínka 1.8(1).

K tomu cíli uvažujme homogenní diferenciální rovnici

$$Ly = 0.$$

Ta může být zapsána v ekvivalentní formě jako systém

$$\left.\begin{aligned} y(t) &= \mathbf{c}\mathbf{x}(t) \\ \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathbf{x}(t) &= A(t)\mathbf{x}(t), \quad t \in [0,T], \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

kde

$$\mathbf{x}(t) = [y(t), y'(t), ..., y^{q-1}(t)]^T,$$

$$\mathbf{c} = [1, 0, ..., 0],$$

$$A(t) = \left[\begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline -a_0(t) & -a_1(t), ..., -a_{q-1}(t), \end{array}\right]$$

kde I je jednotková matice řádu $q-1$.

Je-li $\Phi(t,\tau)$ fundamentální matice systému 1.26(3) splňující $\Phi(\tau,\tau) = I$, bude platit

$$y(t) \in N(L) \iff y(t) = \mathbf{c}\Phi(t,t_0)\mathbf{x}(t_0) \tag{4}$$

pro některé $t_0 \in [0,T]$ a některé řešení $\mathbf{x}(t)$ systému 1.26(3).

Označme

$$B = \left[\begin{array}{c} \lambda_1 \mathbf{c}\Phi(t,t_0) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \lambda_N \mathbf{c}\Phi(t,t_0) \end{array}\right] \tag{5}$$

Věta 1.27. ([25] *Th.* 2.3) *Podmínka* 1.8(1) $N(L) \cap N(A) = 0$ *je splněna, právě když*

$$\text{hodnost} B = q. \tag{1}$$

Důkaz. Nechť $y(t) \in N(L)$. Podle 1.26(4) platí $y(t) = \mathbf{c}\Phi(t,t_0)\mathbf{x}(t_0)$ pro některé $t_0 \in [0,T]$ a některá řešení $\mathbf{x}(t)$ systému 1.26(3). Nechť dále $y(t) \in N(A)$. Pak $B\mathbf{x}(t_0) = 0$. Je-li hodnost $B = q$, pak $\mathbf{x}(t_0) = 0$, $y(t) = 0$ a tedy $N(L) \cap N(A) = 0$.

Je-li hodnost $B < q$, pak existuje nenulový q-vektor $\mathbf{v}$ tak, že $B\mathbf{v} = 0$ a řešení $\mathbf{x}(t)$ systému 1.26(3) takové, že $\mathbf{v} = \mathbf{x}(t_0)$. Funkce $y(t) = \mathbf{c}\Phi(t,t_0)\mathbf{x}(t_0)$ patří pode 1.26(4) do $N(L)$ a protože $B\mathbf{x}(t_0) = 0$, platí $y(t) \in N(A)$. Odtud $0 \neq y(t) \in N(L) \cap N(A)$. □

Podmínka 1.27(1) říká, že funkcionály $\lambda_1, ..., \lambda_N$, aplikovány na první složky fundamentálního systému řešení soustavy rovnic 1.26(3) – jinak řečeno aplikovány na bázi prostoru $N(L)$ – dávají matici hodnosti q.

Předešlé úvahy potvrzují následující větu.

Věta 1.28. *Lg-splajn interpolující nebo vyhlazující vektor* $r \in E^N$ *vzhledem k operátorům* $T = L$ *a* $A = (\lambda_1, ..., \lambda_N)$ *existuje a je jednoznačně určen, když je splněna jedna z ekvivalentních podmínek:*

$$\text{hodnost}\, B = q, \tag{1}$$

$$\left.\begin{array}{c}\textit{v množině funkcionálů } \{\lambda_i\}_1^N \textit{ existuje podmnožina}\\ \textit{o } q \textit{ prvcích, která je lineárně nezávislá v } N(L).\end{array}\right\} \tag{2}$$

□

1.29.

Nechť na intervalu $[0,T]$ je zadána síť $0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_N \leq T$. Předpokládejme nyní, že operátor A znamená interpolaci na dané síti, tj.

$$(Af)_i = f(t_i),\ i\ = 1(1)N,\ f \in W^{q,2}[0,T] \tag{1}$$

a že operátor L znamená q-tou derivaci,tj.

$$L = D^q. \tag{2}$$

Věta 1.30. *Pro Lg-splajny splňující podmínky* 1.29 (1) *a* (2) *platí:*

Úloha 1.4 (*interpolace*)

$$\min_{x\ \in\ A^{-1}(r)} ||D^q x||_{L_2}$$

resp.

Úloha 1.6 (*vyhlazení*)

$$\min_{x \in W^{q,2}} \left\{ ||D^q x||^2_{L_2} + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\rho_i}[(Ax)_i - r_i]^2 \right\}$$

má přesně jedno řešení, když

$$N \geq q. \tag{1}$$

(např. [23] 1, §1.3, Teor. 1.5, str. 18).

Důkaz. Platí $A^{-1}(r) \neq \emptyset$ pro všechna $r = [r_1, ..., r_N]^T \in E^N$, protože existuje funkce $f \in W^{q,2}$ s vlastností $f(t_i) = r_i,\ i\ = 1(1)N$, např. Lagrangeův interpolační polynom stupně $N-1$.

Jádro $N(A)$ operátoru A se skládá z funkcí prostoru $W^{q,2}$, které se anulují v bodech sítě $t_1, ..., t_N$. Jádro $N(L)$ operátoru L se skládá z polynomů stupně $< q$. Průnik $N(L) \cap N(A)$ obsahuje tedy – pokud platí $N \geq q$ – pouze nulovou funkci, protože netriviální polynom stupně $< q$ má nejvýš $q-1$ kořenů. Je tedy splněna podmínka 2.17(1).

Jak bylo dokázáno v 1.26, Lg-splajny splňují podmínky 1.7(1) a 1.12(1), což spolu s právě potvrzenou podmínkou 1.8(1) dokazuje větu. □

Dohoda 1.31. *Všude v dalším budeme předpokládat – pokud nebude řečeno jinak – že podmínka* 1.28(2) *pro jednoznačnou existenci Lg-splajnů je splněna; pro jednoduchost budeme pokládat množinu* $\{\lambda_i\}_{i=1}^q$ *za lineárně nezávislou v* $N(A)$ *(po případném přečíslování). Alternativně je též možno předpokládat, že (prvních)* q *řádků matice* B *je lineárně nezávislých.*

1.7. **Algoritmus konstrukce Lg-splajnů Polynomické splajny lichého stupně.**

1.32.

Předpokládejme, že pro Lg-splajn jsou splněny podmínky 1.29(1) $\lambda_i f = f(t_i),\ i\ = 1(1)N$ a 1.29(2) $T = L = D^q$ a že je podmínkou 1.30(1), $N \geq q$, zaručena jednoznačná existence Lg-splajnu – viz větu 1.30 a dohodu 1.31. V této dohodě se předpokládá lineární nezávislost funkcionálů λ_i v počtu q v $N(L)$. Jsou-li λ_i definovány předpisem 1.29(1), $\lambda_i f = f(t_i)$ a platí-li 1.29(2) $L = D^q$ a 1.30(1) $N \geq q$, pak kterákoli q-tice funkcionálů λ_i je v prostoru $N(L)$ lineárně nezávislá.

Podáme podrobnější popis kroků 1. a 2. algoritmu pro výpočet interpolačního a vyhlazovacího splajnu z odst. 1.18 a 1.20.

KROK 1. Jádro $N(T)$ operátoru $T = D^q$ se skládá z polynomů stupně $< q$, $\dim N(T) = q$; bázi jádra tvoří např. polynomy $1, x, x^2, ..., x^{q-1}$. Zkonstruujeme funkce $h_1, ..., h_{N-q}$ ve tvaru

$$h_i = \sum_{j=i}^{i+q} h_{ij} k_j, \ i \ = 1(1)N - q, \tag{1}$$

který se získá elementárními transformacemi systému 1.22(1) (značení koeficientů h_{ij} ponecháváme). Prvky h_i mají být ortogonální k $N(T)$, což vede na následující rovnice pro neznámé koeficienty h_{ij}

$$(h_i, x^k)_{W^{q,2}} = 0, \ k \ = 0(1)q - 1, \ i \ = 1(1)N - q, \tag{2}$$

čili

$$\sum_{j=i}^{i+q} h_{ij} t_j^k = 0, \ k \ = 0(1)q - 1, \ i \ = 1(1)N - q. \tag{3}$$

Podmínku (3) je možno interpretovat takto: na $(q+1)$-uzlové síti $\Delta \equiv \{t_i, ..., t_{i+q}\}$ je třeba zkonstruovat diferenční aproximaci operátoru D^q s řádem aproximace $O(h^q)$, tj. takový diferenční analog (poměrnou diferenci), který anuluje všechny polynomy do stupně $q-1$. Stačí nalézt neznámé h_{ij} až na konstantní faktor.

KROK 2. Inverze operátoru T^*.

Ve shodě s 1.22(2) máme najít funkce

$$f_i(t) = T^{*-1} h_i(t), \ i \ = 1(1)N - q, \tag{4}$$

kde $h_i(t) \in N(T)^\perp$ a $T = D^q$.

K tomu cíli připomeňme, že skalární součin v prostoru $X = W^{q,2}[0, T]$ je definován

$$(f, g)_{W^{q,2}} = \sum_{k=0}^{q} \int_0^T f^{(k)}(t) g^{(k)}(t) dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{q-1} (T_k f, T_k g)_{L_2} + (Tf, Tg)_{L_2},$$

kde $T_k = D^k$ je spojitý lineární operátor $W^{q,2}[0, T] \to L_2[0, T]$, $k = 0(1)q - 1$. Greenova funkce G_+ operátoru $T = D^q$ má tvar

$$G_+(x - t) = (x - t)_+^{q-1} / (q - 1)!,$$

takže pro T operující vzhledem k x platí

$$TG_+(x - t) = \delta_t, \tag{5}$$

kde δ_t je Diracova funkce δ vztažená k proměnné t. Zdůrazněme, že výrazy, v nichž vystupují G_+ a δ_t, chápeme jako zobecněné funkce.

Tvrzení 1.33. *Nechť funkce $h(x) \in X = W^{q,2}[0,T]$ je ortogonální k $N(T)$. Pak platí*

$$(T^{*-1}h)(t) = (h(x), G_+(x-t))_X. \tag{6}$$

Poznámka 1.34. *Z následujícího důkazu je patrné, že tvrzení platí pro libovolné lineární operátory $T_i : X \to L_2[0,T]$ a pro funkci G_+ splňující $TG_+(x-t) = \delta_t$.*

Důkaz věty 1.33. Označme $f(t) = T^{*-1}h(t)$, $g(t) = (h(x), G_+(x-t))_X$. Rovnost 1.33(6) je ekvivalentní s roností $h(t) = T^*g(t)$. Pokud pro libovolné $\mu(t) \in X$ platí

$$(h,\mu)_X = (T^*g,\mu)_X \ (= \ (g, T\mu)_{L_2}), \tag{1}$$

bude platit i 1.33(6). Funkce $\mu(x)$ se dá vyjádřit ve tvaru

$$\mu(x) = n(x) + (G_+(x-t), T\mu(t))_{L_2},$$

kde $n(x) \in N(T)$, neboť zřejmý vztah

$$T(G_+(x-t), T\mu(t))_{L_2} = (\delta_x, T\mu)_{L_2} = T\mu(x)$$

vyjadřuje, že $(G_+(x-t), T\mu(t))_{L_2}$ a $\mu(x)$ se liší (aditivně) jen o prvek z $N(T)$.

Odtud obdržíme

$$\left.\begin{aligned}
&(h,\mu)_X = (h,n)_X + (h,(G_+(x-t),T\mu(t))_{L_2})_X = \\
&= \sum_{i=0}^{q-1} (T_i h(x), T_i(G_+(x-t), T\mu(t))_{L_2})_{L_2} + \\
&+ (Th(x), T(G_+(x-t), T\mu(t))_{L_2})_{L_2} = \\
&= \sum_{i=0}^{q-1} (T_i h(x), T_i(G_+(x-t), T\mu(t))_{L_2})_{L_2} + (Th(x), T\mu(x))_{L_2}.
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Z druhé strany

$$\left.\begin{aligned}
&(g, T\mu)_{L_2} = ((h(x), G_+(x-t))_X, T\mu(t))_{L_2} = \\
&= \sum_{i=0}^{q-1} ((T_i h(x), T_i G_+(x-t))_{L_2}, T\mu(t))_{L_2} + (Th(t), T\mu(t))_{L_2}.
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Rovnost $(h,\mu)_X = (g,T\mu)_{L_2}$ je tím dokázána, neboť pořádek integrování v 2 a 3 lze zaměnit; totiž platí

$$\sum_{i=0}^{q-1}((T_i h(x), T_i G_+(x-t))_{L_2}, T\mu(t))_{L_2} =$$

$$= \sum_{i=0}^{q-1}(T_i h(x), T_i(G_+(x-t), T\mu(t))_{L_2})_{L_2}.$$

□

1.35.

Z předešlé věty plyne

$$f_i(t) = \big(\sum_{j=i}^{i+q} h_{ij}k_j, (x-t)_+^{q-1}/(q-1)!\big)_{W^{q,2}}.$$

S ohledem na interpolační vztah $(k_i,u)_{W^{q,2}} = u(t_i)$ obdržíme

$$f_i(t) = \sum_{j=i}^{i+q} h_{ij}(t_j - t)_+^{q-1}/(q-1)!,\ i\ = 1(1)N-q, \tag{1}$$

nebo po úpravě $\bar{h}_{ij} = h_{i,i+j-1},\ i\ = 1(1)N-q,\ j = 1(1)q+1$, jež má za cíl upravit pásovou matici $H = (h_{ij})$ na tvar plné $(N-q\times q+1)$-matice $\overline{H} = (\bar{h}_{ij})$ (úhlopříčky pásu v H přejdou ve sloupce v $\overline{H}$), bude

$$f_i(t) = \sum_{j=1}^{q+1} \bar{h}_{ij}(t_{i+j-1} - t)_+^{q-1}/(q-1)!,\ i\ = 1(1)N-q. \tag{2}$$

KROK 3. Poznámky ke struktuře splajnu. Podle 1.22(3)

$$Ts = s^{(q)} = \sum_{i=1}^{N-q} \mu_i f_i$$

je po částech polynomická funkce stupně $q-1$ hladkosti $C^{q-2}[0,T]$. Z vyjádření 1.35(1) vychází

$$s^{(q+k)}(t_1) = s^{\ (q+k)}(t_N) = 0,\ k\ = 0(1)q-2.$$

Vně intervalu $[t_1,t_N]$ je funkce $s^{(q)}$ totožně rovna 0. Tudíž po q-násobné integraci obdržíme splajn, který v každém podintervalu $[t_i,t_{i+1}]$ je polynom stupně $2q-1$ a v intervalech $[0,t_1]$ a $[t_N,T]$ se prodlužuje polynomem stupně $q-1$. Na celém definičním intervalu $[0,T]$ platí $s(t)\in C^{2q-2}[0,T]$.

Matice A z rovnice 1.22(5) pro interpolační splajn

$$A\mu = Hr$$

a symetrická pozitivně definitní matice $(A + HQ^{-1}H^T)$ z rovnice 1.21(4) pro vyhlazovací spajn

$$(A + HQ^{-1}H^T)\mu_\rho = Hr$$

jsou pásové, první o šířce pásu $2q - 1$, druhá $2q + 1$. Tyto matice závisí pouze na síti $t_1, ..., t_N$ a nezávisí na vzorku (na hodnotách) $r_1, ..., r_N$.

KROK 4. Inverze operátoru $T = D^q$. Jak víme 1.22(7),

$$Ts = s^{(q)}(t) = \sum_{i=1}^{N-q} \mu_i f_i(t)$$

neboli s ohledem na 1.35(2)

$$s^{(q)}(t) = \sum_{i=1}^{N-q} \sum_{l=1}^{q+1} \mu_i \bar{h}_{il} (t_{i+l-1} - t)_+^{q-1}/(q-1)!. \tag{3}$$

S ohledem na lokální vlastnost funkcí $f_i(t)$ je možné zapsat funkci $s^{(q)}(t) =: s_j^{(q)}(t)$ na intervalu $[t_j, t_{j+1}]$ ve tvaru

$$s_j^{(q)}(t) = \sum_{i=\alpha}^{\beta} \sum_{l=1}^{q+1} \mu_i \bar{h}_{il} (t_{i+l-1} - t)_+^{q-1}/(q-1)!, \tag{4}$$

kde $\alpha = \max(1, j - q + 1)$, $\beta = \min(N - q, j)$. Na intervalu $[t_j, t_{j+1}]$ vytvoříme splajn $s_j(t)$ podle pravidla

$$s_j(t) = \sum_{k=0}^{2q-1} a_j^{(k)} (t - t_j)^k / k!,$$

kde zřejmě

$$a_j^{(k)} = s^{(k)}(t_j).$$

Z 1.35(4) pak plyne

$$a_j^{(q+k)} = s^{(q+k)}(t_j) =$$
$$= (-1)^k \sum_{i=\alpha}^{\beta} \sum_{l=1}^{q+1} \mu_i \bar{h}_{il} (t_{i+l-1} - t_j)_+^{q-1-k}/(q-1-k)!$$

pro $j = 1(1)N - 1$, $k = 0(1)q - 1$, přičemž se sčítání provádí pouze pro $j < j + l - 1$. Odtud se přímo vypočtou $a_j^{(q)}, ..., a_j^{(2q-1)}$. Dále $a_j^{(0)} = r_j$ v případě interpolačního splajnu, a $a_j^{(0)} = r_j^\rho$ v případě vyhlazovacího splajnu, přičemž r_j^ρ plyne z 1.21 (5). Pro efektivní výpočet koeficientů $a_j^{(1)}, ..., a_j^{(q-1)}$ je vypracována řada algoritmů, z nichž jeden uvádíme v následujícím.

1.36.

Zbývá najít koeficienty

$$a_j^{(1)}, ..., a_j^{(q-1)}. \tag{1}$$

Označme $P_j(t)$ polynom stupně $2q-1$, který je na intervalu $[t_j, t_{j+1}$ totožný se splajnem $s(t)$. Vyjádření funkce $s(t)$ obdržíme q-násobnou integrací výrazu 1.35(3) s výsledkem

$$s(t) = M_{q-1}(t) + (-1)^q \sum_{i=1}^{N-q} \sum_{l=1}^{q+1} \lambda_i \bar{h}_{ij}(t_{i+l-1} - t)_+^{2q-1}/(2q-1)!, \tag{2}$$

kde M_{q-1} je polynom stupně $q-1$. Z toho plynou vztahy

$$P_j(t) = (-1)^q \sum_{N \geq i \ +l-1>j} \lambda_i \bar{h}_{il}(t_{i+l-1} - t)^{2q-1}/(2q-1)! + M_{q-1}(t). \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} & P_{j+1}(t) - P_j(t) = (-1)^q \textstyle\sum_{i+l-1>j+1} - (-1)^q \textstyle\sum_{i+j-1>j} = \\ & = (-1)^q(- \sum_{i+l-1=j+1} \lambda_i \bar{h}_{il})(t_{j+1} - t)^{2q-1}/(2q-1)! = \\ & = c_j(t_{j+1} - t)^{2q-1}/(2q-1)!; \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

ze zřejmých relací

$$\begin{aligned} P_j^{(2q-1)}(t) &= a_j^{(2q-1)} \\ P_{j+1}^{(2q-1)}(t) &= a_{j+1}^{(2q-1)} \end{aligned}$$

vyplývá

$$c_j = a_{j+1}^{(2q-1)} - a\ _j^{(2q-1)}.$$

Polynomy P_j a P_{j+1} se tedy liší o polynom (4), který už známe. Pro výpočet hledaných koeficientů (1) zvolíme $q-1$ uzlů $t_{j+1}, ..., t_{j+q-1}$, a připomeneme zřejmý fakt, že v případě interpolace resp. vyhlazování platí

$$P_m(t_m) = r_m \text{ resp. } r_m^\alpha, \ m = j+1, ..., j+q-1. \tag{5}$$

Podmínky (4) a (5) vedou na systém $q-1$ lineárních algebraických rovnic v neznámých (1), totiž na systém

$$\left.\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{q-1} a_j^{(k)}(t_m - t_j)^k/k! = \left\{\begin{matrix} r_m \\ \text{resp.} \\ r_m^\alpha \end{matrix}\right\} - \sum_{k\ =q}^{2q-1} a_j^{(k)}(t_m - t_j)^k/k! - \\ & - a_j^{(0)} - \sum_{k=j}^{m-1} (a_{k+1}^{(2q-1)} - a_k^{(2q-1)})(t_{k+1} - t_m)^{2q-1}/(2q-1)! \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

pro $m = j+1, ..., j+q-1$. Vztah (6) plyne z rovnice

$$-P_j(t_m) - \sum_{k=j}^{m-1} [P_{k+1}(t_m) - P_k(t_m)] + P_m(t_m) = 0$$

nebo po úpravě z rovnic

$$P_j(t_m) = P_m(t_m) - \sum_{k=j}^{m-1} c_k (t_{k+1} - t_m)^{2q-1}/(2q-1)! =$$

$$= P_m(t_m) - \sum_{k=j}^{m-1} (a_{k+1}^{(2q-1)} - a_k^{(2q-1)})(t_{k+1} - t_m)^{2q-1}/(2q-1)!.$$

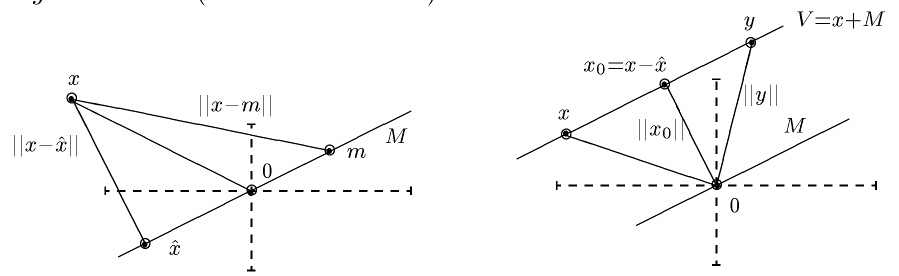
Tím jsou koeficienty $a_j^{(1)}, ..., a_j^{(q-1)}$ nalezeny. Algoritmus je skončen. □

2. Lg-SPLAJN JAKO PROJEKCE VE $W^{q,2}[0,T]$.

Interpolace EHB dat: Fundamentální teorém

2.1. **Interpolace Lg-splajnem jako minimální problém ve** $Wq, 2[0,T]$.
Věta 2.6 a věta 2.7 jsou bezprostředními důsledky dobře známé věty o projekci (viz např. [17] Th. 2, §3.3, str. 51 a Th. 1, §3.10, str. 64, ♯ 10; věty o projekci bylo použito v našem textu jednou již dříve, a to v důkazu věty 1.19).

Věta 2.1. *Věta o projekci. Nechť H je Hilbertův prostor, M uzavřený podprostor v H a $x \in H$. Pak existuje jediný prvek $\hat{x} \in M$ takový, že $||x-\hat{x}||_H =$* $\min_{m \in M} ||x-m||_H$. *$\hat{x} \in M$ je minimalizující prvek, právě když $x - \hat{x}$ je ortogonální k M.*(Viz obrázek níže.) □



Důsledek 2.2. *Je-li M generován množinou prvků $\{y_1, ..., y_n\} \subseteq H$, pak $\hat{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i$, kde vektor $\alpha = [\alpha_1, ..., \alpha_n]^T$ je řešením systému*

$$G\alpha = ((x, y_1)_H, ..., (x, y_n)_H)^T,$$

a kde

$$G = ((y_i, y_j)_H)_{i,j=1}^{n}$$

je Gramova matice množiny $\{y_1, ..., y_n\}$. Předešlé rovnice v neznámých $\alpha_1, ..., \alpha_n$ se nazývají normální rovnice pro daný minimalizační problém.

□

Tímto způsobem je dána numerická metoda pro řešení minimalizačního problému. K tomu, aby systém normálních rovnic byl jednoznačně řešitelný, je nutné a stačí, aby Gramova matice G byla nesingulární, tj. aby systém prvků $\{y_1, ..., y_n\}$ byl lineárně nezávislý.

Následující věta je jednoduchou modifikací věty o projekci.

Věta 2.3. *Nechť M je (uzavřený) podprostor Hilbertova prostoru $H, x \in H$ a $V = x + M$. Pak existuje jediný prvek x_0 ve varietě V, který má minimální normu, $||x_0||_H = \min_{y \in V} ||y||_H$. Dále x_0 je ortogonální k M a platí* $x_0 = x - \hat{x}$. (Viz obrázek výše.) □

Důsledek 2.4. *Nechť $\{y_1, ..., y_n\}$ je lineárně nezávislá množina prvků v H. Nechť x_0 má minimální normu mezi všemi prvky $x \in H$, které splňují*

$$(x, y_i)_H = c_i, \ i \ = 1(1)n,$$

kde $\mathbf{c} = [c_1, ..., c_n]^T$ *je dáno.*
Pak

$$x_0 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i y_i,$$

kde neznámý vektor $\beta = [\beta_1, ..., \beta_n]^T$ *vyhovuje rovnicím*

$$G\beta = \mathbf{c}.$$ □

2.5.

Výsledky následujícího paragrafu charakterizují Lg-splajn jako projekci ve $W^{q,2}[0,T]$. Abychom toho cíle dosáhli, musíme v lineárním prostoru $W^{q,2}[0,T]$ definovat vhodnou normu, ekvivalentní s normou 1.6(2).

Upozorňujeme na dohodu 1.31, v níž předpokládáme, že množina $\{\lambda_i\}_1^q$ spojitých lineárních funkcionálů na $W^{q,2}[0,T]$ je lineárně nezávislá v $N(L)$, aby byla zaručena jednoznačná existence Lg-splajnu.

Nuže, nechť $\{z_j(.)\}_1^q$ je báze v jádru operátoru L, $N(L)$, která je duální k systému $\{\lambda_j\}_1^q$, tj.

$$Lz_j = 0, \quad \lambda_i z_j = \delta_{ij}, \quad i, j = 1(1)q \tag{1}$$

a nechť $G(.,.)$ je Greenova funkce ([21] str.673) operátoru L splňující

$$LG(., \tau) = \delta(\tau, .), \quad \lambda_j G(., \tau) = 0. \tag{2}$$

Zde i v dalším výrazy, ve kterých vystupuje G a Diracova funkce δ, nutno chápat ve smyslu zobecněných funkcí.

Pak každé $f \in W^{q,2}[0,T]$ může být jednoznačně rozloženo jako

$$f(t) = \sum_{j=1}^{q} (\lambda_j f) z_j(t) + \int_0^T G(t, \tau)[Lf(\tau)]d\tau. \tag{3}$$

Vskutku, podle [20] Th.2, str.32, $\sharp$ 4, pro libovolné $g(t) \in L[N(L)^{\perp}]$ platí

$$L^{-1}g(t) = \int_0^T G(t, \tau)g(\tau)d\tau.$$

(L^{-1} existuje, protože L je $1-1$ na množině $N(L)^{\perp}$). Odtud

$$f_2(t) = L^{-1}Lf_2(t) = \int_0^T G(t,\tau)[Lf_2(\tau)]d\tau$$

je vyjádření libovolného prvku $f_2(t) \in N(L)^{\perp}$.

Libovolný prvek $f \in W^{q,2}$ se dá rozložit na součet $f = f_1 + f_2$, kde

$$f_1 \in N(L), \quad f_2 \in N(L)^{\perp},$$

$$f_1(t) = \sum_{j=1}^{q} (\lambda_j f_1) z_j(t),$$

$$f_2(t) = \int_0^T G(t,\tau)[Lf_2(\tau)]d\tau.$$

Vzorec 2.5(3) pak plyne z toho, že platí

$$\lambda_j f = \lambda_j f_1 + \lambda_j f_2 = \lambda_j f_1,$$

neboť podle 2.5(1) platí $\lambda_j f_2 = 0, \; Lf = Lf_1 + Lf_2 = Lf_2$. □

To dává návod na nový skalární součin pro $W^{q,2}[0,T]$ – s novým označením prostoru symbolem $H^{q,2}[0,T]$ –

$$(e,f)_{H^{q,2}} = \sum_{j=1}^{q} (\lambda_j e)(\lambda_j f) + \int_0^T (Le)(Lf) \tag{4}$$

s odpovídající normou

$$||f||^2_{H^{q,2}} = \sum_{j=1}^{q} (\lambda_j f)^2 + \int_0^T (Lf)^2. \tag{5}$$

První člen na pravé straně právě definovaného vztahu (5) nezávisí na $f \in A^{-1}(r)$. Tudíž definice 1.2 se dá přeformulovat následujícím způsobem.

Věta 2.6. *Lg-splajn jako problém minimální normy* ([26]).

Funkce $s(t) \in A^{-1}(r)$ *je Lg-splajn interpolující* $\{r_j\}_1^N$ *vzhledem k* $\Lambda = \{\lambda_j\}_1^N$, *jestliže*

$$||s||^2_{H^{q,2}} = \min_{f \in A^{-1}(r)} ||f||^2_{H^{q,2}}. \tag{1}$$

□

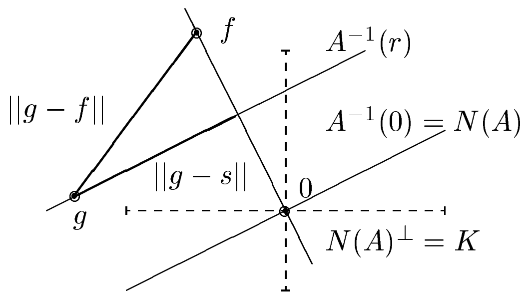
Následující výsledek je snadný důledek věty o projekci (věta 2.1).

Věta 2.7. *Lg-splajn jako projekce v* $H^{q,2}[0,T]$ ([26]).

Nechť $g(t)$ *je libovolná funkce v* $A^{-1}(r)$. *Pak Lg-splajn* $s(t)$ *je projekce* g *na* $K = \mathrm{span}\{k_j\}_1^N$ (viz 1.18(5)). s *je tedy funkce v* K *splňující*

$$||g - s||_{H^{q,2}} = \min_{f \in K} ||g - f||_{H^{q,2}}. \tag{1}$$

□



Řešení úlohy (1) je stanoveno v následující větě.

Věta 2.8. ([22] Th. 6). *Lg-splajn s interpolující $\{r_j\}_1^N$ vzhledem k $\Lambda = \{\lambda_j\}_1^N$ je dán vztahem*

$$s(t) = k^T(t)R^{-1}r, \tag{1}$$

kde

$$k^T = [k_1, ..., k_N],$$

R je symetrická $N \times N$-matice, jejíž ij-tý prvek je $(k_i, k_j)_{H^{q,2}}$.

Důkaz. Podle věty 2.7 prvek s patří do K. Odtud

$$s = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j k_j = k^T \alpha,$$

kde $\alpha = [\alpha_1, ..., \alpha_N]^T$ a k_j jsou reprezentanty funkcionálů λ_j (1.18). Neznámé α_j se najdou s pomocí interpolačních podmínek $r_i = \lambda_i s = (k_i, s) = \sum_{j=1}^N \alpha_j (k_j, k_i)$, odkud $r = R\alpha$, $R = ((k_i, k_j))$. Protože systém $\{k_j\}_1^N$ je lineárně nezávislý, matice R je nesingulární a tudíž

$$\alpha = R^{-1}r, \quad s = k^T R^{-1} r.$$ □

2.9.

Klíčový význam pro charakterizaci Lg-splajnů má následující věta 2.10 ([8] Th. 2.1). Její tvrzení platí, i když není splněna (dostatečná) podmínka jednoznačnosti pro interpolační Lg-splajn (jak je požadována např. ve větě 1.28 nebo v dohodě 1.31).

Věta 2.10. *Problém* 1.26(1) *má vždy řešení. Funkce $s \in A^{-1}(r)$ řeší tento problém, právě když*

$$\int_0^T LsLg = 0 \text{ pro všechna } g \in N(A), \tag{1}$$

kde $N(A) = \{f \in H^{q,2} : \lambda_i f = 0, \; i = 1(1)N\}$ je jádro zobrazení A.

Důkaz. Podprostor $N(L)+N(A)$ je uzavřený, protože $\dim N(L) < \infty$. Lg-splajn s tudíž existuje podle věty 1.6 a ortogonalita (1) je dokázána.

Obráceně, platí-li (1) pro některé $s \in A^{-1}(r)$ a všechna $g \in N(A)$, snadno z toho odvodíme, že s splňuje 1.26(1). Platí totiž

$$\int (Lf)^2 = \int (Ls)^2 + 2\int Ls(Lf - Ls) + \int (Lf - Ls)^2 =$$

$$= \int (Ls)^2 + \int [(L(f-s)]^2 \text{ pro každé } f \in A^{-1}(r).$$

Odtud

$$\int (Ls)^2 \leq \int (Lf)^2 \text{ pro všechna } f \in A^{-1}(r). \qquad \square$$

2.2. Lg-splajny interpolující EHB data.

2.11.

Smyslem náledující úvahy je nalezení charakteristických podmínek pro splajny interpolující EHB data.

2.12.

V dalším budeme specifikovat funkcionály λ_i následujícím způsobem. Každému λ_i přísluší bod $t_i,\ 0 \leq t_i \leq T$ a celé číslo $j_i,\ 0 \leq j_i \leq q-1$ resp. vektor $\alpha_i = [\alpha_{i0}, ..., \alpha_{i,q-1}] \neq 0$ tak, že platí

$$\lambda_i f = f^{(j_i)}(t_i),\ i\ = 1(1)N, \tag{1}$$

respektive

$$\lambda_i f = \sum_{j=0}^{q-1} \alpha_{ij} f^{(j)}(t_i),\ i\ = 1(1)N. \tag{2}$$

Říkáme, že systém $\Lambda = \{\lambda_i\}_1^N$ generuje Hermite-Birkhoffův (stručně HB) interpolační problém, resp. rozšířený Hermite-Birkhoffův (stručně EHB) interpolační problém.

Body $t_i \in [0,T],\ 0(= t_0) \leq t_1 \leq ... \leq t_N \leq (t_{N+1} =)T$, splňující 2.12(1) a (2), se nazývají uzly Lg-splajnu. Jestliže $t = t_i = t_{i+1} = ... = t_{i+l-1}$, říkáme, že uzel t je l-násobný nebo že funkcionály $\lambda_j,\ j = 1(1)i + l - 1$, jsou vztaženy k témuž uzlu t. V tomto případě předpokládáme, že matice, tvořená řádky $\alpha_j,\ j = i(1)i + l - 1$, má hodnost l. Ovšem platí $l \leq q$.

2.13.

Dá se dokázat,že systém $\Lambda = \{\lambda_i\}_1^N$ definující EHB problém je lineárně nezávislý a že v Hilbertových prostorech s reprodukujícím jádrem jsou funkcionály λ_i spojité (4.10)).

2.14.

Výsledek základní důležitosti je fundamentální věta 2.20 charakterizující Lg-splajny interpolující EHB data. Tato věta je založena na větě 2.10 předešlého paragrafu 2.9. Uvedení věty 2.20 vyžaduje jistou přípravu.

2.15.

Nejprve dokážeme, že libovolné řešení s rovnice 1.26(1) odpovídající EHB datům Λ splňuje $L^*Ls = 0$ v intervalech mezi uzly (t_i, t_{i+1}) (za předpokladu $t_i < t_{i+1}$), kde L^* značí formální sdružený operátor k L definovaný vztahem

$$L^*f = \sum_{j=0}^{q} (-1)^j (a_j f)^{(j)}.$$

Vskutku, nechť g je funkce z $C^\infty[0,T]$, jejíž suport $\mathrm{supp} g(t) = \mathrm{cl}\{t \in [0,T] : g(t) \neq 0\}$ (kde „cl“ = closure = uzávěr) je podmnožinou intervalu (t_i, t_{i+1}). Odtud pro restrikci $\bar{g} = g\,|_{(t_i,t_{i+1})}$ platí $\bar{g} \in C_0^\infty[t_i, t_{i+1}]$. Existují y_i, y_{i+1}, $t_i < y_i \leq y_{i+1} < t_{i+1}$ tak, že $\bar{g}(t) = 0$ pro všechna $t \in (t_i, y_i) \cup (y_{i+1}, t_{i+1})$. Odtud $\bar{g}^{(j)}(t_i) = 0 = \bar{g}^{(j)}(t_{i+1})$, $0 \leq j \leq q-1$ a tudíž $g \in N(A)$. Z toho plyne podle 2.10(1) a po integraci per partes (viz např. [20],♯ 4, rovnici (10), str. 13, v níž položíme $y = g$, $z = Ls$)

$$0 = \int_0^T LsLg = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \bar{g} L^* Ls,$$

jež vede ke vztahu

$$0 = (\bar{g}, L^*Ls) \quad \text{v prostoru} \quad L_2[t_i, t_{i+1}]$$

pro všechna $\bar{g} \in C_0^\infty[t_i, t_{i+1}]$. Jak je dobře známo, množina $C_0^\infty[t_i, ti+1]$ je hustá v $L_2[t_i, t_{i+1})$ (např. [13], 2.6.1, ♯ 5, také [19a], str. 106). Odtud $L^*Ls = 0$ v intervalu (t_i, t_{i+1}).

2.16.

Nyní dokážeme, že $Ls(t) = 0$ pro $0 < t < t_1$ a $t_N < t < T$. Ls je spojitá na množině $(0, t_1) \cup (t_N, T)$, protože $L^* Ls = 0$. Předpokládejme $Ls(\tau) \neq 0$ pro nějaké $0 < \tau < t_1$ a položme

$$v(t) = \begin{cases} s(t), & t_1 < t < T \\ u(t), & 0 < t \leq t_1 \end{cases},$$

kde $u(t) \in N(L)$ splňuje $u^{(j)}(t_1) = s^{(j)}(t_1)$, $0 \leq j \leq q-1$. Potom $v \in W^{q,2}[0,T]$ a s ohledem na spojitost Ls máme

$$\int_0^T (Lv)^2 = \int_0^{t_1} (Lu)^2 + \int_{t_1}^T (Ls)^2 < \int_0^T (Ls)^2.$$

Ale skutečnost, že $\lambda_i s = \lambda_i v$ pro všechna $\lambda_i \in \Lambda$ odporuje minimální vlastnosti s, 1.26(1).

2.17.

Zavedeme pojem operátorů $R^{(t)}$, které se objeví v podmínce 2.20(3). Zvolme $t \in (0,T)$, $\varepsilon > 0$ dostatečně malé a $g \in N(A) \cap C_0^\infty(t-\varepsilon, t+\varepsilon)$. Integrování 2.10(1) po částech dává

$$0 = \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} LsLg = -\sum_{i=0}^{q-1} g^{(i)}(t)[\Gamma_i s]_t, \tag{1}$$

kde

$$\Gamma_i s = \sum_{j=0}^{q-i-1} (-1)^{j+1} (a_{j+i+1} Ls)^{(j)},\ i = 0(1)q-1 \tag{2}$$

$$[\Phi]_t = \Phi(t+) - \Phi(t-). \tag{3}$$

Relace analogická k 2.17(1) platí i pro body 0 a T spolu s definicí

$$[\Phi]_0 = \Phi(0+),\ [\Phi]_T = \Phi(T-). \tag{4}$$

2.18.

Upravíme 2.17(1) následujícím způsobem. Nechť matice $\alpha = (\alpha_{ij})_{0,0}^{l-1,q-1}$, $l \leq q$ má hodnost l a nechť $\widetilde{\alpha} = (\widetilde{\alpha}_{ij})_{0,0}^{q-1,q-1}$ je $q \times q$ nesingulární matice, jež se získá rozšířením matice α. Označíme jako $\eta = (\eta_{ij})$ matici $(\widetilde{\alpha}^{-1})^T$. Dále, definujeme-li

$$M_i = \sum_{j=0}^{q-1} \widetilde{\alpha}_{ij} (\frac{d}{dt})^j \text{ a } R_i = \sum_{j=0}^{q-1} \eta_{ij} \Gamma_j,\ i = 0(1)q-1, \tag{1}$$

pak po menším počítání obdržíme

$$\sum_{i=0}^{q-1} g^{(i)}(t)[\Gamma_i s]_t = \sum_{i=0}^{q-1} M_i g(t)[R_i s]_t$$

pro všechna $g \in W^{q,2}$ a $s \in K$ (= span$\{k_i\}_1^N$, věta 2.7).

2.19.

Předpokládejme nyní, že $t \in [0,T]$ je uzel splajnu s a že

$$\textit{existuje } l(t) \textit{ funkcionálů v } \Lambda \textit{ vztažených k témuž uzlu } t \tag{1}$$

podle 2.12 (1) *a* (2). Pak $M_i^{(t)}$, $i = 0(1)l(t)-1$, je definováno podle 2.18(1) s koeficienty α_{ij} specifikovanými jako $\alpha_{ij}(t)$, tj.

$$M_i^{(t)} g = \sum_{j=0}^{q-1} \alpha_{ij}(t) g^{(j)}(t), \quad i = 0(1)l(t)-1. \tag{2}$$

[Řádky $\alpha_i(t) = (\alpha_{i0}(t), ..., \alpha_{i,q-1}(t))$ jsou podle předpokladu lineárně nezávislé.] Zřejmě $M_i^{(t)} \in \Lambda$, $i = 0(1)l(t)-1$.

Operátory $R_i^{(t)}$ jsou definovány analogicky jako R_i v 2.18(1)

$$R_i^{(t)} s = \sum_{j=0}^{q-1} \eta_{ij}(t) \Gamma_j s, \;\; l(t) \leq i \leqq -1. \tag{3}$$

Uzavřeme předešlé úvahy následující fundamentální charakterizační větou.

Věta 2.20. <u>*Fundamentální věta*</u>([8], Th. 3.6.)
Nechť s je Lg-splajn interpolující EHB data $\{r_i\}_1^N$ vzhledem k $\Lambda = \{\lambda_i\}_1^N$. Pak

$$L^* Ls(t) = 0, \textit{ jestliže } t \textit{ není uzel a } t \in [0,T] \tag{1}$$

$$\lambda_i s = r_i, \; i = 1(1)N \tag{2}$$

$$[R_i^{(t)} s]_t = 0, \; l(t) \leq i \leq q-1, \textit{ jestliže } t \textit{ je uzel} \tag{3}$$

$$Ls(t) = 0 \textit{ pro } 0 < t < t_1 \textit{ a } t_N < t < T. \tag{4}$$

Obráceně, libovolná funkce $s \in W^{q,2}[0,T]$ splňující 2.20(4) *až* 2.20(4) *je Lg-splajn interpolující $\{r_i\}_1^N$ vzhledem k Λ.*

Důkaz následuje za poznámkou 2.21

Poznámka 2.21.

1) *Číslo* $l(t)$ *z podmínky* (3) *je definováno ve* 2.19(1), *operátor* $R_i^{(t)}s$ *ve* 2.19(3) *a symbol* $[\cdot]_t$ *v* 2.17(3).

2) *Předpokládá se, že systém* Λ *je lineárně nezávislý ve* $W^{q,2}$, *ale existence podmnožiny* $\Lambda_1 = \{\lambda_i\}_1^q \subseteq \Lambda$, *která je lineárně nezávislá v* $N(L)$, *se nepředpokládá.* (*Existence takové* Λ_1 *zaručuje jednoznačnou existenci Lg-splajnu s podle věty* 1.28. *Potřebuje se pouze existence Lg-splajnu, a ta je zaručena větou* 2.10.)

Důkaz věty 2.20. Nutnost podmínek věty 2.20 až na podmínku (3) byla již dokázána vpředu. Abychom dokázali nutnost podmínky (3), předpokládejme $t_0 \in (0,T)$ a zvolme j, $l(t_0) \le j \le q-1$. Zvolme $\varepsilon > 0$ tak, aby t_0 byl jediný uzel splajnu s v intervalu $(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)$. Pak, jak je snadno vidět, existují funkce $g_j \in C_0^\infty(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)$, takové, že $(g_j(t_0), ..., g_j^{(q-1)}(t_0))^T$ je j-tý sloupec matice $\widetilde{\alpha}^{-1}$. Podle konstrukce platí $M_i^{(t_0)} g_j = \delta_{ij}$, $i = 0(1)q-1$ a $g_j \in N(A)$. Když nyní kombinujeme 2.17(1) a 2.18(1), obdržíme $0 = [R_j^{(t_0)}s]_{t_0}$. Případy $l(0) > 0$ a $l(T) > 0$ se vyšetří podobně.

Na základě věty 2.10 obrácení plyne bezprostředně z relace, která se snadno ověří

$$\int_0^T Ls(Ls - Lf) = 0 \text{ pro libovolné } f \in A^{-1}(r). \qquad \square$$

V praxi se nejčastěji vyskytuje interpolace HB dat, eventuálně případ $L = D^q$ a $\lambda_i f = f(t_i)$. V následujících důsledcích redukujeme obecné výsledky, týkající se EHB dat, na některý z těchto případů.

Důsledek 2.22. *Předpokládejme, že s je Lg-splajn interpolující HB data a že* $t = t_i$ *pro některé* $i = 1(1)N$ *je uzel splajnu s. Nechť* $k = 0(1)q-1$ *a* $k \ne j_i$ (*viz* 2.12). *Pak* $[\Gamma_k s]_t = 0$.

Důkaz. Použijeme postupu z 2.17. Lze zvolit $\varepsilon > 0$ a $g \in C_0^\infty(t-\varepsilon, t+\varepsilon)$ tak, že pro k pevné $g^{(k)}(t) \ne 0$, $g^{(i)}(t) = 0$, $i \ne k$, $0 \le i \le q-1$. Platí zřejmě $g \in N(A)$ a 2.17(1) dává žádaný výsledek. $\square$

hspace*3mm Následující důsledek věty 2.20 udává pro interpolační HB problém, které derivace Lg-splajnu jsou spojité.

Důsledek 2.23. *Předpokládejme, že s je Lg-splajn interpolující HB data a že pro nějaké* $i = 1(1)N$, $t = t_i$ *je uzel splajnu s. Pak*

1. *Je-li* $t \in (0,T)$, *platí* $[s^{(j)}]_t = 0$ *pro* $j = 0(1)2q-2-j_i$.
2. *Je-li* $L = D^q$ *a* $k = 0(1)q-1$, $k \ne j_i$, *platí* $[s^{(2q-k-1)}]_t = 0$.

Důkaz. 1. Protože $s \in C_0^{q-1}[0,T]$, platí $[s^{(j)}]_t = 0$ pro $j = 0(1)q-1$. Nyní předpokládejme, že tento závěr platí pro všechna j slňující $0 \le j \le p < 2q-2-j_i$. Pak $j_i < 2q-p-2$ a tudíž podle důsledku 2.22

$$0 = [\Gamma_{2q-p-2}s]_t = \sum_{j=0}^{p-q+1} (-1)^{j+1}[(a_{j+2q-p-1}Ls)^{(j)}]_t. \qquad (1)$$

Použijeme-li Leibnitzova pravidla a indukčního předpokladu $[s^{(j)}]_t = 0$ pro $j = 0(1)p$, (1) se redukuje na $0 = (-1)^{p-q}[a_q^2 s^{(p+1)}]_t$ a odtud plyne tvrzení, protože $a_q^2 \neq 0$.

2. Podle důsledku 2.22. □

Důsledek 2.24. *Předpokládejme, že s je Lg-splajn interpolující EHB data a že pro některé $i = 1(1)N$ je $t = t_i$ uzel splajnu s. Nechť $L = D^q$ a nechť λ_i jsou zadaná pouze podmínkou typu $\lambda_i f = f(t_i)$ pro všechna f (a dané i). Pak $[s^{(j)}]_t = 0,\ j = 0(1)2q-2$.*

Důkaz. Vzorce 2.17(2) a 2.18(1) mají nyní tvar

$$\Gamma_j s = (-1)^{q-j}s^{(2q-j-1)},\ j = 0(1)q-1$$

$$R_i s = \textstyle\sum_{j=0}^{q-1} \eta_{ij}(-1)^{q-j}s^{(2q-j-1)},\ i = 1(1)q-1.$$

Abychom vyjádřili 2.20(4), položme $\alpha_i = (1,0,...,0)$, $\widetilde{\alpha} = I_q$. Odtud $(\widetilde{\alpha}^{-1})^T = I_q$. Uzel t splajnu s je jednoduchý ($l(t) = 1$), tudíž $R_i s = \Gamma_i s$ a odtud

$$0 = [R_i^{(t)}s]_t = [(-1)^{q-i}s^{(2q-i-1)}]_t \text{ pro } i = 1(1)q-1. \qquad \square$$

Poznamenejme, že v případě $\lambda_i f = f(t_i)$ pro všechna f, uzel $t = t_i$ je jednoduchý vzhledem k požadavku, aby matice $\alpha = (\alpha_{(ij)}(t))_{0,0}^{l-1,q-1}$ byla hodnosti l.

3. Stochastický odhad a Kalmanova filtrace

V dalším výkladu použijeme Kalmanova přístupu k problému filtrace a predikce [9]. Příslušná rekurzivní metoda bude popsána v odst. 3.2. V odst. 3.1 je vyložena nezbytná příprava ze statistiky.

3.1. **Odhad minimalizující rozptyl.**

3.1.

Množina reálných náhodných veličin x na daném $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}, P)$, které mají nulovou střední hodnotu a konečný rozptyl, (tj. $Ex = \int_{\mathbb{R}} x(t)dP(t) = 0$ a $\int_{\mathbb{R}} x^2(t)dP(t) < \infty$), je Hilbertův prostor se skalárním součinem $(x, y) = E(xy)$ a s příslušnou normou $||x||^2 = Ex^2$. Označíme jej $\mathcal{H}$. Přesně řečeno, tento součin je definován na množině tříd ekvivalentních veličin (veličin, které se liší jen na množině P-míry nula; ekvivalence veličin x a y je tedy charakterizována vztahem $E(x-y)^2 = 0$). Součin (x, y) však zřejmě nezávisí na volbě reprezentantů ve třídách ekvivalentních veličin. Z toho důvodu se vyjadřujeme tak, jako by byl definován na samotném prostoru náhodných veličin.

Jsou-li $x = [x_1, ..., x_n]^T$ a $z = [z_1, ..., z_n]^T$ prvky v $\mathcal{H}^n$, definujeme skalární součin a příslušnou normu v $\mathcal{H}$ formulemi

$$(x, z)_{\mathcal{H}^n} = E(\sum_{i=1}^{n} x_i z_i) = \mathrm{TrE}(\mathrm{xz}^{\mathrm{T}}), \tag{1}$$

$$||x||^2_{\mathcal{H}^n} = E(\sum_{i=1}^{n} x_i^2) = E(||x||^2_{E^n}) = \mathrm{TrE}(\mathrm{xx}^{\mathrm{T}}), \tag{2}$$

(Tr = stopa) kde matice

$$E(xz^T) = (E(x_i z_j))^n_{i,j=1}. \tag{3}$$

$\mathcal{H}^n$ s výše zavedeným skalárním součinem tvoří Hilbertův prostor.

Předpokládejme dále, že $\{z_1, ..., z_t\} \subseteq \mathcal{H}^m$. Prostor $H = \mathrm{span}\{z_1, ..., z_t\}$ „generovaný“ těmito vektory definujeme jako množinu n-vektorů $z = k_1 z_1 + ... + k_t z_t$, kde k_j jsou reálné $n \times m$-matice.

Podotkněme ještě, že v odst. 3.1 budeme pracovat s náhodnými veličinami z prostoru $\mathcal{H}$.

3.2.

Předpokládejme, že jsme provedli experiment, který vede na vektor dat v ve tvaru

$$v \ = Mx + w,$$

kde x je neznámý náhodný vektor parametrů, w je náhodný vektor a M známá matice. Pak v je náhodný vektor.

Úlohu, jak vyjádřit vektor x, řešíme metodou (lineárního) odhadu vektoru x z měření $v = [v_1, ..., v_m]^T$. Pod (lineárním) odhadem vektoru x tvořeným na bázi (měření) v minimalizací výrazu $E[||x-\hat{x}||^2]$, rozumíme prvek $\hat{x}$ prostoru $H = \text{span}\{v_i\}_1^m$, [1] pro nějž $E[||x-\hat{x}||^2] = \min\limits_{y\in H} E[||x-y||^2]$.

Zde se pod $||\cdot||$ rozumí norma v reálném euklidovském prostoru patřičné (konečné) dimenze. Vzhledem k definici normy $||\cdot||_{\mathcal{H}^n}$, odst. 3.1, je $E[||x-\hat{x}||^2] = ||x-\hat{x}||^2_{\mathcal{H}^n}$.

Následující věta, která dává explicitní vzorec pro odhad $\hat{x}$, je ve skutečnosti pouhou aplikací normálních rovnic (viz 2.1).

Věta 3.3. (Odhad minimalizující rozptyl.)
I. *Předpokládejme, že*

$$v \ = Mx + w \tag{1}$$

je známý náhodný m-vektor dat, x je neznámý náhodný n-vektor, w je neznámý náhodný m-vektor chyb a M je známá konstantní $m \times n$-matice. Předpokládejme, že $E(vv^T)$ je nesingulární. Pak lineární odhad $\hat{x}$ vektoru x tvořený na bázi (měření) v – minimalizací $E[||x-\hat{x}||^2]$ – je

$$\hat{x} = E[xv^T][E(vv^T)]^{-1}v, \tag{2}$$

s odpovídající kovarianční (rozptylovou) maticí chyb

$$\left.\begin{array}{l} E[(x-\hat{x})(x-\hat{x})^T] = E(xx^T) - E(xv^T)\times \\ \times[E(vv^T)]^{-1}E(vx^T) = E(xx^T) - E(\hat{x}\hat{x}^T). \end{array}\right\} \tag{3}$$

II. *Označme $E(vv^T) = R$, $E(xx^T) = S$ a předpokládejme, že platí $E(vx^T) = 0$ a že $MSM^T + R$ je nesingulární. Pak lineární odhad $\hat{x}$ založený na v minimalizující $E[||x-\hat{x}||^2]$ je*

$$\hat{x} = SM^T(MSM^T + R)^{-1}v \tag{4}$$

s kovariancí chyb

$$E[(x-\hat{x})(x-\hat{x}^T] = S \ - SM^T(MSM^T+R)^{-1}MS^T. \tag{5}$$

[1] Koeficienty v lineární kombinaci jsou matice typu $n \times 1$.

Poznámka. Matice R a S jsou pozitivně semidefinitní (např. [1] I, Th. 3).

Důkaz věty 3.3. I. Problém se rozpadá na separátní problémy pro každou složku x_i. Protože zde nejsou žádná omezení, i-tý subproblém je prostě úloha o nalezení nejlepší aproximace veličiny x_i v podprostoru generovaném veličinami v_j.

Vyjádříme optimální odhad ve tvaru $\hat{x} = Kv$, kde K je $n \times m$-matice. Pak i-tý subproblém je ekvivalentní s problémem vybrat i-tý řádek matice K, jenž dává $\hat{x}_i$ jako optimální lineární kombinaci složek v_j. Tudíž každý řádek matice K splňuje normální rovnice příslušející projekci x_i do prostoru $\text{span}\{v_i\}_1^m$. Je-li $K = (\alpha_{ij})$, pak se normální matice

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}(v_j, v_k) = (x_i, v_k), \; i \; = 1(1)n, \; k \; = 1(1)m, \tag{6}$$

dají zapsat v maticové formě

$$\begin{pmatrix} (v_1, v_1) \dots (v_1, v_m) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (v_m, v_1) \dots (v_m, v_m) \end{pmatrix} K^T = \begin{pmatrix} (v_1, x_1) \dots (v_1, x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (v_m, x_1) \dots (v_m, x_n) \end{pmatrix} \tag{7}$$

neboli

$$E(vv^T)K^T = E(vx^T),$$

z čehož vyplývá

$$K \; = E(xv^T)[E(vv^T)]^{-1},$$

a to je žádaný výsledek.

Důkaz vzorce pro kovarianci chyby se obdrží přímým dosazením.

II. Tento výsledek plyne z části I, neboť platí $E(vv^T) = MSM^T + R$ a $E(xv^T) = SM^T$. □

Pro jednoduchost je následující věta 3.4 formulována pouze pro neznámou náhodnou veličinu x. Protože odhad minimalizující rozptyl n-dimenzionálního náhodného vektoru je pouze n separátních problémů, tvrzení věty se snadno přenese na obecnější případ.

Věta 3.4. *Nechť x je prvek Hilbertova prostoru $\mathcal{H}$ náhodných veličin a nechť $\hat{x}$ označuje jeho ortogonální projekci na uzavřený podprostor V_1 prostoru $\mathcal{H}$. (Tedy $\hat{x}$ je optimální odhad veličiny x ve V_1.) Nechť v_2 je m-vektor náhodných veličin, jež generují podprostor V_2 prostoru $\mathcal{H}$ a nechť $\hat{v}_2$ značí m-dimenzionální vektor projekcí složek vektoru v_2 do V_1. ($\hat{v}_2$ je tedy vektor nejlepších odhadů vektoru v_2 ve V_1.) Označme $\tilde{v}_2 = v_2 - \hat{v}_2$. Pak projekce veličiny x na podprostor $V_1 + V_2$, značená $\overset{+}{x}$, je*

$$\overset{+}{x} = \hat{x} + E(x\tilde{v}^T)_2)[E(\tilde{v}_2\tilde{v}_2^T)]^{-1}\tilde{v}_2, \tag{1}$$

za předpokladu, že $\left[E(\tilde{v}_2^T)\right]^{-1}$ *existuje.*

Jinými slovy, $\overset{+}{x}$ *je* $\hat{x}$ *plus nejlepší odhad veličiny* x *v podprostoru* $\tilde{V}_2$ *generovaném* $\tilde{v}_2$.

Důkaz. Je jasné, že $V_1 + V_2 = V_1 + \tilde{V}_2$ a že $\tilde{V}_2$ je ortogonální k V_1. Dále podprostor $V_1 + V_2$ je uzavřený, protože V_2 je konečné dimenze. Výsledek pak plyne z věty 3.3, protože projekce na součet dvou ortogonálních podprostorů je součet projekcí na jednotlivé podprostory. Nyní stačí aplikovat větu 3.3. □

Věta 3.4 se dá interpretovat takto: Nechť $\hat{x}$ je odhad založený na měřeních, která generují V_1. Použijeme-li další množinu měření, musíme oddělit z těchto měření tu část, která se dá anticipovat z výsledku prvních měření. Jinými slovy, aktualizace musí být založena na té části nových dat, která je ortogonální k původním datům.

Věta 3.6, která následuje po lemmatu 3.5, představuje ilustrativní příklad aplikace předešlých úvah, a to přesně ve formě, v jaké ji použijeme v následujícím odst. 3.2 pojednávajícím o rekurzivní metodě odhadu. Odhad rekurzivní metodou je pak základem stochastického přístupu ke konstrukci Lg-spajnu interpolujícího EHB data (kapitola 3.2).

Lemma 3.5. *Lineární odhad minimalizující rozptyl (MVLE) dané lineární funkce vektoru* x *založený na náhodném vektoru* v *je roven téže lineární funkci MVLE vektoru* x*, tj. je-li dána libovolná* $p \times n$*-matice* U*, nejlepší odhad vektoru* Ux *je* $U\hat{x}$*. Lemma platí za předpokladu, že* $E(vv^T)$ *je nesingulární.*

(Vektory neznačíme tučnými znaky, jak tomu bude v dalších kapitolách, kde bude grafické rozlišení od skalárů potřebnější.)

Důkaz se obdrží z věty o projekci. Je-li Γv optimální odhad vektoru Ux, pak platí $E[v(Ux - \Gamma v)^T] = 0$ (protože $Ux - \Gamma v$ leží v ortogonálním doplňku podprostoru „generovaného“ vektorem v, viz větu 2.1). Odtud plynou normální rovnice pro sloupce matice Γ^T ve tvaru

$$[E(vv^T)]\Gamma^T = E(vx^T)U^T,$$

(protože $0 = E[v(Ux - \Gamma v)^T] = E(vx^T)U^T - E(vv^T)\Gamma^T$), takže

$$\Gamma = U\,E(xv^T)[E(vv^T)]^{-1},$$

což podle věty 3.3 dává žádaný výsledek

$$\widehat{Ux} = \Gamma v \; = U\hat{x}.$$ □

Věta 3.6. *Předpokládejme, že optimální odhad* $\hat{x}$ *náhodného vektoru* x *byl tvořen na bázi minulých měření a že*

$$E[(x - \hat{x})(x - \hat{x})^T] = P. \tag{1}$$

Je-li dáno další měření ve tvaru

$$v = Mx + w, \tag{2}$$

kde w je náhodný vektor s nulovým středem, který je nekorelovaný s x i s minulými měřeními, pak za předpokladu, že $E(\tilde{v}\tilde{v}^T)$ je nesingulární, aktualizovaný optimální odhad $\overset{+}{x}$ vektoru x je

$$\overset{+}{x} = \hat{x} + E(x\tilde{v}^T)[E(\tilde{v}\tilde{v}^T)]^{-1}\tilde{v} = \hat{x} + PM^T(MPM^T + R)^{-1}(v - M\hat{x}), \tag{3}$$

kde

$$R = E(ww^T) \text{ a } \tilde{v} = v - M\hat{x}. \tag{4}$$

Odpovídající kovariance chyb je

$$E[(x - \overset{+}{x})(x - \overset{+}{x})^T] = P - PM^T(MPM^T + R)^{-1}MP^T. \tag{5}$$

Důkaz. Nejlepší odhad vektoru v založený na minulých měřeních (tj. projekce v na podprostor V_1 generovaný minulými měřeními) je $\hat{v} = M\hat{x}$. To plyne z toho, že podle lemmatu 3.5 platí $\hat{v} = \widehat{Mx} + \hat{w} = M\hat{x} + \hat{w}$ a že dále platí $\hat{w} = 0$, což vyplývá z ortogonality w k minulým měřením. (Vskutku, je-li γ jedno z minulých měření, pak $E(w\gamma^T) = EwE\gamma = 0$.) Tudíž $\tilde{v} := v - \hat{v} = v - M\hat{x}$.

Odtud podle věty 3.4 po menší algebraické manipulaci obdržíme

$$\overset{+}{x} = \hat{x} + E(x\tilde{v}^T)[E(\tilde{v}\tilde{v}^T)]^{-1}\tilde{v}$$

což se podle věty 3.3 dá vyjádřit jako

$$\overset{+}{x} = \hat{x} + PM^T(MPM^T + R)^{-1}(v - M\hat{x}).$$

Kovariance chyb je

$$E[(x - \overset{+}{x})(x - \overset{+}{x})^T] = P - PM^T(MPM^T + R)^{-1}MP^T. \qquad \square$$

3.2. **Rekurzivní metoda odhadu.**

3.7.

Budeme se nyní zabývat diskrétními náhodnými procesy, čímž rozumíme – jak je obvyklé – posloupnost náhodných veličin $x(1), ..., x(k), ...$. Je vhodné upravit trochu naše předešlé značení tak, že budeme značit náhodné proměnné procesu způsobem $x(k)$ místo x_k.

Řekněme, že jsou dány pouze náhodné veličiny $x(1), ..., x(n)$. Je řada důležitých estimačních problémů, které jsou v souvislosti s náhodným procesem. Např.

1. *Predikce*, tj. odhad budoucí hodnoty procesu, řekněme odhad veličiny $x(n+h)$, na základě minulých pozorování $x(1), ..., x(n)$;

2. *Filtrace*, což je odhad současné (tj. n-té) hodnoty náhodného procesu z nepřesných měření procesu až do současné doby, $x(1), ..., x(n)$; nebo obecněji

3. *Odhad jednoho náhodného procesu z pozorování jiného, ale vztaženého procesu.*

Jestliže požadujeme lineární odhad minimalizující rozptyl, pak tyto problémy odhadů jsou zvláštními případy teorie rozvinuté v prvním odstavci této kapitoly.

Pokud nebude v dalším explicite stanoveno jinak, předpokládáme, že jsou splněny následující podmínky $(*)$ až $(***)$

$(*)$ Všechny náhodné veličiny jsou reálné a s nulovým středem.

$(**)$ Podkladem každého pozorovaného náhodného procesu je ortogonální proces v tom smyslu, že veličiny pozorovaného procesu jsou lineární kombinace minulých hodnot ortogonálního procesu.

Pro pohodlí a obecnost budeme generovat náhodný proces raději vektorovou diferenční rovnicí prvního řádu než skalární diferenční rovnicí n-tého řádu.

Definice 3.8. *n-Dimenzionální dynamický model náhodného procesu sestává z následujících tří částí:*

D1. Vektorová diferenční rovnice

$$x(k+1) = \Phi(k)x(k) + u(k), \ k \ = 0, 1, \dots \ , \tag{1}$$

kde $x(k)$ je n-dimenzionální stavový vektor, jehož každá složka je náhodná veličina, $\Phi(k)$ je známá $n \times n$-matice a $u(k)$ je n-dimenzionální náhodný vektorový vstup s nulovým středem, který splňuje

$$E[u(k)u^T(l)] = Q(k)\delta_{kl}. \tag{2}$$

D2. Počáteční náhodný vektor $x(0)$ spolu s počátečním odhadem $\hat{x}(0)$, který má kovarianci

$$E[(x(0) - \hat{x}(0))(x(0) - \hat{x}(0))^T] = P(0). \tag{3}$$

D3. Měření procesu se předpokládají ve tvaru

$$v(k) = C(k)x(k) + w(k), \ k \ = 0, 1, \dots \tag{4}$$

kde $C(k)$ je $m \times n$-matice a $w(k)$ je m-dimenzionální chyba měření mající nulový střed a splňující

$$E[w(k)w^T(j)] = W(k)\delta_{kj}, \tag{5}$$

kde $W(k)$ je kladně semidefinitní.

Navíc předpokládáme splnění podmínky

$(***)$ *Náhodné vektory $x(0)$, $u(j)$, $w(k)$ jsou navzájem nekorelované*

pro $j \geq 0, \ k \geq 0$.
Jako důsledek podmínky $(***)$ odvodíme, že

$$x(k) \text{ je nekorelované s } u(j), \ j \geq k, \ \text{ a s } w(j) \text{ pro všechna } j. \tag{6}$$

Dokážeme např.

$$E[x(k)u^T(k)] = \Phi(1)E[x(k-1)u^T(k)] + E[u(k-1)u^T(k)] = 0 \tag{7}$$

(indukce).

<u>Problém odhadu</u> spočívá v nalezení lineárního odhadu minimalizujícího rozptyl stavového vektoru x z měření v.

Zavedeme označení:

$$\left.\begin{array}{c}\hat{x}(k|j) \text{ je optimální odhad vektoru } x(k) \\ \text{na základě pozorování } v \text{ až do okamžiku } j.\end{array}\right\} \tag{8}$$

Tedy $\hat{x}(k|j)$ je projekce vektoru $x(k)$ na prostor $V(j)$, kde

$$\left.\begin{array}{c}V(j) \text{ je prostor "generovaný"} \\ \text{náhodnými } m-\text{vektory } v(0), v(1), ..., v(j).\end{array}\right\} \tag{9}$$

Pro jasnost a jednoduchost se budeme zabývat výhradně případem $k \geq j$ – případem, který odpovídá predikci nějaké budoucí hodnoty stavu nebo odhadu současného stavu (filtrace). S tím pro naše účely vystačíme. Odhad minulých hodnot stavového vektoru (vyhlazení), třebaže se v principu podstatně neliší od predikce, je komplikovanější v detailních výpočtech.

Věta 3.9. (Nalezení rekurzivní metody odhadu – Kalman [9].)
Optimální odhad $\hat{x}(k+1|k)$ *náhodného stavového vektoru* $x(k+1)$ *(na bázi* $V(k)$*) se dá vytvořit rekurzivně následujícím způsobem*

$$\left.\begin{array}{c}\hat{x}(k+1|k) = \Phi(k)P(k)C^T(k)[C(k)P(k)C^T(k) + W(k)]^{-1}\times \\ \times[v(k) - C(k)\hat{x}(k|k-1)] + \Phi(k)\hat{x}(k|k-1),\end{array}\right\} \tag{1}$$

kde $n \times n$*-matice* $P(k)$ *je kovariance vektoru* $\hat{x}(k|k-1)$

$$P(k) = E[(x(k) - \hat{x}(k|k \ -1))(x(k) - \hat{x}(k|k-1)^T], \tag{2}$$

jež sama je vytvořena rekurzivně takto

$$\left.\begin{array}{c}P(k+1) = \Phi(k)P(k)\{I - C^T(k)[C(k)P(k)C^T(k) + W(k)]^{-1}\times \\ \times C(k)P^T(k)\}\Phi^T(k) + Q(k).\end{array}\right\} \tag{3}$$

Počáteční podmínky pro tyto rekurzivní rovnice jsou počáteční odhad $\hat{x}(0|-1) = \hat{x}(0)$ *a jeho odpovídající kovariance* $P(0)$*. Dále předpokládejme, že matice* $C(k)P(k)C^T(k) + W(k)$ *je nesingulární pro všechna* $k \geq 0$.

Důkaz. Předpokládejme, že $v(0), ..., v(k-1)$ byly změřeny a že byl spočítán odhad $\hat{x}(k|k-1)$ spolu s kovarianční maticí

$$P(k) = E[(x(k) - \hat{x}(k|k-1))(x(k) - \hat{x}(k|k-1))^T]. \tag{4}$$

Jinými slovy máme projekci vektoru $x(k)$ na podprostor $V(k-1)$ „generovaný" náhodnými vektory $v(0), ..., v(k-1)$. V čase k obdržíme měření

$$v(k) = C(k)x(k) + w(k),$$

jež nám dává dodatečnou informaci o náhodném vektoru $x(k)$. To je přesně situace uvažovaná ve větě 3.6.

q Aktualizovaný odhad $\hat{x}(k)$ vektoru $x(k)$ je nyní podle věty 3.6

$$\left.\begin{aligned} \hat{x}(k|k) = \hat{x}(k|k-1) + P(k)C^T(k)[C(k)P(k)C^T(k) + W(k)]^{-1}\times \\ \times[v(k) - C(k)\hat{x}(k|k-1)] \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

s příslušnou kovariancí $P(k|k) = E[(x(k) - \hat{x}(k|k))(x(k) - \hat{x}(k|k))^T]$

$$\left.\begin{aligned} P(k|k) = P(k) - P(k)C^T(k)[C(k)P(k)C^T(k)+ \\ +W(k)]^{-1}C(k)P^T(k). \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Na základě optimálního odhadu $\hat{x}(k|k)$ vektoru $x(k)$ můžeme nyní spočítat optimální odhad $\hat{x}(k+1|k)$ vektoru $x(k+1) = \Phi(x)x(k) + u(k)$ na bázi rozšířené množiny pozorování $v(0), ..., v(k)$.

Provedeme to na základě těchto poznámek:

1) Podle věty 3.5 je optimální odhad vektoru $\Phi(k)x(k)$ roven $\Phi(k)\hat{x}(k|k)$.

2) Odhad vektoru $u(k)$ na bázi pozorování $[v(0), ..., v(k)]^T = v(k)$ je podle lemmatu 3.3 roven $E[u(k)v^T(k)][E(v(k)v^T(k))]^{-1}v(k)$, což je na základě 3.8(7) rovno nule. Odtud

$$\hat{x}(k+1|k) = \Phi(k)\hat{x}(k|k) + \hat{u}(k|k) = \Phi(k)\hat{x}(k|k). \tag{7}$$

Kovariance tohoto odhadu plyne z následujícího

$$\begin{aligned} P(k+1) &= E[(x(k+1) - \hat{x}(k+1|k))(x(k+1) - \hat{x}(k+1|k))^T] \\ &= E[(\hat{x}(k+1|k) - \Phi(k)x(k) - u(k))(\hat{x}(k+1|k) - \Phi(k)x(k) - \\ &\quad -u(k))^T] \\ &= E[\hat{x}(k+1|k)\hat{x}^T(k+1|k)] - \Phi(k)E[x(k)\hat{x}^T(k+1|k)] - \\ &\quad -E[u(k)\hat{x}^T(k+1|k)] - E[\hat{x}(k+1|k)x^T(k)]\Phi^T(k) + \\ &\quad +\Phi(k)E[x(k)x^T(k)]\Phi^T(k) + E[u(k)x^T(k)]\Phi^T(k) - \\ &\quad -E[\hat{x}(k+1|k)u^T(k)] + \Phi(k)E[x(k)u^T(k)] + E[u(k)u^T(k)] \\ &\overset{*}{=} \Phi(k)\{E[\hat{x}(k|k)\hat{x}^T(k|k)] + E[x(k)x^T(k)] - E[\hat{(}k|k)x^T(k)] - \\ &\quad -E[x(k)\hat{x}^T(k|k)]\}\Phi^T(k) + E[u(k)u^T(k)], \end{aligned}$$

(* znamená: použít rovnic 3.8(7) a 3.9(7))
tedy

$$P(k+1) = \Phi(k)P(k|k)\Phi^T(k) + Q(k) \tag{8}$$

v důsledku relace (6).

Substituce rovnice (5) do (7) a (6) do (8) vede přímo na (1) a (3). □

4. Stochastická metoda konstrukce interpolačních splajnů

V kapitole je vypracován dynamický rekurzivní algoritmus pro interpolaci EHB dat Lg-splajny za použití stochastické techniky, založené na stochastických (náhodných) procesech a Kalmanově metodě filtrace a predikce, s kterou jsme se seznámili v předešlé kapitole. Vztah mezi náhodným procesem vyhlazeným nejmenšími čtverci a deterministickým problémem splajnové interpolace je zprostředkován reprodukujícím jádrem Hilbertova prostoru, z jehož prvků splajn vybíráme. Tento náhodný proces je výstup jistého dynamického systému řízeného bílým šumem jako vstupem (věta 4.17). Parametry dynamického systému jsou určeny koeficienty diferenciálního operátoru, který definuje splajn. Na závěr je odvozen rekurzivní algoritmus pro konstrukci splajnu interpolujícího EHB data.

4.1. **Reprodukující jádro Hilbertova prostoru.**

R. 1939 vyšla kniha E.H.Moora ([19], Part II), v níž autor zavedl pojem pozitivní hermitovské matice a pojem tříd modulárních funkcí, což jsou třídy funkcí, které takovou matici připouštějí. Nezávisle na tom definoval N.Aronszajn r. 1939 [3] a r. 1950 [4] analogický pojem jako funkci dvou proměnných na Hilbertově prostoru, funkci nazvanou *reprodukující jádro* toho prostoru. Pod tímto názvem je Aronszajnův pojem všeobecně používán. V paragrafu 4.1 definujeme tento pojem, dále uvádíme charakteristiku Hilbertových prostorů s reprodukujícím jádrem a některé základní vlastnosti jádra.

Definice 4.1. (N. ARONSZAJN [3] str. 135, [4] str. 343; viz také [19] a [26]).

Nechť H je Hilbertův prostor reálných funkcí definovaných na abstraktní množině I. Reálná funkce $K(t,\tau)$ dvou proměnných t a τ v I se nazývá reprodukující jádro v H, když splňuje podmínky:

(1) *Pro každé $\tau \in I$, $K(t,\tau)$ jako funkce t patří do H.*

(2) *Reprodukční vlastnost: pro každé $\tau \in I$ a každé $f \in H$ platí*

$$f(\tau) = \big(f(t), K(t,\tau)\big)_t,$$

kde $(\cdot,\cdot)$ značí skalární součin v prostoru H a index t vyjadřuje, že se skalární součin aplikuje na funkce proměnné t. Definiční vztah často zapisujeme rovnicí, v níž „aktivní" proměnnou zaznamenáváme tečkou

$$f(\tau) = \big(f(\cdot), K(\cdot,\tau)\big). \qquad \square$$

Věta 4.2. [3] *Nechť H je Hilbertův prostor reálných funkcí na nějaké množině I.*

(1) *V prostoru H existuje reprodukující jádro, právě když lineární funkcionál $\lambda_t: f \mapsto f(t)$ je spojitý pro každé $t \in I$.*

(2) *Existuje nejvýš jedno reprodukující jádro prostoru H.*

(3) *Má-li H reprodukující jádro, pak každý uzavřený podprostor v H má reprodukující jádro.*

(4) *Je-li $K(t,\tau)$ reprodukující jádro prostoru H a H je uzavřený podprostor většího Hilbertova prostoru $\mathcal{H}$, pak funkce $f_1(\tau)$ definovaná vzorcem*

$$f_1(\tau) = \big(f(t), K(t,\tau)\big)_t$$

je projekce na H prvku $f \in \mathcal{H}$.

(5) *Jsou-li H_1 a H_2 komplementární podprostory Hilbertova prostoru H, který má reprodukující jádro, pak pro jejich reprodukující jádra K_1, K_2 a K resp. platí $K_1 + K_2 = K$.*

Důkaz. (1) Nechť $K(t,\tau)$ je reprodukující jádro pro H, $t \in I$. Pak pro lineární funkcionál definovaný vztahem $\lambda_t(f) = f(t)$ platí

$$|\lambda_\tau(f)| = |f(\tau)| = |\big(f(t), K(t,\tau)\big)_t| \le (f,f)^{1/2}\big(K(t,\tau),\ K(t,\tau)\big)_t^{1/2} =$$
$$= ||f||[K(t,t)]^{1/2},$$

takže λ_t je spojité zobrazení na H.

Obráceně, je-li lineární funkcionál $\lambda_t(f) = f(t)$ spojitý, pak pro jeho reprezentant $u_t \in H$ platí

$$f(t) = \lambda_t(f) = \big(f(\tau), u_t(\tau)\big),$$

což je vlastnost 4.1(2) reprodukujícího jádra $K(\tau,t) = u_t(\tau)$.
Vlastnost 4.1(1) je evidentní.

(2) Jsou-li $K(t,\tau)$ a $M(t,\tau)$ reprodukující jádra pro H, bude pro $\tau \in I$ platit

$$0 \le ||K(t,\tau) - M(t,\tau)||^2 = (K-M, K-M) = (K-M, K) - (K-M, M) = 0.$$

(3) Plyne z (1).

(4) Nechť $f = f_1 + f_2$, $f_1 \in H$, (H uzavřené) $f_2 \in H^\perp =$ ortogonální doplněk H v $\mathcal{H}$.
Odtud
$\big(f, K(t,\tau)\big)_t = \big(f_1 + f_2, K(t,\tau)\big)_t = \big(f_1, K(t,\tau)\big)_t = f_1(\tau)$.

(5) Nechť $f = f_1 + f_2$, $f_{1,2} \in H_{1,2}$ a $H_1 + H_2 = H$ nechť je ortogonální rozklad H. Podle (4) $\big(f(t), K_{1,2}(t,\tau)\big)_t = f_{1,2}(\tau)$, takže

$$f(\tau) = f_1(\tau) + f_2(\tau) = \big(f(t), K_1(t,\tau)\big)_t + \big(f(t), K_2(t,\tau)\big)_t =$$
$$= \big(f(t), K_1(t,\tau) + K_2(t,\tau)\big)_t.$$

Tedy podle (2) funkce $K(t,\tau) = K_1(t,\tau) + K_2(t,\tau)$ je reprodukující jádro v H. □

Několik elementárních vlastností reprodukujícího jádra prostoru H.

Věta 4.3. *Nechť prostor H má reprodukující jádro $K(t,\tau)$. Pak*
(1) $K(\tau,\omega) = \big(K(t,\omega), K(t,\tau)\big)_t$ *pro všechna* $\tau,\ \omega\ \in I$.
(2) $K(t,\tau) = K(\tau,t)$ *pro všechna* $t,\ \tau\ \in I$ (plyne z (1)).
(3) *Kvadratická forma*

$$Q(\xi) = \sum_{j,k=1}^{n} K(\tau_j,\tau_k)\xi_j\xi_k$$

je pozitivně semidefinitní pro všechna $\tau_1,...,\tau_n$ *v* I *a pro libovolné* $n = 1,\dots$.
(4) *Rovnice* $Q(\xi) = 0$ *je ekvivalentní s rovnicí* $\sum_{k=1}^{n} K(t,\tau_k)\xi_k = 0$ *pro všechna* $t \in I$ (plyne z (3)).
(5) $K(\tau,\tau) \geq 0$ *pro všechna* $\tau \in I$, $K(\tau,\tau) = 0$, *právě když* $K(t,\tau) = 0$ *pro všechna* $t \in I$.
(6) $|K(\tau,\omega)| \leq [K(\tau,\tau)K(\omega,\omega)]^{1/2}$ *pro všechna* $\tau,\omega \in I$. *Rovnost nastane, právě když* $\alpha K(t,\tau) = \beta K(t,\omega)$ *pro všechna* $t \in I$ *a pro čísla* (α,β) *nezávislá na* t *a nerovná* $(0,0)$.
(7) *Jsou-li* λ *a* μ *dva spojité lineární funkcionály na* H, *pak platí*

$$\mu_\tau[\lambda_t K(t,\tau)] = \lambda_t[\mu_\tau K(\tau,t)].$$

Indexy znamenají proměnnou, vzhledem ke které příslušný funkcionál operuje.
(8) *Spojitý lineární funkcionál* λ *na* H *má reprezentant* $k \in H$, *právě když* $\lambda_t K(t,\tau) = k(\tau)$. *V důsledku toho* $\lambda_t K(t,\tau) \in H$.

Důkaz. (5) je speciální případ (3) a (4) pro $n = 1,\ \tau_1 = \tau,\ \xi_1 = 1$.
(6) je jak známo nutná a dostatečná podmínka, aby kvadratická forma

$$Q(\xi) = K(\tau,\tau)\xi_1^2 + K(\omega,\omega)\xi_2^2 + K(\tau,\omega)\xi_1\xi_2 + K(\omega,\tau)\xi_2\xi_1$$

pro $n = 2,\ \tau_1 = \tau$ a $\tau_2 = \omega$ byla pozitivně semidefinitní. Rovnost v (6) značí, že $Q(\xi)$ není pozitivně definitní, tedy že pro nějaké $\xi = (\xi_1,\xi_2) \neq (0,0)$ platí $Q(\xi) = 0$. Podle (4) tato rovnost je ekvivalentní se vztahem $K(t,\tau)\xi_1 + K(t,\omega)\xi_2 = 0$ pro všechna $t \in I$, což dává druhou část (6) s koeficienty $\xi_1 = \alpha$ a $\xi_2 = -\beta$.
(7) Jsou-li k a h reprezentanty funkcionálů λ a μ, bude

$$\mu_\tau[\lambda_t K(t,\tau)] = \mu_\tau k(\tau) = (k,h) = (h,k) = \lambda_t[\mu_\tau K(\tau,t)].$$

(8) Zvolme $f \in H$ a definujme μ jako skalární násobení prvkem f, $\mu g = (g,f),\ g \in H$. Pro libovolný lineární funkcionál λ pak platí

$$\lambda_t[\mu_\tau K(\tau,t)] = \lambda_t\big(K(\tau,t), f(\tau)\big)_\tau = \lambda f(t) = \lambda f.$$

Je-li funkcionál λ spojitý a platí-li pro něj $\lambda_t K(t,\tau) = k(\tau)$, pak

$$\mu_\tau[\lambda_t K(t,\tau)] = \mu k(\tau) = (k(\tau), f(\tau))_H = (k,f)_H.$$

Vzhledem k (7) máme $\lambda f = (k, f)$ pro každé $f \in H$, tedy k je reprezentant funkcionálu λ.

Obráceně, je-li k reprezentant funkcionálu λ, pak

$$\lambda_t K(t,\tau) = \big(K(t,\tau), k(t)\big)_t = k(\tau). \qquad \square$$

Důsledek 4.4. *Nechť H má reprodukční jádro, $f^{(k)} \in H$ pro každé $f \in H$, k přirozené, $t_0 \in I$ = interval. Pak lineární funkcionál*

$$\Psi_{k,t_0}(f) = f^{(k)}(t_0)$$

je spojitý, pokud je operátor $f \to f^{(k)}$ spojitý.

Vskutku, podle věty 4.2(1) je operátor $f^{(k)} \to f^{(k)}(t_0)$ spojitý. $\square$

Věta 4.5. *Nechť H má reprodukující jádro $K(t,\tau)$. Pak platí*

(1) *Množina funkcí $u_\tau(t) \in H$, $\{u_\tau = K(t,\tau) : \tau \in I\}$, je úplný (fundamen-tální) systém v prostoru H* ([11] str. 168, [10] str. 164).

(2) *Slabá konvergence posloupnosti $\{f_n\}$ k prvku f ($f_n \xrightarrow{w} f$) je ekvivalent-ní se současnou platností dvou podmínek:*
   (a) *$f_n(t) \to f(t)$ pro každé $t \in I$,*
   (b) *množina norem $\{||f_n||\}$ je ohraničená.*

(3) *Silná konvergence posloupnosti $\{f_n\}$ k prvku f ($f_n \xrightarrow{s} f$) je ekvivalent-ní se současnou platností dvou podmínek:*
   (a) *$f_n(t) \to f(t)$ pro každé $t \in I$,*
   (b) *$||f_n|| \to ||f||$.*

(4) *Když posloupnost $\{f_n\}$ konverguje silně k f (v H), pak $f_n(t)$ konverguje k $f(t)$ stejnoměrně na každé množině prvků $t \in I$, na které je funkce $K(t,t)$ ohraničená.*

Důkaz. (1) Když $g \in H$ je ortogonální ke všem funkcím u_τ, platí $g(\tau) = (g(t), K(t,\tau))_t = (g, u_\tau) = 0$. Pro všechna τ, tedy $g = 0$ ([10], str. 164). Tvrzení pak plyne z [11], str. 179, cv. 2, str.180 (viz také [11] III §4, str. 145 ♯ 6).

(2) Nechť $f_n \xrightarrow{w} f$. Pak pro $t \in I$ existuje $\lambda \in \mathcal{L}(H)$ tak, že $\lambda g = g(t)$ pro každé $g \in H$. Odtud $f_n(t) = \lambda f_n \to \lambda f = f(t)$. Vlastnost (b) plyne z [11], IV §3, Teor. 1, str. 183, ♯ 7 (Banach-Steinhausova věta).

Obrácení platí podle [11], IV §3, Teor. 2, str.184, ♯ 8.

(3) $f_n \xrightarrow{s} f$ implikuje $f_n \xrightarrow{w} f$. Dále $|\|f_n\| - \|f\|| \le \|f_n - f\| \to 0$, tedy $\|f_n\| \to \|f\|$.

Obráceně, nechť $f_n(t) \to f(t)$, $t \in I$ a $\|f_n\| \to \|f\|$. Máme dokázat, že platí $(f_n - f, f_n - f) \to 0$. Podle (2) platí $f_n \xrightarrow{w} f$. Z toho dostaneme

(i) $(f_n - f, f) =: \lambda_f(f_n - f) = \lambda_f f_n - \lambda_f f \to 0$,

čili $\lambda_f f_n \to \lambda_f f$. Z předpokladu $\|f_n\| \to \|f\|$ plyne

(ii) $(f_n, f_n) \to (f, f) = \lambda_f f$.
Dále
(iii) $(f_n - f, f_n) = (f_n, f_n) - (f, f_n) \overset{(ii)}{\to} \lambda_f f - \lim \lambda_f f_n \overset{(i)}{=} 0$.
Konečně $(f_n - f, f_n - f) = (f_n - f, f_n) - (f_n - f, f) \to 0$ podle (iii) a (i).
(4) $|f(\tau) - f_n(\tau)| = |(f(t) - f_n(t), K(t,\tau))| \le \|f - f_n\| \|K(t,\tau)\| = \|f - f_n\|(K(\tau,\tau))^{1/2}$. □

4.6.

V tomto odstavci zkonstruujeme reprodukující jádro pro Hilbertův prostor $H^{q,2}[0,T]$. Připomeňme pojmy, které byly zavedeny a vztahy, které byly stanoveny v souvislosti s definicí skalárního součinu v $H^{q,2}[0,T]$, odst. 2.5:

$\{z_j(\cdot)\}_1^q$ představuje bázi v podprostoru $N(L)$, která je duální vzhledem k $\{\lambda_i\}_1^q$, tedy báze s vlastnostmi 2.5(1):
(1) $Lz_j = 0,\ \lambda_i z_j = \delta_{ij},\ i,j = 1(1)q$.
Dále
$G(\cdot,\cdot)$ je Greenova funkce operátoru L splňující 2.5(2):
(2) $LG(\cdot,\tau) = \delta(\tau - \cdot),\ \lambda_j G(\cdot,\tau) = 0$.
Za těchto podmínek každé $f \in H^{q,2}[0,T]$ může být jednoznačně rozloženo ve tvaru 2.5(3):
(3) $f(\cdot) = \sum_{j=1}^q (\lambda_j f) z_j(\cdot) + \int_0^T G(\cdot,\tau)[Lf(\tau)]d\tau$.
Konečně, skalární součin v $H^{q,2}[0,T]$ je definován jako
(4) $(e,f)_{H^{q,2}} = \sum_{j=1}^q (\lambda_j e)(\lambda_j f) + \int_0^T (Le)(Lf)$.

Věta 4.7. *Prostor* $H^{q,2}[0,T]$ *(se skalárním součinem* 4.6(4) *má reprodukující jádro*

$$K(t,\tau) = \sum_{j=1}^q z_j(t) z_j(\tau) + \int_0^T G(t,\xi) G(\tau,\xi) d\xi, \quad t,\tau \in [0,T]. \tag{1}$$

Důkaz. K důkazu podmínky 4.1(1) pro reprodukující jádro stačí připomenout, že podle (1) a (2) (odkazy se vztahují na odst. 4.6)

$$\lambda_j K(\cdot,\tau) = z_j(\tau),\ j = 1(1)q \quad \text{a} \quad LK(\cdot,\tau) = G(\tau,\cdot),\ \tau \in [0,T].$$

odkud obdržíme $K(\cdot,\tau)$ ve tvaru (3), což znamená, že $K(\cdot,\tau) \in H^{q,2}[0,T]$. Vzhledem k symetrii také $K(t,\cdot) \in H^{q,2}[0,T]$.
Důkaz definiční vlastnosti (2):

$$(f(\cdot), K(\cdot,\tau))_{H^{q,2}} = \Big(f(\cdot), \sum_{j=1}^q z_j(\cdot) z_j(\tau) + \int_0^T G(\cdot,\xi) G(\tau,\xi) d\xi\Big)_{H^{q,2}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{q} (\lambda_i f) \Big[\lambda_i \sum_{j=1}^{q} z_j(\cdot) z_j(\tau) + \lambda_i \int_0^T G(\cdot,\xi) G(\tau,\xi) d\xi \Big] +$$

$$+ \int_0^T Lf(y) \Big[L_y \sum_{j=1}^{q} z_j(y) z_j(\tau) + L_y \int_0^T G(y,\xi) G(\tau,\xi) d\xi \Big] dy =$$

$$= \sum_{i=1}^{q} (\lambda_i f) z_i(\tau) + \int_0^T [Lf(y)] G(\tau, y) dy = f(\tau). \qquad \square$$

Poznámka 4.8. *Lineární funkcionál λ v prostoru $H^{q,2}[0,T]$ definovaný vztahem $\lambda f = f(t)$ pro $f \in H^{q,2}$ a $t \in [0,T]$ je spojitý (věta 4.7 a věta 4.2(1)).*

Věta 4.9.

(1) *$z_j(\cdot)$ je reprezentant funkcionálu λ_j, $j = 1(1)q$, (1.18(3)), tj. $z_j(\cdot) = k_j(\cdot)$.*

1.18(3 (2) *$\{z_j\}_1^q$ tvoří ortonormální bázi v $N(L)$.*

Důkaz. (1) Z (1) až (3) (v odstavci 4.6) a z věty 4.3(8) plyne

$$k_j(\tau) = \lambda_j K(\cdot,\tau) = \textstyle\sum_{i=1}^{q} (\lambda_j z_i) z_i(\tau) +$$
$$+ \textstyle\int_0^T \lambda_j G(\cdot,\xi) G(\tau,\xi) d\xi = z_j(\tau).$$

(2) Platí

$$\delta_{ij} = \lambda_i z_j = (z_j, k_i) = (z_j, z_i),$$

což dokazuje, že báze $\{z_j\}_1^q$ je ortonormální. $\square$

V definici 1.25 Lg-splajnu se funkcionály λ_i předpokládají spojité. V případě EHB problému jsou funkcionály předepsány předpisem 2.12(2), ale jejich spojitost nebyla zkoumána. V Hilbertově prostoru s reprodukujícím jádrem $H^{q,2}$ se můžeme k problému vyjádřit, a to takto:

Tvrzení 4.10. *Lineární funkcionály λ_i definované na Hilbertově prostoru s reprodukujícím jádrem $H^{q,2}$ a splňující EHB podmínky 2.12(2), jsou spojité.*

Důkaz vyplývá přímo z důsledku 4.4 pro funkcionál $\Psi_{j,t} : f \mapsto f^j(t)$, $j = 0(1)q-1$, čehož zřejmým důsledkem je spojitost lineárních kombinací funkcionálů $\Psi_{j,t}$. $\square$

4.2. **Interpolace splajny a náhodné procesy.**

4.11. *Vytvoření náhodného procesu.*

Podle věty 4.7 má Hilbertův prostor $H^{q,2}[0,T]$ (se skalárním součinem 4.6(4)) reprodukující jádro, řekněme $K(t,\tau)$, definované v 4.7(1). Protože reprodukující jádro je symetrická a semidefinitní funkce (věta 4.3 (2) a (3)), je kovarianční funkcí náhodného procesu s nulovým středem

$$\{y(t) : t \in [0,T]\} \tag{1}$$

(viz např. Anděl [1] věta 5, str. 15 a I.4, Cvičení 3, str. 16; $\sharp$ 9 [15] str. 140). Odtud

$$E[y(t)] = 0, \;\; E[y(t)y(\tau)] = K(t,\tau), \;\; t,\tau \in [0,T]. \tag{2}$$

Označme Y Hilbertův prostor náhodných veličin s nulovým středem (viz např. [1] str. 130, rovněž 3.1) generovaný množinou $\{y(t) : t \in [0,T]\}$ a opatřený skalárním (vnitřním) součinem

$$(y_1, y_2)_Y = E[y_1 y_2], \quad y_1, y_2 \in Y. \tag{3}$$

Dva prostory se skalárním součinem (tj. dva Euklidovské prostory) H_1 a H_2 se nazývají <u>kongruentní</u>, když existuje 1–1 lineární zobrazení σ z H_1 do H_2, které zachovává skalární součin, tj. když

$$(f,g)_{H_1} = (\sigma f, \sigma g)_{H_2}, \quad f, g \in H_1.$$

Následující věta (Loève [17] str. 108) podává příklad takové kongruence.

Věta 4.12. *Hilbertovy prostory Y a $H^{q,2}[0,T]$ jsou kongruentní. Příslušné lineární zobrazení σ se definuje*

$$(\sigma w)(\cdot) = E[wy(\cdot)], \quad w \in Y. \tag{1}$$

Jestliže pro $f \in H^{q,2}[0,T]$ a $w \in Y$ platí $\sigma w = f$, píšeme

$$f \sim w.$$

Pak

$$f \sim w \equiv f(\cdot) = E[wy(\cdot)]. \tag{2}$$

Např. 4.11(2) a 4.12(2) implikují

$$K(\cdot, t) \sim y(t); \tag{3}$$

jinak vyjádřeno

$$\left.\begin{array}{c} y(t)(\cdot) \text{ jako funkce na pravděpodobnostním} \\ \text{prostoru } (\mathbb{R}, \mathfrak{B}, \mathrm{P}) \text{ je rovna } K(\cdot, t). \end{array}\right\} \tag{4}$$

Prvek $\sigma^{-1}k_j$ $(\in Y)$ označme vhodněji $\lambda_j y$. Pak

$$k_j \sim \lambda_j y, \quad j = 1(1)N. \tag{5}$$

(Důvod pro toto označení spočívá v následujícím: z 4.12(3) a z tvrzení (8) věty 4.3 plyne

$$\sigma^{-1}k_j = \sigma^{-1}\lambda_j K(\cdot,t) = \sigma^{-1}\lambda_j[\sigma y(t)],$$

neboli

$$\lambda_j y \ := \sigma^{-1}k_j = \sigma^{-1}\lambda_j\sigma y(t).)$$

Interpolační Lg-splajn určuje podprostor K prostoru $H^{q,2}[0,T]$ (1.18(5)) generovaný

množinou $\{k_j\}_1^N$. Jemu odpovídá v Y podprostor $D = \sigma^{-1}K$ generovaný náhodnými veličinami $\{\lambda_j y\}_1^N$. Je-li nyní $g \in A^{-1}(r)$ a $\gamma = \sigma^{-1}(g)$, pak

$$E[\gamma(\lambda_j y)] = (\gamma, \lambda_j y)_Y = (\sigma\gamma, \sigma(\lambda_j y))_{H^{q,2}} = (g, k_j)_{H^{q,2}} = \lambda_j g = r_j,$$

tj.

$$E[\gamma(\lambda_j y)] = r_j, \quad j = 1(1)N. \tag{6}$$

Nyní můžeme zformulovat problém projekce v Y odpovídající problému projekce v $H^{q,2}[0,T]$ (věta 2.7).

4.3. **Problém projekce (lineární odhad minimalizující rozptyl v Y).**

4.13.

Nechť $\gamma \in Y$ splňuje $E[\gamma(\lambda_j y)] = r_j, \quad j = 1(1)N$. Nechť $\hat{\gamma}$ je lineární odhad minimalizující rozptyl (LMVE) veličiny γ na základě $\{\lambda_j y\}_1^N$. To znamená, že $\hat{\gamma}$ je náhodná veličina v D vyhovující vztahu

$$||\gamma - \hat{\gamma}||_Y = \min_{\rho\in D} ||\gamma - \rho||_Y, \tag{1}$$

neboli jinými slovy,

$$\hat{\gamma} \text{ je projekce veličiny } \gamma \text{ na } D.$$

Z předešlé diskuze a na základě 2.7(1) obdržíme

$$s(\cdot) \sim \hat{\gamma} \tag{2}$$

a z 4.12(2)

$$s(\cdot) = E[\hat{\gamma}y(\cdot)]. \tag{3}$$

Označme

$$\hat{y}(t) = \text{LMVE veličiny } y(t) \text{ na bázi } \{\lambda_j y\}_1^N. \tag{4}$$

Pak

$$\hat{y}(t) = \sum_{j=1}^{N} \beta_j(t)\lambda_j y \tag{5}$$

pro nějaké koeficienty $\beta_j(t)$. Z toho, že projekce je samoadjungovaný operátor a z předešlých vztahů 4.12(6), 4.13(3) a (5) plyne

$$\left.\begin{aligned} s(t) &\overset{(3)}{=} (\hat{\gamma}, y(t))_Y = (\gamma, \hat{y}(t))_Y \overset{(4)}{=} \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^N \beta_j(t)(\gamma, \lambda_j y)_Y \overset{4.12(6)}{=} \sum_{j=1}^N \beta_j(t) r_j. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Tento vztah spolu s předešlým vztahem 4.13(5) dovoluje formulovat následující důležitý výsledek, který uvádí do relace splajny a stochastické odhady.

Věta 4.14. *Je-li y_t pozorování náhodné veličiny $\hat{y}(t)$, které se obdrží substitucí $\lambda_j y = r_j$, $\quad j = 1(1)N$, pak*

$$s(t) = y_t, \quad t \in [0, T]. \qquad \square$$

4.4. **Dynamický model pro $y(\cdot)$.**

4.15.

Pomocí věty 4.14 předešlého paragrafu můžeme využít rekurzivního algoritmu pro $\hat{y}(\cdot)$, odvozeného v kapitole 2.2, také pro rekurzivní algoritmus výpočtu $s(\cdot)$ – prostě tak, že nahradíme $\lambda_j y$ číslem r_j.

Jedna z možností, jak vypočítat $\hat{y}(t)$ rekurentně je ovšem využít informace, kterou poskytuje reprodukující jádro jako kovarianční funkce jistého náhodného procesu.

Druhá cesta, která umožňuje vyhnout se přímému výpočtu reprodukujícího jádra, vede na dynamický model, který generuje $y(t)$, parametrizovaný koeficienty diferenciálního operátoru L. To je idea dalšího postupu.

Zkonstruujeme jistý náhodný proces, který budeme značit

$$\{u(t) : \ t \ \in \ [0, T]\}$$

a definujeme formulí

$$Ly(\cdot) = u(\cdot). \tag{1}$$

Podrobněji:

$u(t)(\tau)$ jako funkce argumentu τ na pravděpodobnostním

prostoru $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}, P)$ je rovna $L_t[y(t)(\tau)]$.

Tvrzení 4.16. *Náhodný proces $\{u(t) : t[0, T]\}$ je bílý šum s nulovým středem, tj.*

$$E[u(\cdot)] = 0, \quad E[u(\cdot)u(\tau)] = \delta(\cdot - \ tau), \quad \cdot, tau \in [0, T]. \tag{1}$$

Důkaz. $E[u(\cdot)] = E[Ly(\cdot)] = LE[y(\cdot)] \overset{4.11(2)}{=} 0$. K odvození vztahu $E[u(\cdot)u(\tau)] = \delta(\cdot - \tau)$ nejprve poznamenejme, že z 4.6 (1) a (2) a 4.7(1) snadno plyne

$$LK(\cdot, \tau) = G(\tau, \cdot). \tag{2}$$

Odtud

$$G(\tau, \cdot) = LK(\cdot, \tau) \overset{4.11(2)}{=} LE[y(\cdot)y(\tau)] = E[Ly(\cdot)y(\tau)],$$

takže podle 4.6(2) a podle předešlého

$$\delta(\cdot - \tau) = L_\tau G(\tau, \cdot) = E[Ly(\cdot)Ly(\tau)] = E[u(\cdot)u(\tau)]. \qquad \square$$

Zapíšeme-li rovnici 4.15(1) ve formě systému lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu (state-variable form), máme následující větu.

Věta 4.17. *Proces* 4.11(1) $\{y(t) : t \in [0, T]\}$ *je výstup následujícího systému řízeného bílým šumem (vstupem):*

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}\mathbf{x}(t) &= A(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) \\ y(t) &= \mathbf{c}\mathbf{x}(t), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

kde

$$\mathbf{x}(\cdot) = [y(\cdot), y'(\cdot), ..., y^{q-1}(\cdot)] \tag{2}$$

$$\mathbf{b}^T = [0, ..., 0, 1] \tag{3}$$

$$\mathbf{c} = [1, 0, ..., 0] \tag{4}$$

$$A(\cdot) = \left[\begin{array}{c:c} 0 & I \\ \hdashline -a_0(\cdot) & -a_1(\cdot) ... - a_{q-1}(\cdot). \end{array}\right] \tag{5}$$

Prvky matice A jsou koeficinty operátoru L. $\square$

Předcházející model bude úplný, předepíšeme-li počáteční podmínky; ty jsou jednoznačně určeny reprodukujícím jádrem a stanoveny v 4.18(8) a (9) v následujícím.

Počáteční podmínky stanovíme pro případ interpolace EHB dat, 2.12(1) a (2).

$$\lambda_j f = \sum_{k=1}^{q} \alpha_{jk} f^{(k-1)}(t_j) = \mathbf{c}_j \mathbf{f}(t_j), \quad j = 1(1)N, \tag{6}$$

kde $0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_N \leq T$ je zadaná síť, α_{jk} jsou zadaná čísla, $\mathbf{f}(t_j) = [f(t_j), f'(t_j), ..., f^{(q-1)}(t_j)]^T$ a

$$\mathbf{c}_j = [\alpha_{j1}, ..., \alpha_{jq}], \quad j = 1(1)N. \tag{7}$$

Tedy vzhledem k 4.12(5) a 4.17 (2)

$$\lambda_j y = \mathbf{c}\mathbf{x}(t_j), \quad (\lambda_j y \in Y). \tag{8}$$

Pro EBH funkcionály jako počáteční bod je nejvhodnější bod t_q.

Nechť $\Phi(\cdot,\cdot)$ je fundamentální matice pro $A(\cdot)$, tj.

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,\tau) = A(t)\Phi(t,\tau), \quad \Phi(\tau,\tau) = I. \tag{9}$$

Jak známo

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t,t_q)\mathbf{x}(t_q) + \int_{t_q}^{t} \Phi(t,\tau)\mathbf{b}u(\tau)d\tau. \tag{10}$$

Odtud podle 4.17(8)

$$\lambda_j y = \mathbf{c}_j\Phi(t_j,t_q)\mathbf{x}(t_q) + \int_{t_q}^{t_j} \mathbf{c}_j\Phi(t_j,\tau)\mathbf{b}u(\tau)d\tau. \tag{11}$$

Poznámka 4.18.

1) 4.17(10) zůstává v platnosti, když t_q nahradíme libovolným $t_0 \in [0,T]$.

2) 4.17(10) má diskrétní analogii v rovnici

$$\mathbf{x}(k+1) = \Phi(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{u}(k),$$

která figuruje v definici 3.8(2) dynamického modelu, přičemž $\mathbf{u}(t)$ (na rozdíl od skalární náhodné veličiny $u(t)$ v 4.15(1)) je vektorový náhodný vstup,

$$\mathbf{u}(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)\mathbf{b}u(\tau)d\tau.$$

Při označení

$$\Theta^T = [\lambda_1 y, ..., \lambda_q y] \tag{1}$$

můžeme s použitím 4.17(11) snadno dokázat, že platí

$$\mathbf{x}(t_q) = M^{-1}\Theta + M^{-1}\int_{t_1}^{t_q} \Delta(\tau)\mathbf{b}u(\tau)d\tau, \tag{2}$$

kde M je $q \times q$-matice s i-tým řádkem M_i^T ve tvaru

$$M_i^T = \mathbf{c}_i\Phi(t_i,t_q), \tag{3}$$

což podle 4.17 (6) a (4) vede na

$$M_i^T = \lambda_i\mathbf{c}\Phi(t,t_q) \tag{4}$$

(viz 1.26(5)) a kde $\Delta(\cdot)$ je $q \times q$ -matice, jejíž i-tý řádek $\Delta_i^T(\cdot)$ je dán vztahem

$$\Delta_i^T(\tau) = \begin{cases} \mathbf{c}_i\Phi(t_i,\tau), & \tau \in [t_i,t_q], \\ 0 \quad \text{jinak.} \end{cases} \tag{5}$$

Existence inverzní matice M^{-1} je zaručena podmínkou jednoznačnosti, věta 1.28.

Nyní snadno odvodíme, že platí

$$E[\Theta u(t)] = 0, \quad t \in [0,T], \tag{6}$$

$$E[\Theta\Theta^T] = I. \tag{7}$$

Vskutku, platí

$$E[\Theta_i u(t)] \overset{I}{=} (\Theta_i, u(t))_Y \overset{II}{=} (\lambda_i y, u(t))_Y \overset{III}{=}$$
$$= (\sigma(\lambda_i y), \sigma(u(t)))_{H^{q,2}} \overset{IV}{=} (k_i, G(\tau,t))_{H^{q,2}} \overset{V}{=} \lambda_i^{(\tau)} G(\tau,t) \overset{VI}{=} 0,$$

(význam znaků: $I \equiv 4.11(3)$, $II \equiv 4.18(1)$, $III \equiv V.4.12$, $IV \equiv 4.12(5)$, $4.16(2)$, $V \equiv 1.20$, $VI \equiv 2.5$) odkud plyne (6).

K důkazu 4.18(7): Podle věty 4.9 platí $k_i(\tau) = z_i(\tau)$, $i = 1(1)q$. Odtud a podle 2.5(1)

$$(k_i, k_j) = \lambda_i z_j = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j. \end{cases}$$

Závěrem

$$(E[\Theta\Theta^T])_{ij} = E[(\lambda_i y)(\lambda_j y)] \overset{4.11(3)}{=} (\lambda_i y, \lambda_j y)_Y \overset{V.4.12}{=}$$
$$= (\sigma(\lambda_i y), \sigma(\lambda_j y))_{H^{q,2}} \overset{4.12(5)}{=} (k_i, k_j)_{H^{q,2}} = \delta_{ij}, \; i,j = 1(1)q.$$

□

Rovnice 4.18 (2), (6) a (7) implikují

$$E[\mathbf{x}(t_q)\mathbf{x}^T(t_q)] = M^{-1}[I + \int_{t_1}^{t_q} \Delta(\tau)\mathbf{b}\mathbf{b}^T\Delta^T(\tau)d\tau]M^{-T}, \tag{8}$$

$$E[\mathbf{x}(t_q)u(t)] = \begin{cases} M^{-1}\Delta(t)\mathbf{b}, t \in [t_1, t_q], \\ 0 \;\text{ jinak.} \end{cases} \tag{9}$$

Ad 4.18(8): Podle 4.16(2) platí

$$\begin{aligned} E[\mathbf{x}(t_q)\mathbf{x}^T(t_q)] &= M^{-1}E[(\Theta + \int_{t_1}^{t_q} \Delta(\tau)\mathbf{b}u(\tau)d\tau \times \\ \times \quad & (\Theta^T + \int_{t_1}^{t_q} \mathbf{b}^T\Delta^T(\tau)u(\tau)d\tau)]M^{-T} = \\ = \quad & M^{-1}\{E(\Theta\Theta^T) + E[\Theta\int_{t_1}^{t_q} \mathbf{b}\Delta^T(\tau)u(\tau)d\tau] + \\ + \quad & E[\int_{t_1}^{t_q} \Delta(\tau)\mathbf{b}u(\tau)d\tau \cdot \Theta^T] + \\ + \quad & E[\int_{t_1}^{t_q} \Delta(\tau)\mathbf{b}u(\tau)d\tau \cdot \int_{t_1}^{t_q} \mathbf{b}^T\Delta^T(\tau)u(\tau)d\tau]\}M^{-T}. \end{aligned}$$

První člen ve složené závorce je roven I podle 4.18 (7), další dva jsou rovny nule podle 4.18 (6). Poslední člen spočteme takto: nejprve platí

$$\sigma u(t) \overset{4.15(1)}{=} \sigma Ly(t) \overset{4.12(3)}{=} L_t K(\tau,t) \overset{4.16(2)}{=} G(\tau,t).$$

Podrobnější zápis: $\sigma[u(t)](\tau) = \sigma L_t[y(t)](\tau) = L_t K(\tau,t) = G(\tau,t)$, kde τ značí argument probíhající prostor $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}, P)$, takže zmíněný člen bude roven

$$\begin{aligned}
&\Big(\int_{t_1}^{t_q} \Delta(\tau)\mathbf{b}u(\tau)d\tau, \int_{t_1}^{t_q} \mathbf{b}^T\Delta^T(\tau)u(\tau)d\tau\Big)_Y = \\
=\ &\Big(\sigma\int_{t_1}^{t_q} \Delta(\tau)\mathbf{b}u(\tau)d\tau, \sigma\int_{t_1}^{t_q} \mathbf{b}^T\Delta^T(\tau)u(\tau)d\tau\Big)_{H^{q,2}} = \ (\textit{viz pozn. dole})^1 \\
=\ &\Big(\int_{t_1}^{t_q} \Delta(\tau)\mathbf{b}G(t,\tau)d\tau, \int_{t_1}^{t_q} \mathbf{b}^T\Delta^T(\tau)G(t,\tau)d\tau\Big)_{H^{q,2}} \overset{2.5(4)}{=} \\
=\ &\sum_{j=1}^{q} \int_{t_1}^{t_q} \Delta(\tau)\mathbf{b}\lambda_j^{(t)}G(t,\tau)d\tau \cdot \int_{t_1}^{t_q} \mathbf{b}^T\Delta^T(\tau)\lambda_j^{(t)}G(t,\tau)d\tau + \\
+\ &\int_0^T \Big[\int_{t_1}^{t_q} \Delta(\tau)\mathbf{b}L_{(t)}G(t,\tau)d\tau \cdot \int_{t_1}^{t_q} \mathbf{b}^T\Delta^T(\tau)L_{(t)}G(t,\tau)d\tau\Big]dt \overset{2.5(2)}{=} \\
=\ &\int_0^T \Big[\int_{t_1}^{t_q} \Delta(\tau)\mathbf{b}\delta(\tau-t)d\tau \cdot \int_{t_1}^{t_q} \mathbf{b}^T\Delta^T(\tau)\delta(\tau-t)d\tau\Big]dt = \\
=\ &\int_0^T \Delta(t)\mathbf{b}\mathbf{b}^T\Delta^T(t)dt \overset{4.18(5)}{=} \int_{t_1}^{t_q} \Delta(t)\mathbf{b}\mathbf{b}^T\Delta^T(t)dt.
\end{aligned}$$

Ad 4.18(9): Podle 4.18 (6), (2) a 4.16(1) platí

$$\begin{aligned}
&E[\mathbf{x}(t_q)\mathbf{u}(t)] = E\big[(M^{-1}\Theta + M^{-1}\int_{t_1}^{t_q} \Delta(\tau)\mathbf{b}\mathbf{u}(\tau)d\tau)u(\tau)\big] = \\
&= M^{-1}E[\Theta u(t)] + M^{-1}E\big[\int_{t_1}^{t_q} \Delta(\tau)\mathbf{b}u(\tau)u(t)d\tau\big] \overset{4.16(1)}{=} \\
&= M^{-1}\int_{t_1}^{t_q} \Delta(\tau)\mathbf{b}\delta(t-\tau)d\tau,
\end{aligned}$$

což podle 4.18(5) dává žádaný výsledek.

Rovnice 4.18 (8) a (9) představují počáteční podmínky. Tím je dokončena specifikace modelu 4.17 (1) až (5) pro $y(\cdot)$. □

---

[1] Tato rovnice se opakuje (bez detailů) v odstavci 4.28 (viz poznámku [1] pod čarou na str. 68).

4.5. **Rekurzivní algoritmus pro Lg-splajny interpolující EHB data.**

4.19. *Rekurzivní algoritmus*

pro Lg-splajn $s(\cdot)$ interpolující data $\{r_j\}_1^N$ vzhledem k EHB funkcionálům $\Lambda = \{\lambda_j\}_1^N$. (Odvození viz dále v odst. 4.6.)

KROK 1. Přímý chod pro $t_{j-1} \leq t \leq t_j,\ j = q+1(1)N$ (pokud ovšem $q+1 \leq N$).
Z výchozích podmínek

$$\mathbf{x}_{q/q} = M^{-1}\mathbf{r}_q, \text{ kde } \mathbf{r}_q = [r_1, ..., r_q]^T \tag{1}$$

$$P_{q/q} = M^{-1}[\int_{t_1}^{t_q} \Delta(\tau)\mathbf{b}\mathbf{b}^T\Delta^T(\tau)d\tau]M^{-T} \tag{2}$$

spočteme indukcí následující veličiny pro $j = q+1(1)N$:

$$\varepsilon_j = r_j - \mathbf{c}\mathbf{x}_{j/j-1} \tag{3}$$

$$R_j = \mathbf{c}_j P_{j/j-1}\mathbf{c}_j^T \text{ (skalár)} \tag{4}$$

$$\mathbf{K}_j = P_{j/j-1}\mathbf{c}_j^T \tag{5}$$

$$\mathbf{x}_{j/j-1} = \Phi(t_j, t_{j-1})\mathbf{x}_{j-1/j-1} \tag{6}$$

$$\mathbf{x}_{j/j} = \mathbf{x}_{j/j-1} + \mathbf{K}_j R_j^{-1}\varepsilon_j \tag{7}$$

$$\begin{aligned} P_{j/j-1} &= \Phi(t_j, t_{j-1})P_{j-1/j-1}\Phi^T(t_j, t_{j-1}) + \\ &+ \int_{t_{j-1}}^{t_j} \Phi(t_j, \tau)\mathbf{b}\mathbf{b}^T\Phi^T(t_j, \tau)d\tau \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} P_{j/j} &= P_{j/j-1} - P_{j/j-1}\mathbf{c}_j^T[\mathbf{c}P_{j/j-1}\mathbf{c}_j^T]^{-1}\mathbf{c}_j P_{j/j-1}^T = \\ &= [I - \mathbf{K}_j R_j^{-1}\mathbf{c}]P_{j/j-1}[I - \mathbf{K}R_j^{-1}\mathbf{c}_j]^T. \end{aligned} \tag{9}$$

Těchto veličin použijeme k provedení Gram-Schmidtovy ortogonalizace posloupnosti $\{\lambda_i y\}_1^N$. Vlastní provedení bude popsáno schématem $(G-S)$ v odst. 4.6 – odvození algoritmu.

Ulož $\mathbf{x}_{N/N}$ a všechna $\varepsilon_j,\ \mathbf{K}_j,\ R_j,\ j = q+1(1)N$.

KROK 2. Pro $t \geq t_N$

$$s(t) = \mathbf{c}\Phi(t, t_N)\mathbf{x}_{N/N}. \tag{10}$$

KROK 3. Zpětný chod pro $t_{j-1} \leq t \leq t_j,\ j = N(1)q+1$:

$$s(t) = \mathbf{c}\mathbf{x}(t/N) \tag{11}$$

kde

$$\mathbf{x}(t/N) = \Phi(t,t_j)\mathbf{x}(t_j/N) + [\int_{t_j}^{t} \Phi(t,\tau)\mathbf{b}\mathbf{b}^T\Phi^T(t_j,\tau)d\tau]\mu_j \tag{12}$$

$$\mathbf{x}(t_N/N) = \mathbf{x}_{N/N} \tag{13}$$

$$\mu_j = \psi_{j+1}^T\mu_{j+1} + \mathbf{c}_j^T R_j^{-1}\varepsilon_j,\ \mu_N = \mathbf{c}_N^T R_N^{-1}\varepsilon_N \tag{14}$$

$$\psi_{j+1} = \Phi(t_{j+1},t_j)[I - \mathbf{K}_j R_j^{-1}\mathbf{c}_j],\ j = N-1(1)q+1. \tag{15}$$

KROK 4. Pro $t_1 \leq t \leq t_q$

$$s(t) = \mathbf{c}\mathbf{x}(t/N) \tag{16}$$

kde

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t/N) &= \Phi(t,t_q)\mathbf{x}(t_q/N) + \\ &+ [\int_{t_q}^{t} \Phi(t,\tau)\mathbf{b}\mathbf{b}^T\Delta^T(\tau)d\tau]M^{-T}\Phi^T(t_{q+1},t_q)\mu_{q+1}.\end{aligned} \tag{17}$$

KROK 5. Pro $t < t_1$

$$s(t) = \mathbf{c}\Phi(t,t_1)\mathbf{x}(t_1/N). \tag{18}$$

□

Příklad 4.20.

$L = D^2,\ \ \lambda_j f = f(t_j) = r_j,\ \ j = 1(1)N;\ \ N > 2,\ \ \mathbf{r} = [r_1, ..., r_N]^T.$
Pak $q = 2,\ \ \mathbf{c} = [1,0],\ \ j = 1(1)N.$

KROK 1. Přímý chod pro $t_{j-1} \leq t \leq t_j,\ j = 3(1)N.$

Počáteční podmínky

$$\mathbf{x}_{2/2} = \begin{bmatrix} r_2 \\ r_1 - r_2/(t_1 - t_2), \end{bmatrix} \tag{1a}$$

$$P_{2/2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -(t_1 - t_2)/3. \end{bmatrix} \tag{2a}$$

Výpočet 4.20(1a) $\mathbf{x}_{2/2}$ a 4.20(2a) $P_{2/2q}$, nejprve $\mathbf{x}_{2/2}$:
Homogenní rovnici $y'' = 0$ převedeme na systém

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T,\ x_1' = x_2,\ x_2' = 0,$$

který má fundamentální matici řešení ve tvaru

$$\Phi(t,\tau) = \begin{bmatrix} a_1t+b_1 & a_2t+b_2 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} \left(= \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} \right),$$

který po specifikaci počáteční podmínkou $\Phi(\tau,\tau) = I$ přejde na tvar

$$\Phi(t,\tau) = \begin{bmatrix} 1 & t-\tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Protože $\lambda_j f = f(t_j),\ j = 1(1)N$, máme $\mathbf{c}_j = [1,0]$.

Spočteme 4.20(1a) $\mathbf{x}_{2/2}$:

$$\begin{aligned} M_1^T &= \mathbf{c}\Phi(t_1,t_2) = [1,0] \begin{bmatrix} 1 & t_1-t_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [1, t_1-t_2], \\ M_2^T &= \mathbf{c}\Phi(t_2,t_2) = [1,0]I = [1,0], \end{aligned}$$

takže

$$M = \begin{bmatrix} 1 & t_1-t_2 \\ 1 & 0, \end{bmatrix}, \quad M^{-1} = \frac{1}{t_2-t_1} \begin{bmatrix} 0 & t_2-t_1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Odtud plyne 4.20(1a)

$$\mathbf{x}_{2/2} = M^{-1}\mathbf{r}_q = \begin{bmatrix} r_2 \\ r_1 - r_2/(t_1-t_2) \end{bmatrix}.$$

Spočteme 4.20(2a)$P_{2/2}$:

Podle 4.18(5) pro $\tau \in [t_1,t_2]$ je

$$\Delta_1^T(\tau) = \mathbf{c}\Phi(t_i,\tau) = [1,0] \begin{bmatrix} 1 & t_1-\tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [1, t_1-\tau], \quad \Delta_2^T(\tau) = [0,0].$$

Dále

$$\Delta(\tau)\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & t_1-\tau \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1-\tau \\ 0 \end{bmatrix},$$

takže

$$\int_{t_1}^{t_2} \Delta(\tau)\mathbf{b}^T\Delta^T(\tau)d\tau = \int_{t_1}^{t_2} \begin{bmatrix} (t_1-\tau)^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}(t_1-t_2)^3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Odtud 4.20(2a)

$$P_{2/2} = M^{-1} \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}(t_1-t_2)^3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} M^{-T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -(t_1-t_2)/3 \end{bmatrix}.$$

□

Závěrem spočteme veličiny 4.19(3 až 9) pomocí procedury $(\mathbf{G}-\mathbf{S})$ (viz následující odst. 4.6).

KROK 2. Pro $t > t_N$ podle 4.19(10)

$$\begin{aligned} s(t) &= \mathbf{c}\Phi(t,t_N)\mathbf{x}_{N/N} = \\ &= [1,0]\begin{bmatrix} 1 & t-t_N \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}_{N/N} = [1, t-t_N]\mathbf{x}_{N/N} \end{aligned} \tag{4a}$$

($\mathbf{x}_{N/N}$ – viz KROK 1 ve 4.19).

KROK 3. Zpětný chod pro $t_2 \le t \le t_N$. Splajn $s(t)$ spočteme po částech pro $t_{j-1} \le t \le t_j$, $j = N(1)3$ podle 4.19(11)

$$s(t) = \mathbf{c}\mathbf{x}(t/N), \tag{5a}$$

kde

$$\mathbf{x}(t/N) = \Phi(t,t_j)\mathbf{x}(t_j/N) + [\int_{t_j}^{t} \Phi(t,\tau)\mathbf{b}\mathbf{b}^T\Phi^T(t_j,\tau)d\tau]\mu_j, \tag{6aa}$$

$$\mathbf{x}(t_{N/N}) = \mathbf{x}_{N/N}. \tag{6ab}$$

Postup výpočtu:

Restrikci funkce $\mathbf{x}(t/N)$ na interval $[t_{j-1}, t_j]$ označme na chvíli $\mathbf{x}_{(j)}(t/N)$. Potom rekurzivně (viz 4.20(6aa))

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t_{j-1}/N)|_{[t_{j-1},t_j]} := \mathbf{x}_{(j)}(t_{j-1}/N) = \Phi(t_{j-1},t_j)\mathbf{x}_{(j)}(t_j/N) + \\ +[\textstyle\int_{t_j}^{t_{j-1}} \Phi(t_{j-1},\tau)\mathbf{b}\mathbf{b}^T\Phi^T(t_j,\tau)d\tau]\mu_j, \end{aligned}$$

kde $\mathbf{x}_{(j)}(t_j/N) = \mathbf{x}_{(j+1)}(t_j/N)$ bylo vypočteno v předešlém iteračním kroku.

Nyní výraz v hranaté závorce v 4.20(6aa) bude

$$\begin{aligned} &\int_{t_j}^{t} \begin{bmatrix} 1 & t-\tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [0\ 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t_j-\tau & 1 \end{bmatrix} d\tau = \\ &= (t-t_j)\begin{bmatrix} -\frac{1}{6}(t-t_j)^2 & \frac{1}{2}(t_1-t_j) \\ -\frac{1}{2}(t-t_j) & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Položme

$$\mathbf{x}(t/N) = [x_1(t/N), x_2(t/N)]^T, \quad \mu_j = [\mu_j^{(j)}, \mu_j^{(2)}]^T.$$

Pak

$$\begin{aligned} x_1(t/N) &= \Big[(-\frac{1}{6}\mu_j^{(1)}(t-t_j)+ \\ &+ \frac{1}{2}\mu_j^{(2)})(t-t_j)+x_2(t_j/N)\Big](t-t_j)+x_1(t_j/N), \\ x_2(t/N) &= \big[-\frac{1}{2}\mu_j^{(1)}(t-t_j)+\mu_j^{(2)}\big](t-t_j)+x_2(t_j/N). \end{aligned}$$

Výpočet μ_j a ψ_{j+1} :

$$\mu_j = \psi_{j+1}^T\mu_{j+1}+\mathbf{c}_j^T R_j^{-1}\varepsilon_j, \quad \mu_N = \mathbf{c}_N^T R_N^{-1}\varepsilon_N, \tag{7a}$$

$$\psi_{j+1} \overset{4.19(15)}{=} \begin{bmatrix} 1 & t_{j+1}-t_j \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (I-\mathbf{K}R_j^{-1}\mathbf{c}_j), \tag{8a}$$

($\mathbf{K}_j, R_j, \varepsilon_j$ a $\mathbf{x}(t_N/N) = \mathbf{x}_{N/N}$ – viz KROK 1. ve 4.19)

KROK 4. Pro $t_1 \le t \le t_2$

$$s(t) = \mathbf{c}\mathbf{x}(t_N), \tag{9a}$$

kde

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t/N) &= \Phi(t,t_2)\mathbf{x}(t_2/N)+ \\ &+[\int_{t_2}^t \Phi(t,\tau)\mathbf{b}\mathbf{b}^T\Delta^T(\tau)d\tau]M^{-T}\Phi^T(t_3,t_2)\mu_3 = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & t-t_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t_2/N)+B(t)\cdot M^{-T}\Phi^T(t_3,t_2)\mu_3; \end{aligned} \tag{10a}$$

prvky (kl) 2×2-matice

$$B(t) = \int_{t_2}^t \begin{bmatrix} 1 & t-\tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t_1-\tau & 0 \end{bmatrix} d\tau$$

jsou následující

$$\begin{array}{ll} (11) = -\frac{1}{6}(t-t_2)^2\big[(t-t_2)+3(t_2-t_1)\big], & (12) = 0, \\ (21) = -\frac{1}{2}(t_1-t)^2+\frac{1}{2}(t_1-t_2)^2, & (22) = 0. \end{array}$$

Matice

$$M^{-T}\Phi^T(t_3,t_2) = \frac{1}{t_1-t_2}\begin{bmatrix} t_3-t_2 & 1 \\ -t_3+t_1 & -1 \end{bmatrix}, \ .$$

(μ_3 – viz KROK 3.)

KROK 5. Pro $t \le t_1$

$$\begin{aligned} s(t) &= \mathbf{c}\Phi(t,t_1)\mathbf{x}(t_1/N) = \\ &= [1, t-t_1]\mathbf{x}(t_1/N), \\ &(\mathbf{x}(t_1/N) - \text{ viz KROK 4.}). \end{aligned} \tag{11a}$$

□

4.21. *Algoritmus příkladu.*

Shrneme předešlé úvahy do tvaru, ve kterém jsou přímo použitelné k výpočtu.

$f(t) = \sqrt{t}\sin(t/5)$, $q = 2$, $N = 15 =$ počet uzlů sítě, $\mathbf{r} = [\mathrm{r_1}, \cdots, \mathrm{r_N}]^{\mathrm{T}}$, $\mathrm{f(t_j)} = \mathrm{r_j}$, $\mathbf{c_j} = [\mathbf{1},\mathbf{0}]$, $\mathbf{j} = \mathbf{1(1)N}$, $\mathbf{c} = [\mathbf{1},\mathbf{0}]$, $[\mathbf{a},\mathbf{b}] \equiv [\mathbf{0},\mathbf{15}]$, $\mathbf{\Phi(t},\tau) = \begin{bmatrix} 1 & t-\tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

KROK 1a. Přímý chod pro $t_{j-1} \le t \le t_j$, $j = 3(1)N$.

Počáteční podmínky

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{2/2} &= \begin{bmatrix} r_2 \\ r_1 - r_2/(t_1-t_2) \end{bmatrix}, \\ P_{2/2} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -(t_1-t_2)/3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Indukcí spočteme následující veličiny pro $j = 3(1)N$

$$\begin{aligned} \varepsilon_j &= r_j - \mathbf{c}_j\mathbf{x}_{j/j-1} \\ R_j &= \mathbf{c}_j P_{j/j-1}\mathbf{c}_j^T \\ \mathbf{K}_j &= P_{j/j-1}\mathbf{c}_j^T \\ \mathbf{x}_{j/j-1} &= \Phi(t_j, t_{j-1})\mathbf{x}_{j-1/j-1} \\ \mathbf{x}_{j/j} &= \mathbf{x}_{j/j-1} + \mathbf{K}_j R_j^{-1} \in_j \\ P_{j/j-1} &= \Phi(t_j/t_{j-1})P_{j-1/j-1}\Phi^T(t_j,t_{j-1}) + (t-t_j)\begin{bmatrix} (& -\frac{1}{6}(t-t_j)^2 & \frac{1}{2}(t-t_j) \\ & -\frac{1}{2}(t-t_j) & 1 \end{bmatrix} \\ P_{j/j} &= Pj/j-1 - P_{j/j-1}\mathbf{c}_j^T[\mathbf{c}_j P_{j/j-1}\mathbf{c}_j^T]^{-1}\mathbf{c}_j P_{j/j-1}^T \\ (\text{nebo} &= [I - \mathbf{K}_j R_j^{-1} \in_j]P_{j/j-1}[I - \mathbf{K}_j R_j^{-1}\mathbf{c}_j]^T). \end{aligned}$$

Tohoto druhého vyjádření nelze použít u vyhlazovacích splajnů!)

Ulož $\mathbf{x}_{N/N}$ a všechna ε_j, $\mathbf{K}_j$, R_j, $j = 3(1)N$.

KROK 2a. $t > t_N$

$$s(t) = [1, t-t_N]\mathbf{x}_{N/N}$$

($\mathbf{x}_{N/N}$ v KROKu 1a.)

KROK 3a. Zpětný chod pro $t_2 \leq t \leq t_N$.

Nejprve konstrukce dvou funcí μ_j a ψ_j.

$\mu_j = [\mu_j^{(1)}, \mu_j^{(2)}]$, - indukce pro $t_N \geq t \geq t_2$
s počáteční podmínkou

$$\mu_N = \mathbf{c}^T R_j^{-1} \in_j .$$

$$\begin{aligned} \mu_j &= \psi_{j+1}^T \mu_{j+1} + \mathbf{c}_j^T R_j^{-1} \in_j \\ \psi_{j+1} &= \begin{bmatrix} 1 & t_{j+1} - t_j \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (I - \mathbf{K}_j R^{-1} \mathbf{c}_j). \end{aligned}$$

Splajn

$$s(t) = \mathbf{c}\mathbf{x}(t/N) \qquad ,$$

kde

$$\mathbf{x}(t/N) = [x_1(t/N), x_2(t/N)].$$

Označme

$$\mathbf{x}_{(j)}(t/N) := \mathbf{x}(t/N)/_{[t_{j-1}, t_j]} \qquad .$$

Indukcí pro $t_N \geq t \geq t_2$, s počáteční podmínkou

$$\mathbf{x}_{(N)}(t_N/N) = \mathbf{x}(t_N/N) = \mathbf{x}_{N/N},$$

konstruujeme

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t_{j-1}/N)/_{[t_{j-1}, t_j]} &=: \mathbf{x}_{(j)}(t_{j-1}/N) = \\ &= \Phi(t_{j-1}, t_j)\mathbf{x}_{(j)}(t_j/N) + \\ &+ (t - t_j) \begin{bmatrix} -\frac{1}{6}(t - t_j)^2 & \frac{1}{2}(t - t_j) \\ -\frac{1}{2}(t - t_j) & 1 \end{bmatrix} \mu_j, \end{aligned}$$

kde $\mathbf{x}_{(j)}(t_j/N) = \mathbf{x}_{(j+1)}(t_j/N)$ bylo vypočteno v předešlém iteračním kroku.

Výpočet složek vektoru $\mathbf{x}(t/N)$

$$\begin{aligned} x_1(t/N) &= \big[\big(-\frac{1}{6}(t - t_j)\mu_j^{(1)} + \frac{1}{2}\mu_j^{(2)}\big)(t - t_j) + \\ &+ \mathbf{x}_2(t_j/N)\big](t - t_j) + x_1(t_j/N) \\ x_2(t/N) &= \big[-\frac{1}{2}\mu_j^{(1)}(t - t_j) + \mu_j^{(2)}\big](t - t_j) + x_2(t_j/N). \end{aligned}$$

($\mathbf{K}_j$, R_j, ε_j a $\mathbf{x}(t_N/N) = \mathbf{x}_{N/N}$ jsou vypočteny v KROKu 1a.)

KROK 4a. Pro $t_1 \leq t \leq t_2$.

$$s(t) = \mathbf{cx}(t/N)$$

$$\mathbf{x}(t/N) = \begin{bmatrix} 1 & t - t_j \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t_2/N) +$$

$$+ \begin{bmatrix} -\frac{1}{6}(t-t_2)^2\left[(t-t_2) + 3(t_2-t_1)^2\right] & 0 \\ -\frac{1}{2}(t_1-t)^2 + \frac{1}{2}(t_1-t)2)^2 & 0 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \frac{1}{t_1 - t_2} \begin{bmatrix} t_3 - t_2 & 1 \\ -t_3 + t_1 & -1 \end{bmatrix} \mu_3$$

$\mathbf{x(t_2/N)}$, $\boldsymbol{\mu_3}$ – viz KROK 3a.)

KROK 5a. Pro $t \leq t_1$

$$s(t) = [1, t - t_1]\mathbf{x}(t_1/N),$$

kde $\mathbf{x}(t_1/N)$ – KROK 4a.

4.6. **Odvození rekurzivního algoritmu.** Odvozujeme rekurzivní algoritmus pro Lg-splajn $s(\cdot)$ interpolující data $\{r_j\}_1^N$ vzhledem k EHB funkcionálům $\Lambda = \{\lambda_i\}_1^N$.

Nejprve ortogonalizujeme náhodné veličiny $\{\lambda_j\}_1^N$ Gram-Schmidtovou metodou s využitím modelu 4.17(1) až (5). (Tím bude splněn požadavek (∗∗) odst. 3.7).

Nato najdeme odhad $y(t)$ na základě ortogonalizovaných dat $\{\nu_j\}$.

Nakonec se veličiny $\{\lambda_j y\}$ nahradí jejich pozorovanými hodnotami $\{r_j\}$.

4.22.

Je dobře známo, že se na Gram-Schmidtovu ortogonalizaci dá hledět jako na aproximaci minimalizující normu.

Definice 4.23. *K posloupnosti $\{\lambda_1 y, ..., \lambda_N y\}$ nezávislých prvků Hilbertova prostoru H vytváří Gram-Schmidtova procedura posloupnost $\{\nu_1, ..., \nu_N\}$, pro niž $\nu_1 = \lambda_1 y$ a prvek*

$$\nu_j = \lambda_j y - \sum_{i=1}^{j-1} (\lambda_j y, \nu_i)_H \nu_i, \; j > 1 \tag{1}$$

je optimální chyba optimalizačního problému:
$\min ||\lambda_j y - x||$ *přes všechna x v podprostoru* $V(j-1) = \operatorname{span}\{\lambda_i y\}_1^{j-1} = \operatorname{span}\{\nu_i\}_1^{j-1}$

(viz 2.1 – Věta o projekci –, viz také [18], §3.9, str. 63, ♯ 10). □

Dokážeme nyní platnost jednotlivých kroků algoritmu 4.19.

Využijeme přitom teorie odvozené v kap. 2.2, § 2 (Rekurzivní metoda odhadu). Označení použité v 2.2, § 2, je zde až na některé grafické detaily zachováno.

KROK 1. Gram-Schmidtova ortogonalizace posloupnosti $\{\lambda_j y\}_1^N$.

Definujeme

$$\hat{\mathbf{x}}(t/j) = \text{lineární odhad vektoru } \mathbf{x}(t) \text{ na bázi } \{\lambda_i y\}_1^j. \tag{2}$$

Jinými slovy, $\hat{\mathbf{x}}(t/j)$ je ortogonální projekce vektoru $\mathbf{x}(t)$ na podprostor

$$V(j) = \operatorname{span}\{\lambda_i y\}_1^j = \operatorname{span}\{\nu_i\}_1^j, \tag{3}$$

Dále definujeme

$$\tilde{\mathbf{x}}(t/j) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t/j), \tag{4}$$

$$P_{j/j} = E[\tilde{\mathbf{x}}(t_j/j)\tilde{\mathbf{x}}^T(t_j/j)], \tag{5}$$

$$P_{j/j-1} = E[\tilde{\mathbf{x}}(t_j/j-1)\tilde{\mathbf{x}}^T(t_j/j-1)]. \tag{6}$$

Nechť $\{\nu_j\}_1^N$ je ortogonální posloupnost náhodných veličin, která vznikne Gram-Schmidtovou ortogonalizací posloupnosti $\{\lambda_j y\}_1^N$. Pak podle 4.17 (8) a 4.18(2)

$$\nu_j = \lambda_j y - \mathbf{c}_j\hat{\mathbf{x}}(t_j/j-1) = \mathbf{c}_j[\mathbf{x}(t_j) - \hat{\mathbf{x}}(t_j/j-1)] = \mathbf{c}_j\tilde{\mathbf{x}}(t_j/j-1). \tag{7}$$

($E[(\nu_i)_1^{j-1}((\nu_i)_1^{j-1})^T]^{-1}$ existuje – viz 3.5.)

Definujeme-li

$$R_j = E(\nu_j^2), \tag{8}$$

pak R_j vyjde ve tvaru 4.19(4)

$$R_j = E[\mathbf{c}_j\tilde{\mathbf{x}}(t_j/j-1)\tilde{\mathbf{x}}^T(t_j/j-1)\mathbf{c}_j^T] = \mathbf{c}_j P_{j/j-1}\mathbf{c}_j^T.$$

Označení 4.24. *Označme* ε_j, $\mathbf{x}_{j/j}$, resp. $x_{j/j-1}$ *pozorované hodnoty veličin* ν_j, $\hat{\mathbf{x}}(t_j/j)$ resp. $\hat{\mathbf{x}}(t_j/j-1)$, *jež obdržíme substitucí* $\lambda_i y = r_i$, $i = 1(1)N$.

Dokážeme, že Gram-Schmidtova ortogonalizace může být provedena postupem 4.19 (3) až (9). K tomu cíli musíme ukázat, že platí rovnice 4.19 (1), (2) a (3) až (9). Počáteční podmínky 4.19 (1) a (2) obdržíme z 3.3. Totiž

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}(t_q/q) &= E[\hat{\mathbf{x}}(t_q)\Theta^T][E(\Theta\Theta^T)]^{-1}\Theta \overset{4.18(7)}{=} \\ &= E[\mathbf{x}(t_q)\Theta^T]\Theta \overset{4.18(2)\ a\ (6)}{=} M^{-1}\Theta;\end{aligned} \tag{1}$$

po substituci $\lambda_i y = r_i,\ i = 1(1)q$, obdržíme pro pozorování $\mathbf{x}_{q/q}$ výraz 4.19 (1). Dále

$$\begin{aligned} P_{q/q} &= E[\tilde{\mathbf{x}}(t_q/q\tilde{\mathbf{x}}^T(t_q/q)] = E[\mathbf{x}(t_q)\mathbf{x}^T(t_q)] - \\ &- E[\hat{\mathbf{x}}(t_q/q)\hat{\mathbf{x}}^T(t_q/q)] \overset{4.18(8)}{=} \\ &= M^{-1}\Big[\int_{t_1}^{t_q} \Delta(\tau)\mathbf{b}\mathbf{b}^T\Delta^T(\tau)d\tau\Big]M^{-T}, \end{aligned}$$

což dává 4.19(2).

Rovnice 4.19 (1) a (2) jsou tedy potvrzeny.

4.25.

Nyní využijeme věty 4.14. Abychom tak mohli učinit, musíme symbolům z definice 3.8 a z věty 4.14 přisoudit nový význam. S přihlédnutím k 4.17(10) (kde t_q je nahrazeno t_j) symboly

$$\mathbf{x}(j),\ \Phi(j) \text{ resp. } \mathbf{u}(j),\ j = 1(1)N,$$

ze vztahu 3.8 (1) budou mít tento význam:

$$\mathbf{x}(t_j),\ \Phi(t_{j+1}, t_j) \text{ resp. } \int_{t_j}^{t_{j+1}} \Phi(t_{j+1}, \tau)\mathbf{b}u(\tau)d\tau;$$

$\mathbf{u}(j)$ je náhodný vektor vstupu, zatímco $u(t),\ t \in [0, T]$, (viz 4.15(1) a tvrzení 4.23) je bílý šum, proces, který řídí lineární dynamický model 4.17 (1) až (5). Máme tedy

$$\mathbf{u}(j) = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \Phi(t_{j+1}, \tau)\mathbf{b}u(\tau)d\tau. \tag{1}$$

Veličině $v(j)$ z 3.8(4) přisoudíme význam $\lambda_j y$ a s ohledem na 4.17(8) pod $1 \times q$ -maticí $C(j)$ budeme rozumět $\mathbf{c}_j$ a pod $w(j)$ nulu. Odtud pak matice $W(j)$ v 3.8(5) je rovněž nulová, neboť

$$W(j) = E[w(j)w^T(j)] = 0. \tag{2}$$

Symboly z 3.8(8) $\hat{\mathbf{x}}(k/j)$ i 3.9(5) $\hat{\mathbf{x}}(k/k)$ mají význam daný v 4.23(2) pro $t = t_k$, dále 3.8(9) $\equiv$ 4.23(3) – $v(j)$ substituováno $\lambda_j y$ nebo ν_j, $P(j)$ 3.9(2) se shoduje s $P_{j/j-1}$ 4.23(6), $P(j/j)$ 3.9(6) s $P_{j/j}$ 4.23 (5) – s náhradami $\mathbf{x}(t_j)$ za $\mathbf{x}(j)$.

4.26.

Dokážeme platnost vzorců 4.19 (3) až (9).

Z 3.9(8) plyne

$$P_{j/j-1} = \Phi(t_j, t_{j-1}) P_{j-1/j-1} \Phi^T(t_j, t_{j-1}) + Q(j-1)$$

a z 3.9(6) obdržíme

$$P_{j/j} = P_{j/j-1} - P_{j/j-1}\mathbf{c}_j^T[\mathbf{c}P_{j/j-1}\mathbf{c}_j^T]^{-1}\mathbf{c}_j P_{j/j-1}^T$$

neboli

$$P_{j/j} = P_{j/j-1} - \mathbf{K}_j R_j^{-1}\mathbf{K}_j^T, \tag{1}$$

což potvrzuje platnost prvního vyjádření z 4.19(9)

Druhé vyjádření v 4.19(9) obdržíme z předešlého s použitím 4.19 (4) a (5). Platí totiž

$$[I - \mathbf{K}_j R_j^{-1}\mathbf{c}_j] P_{j/j-1} [I - \mathbf{K}_j R_j^{-1}\mathbf{c}_j]^T =$$

$$P_{j/j-1} + \mathbf{K}_j R_j^{-1}\mathbf{c}_j P_{j/j-1}\mathbf{c}_j^T R_j^{-1}\mathbf{K}_j^T - \mathbf{K}_j R_j^{-1}\mathbf{c}_j P_{j/j-1} - P_{j/j-1}\mathbf{c}_j^T R_j^{-1}\mathbf{K}_j^T.$$

Součet prvních dvou členů vpravo je $P_{j/j-1} + \mathbf{K}_j R^{-1}\mathbf{K}_j^T$, součet druhých dvou členů vpravo je $-2P_{j/j-1}\mathbf{c}_j^T R_j^{-1}\mathbf{c}_j P_{j/j-1} = -2\mathbf{K}_j R_j^{-1}\mathbf{K}_j^T$ (matice $P_{j/j-1}$ je symetrická podle 4.23(6)).

Druhé vyjádření v 4.19(9) je potvrzeno.

Poznámka 4.27.

Matice $P_{j/j-1}$ a $P_{j/j}$ jsou pozitivně definitní. $P_{j/j}$ vyjádřená ve formě 4.26(1) – což je první vyjádření v 4.19(9) – jako součet dvou pozitivně semidefinitních matic, se může v důsledku zaokrouhlovacích chyb stát indefinitní. Tomu se vyhneme použitím druhého vyjádření v 4.19(9). Je však třeba zdůraznit, že prvního vyjádření je *nutno* použít, když modifikujeme interpolační algoritmus na vyhlazovací (viz kapitolu 4.6). Oba algoritmy se shodují až na veličiny R_j a $P_{q/q}$, přičemž změněná R_j použitá na výpočet $P_{j/j}$ způsobí neekvivalenci obou vyjádření. □

4.28.

Kovarianční matice chyb $Q(j-1)$ z 3.8(2) se vypočte, jak následuje:

$$
\begin{aligned}
Q(j-1) = & \\
= \; & E[\mathbf{u}(j-1)\mathbf{u}^T(j-1)] \overset{4.25(1)}{=} \\
= \; & E[\int_{t_{j-1}}^{t_j} \Phi(t_j,\tau)\mathbf{b}u(\tau)d\tau \int_{t_{j-1}}^{t_j} u(\tau)\mathbf{b}^T\Phi^T(t_j,\tau)d\tau] \overset{4.11(3)}{=} \\
= \; & (\int[\cdot,\cdot], \int[\cdot,\cdot]^T)_Y \overset{V.4.12}{=} (\sigma\int[\cdot,\cdot], \sigma\int[\cdot,\cdot]^T)_{H^{q,2}} \overset{4.15(1),4.16(2)}{=} \text{[1]} \\
= \; & (\int_{t_{j-1}}^{t_j} \Phi(t_j,\tau)\mathbf{b}G(t,\tau)d\tau, \int_{t_{j-1}}^{t_j} \mathbf{b}^T\Phi^T(t_j,\tau)G(t,\tau)d\tau)_{H^{q,2}} \overset{2.5(4)}{=} \\
= \; & \sum_{j=1}^{q} [\int_{t_{j-1}}^{t_j} \Phi(t_j,\tau)\mathbf{b}\lambda_j^{(t)}G(t,\tau)d\tau] \times [\cdots]^T + \\
+ \; & \int_0^T \Big\{ [\int_{t_{j-1}}^{t_j} \Phi(t_j,\tau)\mathbf{b}L^{(t)}G(t,\tau)d\tau] \times [\cdots]^T \Big\} dt \overset{4.6(2)}{=} \\
= \; & \int_0^T \Big\{ [\int_{t_{j-1}}^{t_j} \Phi(t_j,\tau)\mathbf{b}\delta(\tau-t)d\tau] \times [\cdots]^T \Big\} dt
\end{aligned}
$$

a současně

$$
\Big\{ \int_{t_{j-1}}^{t_j} \cdots d\tau] \times [\cdots]^T \Big\} = \begin{cases} \int_0^T \Phi(t_j,t)\mathbf{b}\mathbf{b}^T dt = \Phi^T(t_j,t), & \text{pokud } t \in [t_{j-1},t_j], \\ 0 \text{ jinak.} \end{cases}
$$

Odtud

$$
Q(j-1) = \int_{t_{j-1}}^{t_j} \Phi(t_j,t)\mathbf{b}\mathbf{b}^T\Phi^T(t_j,t)dt,
$$

což potvrzuje vzorec 4.19(8).

Vztah 4.19(3) plyne přímo z 4.23(7). Nakonec odvodíme vztahy 4.19 (7) a (6).

Podle 3.9(7)

$$
\hat{\mathbf{x}}(t_j/j) = \hat{\mathbf{x}}(t_j/j-1) + P_{j/j-1}\mathbf{c}_j^T[\mathbf{c}_j P_{j/j-1}\mathbf{c}_j^T]^{-1} \cdot [\lambda_j y - \mathbf{c}_j\hat{\mathbf{x}}(t_j/j-1)],
$$

takže podle 4.19 (3) až (5)

$$
\mathbf{x}_{j/j} = \mathbf{x}_{j/j-1} + \mathbf{K}_j R_j^{-1}\varepsilon_j,
$$

[1] Podrobnosti jsou v rovnici, k níž se vztahuje poznámka [1] pod čarou v Poznámce 4.18, str. 56.

což je 4.19(7).

Podle 3.9(7)

$$\hat{x}(t_j/j-1) = \Phi(t_j, t_{j-1})\hat{\mathbf{x}}(t_{j-1}/j-1),$$

což dává 4.19(6)

$$\mathbf{x}_{j/j-1} = \Phi(t_j, t_{j-1})\mathbf{x}_{j-1/j-1}.$$

Tímto jsou ověřeny vzorce 4.19 (1), (2) a (3) až (9) vztahující se ke Gram-Schmidtově ortogonalizaci posloupnosti $\{\lambda_i y\}_1^N$.

Snadno se ověří, že tyto vztahy stačí k provedení ortogonalizační procedury. Ze vztahů 4.18 (1) a (7) plyne, že posloupnost $\{\lambda_i y\}_1^q$ je ortonormální. Stačí tedy provádět proceduru pro $j = q+1(1)N$. Veličiny se postupně vypočítávají podle následujícího schématu (viz rekurzivní metodu odhadu – větu 2.20):

(**G**–**S**)

Start: $\mathbf{x}_{q/q},\ P_{q/q}$

1. iterace: $\mathbf{x}_{q+1/q},\ \varepsilon_{q+1}$

2. iterace: $P_{q+1/q},\ \mathbf{K}_{q+1}, R_{q+1},\ \mathbf{x}_{q+1/q+1},\ \mathbf{x}_{q+2/q+1},\ \varepsilon_{q+2}$

3. iterace: $P_{q+1/q+1},\ P_{q+2/q+1},\ \mathbf{K}_{q+2},\ R_{q+2},\ \mathbf{x}_{q+2/q+2},\ \mathbf{x}_{q+3/q+2},\ \varepsilon_{q+3}$

4. iterace a další se vedou podle schématu 3. iterace. Procedura končí výpočtem veličiny $\mathbf{x}_{N/N}$:

$(N-q+1)$-tá iterace: $P_{N-1/N-1},\ P_{N/N-1},\ \mathbf{K}_N,\ R_N,\ \mathbf{x}_{N/N}$.

KROK 2. – viz závěr důkazu spolu s KROKem 5.

KROK 3. Nechť nyní platí $t_{j-1} \leq t \leq t_j$ a $j = q+1(1)N$.

(Poznamenejme, že vztahy 4.28 (1) a (7), které jsou v dalším odvozeny, platí i pro $1 \leq j \leq N$ a $t \in [0,T]$.)

Protože podle 4.17(10) platí

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_j)\mathbf{x}(t_j) + \int_{t_j}^{t} \Phi(t,\tau)\mathbf{b}u(\tau)d\tau,$$

máme podle lemmatu 3.5

$$\hat{\mathbf{x}}(t/N) = \Phi(t, t_j)\hat{\mathbf{x}}(t_j/N) + \int_{t_j}^{t} \Phi(t,\tau)\mathbf{b}\hat{u}(\tau/N)d\tau, \tag{1}$$

kde podle věty 3.3

$$
\begin{aligned}
&\hat{u}(\tau/N) = \\
&= E[u(\tau)(\nu_1,...,\nu_N)]\left[E[(\nu_1,...,\nu_N)^T(\nu_1,...,\nu_N)]\right]^{-1}(\nu_1,...,\nu_N)^T \overset{4.18(6),(7)}{=} \\
&= E[\mathbf{u}(\tau)(\nu_1,...,\nu_N)]\mathrm{diag}[E(\nu_1^2)^{-1},...,E(\nu_N^2)^{-1}]](\nu_1,...,\nu_N)^T \overset{4.23(8)}{=} \\
&= \sum_{i=q+1}^{N} E[u(\tau)\nu_i]R_i^{-1}\nu_i
\end{aligned}
$$

a podle 4.23(7)

$$\hat{u}(\tau/N) = \sum_{i=q+1}^{N} E[u(\tau)\tilde{\mathbf{x}}^T(t_i/i-1)]\mathbf{c}_i^T R_i^{-1}\nu_i. \tag{2}$$

Indukcí se dá dokázat, že

$$\tilde{\mathbf{x}}(t_{q+1}/q) = \Phi(t_{q+1},t_q)\tilde{\mathbf{x}}(t_q/q) + \mathbf{u}(q) \tag{3}$$

a že pro $i > q+1$

$$
\left.
\begin{aligned}
&\tilde{x}(t_i/i-1) = \\
&= \psi_i\psi_{i-1}...\psi_{q+2}\Phi(t_{q+1},t_q)\tilde{x}(t_q/q) + +\psi_i...\psi_{q+2}\mathbf{u}(q) + \\
&\quad + \psi_i...\psi_{q+3}\mathbf{u}(q+1) + ... + \psi_i\mathbf{u}(i-2) + \mathbf{u}(i-1),
\end{aligned}
\right\} \tag{4}
$$

kde

$$\psi_{j+1} = \Phi(t_{j+1},t_j)[I - \mathbf{K}_j R_j^{-1}\mathbf{c}_j]. \tag{5}$$

Abychom to dokázali, uvažme,že

$$\tilde{\mathbf{x}}(t_{i-1}/i-1) = [I \ - \mathbf{K}_{i-1}R_{i-1}^{-1}\mathbf{c}_{i-1}]\tilde{\mathbf{x}}(t_{i-1}/i-2), \tag{6}$$

což plyne z následující úvahy

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\mathbf{x}}(t_{i-1}/i-1) \overset{4.23(4)}{=} \\
&= \quad \mathbf{x}(t_{i-1}) - \hat{\mathbf{x}}(t_{i-1}/i-1) = \mathbf{x}(t_{i-1}) - \hat{\mathbf{x}}(t_{i-1}/i-2) - \\
&- \quad P_{i-1/i-2}\mathbf{c}_{i-1}^T[\mathbf{c}_{i\ -1}P_{i-1/i-2}\mathbf{c}_{i-1}^T]^{-1}\left[\mathbf{c}_{i-1}\big(\mathbf{x}(t_{i-1}) - \hat{\mathbf{x}}(t_{i-1}/i-2)\big)\right] \\
&\overset{4.23(4)}{=} \quad \tilde{\mathbf{x}}(t_{i-1}/i-2) - \mathbf{K}_{i-1}R_{i-1}^{-1}\mathbf{c}_{i-1}\tilde{\mathbf{x}}(t_{i-1}/i-2) = \\
&= \quad [I - \mathbf{K}_{i-1}R_{i-1}^{-1}\mathbf{c}_{i-1}]\tilde{\mathbf{x}}(t_{i-1}/i-2),
\end{aligned}
$$

kde se druhá rovnost obdrží na základě 3.9(5), 4.25(2) a 4.23(7).

Vyjádření $\tilde{\mathbf{x}}(t_{q+1}/q)$ (3) se nyní dá bezprostředně dokázat, a to takto

$$\begin{aligned}
&\tilde{\mathbf{x}}(t_{q+1}/q) = \\
&= \mathbf{x}(t_{q+1}) - \hat{\mathbf{x}}(t_{q+1}/q) \overset{3.9(7)}{=} \mathbf{x}(t_{q+1}) - \Phi(t_{q+1}, t_q)\hat{\mathbf{x}}(t_q/q) \overset{4.23(4)}{=} \\
&= \mathbf{x}(t_{q+1}) - \Phi(t_{q+1}, t_q)[\mathbf{x}(t_q) - \tilde{\mathbf{x}}(t_q/q)] = \\
&= \mathbf{x}(t_{q+1}) - \Phi(t_{q+1}, t_q)\mathbf{x}(t_q) + \Phi(t_{q+1}, t_q)\tilde{\mathbf{x}}(t_q/q) \overset{4.17(10), 4.25(1)}{=} \\
&= \Phi(t_{q+1}, t_q)\tilde{\mathbf{x}}(t_q/q) + \mathbf{u}(q).
\end{aligned}$$

K důkazu 4.28(4) použijeme 4.28(6) a indukčního předpokladu (jenž má tvar 4.28(4) pro $i-1$ místo i)

$$\begin{aligned}
&\tilde{\mathbf{x}}(t_i/i-1) = \\
&= \mathbf{x}(t_i) - \hat{\mathbf{x}}(t_i/i-1) \overset{3.9(7)}{=} \mathbf{x}(t_i) - \Phi(t_i, t_{i-1})\hat{\mathbf{x}}(t_{i-1}/i-1) = \\
&= \mathbf{x}(t_i) - \Phi(t_i, t_{i-1})[\mathbf{x}(t_{i-1}) - \tilde{\mathbf{x}}(t_{i-1}/i-1)] = \\
&= \mathbf{x}(t_i) - \Phi(t_i, t_{i-1})\mathbf{x}(t_{i-1}) + \Phi(t_i, t_{i-1})\tilde{\mathbf{x}}(t_{i-1}/i-1) \overset{4.17(10), 4.25(1)}{=} \\
&= \mathbf{u}(i-1) + \Phi(t_i, t_{i-1})\tilde{\mathbf{x}}(t_{i-1}/i-1) \overset{4.28(6)}{=} \\
&= \mathbf{u}(i-1) + \Phi(t_i, t_{i-1})[I - \mathbf{K}_{i\ -1}R_{i-1}^{-1}\mathbf{c}_{i-1}]\tilde{\mathbf{x}}(t_{i-1}/i-2) \overset{4.28(5)}{=} \\
&= \mathbf{u}(i-1) + \psi_i\tilde{\mathbf{x}}(t_{i-1}/i-2) = \\
&= \mathbf{u}(i-1) + \psi_i\psi_{i-1}...\psi_{q+2}\Phi(t_{q+1}, t_q)\tilde{\mathbf{x}}(t_q/q) + \\
&\quad + \psi_i...\psi_{q+2}\mathbf{u}(q) + \psi_i...\psi_{q+3}\mathbf{u}(q+1) + ... + \psi_i\mathbf{u}(i-2),
\end{aligned}$$

QED.[1]

Rovnice 4.28 (3) a (4) mohou být přeformulovány ve tvaru (pro $i \geq q+1$)

$$\left.\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{x}}(t_i/i-1) &= \Psi_{i,q+1}\Phi(t_{q+1}, t_q)\tilde{\mathbf{x}}(t_q/q) + \\
&+ \textstyle\sum_{k=q+1}^{i} \Psi_{i,k}\int_{t_{k-1}}^{t_k} \Phi(t_k, \sigma)\mathbf{b}u(\sigma)d\sigma,
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

kde

$$\Psi_{i,k} = \begin{cases} \psi_i\psi_{i-1}...\psi_{k\ +1}, & i > k \\ I, & i\ = k. \end{cases}$$

Rovnice 4.18 (6), 9) a 4.24(1) ukazují, že $\mathbf{u}(\tau)$ a $\tilde{\mathbf{x}}(t_q/q)$ jsou nekorelované veličiny, pokud $\tau \geq t_q$.

Dosadíme-li do 4.28 (7) do (2), pak s ohledem na to, že $u(\cdot)$ je bílý šum, bude platit pro $j = q+1(1)N$ a $t_{j-1} \leq t \leq t_j$

[1] „quod erat demonstrandum“ = „což bylo dokázati“ ($\equiv \square$)

$$\sum_{i=q+1}^{N} E[u(\tau)\tilde{\mathbf{x}}(t_i/i-1)] =$$

$$= \sum_{i=q+1}^{N} E\big[u(\tau)\big(\sum_{k=q+1}^{i} \Psi_{i,k} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Phi(t_k,\sigma)\mathbf{b}u(\sigma)d\sigma\big)^T\big] =$$

$$= \sum_{i=q+1}^{N} \sum_{k=q+1}^{i} [\int_{t_{k-1}}^{t_k} E[u(\tau)u(\sigma)]\mathbf{b}^T\Phi^T(t_k,\sigma)d\sigma]\Psi_{i,k}^T =$$

$$= \sum_{i=q+1}^{N} \sum_{k=q+1}^{i} [\int_{t_{k-1}}^{t_k} \delta(\tau-\sigma)\mathbf{b}^T\Phi^T(t_k,\sigma)d\sigma]\Psi_{i,k}^T =$$

$$= \begin{cases} \sum_{i=q+1}^{N} \sum_{k=q+1}^{i} \mathbf{b}^T\Phi^T(t_k,\tau)\Psi_{i,k}, \text{ když } \tau \in [t_{k-1},t_k], \\ 0 \text{ jinak.} \end{cases}$$

V případě $\tau \in [t_{j-1}, t_j]$ bude

$$\hat{u}(\tau/N) \; = \mathbf{b}^T\Phi^T(t_j,\tau)\sum_{i=j}^{N} \Psi_{i,j}^T\mathbf{c}_i^T R_i^{-1}\nu_i = \mathbf{b}^T\Phi^T(t_j,\tau)\xi_j, \qquad (8)$$

kde

$$\left.\begin{array}{l} \xi_j = \sum_{i=j}^{N} \Psi_{i,j}^T\mathbf{c}_i^T R_i^{-1}\nu_i \\ \text{nebo rekurzivně} \\ \xi_j = \psi_{j+1}^T\xi_{j+1} + \mathbf{c}_j^T R_j^{-1}\nu_j, \; \xi_N = \mathbf{c}_N^T R_N^{-1}\nu_N. \end{array}\right\} \qquad (9)$$

[Odvození rekurzivní alternativy:

$$\begin{aligned} \xi_N &= \mathbf{c}_N^T R_N^{-1}\nu_N \\ \xi_{N-1} &= \psi_N^T\xi_N + \mathbf{c}_{N-1}^T R_{N-1}^{-1}\nu_{N-1} = \psi_N^T\mathbf{c}_N^T R_N^{-1}\nu_N + \\ &+ \mathbf{c}_{N-1}^T R_{N-1}^{-1}\nu_{-1} \\ \xi_{N-2} &= \psi_{N-1}^T\xi_{N-1} + \mathbf{c}_{N-2}^T R_{N-2}^{-1}\nu_{N-2} = \\ &= \psi_{N-1}^T\psi_N^T\mathbf{c}_N^T R_N^{-1}\nu_N + \psi_{N-1}^T\mathbf{c}_{N-1}^T R_{N-1}^{-1}\nu_{N-1} + \\ &+ \mathbf{c}_{N-2}^T R_{N-2}^{-1}\nu_{N-2}, \end{aligned}$$

atd. až nakonec

$$\begin{aligned} \xi_j &= \psi_{j+1}^T...\psi_N^T\mathbf{c}_N^T R_N^{-1}\nu_N + ... + \psi_{j+1}^T\psi_{j+2}^T\mathbf{c}_{j+2}^T R_{j+2}^{-1}\nu_{j+2} + \\ &+ \psi_{j+1}^T\mathbf{c}_{j+1}^T R_{j+1}^{-1}\nu_{j+1} + \mathbf{c}_j^T R_j^{-1}\nu_j = \psi_{j+1}^T\xi_{j+1} + \mathbf{c}_j^T R_j^{-1}\nu_j = \\ &= \sum_{i=j}^{N} \Psi_{i,j}^T\mathbf{c}_i^T R_i^{-1}\nu_i.] \end{aligned}$$

$\square$

Podle definice platí $y(t) = \mathbf{cx}(t)$, takže pro odhad (definovaný v 4.13(4)) $\hat{y}(t)$ veličiny $y(t)$ na bázi $\{\lambda_i y\}_1^N$ (s přihlédnutím k lemmatu 3.5) máme

$$\hat{y}(t) = \mathbf{c}\hat{\mathbf{x}}(t/N). \tag{10}$$

Jestliže nyní jsou $\mathbf{x}(t/N)$ a μ_j pozorování $\hat{\mathbf{x}}(t/N)$ resp. ξ_j, která obdržíme tak, že položíme $\lambda_i y = r_i$, $i = 1(1)N$, pak věta 4.14, 4.28 (1) a (8) až (10) implikují 4.19 (11) až (14). Poznamenejme, že počáteční podmínka (6ab) z KROKu 3 se obdrží z KROKu 1.

KROK 4.

Předpokládejme $t_1 \le t \le t_q$. Tak jako v 4.28(1) platí

$$\hat{\mathbf{x}}(t/N) = \Phi(t, t_q)\hat{\mathbf{x}}(t_q/N) + \int_{t_q}^{t} \Phi(t,\tau)\mathbf{b}\hat{u}(\tau/N)d\tau. \tag{11}$$

Rovnice 4.28 (2) a (7) platí, ale nyní je $u(\tau)$ nekorelované s druhým členem v 4.28(7), jak snadno plyne z toho, že

$$\begin{aligned}
&E\Big[u(\tau)\Big(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \Phi(t_k,\sigma)\mathbf{b}u(\sigma)d\sigma\Big)^T\Big] = \\
&= \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{b}^T\Phi^T(t_k,\sigma)E\big[u(\tau)u(\sigma)\big]\,d\sigma \overset{4.16(1)}{=} \\
&= \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{b}^T\Phi^T(t_k,\sigma)\delta(\tau-\sigma)d\sigma = \\
&= \begin{cases} \mathbf{b}^T\Phi^T(t_k,\tau),\ \tau\in[t_{k-1},t_k],\ q+1\le k\le i\ (\le N), \\ 0 \text{ jinak.}\end{cases}
\end{aligned}$$

Protože $t_1 \le \tau \le t_q$, tvrzení plyne, když připomeneme, že $E[u(\tau)] = 0$. Odtud

$$\begin{aligned}
&\hat{u}(\tau/N) \overset{4.28(2)}{=} \\
&= \sum_{i=q+1}^{N} E\big[u(\tau)\tilde{\mathbf{x}}^T(t_i/i-1)\big]\mathbf{c}_i^T R_i^{-1}\nu_i \overset{4.28(7)}{=} \\
&= \sum_{i=q+1}^{N} E\Big\{u(\tau)\big[\mathbf{x}^T(t_q) - \hat{\mathbf{x}}^T(t_q/q)\Phi^T(t_{q+1},t_q)\big]\Big\}\Psi_{i,q+1}\mathbf{c}_i^T R_i^{-1}\nu_i \overset{4.24(1)}{=} \\
&= \sum_{i=q+1}^{N} \Big\{E\big[u(\tau)\mathbf{x}^T(t_q)\big] - E\big[u(\tau)\Theta^T M^{-T}\Phi^T(t_{q+1},t_q)\big]\Big\}\times \\
&\quad\times \Psi_{i,q+1}^T\mathbf{c}_i^T R_i^{-1}\nu_i \overset{4.18(9),(6)}{=} \\
&= \mathbf{b}^T\Delta^T(\tau)M^{-T}\Phi^T(t_{q+1},t_q)\sum_{i=q+1}^{N}\Psi_{i,q+1}^T\mathbf{c}_i^T R_i^{-1}\nu_i \overset{4.28(9)}{=} \\
&= \mathbf{b}^T\Delta^T(\tau)M^{-T}\Phi^T(t_{q+1},t_q)\xi_{q+1}.
\end{aligned}$$

Tedy

$$\hat{\mathbf{u}}(\tau/N) = \mathbf{b}^T\Delta^T(\tau)M^{-T}\Phi^T(t_{q+1},t_q)\xi_{q+1}. \tag{12}$$

Rovnice 4.28 (10) až (12) dávají 4.19 (16) a (17), jakmile jsou zvolena příslušná pozorování.

KROK 2. a KROK 3.

Rovnice 4.19 (10) a (18) se odvodí podobným způsobem:
V KROKu 2. (v KROKu 5.) volíme t_N (t_1) místo t_q ve vyjádření 4.28(11). V obou případech vyjde $\mathbf{x}(t/N)$ analogicky k 4.19(17), ale integrál v hranatých závorkách je tentokrát $= 0$, neboť podle 4.18(9)

$$E[\mathbf{x}(t_q)u(t)] = 0$$

v důsledku toho, že $t \notin [t_1, t_q]$.

5. Konstrukce Lg-splajnů vyhlazujících EHB data

5.1.

V kapitole 1. jsme se zabývali interpolačními i vyhlazovacími splajny. Obojí jsme vyšetřovali jak v obecné rovině tak – po specializaci podmínek – po praktické stránce s vyústěním do efektivního programu. Kapitoly 2. a 4. byly věnovány Lg-splajnům interpolujícím EHB data, tj. rekonstrukci funkce z množiny přesných dat, z množiny kolekce dvojic $\{(t_j, r_j = \lambda_j f)\}_1^N$. Při rekonstrukci funkce z měřených dat $\{r_j\}_1^N$ se však střetáváme s dobře známou skutečností, že měřená data jsou zatížena chybami, takže je nežádoucí data přesně reprodukovat, ale že je nutné udělat kompromis mezi aproximací dat charakterizovanou funkcionálem

$$F(f) = \sum_{j=1}^{N} (r_j - \lambda_j f)^2 \tag{1}$$

s vyhlazením dat, jež je charakterizováno funkcionálem

$$J(f) = \int_0^T (Lf)^2. \tag{2}$$

V takových případech je užitečná technika vyhlazovacích splajnů, která spočívá v náhradě funkcionálu (2) z interpolační úlohy „kompromisním" funkcionálem ($\rho_j > 0$)

$$M(f) = J(f) + \sum_{j=1}^{N} \rho_j^{-1} (r_j - \lambda_j f)^2, \tag{3}$$

definovaným v kapitole 1. (viz zejména 1.4).

Závislost objektivního funkcionálu (3) na ρ_j vysvitne, když uvážíme dva krajní případy. Jdou-li váhy k nule, problém minima funkcionálu (3) se redukuje na minimalizaci funkcionálu (2) při omezeních

$$\lambda_j f = r_j, \ j = 1(1)N.$$

V tomto případě přechází funkce minimalizující funkcionál (3) v Lg-splajn interpolující $\{r_j\}_1^N$ vzhledem k $\{\lambda_j\}_1^N$.

Jdou-li váhy ρ_j k nekonečnu, funkce minimalizující funkcionál (3) konverguje k funkci nulového prostoru operátoru L, která realizuje nejmenší součet čtverců vzhledem k $\{r_j\}_1^N$. Tedy podle okřídleného sloganu „vyhlazovací splajn je kompromis mezi důvěrou v data a vyhlazením rekonstrukce".

Vyhlazovacím splajnům byly v kapitole 1. věnovány odstavce 1.3 a 1.24

a úvahy byly převedeny za jistých specifikací až k vytvoření programu. V této kapitole zobecníme výsledky na Lg-splajny vyhlazující EHB data. Využijeme k tomu závěrů z předešlé kapitoly 3.2. o interpolaci, a to tak, že rozšíříme základní Hilbertův prostor, v němž řešíme interpolační problém a z výsledku jednoduchým způsobem odvodíme vyhlazovací splajn pro původní vyhlazovací problém.

5.1. **Převedení úlohy vyhlazování na interpolační.**

5.2.

Vycházíme z pojmů a z označení zavedených v předešlých kapitolách: Pod $H^{q,2}[0,T]$ rozumíme Sobolevův prostor se skalárním součinem a normou podle 2.5 (4) a (5). Pojem systému funkcionálů $\Lambda = \{\lambda_j\}_1^N$ generujících EHB problém je chápán podle definice v 2.2.

Nechť $\{r_j\}_1^N$ jsou dané (naměřené) hodnoty a $\{\rho\}_1^N$ kladné váhy, které oceňují naši důvěru v data $\{r_j\}_1^N$ (čím menší ρ, tím větší důvěra).

5.3.

Připomeňme definici vyhlazovacího splajnu, jak byla formulována v 1.3(1) nebo – v případě $Y = E^N$ s diferencovanými vahami ρ_j – v 1.4 a 1.26(2):

Funkce $s(t) \in H^{q,2}[0,T]$ se nazývá p83 Lg-splajn vyhlazující data $\{r_j\}_1^N$ vzhledem k $\Lambda = \{\lambda_j\}_1^N$ a vahám $\rho = (\rho_1, ..., \rho_N)^T$, $\rho_j > 0$ pro všechna j, když je řešením extremálního problému

$$\min_{f \in H^{q,2}[0,T]} \Big\{ \int_0^T (Lf)^2 + \sum_{j=1}^N \rho_j^{-1}(r_j - \lambda_j f)^2 \Big\}. \tag{1}$$

Náš další postup bude spočívat v nalezení nového Hilbertova prostoru, ve kterém původní vyhlazovací úloha bude převedena na interpolační.

Přesněji řečeno, definujeme prostor H^+, který jako lineární prostor bude kartézský součin prostorů $H^{q,2}$ a E^N s prvky značenými (f, Θ) $(f \in H^{q,2}, \Theta = (\Theta_1, ..., \Theta_N)^T \in E^N)$ s vhodně zavedenou normou $||\cdot||_{H^+}$ tak, aby minimalizační problém 5.1(1) a problém

$$\min_{(f,\Theta) \in U^+(r)} ||(f, \Theta)||_{H^+}, \tag{2}$$

kde $U^+(r) = \{(f, \Theta) \in H^+ : \lambda_j f + \Theta_j = r_j,\ j \in J\}$, $J = \{1, ..., N\}$, $r = (r_1, ..., r_N)^T \in E^N$, byly v takovém vztahu, že z řešení problému 5.3(2) jednoznačně plyne řešení problému 5.3(1).

Připomeňme, že předpokládáme jednoznačnost interpolačního splajnu na

$H^{q,2}$, přesněji řečeno, že předpokládáme lineární nezávislost (pro jednoduchost prvních) q funkcionálů $\{\lambda_j\}_1^q$ na nulovém prostoru $N(L)$ operátoru L (Dohoda 1.31).

Dále připomínáme, že $\{z_j\}_1^q \equiv \{k_j\}_1^q$ (viz 2.1; 4.9) je ortonormální báze prostoru $N(L)$ duální k $\{\lambda_j\}_1^q$, $G(t,\tau)$ je Greenova funkce pro L. Potřebné vztahy jsou uvedeny v 2.5(1), 2.5(2).

Prvek (f,Θ) lineárního prostoru

$$H^+ = \{(f,\Theta) : f(t) \in H^{q,2},\ \Theta = (\Theta_1, ..., \Theta_N)^T \in E^N\}$$

lze chápat jako funkci $F_0(t)$ na disjunktním sjednocení $I \dot{\cup} J$ intervalu $I = [0,T]$ a množiny $J = \{1, ..., N\}$, kde pro $t \in I$ je $F_0(t) := f(t)$ a pro $t \in J$ je $F_0(t) := \Theta_t$.

H^+ přejde v Hilbertův prostor zavedením skalárního součinu

$$\left.\begin{aligned} \big((f,\Theta),(g,\omega)\big) = \textstyle\int_0^T (Lf)(Lg) + \sum_{j=1}^N \rho_j^{-1}\Theta_j\omega_j + \\ + \textstyle\sum_{j=1}^q (\lambda_j f + \Theta_j)(\lambda_j g + \omega_j). \end{aligned}\right\} \tag{3a}$$

Odpovídající norma je

$$||(f,\Theta)||^2 = \int_0^T (Lf)^2 + \sum_{j=1}^N \rho_j^{-1}\Theta_j^2 + \sum_{j=1}^q (\lambda_j f + \Theta_j)^2 q. \tag{3b}$$

Důkaz, že $||(f,\Theta)|| = 0 \Rightarrow f = 0,\ \Theta = 0$:

Z předpokladu plyne $Lf = 0$ skoro všude, $\Theta_j = 0,\ j = 1(1)N,\ \lambda_j f + \Theta_j = 0,\ j = 1(1)q$, tedy $\Theta = 0$ a dále $f \in N(L)$ a $\lambda_j f = 0,\ j = 1(1)q$, takže podle 4.9

$$0 = \lambda_j f = (f, k_j) = (f, z_j) \text{ a odtud } f \in N(L)^\perp \cap N(L) = 0, \text{ tj. } f = 0. \ \square$$

Definici reprodukujícího jádra v H^+ uvedeme následující úvahou. Definujeme (srovnej 4.5 – reprodukující jádro prostoru $H^{q,2}[0,T]$)

$$K_\rho(t,\tau) = \sum_{j=1}^q (1+\rho_j) z_j(t) z_j(\tau) + \int_0^T G(t,\xi)G(\tau,\xi)d\xi,\ t,\tau \in I \tag{4}$$

Z 2.5 (1) a (2) plynou bezprostředně vztahy

$$LK_\rho(.,\tau) = G(\tau,.),\ \lambda_j K_\rho(.,\tau) = (1+\rho_j)z_j(\tau),\ j = 1(1)q, \tag{5}$$

pomocí kterých snadno najdeme vyjádření $K_\rho(t,\tau)$ (jako funkce proměnné $t \in I$ při pevném $\tau \in I$) ve tvaru 2.5(3); odtud

$$K_\rho(t,\tau) \in H^{q,2}[T,0] \text{ prokaždé } \tau \in I.$$

Označíme-li dále $d(t) = (d_1(t), ..., d_N(t))^T$ N-vektor, jehož složky jsou

$$\left. \begin{aligned} & d_1(t) = z_1(t), ..., d_q(t) = z_q(t), \\ & d_{q+1}(t) = 0, ..., d_N(t) = 0, \end{aligned} \right\} \tag{6}$$

jsme připraveni popsat reprodukující jádro v H^+. Protože Hilbertův prostor H^+ není kartézským součinem Hilbertových prostorů $H^{q,2}$ a E^N (důvod je ve skalárním součinu 5.3(3a), bude reprodukující jádro prostoru H^+ jiné než součet reprodukujících jader $H^{q,2}$ a E^N, jak by odpovídalo kartézskému součinu Hilbertových prostorů 4.2(5).

Věta 5.4. *Reprodukující jádro Hilbertova prostoru H^+ je funkce*

$$K^+(t,\tau) = \left\{ \begin{array}{rll} K_\rho(t,\tau), & t \in I, & \tau \in I, \\ -\rho_t d_t(\tau), & t \in J, & \tau \in I, \\ -\rho_\tau d_\tau(t), & t \in I, & \tau \in J, \\ \rho_t d_t(\tau), & t \in J, & \tau \in J, \end{array} \right. \tag{1a}$$

jinak psáno

$$K_t^+(\cdot) = \left\{ \begin{array}{ll} (K_\rho(\cdot,t) - \bar{Q}d(t)), & t \in I \\ (-d^T(\cdot)\bar{Q}e_t,\ \bar{Q}e_t), & t \in J, \end{array} \right. \tag{1b}$$

kde $\bar{Q} = \mathrm{diag}(\rho_1, ..., \rho_N)$, e_t t-tý jednotkový N-vektor, $t \in J$, ρ_j diferencované váhy „vektorového parametru“ vyhlazení (Pozn. 1.4).

K důkazu stačí potvrdit, že

a) $K^+(t,\tau) \in H^+$ (jako funkce t) pro každé $\tau \in I \dot{\cup} J$.

b) $\big((f(t),\Theta), K^+(t,\tau)\big) = \left\{ \begin{array}{ll} f(t) & \text{pro } \tau \in I \\ \Theta_\tau & \text{pro } \tau \in J \end{array} \right\}$ pro všechna $(f,\Theta) \in H^+$.

Ad a) Nechť $\tau \in I$. Pro $t \in I$ je $K^+(t,\tau) = K_\rho(t,\tau) \in H$ a pro $t \in J$ je $K^+(t,\tau) =$
$(..., -\rho_t d_t(\tau), ...)^T \in E^N$, tedy $K^+(t,\tau) \in H^+$ pro $\tau \in I$.

Nechť $\tau \in J$. Pro $t \in I$ je $K^+(t,\tau) = -\rho_\tau d_\tau(t) \in N(L) \subseteq H$ a pro $t \in J$ je
$K^+(t,\tau) = (..., \rho_t \delta_{t\tau}, ...)^T \in E^N$, tedy $K^+(t,\tau) \in H^+$ pro $\tau \in J$.

Ad b) Pro $\tau \in I$ platí (s použitím 5.3(5))

$$\big((f(t),\Theta), K^+(t,\tau)\big) = \textstyle\int_0^T [Lf(t)][LK_\rho(t,\tau)]dt -$$

$$- \textstyle\sum_{j=1}^N \rho_j^{-1}\Theta_j \rho_j d_j(t) + \sum_{j=1}^q (\lambda_j f + \Theta_j)\big[(1+\rho_j)d_j(\tau) - \rho_j d_j(\tau)\big] =$$

$$= \textstyle\int_0^T G(\tau,t)[Lf(t)]dt + \sum_{j=1}^q (\lambda_j f) d_j(\tau) = f(\tau).$$

Pro $\tau \in J$ platí

$$\big((f(t),\Theta),K^+(t,\tau)\big) = \int_0^T [Lf(t)]L\big(-\rho_\tau d_\tau(t)\big)dt +$$

$$+\sum_{j=1}^N \rho_j^{-1}\Theta_j\rho_j\delta_{j\tau} + \sum_{j=1}^q (\lambda_j f + \Theta_j)[-\rho_\tau\lambda_j d_\tau(t) + \rho_j\delta_{j\tau}] = \Theta_\tau. \quad \square$$

Zbývá definovat lineárně nezávislý systém $\Lambda^+ = \{\lambda_j^+\}_1^N$ spojitých lineárnách funkcionálů na H^+ (a najít jejich reprezentanty), vzhledem ke kterým bude vztažen Lg-splajn v H^+.

Definujeme

$$\lambda_j^+(f,\Theta) = \lambda_j f + \Theta_j,\ j \in J. \tag{2}$$

Spojitost těchto lineárních funkcionálů se snadno dokáže:

$$(f^k,\Theta^k) \mapsto (f^0,\Theta^0) \text{ totiž znamená } f^k \mapsto f^0,\ \Theta_j^k \mapsto \Theta_j^0,\ \forall j;$$

odtud pro všechna j platí

$$\lambda_j^+(f^k,\Theta^k) = \lambda_j f^k + \Theta_j^k \mapsto \lambda_j f^0 + \Theta_j^0 = \lambda_j^+(f^0,\Theta^0),$$

Ke konstrukci reprezentantů h_j^+ funkcionálů λ_j^+ $(j \in J)$ se použije věty 4.3(8):

$$h_j^+(\tau) = \lambda_{j(t)}^+ K^+(t,\tau). \tag{3}$$

Při označení

$$\left.\begin{array}{rcl} h_j^+(\tau) & = & \big(q_j(\tau),(\omega^j)_\tau\big),\ q_j \in H \\ \omega^j & = & \big((\omega^j)_1,\dots,(\omega^j)_N\big)^T \in E^N \end{array}\right\}\ \forall j,$$

z vyjádření

$$\lambda_{j(t)}^+ K^+(t,\tau) = \begin{cases} \lambda_{j(t)}K_\rho(t,\tau) - \rho_j d_j(\tau),\ \tau \in I, \\ \lambda_{j(t)}\big(-\rho_\tau d_\tau(t)\big) + \rho_j\delta_{j\tau},\ \tau \in J. \end{cases}$$

vyplývá

$$\begin{array}{rcl} q_j(\tau) & = & \lambda_{j(t)}K_\rho(t,\tau) - \rho_j d_j(\tau),\ \tau \in I, \\ (\omega^j)_\tau & = & \lambda_{j(t)}\big(-\rho_\tau d_\tau(t)\big) + \rho_j\delta_{j\tau},\ \tau \in J. \end{array} \tag{4}$$

Podle 5.3(5)

$$\begin{array}{rcl} q_j(\tau) & = & z_j(\tau),\ j = 1(1)q, \\ q_j(\tau) & = & \lambda_{j(t)}K(t,\tau),\ j = n+1(1)N, \\ \omega_j & \text{je} & \text{nulový } N\text{–vektor pro } j = 1(1)q \\ & & \text{a } \rho_j\text{–násobek } j\text{–tého jednotkového } N\text{–vektoru pro} \\ & & j = q+1(1)N. \end{array}$$

Lineární nezávislost $\{\lambda_j^+\}_1^N$ je evidentní.

Nyní jsme schopni formulovat problém typu 5.3(2) jako náhradu za problém vyhlazovacího splajnu 5.3(1).

Věta 5.5. [24] *Nechť* $(\bar{f}, \bar{\Theta})$ *je řešením problému*

$$\min_{(f,\Theta)\in U^+(r)} ||(f,\Theta)||_{H^+}^2, \tag{1}$$

kde

$$U^+(r) = \{(f,\Theta) \in H^+ : \lambda_j^+\big(f,\Theta\big) = \big((f,\Theta), h_j^+\big) = \\ = \lambda_j f + \Theta_j = r_j,\ j \in J\}.$$

Pak řešením $s_\rho(t)$ *problému* 5.3(1) *je*

$$s_\rho(t) = \bar{f}(t),\ t \in I.$$

Důkaz. Existence a jednoznačnost řešení problému 5.5(1) plyne z (jedné modifikace) věty o projekci (věta 2.3). Stačí připomenout, že varieta $U^+(r)$ je uzavřená v důsledku spojitosti funkcionálů λ_j^+.

V 5.5(1) se minimalizuje výraz

$$\left.\begin{aligned} ||(f,\Theta)||_{H+}^2 &= \int_0^T (Lf)^2 + \textstyle\sum_{j=1}^N \rho_j^{-1}\Theta_j^2 + \sum_{j=1}^q (\lambda_j f + \Theta_j)^2 = \\ &= \int_0^T (Lf)^2 + \textstyle\sum_{j=1}^N \rho_j^{-1}\Theta_j^2 + \sum_{j=1}^q r_j^2 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

na množině

$$U^+(r) = \{(f,\Theta) \in H^+ : \lambda_j f + \Theta_j = r_j,\ j \in J\}.$$

Uvažujme nyní problém

$$||s||_H^2 = \min_{f\in U(r^*)} ||f||_H^2, \tag{3}$$

kde

$$r^* = (r_1^*, ..., r_N^*)^T \in E^N,\ U(r^*) = \{f \in H : \lambda_j f = r_j,\ j \in J\}.$$

Vpravo se minimalizuje výraz

$$||f||_H^2 = \int_0^T (Lf)^2 + \sum_{j=1}^q (\lambda_j f)^2 = \int_0^T (Lf)^2 + \sum_{j=1}^q r_j^2. \tag{4}$$

Zvolme pevně Θ^1. Úloha

$$\min_{(f,\Theta^1)\in U^+(r)} ||(f,\Theta^1)||_{H^+}$$

má jediné řešení, řekněme (s_ρ, Θ^1). Funkce $s_\rho(t)$ se dá získat rovněž jako řešení problému 5.5(3) pro $r^* = r - \Theta^1$, a to proto, že poslední dva členy v 5.5(2) a poslední člen v 5.5(3) jsou konstantní a nezávisí na f a že integrální člen je v obou výrazech týž. V Hilbertově prostoru H je však zaručena jednoznačnost řešení úlohy 5.5(3). Z jednoznačnosti řešení pro $\Theta^1 = \bar{\Theta}$ pak plyne $\bar{f} = s_\rho$. □

5.2. Rekurzivní algoritmus pro Lg-splajn vyhlazující EHB data.

Vzhledem k tomu, že vyhlazovací splajn v Hilbertově prostoru $H^{q,2}$ je interpolační Lg-splajn v Hilbertově prostoru H^+ (přesněji řečeno, první složka tohoto interpolačního Lg-splajnu), lze pro vyhlazovací případ reprodukovat algoritmus pro Lg-splajny interpolující EHB data s následujícími změnami:

místo tamnějšího R_j (viz 4.19 (4)) *bude nyní*

$$R_j = \mathbf{c}_j P_{j/j-1} \mathbf{c}_j^T + \rho_j$$

a místo tamnějšího $P_{q/q}$ (viz 4.19(2)) *bude nyní*

$$P_{q/q} = M^{-1}(\bar{Q}_q + \mathcal{L})M^{-T},$$

kde

$$\bar{Q}_q = \mathrm{diag}(\rho_1, ..., \rho_q), \quad \mathcal{L} = \int_{t_1}^{t_q} \Delta(\tau)\mathbf{b}\mathbf{b}^T \Delta^T(\tau) d\tau.$$

Upozornění 5.6.

V rekurzivním algoritmu 4.19(1) se nabízejí dvě ekvivalentní vyjádření veličiny $P_{j/j}$ (viz 4.19 (9)). Při přechodu na vyhlazovací algoritmus dochází ke změně veličin R_j a $P_{q/q}$, což vede na *nezaměnitelnost* těchto dvou výrazů. Je nutno použít prvního vyjádření.

Příklad 5.7.

Algoritmus příkladu 4.20 pro případ vyhlazení. V tomto případě se změní algoritmus 4.21 pouze v KROKu 1a, a to veličiny R_j a $P_{2/2}$:

$$R_j = [1, 0]P_{j/j-1}[0, 1] + \rho_j,$$

kde čísla ρ_j jsou diferencované váhy „vektorového parametru" vyhlazení (Pozn. 1.4, také věta 5.4).

$$P_{2/2} = M^{-1}(\bar{Q}_q + \mathcal{L})M^{-T},$$

kde $\bar{Q}_q = \mathrm{diag}(\rho_1, \rho_2)$, $\mathcal{L} = \int_{t_1}^{t_2} \Delta(\tau)\mathbf{b}\mathbf{b}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\Delta}^{\mathbf{T}}(\tau)\mathbf{d}\tau.$
Tedy

$$P_{2/2} = M^{-1}\bar{Q}_q M^{-T} + M^{-1}\mathcal{L}M^{-T}.$$

Druhý sčítanec je podle 4.21, KROK 1a (str. 62), roven $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -(t_1 - t_2)/3 \end{bmatrix}$.

První sčítanec je podle 4.19, KROK 1 (str. 57),

$$M^{-1}\bar{Q}_q M^T = \frac{1}{t_2 - t_1} \begin{bmatrix} 0 & t_2 - t_1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathrm{diag}(\rho_1, \rho_2) \times$$

$$\times\frac{1}{t_2-t_1}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ t_2-t_1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{(t_2-t_1)^2}\begin{bmatrix} \rho_2(t_2-t_1)^2 & \rho_2(t_2-t_1) \\ \rho_2(t_2-t_1) & \rho_1+\rho_2 \end{bmatrix}.$$

Doporučení.

Pěkný obrázek o historii i současnosti disciplíny "Interpolace"- do níž teorie splajnů patří - podal Doc. RNDr. Jiří Kobza, CSc, ve stati Interpolace – vývoj formulace problému a jeho řešení. Pokroky matematiky, fyziky & astronomie, 44, č.4, 1999, str. 273 - str. 294.

Doporučujme přečtení tohoto srozumitelně a s velkým přehledem napsaného článku. Čtenář Úvodu do splajnů tak získá představu o zařazení prostudované látky do širších souvislostí.

---

6. Appendix

Úplné znění vět, které byly použity a v textu označeny symbolem $\sharp$. $\sharp$

1 (str. 7) ([11] IV 5.4, Teor. 3) (Banachova věta o inverzním operátoru.) Nechť A je ohraničený lineární operátor, který vzájemně jednoznačně zobrazuje Banachův prostor E na Banachův prostor E_1. Pak inverzní operátor A^{-1} je ohraničený.

$\sharp$ 2 (str. 25) ([16] III, § 24, Teor. 3) Je-li (lineární) normovaný prostor E separabilní, pak každá sféra v adjungovaném prostoru E^* je slabě kompaktní, tj. z libovolné posloupnosti spojitých lineárních funkcionálů $\{f_n\}$ s ohraničenými normami je možno vybrat podposloupnost, která slabě konverguje k nějakému spojitému lineárnímu funkcionálu f_0.

$\sharp$ 3 (str. 35) ([16] III, § 25, Teor. 3) Nechť A je spojitý lineární operátor na (lineárním) normovaném prostoru E s hodnotami v (lineárním) normovaném prostoru E_1. Jestliže posloupnost $\{x_n\} \subseteq E$ slabě konverguje k $x_0 \in E$, pak posloupnost $\{Ax_n\} \subseteq E_1$ slabě konverguje k $Ax_0 \in E_1$.

$\sharp$ 4 (str. 44) ([20] Th. 2, str. 32) Má-li rovnice $Ly = 0$ pouze triviální řešení, pak pro libovolnou funkci $g(t)$ spojitou v intervalu $[0, T]$ existuje řešení rovnice $Ly = g$. Toto řešení je dáno formulí

$$y(x) = \int_0^T G(t, \tau) g(\tau) d\tau.$$

$\sharp$ 5 (str. 75) ([13] 2.6.1) Let Ω be a nonempty open subset of $\mathbf{R}^N$. Then the set $C_0^\infty(\Omega)$ is dense in $L_p(\Omega)$ for arbitrary $p \in [1, \infty)$.

$\sharp$ 6 (str. 83) ([11] III § 4, Teor. 4, str. 145) K tomu, aby ortogonální normovaný systém $\{\varphi_n\}$ v úplném separabilním euklidově prostoru R byl úplný, je nutné a stačí, aby v R neexistoval nenulový prvek ortogonální všem prvkům systému $\{\varphi_n\}$.

$\sharp$ 7 (str. 47) ([11] IV § 3, Teor. 1, str. 183) Je-li $\{x_n\}$ slabě konvergentní posloupnost v normovaném (lineárním) prostoru, pak existuje takové číslo C, že

$$||x_n|| \leq C.$$

Jinak řečeno, slabě konvergentní posloupnost v normovaném (lineárním) prostoru je ohraničená (Banach-Steinhausova věta).

$\sharp$ 8 (str. 47) ([11] IV § 3, Teor. 2, str. 184) Posloupnost $\{x_n\}$ prvků normovaného (lineárního) prostoru E slabě konverguje k $x \in E$, když

1) $||x_n|| \leq M$ pro nějaké číslo M,
2) $f(x_n) \to f(x)$ pro všechna $f \in \Delta$, kde Δ je nějaká množina, jejíž lineární obal je hustý v E^*.

$\sharp$ 9 (str. 50) ([1] Věta 5, str.15) Je-li funkce $R(s,t)$ pozitivně semidefinitní a hermitovsky symetrická, existuje takový náhodný proces (dokonce normální), že $R(s,t)$ je jeho kovarianční funkcí.

Věta $\sharp$ 5 je v originále psána anglicky, $\sharp$ 9 česky a ostatní v ruštině.

Literatura

[1] Anděl, J. *Statistická analýza časových řad.* SNTL Praha 1976.

[2] Anselone, P. M. and Laurent, P.–J. *A general method for the construction of interpolating or smoothing spline-function.* Numer. Math.12 (1968), 66 – 82.

[3] Aronszajn, N. *La théorie des noyaux reproduissants et ses applications.* Première partie. Proc. Cambridge Philos. Soc. V. 39, October 1943, Part 3, 133 – 153.
Note additionelle à l'article „ La théorie des noyaux reproduissants et ses applications." – týž časopis str. 205.

[4] Aronszajn, N. *Theory of reproducing kernels.* Trans. Am. Math. Soc. 68 (1950), 337-440.

[5] Böhmer, K. *Spline-Funktionen.* Teubner Stuttgart 1974.

[6] Craven, P., Wahba, G. *Smoothing noisy data with spline functions. (Estimating the correct degree of smoothing by the method of generalized cross-validation.)* Numer. Math. 31 (1979), 377 – 403.

[7] Hoog, F. R., Hutchinson, M. F. *An Efficient Method for Calculating Smoothing Splines Using Orthogonal Transformation.* Numer. Math. 50, 1987, 311 – 319.

[8] Jerome, J., Schumaker, L. L. *On Lg-splines.* J. Approx. Theory 2 (1969), 29 – 49.

[9] Kalman, R. E. *A new approach to linear filtering and prediction problems.* Trans. of the Amer. Soc. Mech. Eng., ser. D: J. of basic Engineering 82, March 1960, 35 – 45.

[10] Kantorovič, L. V., Akilov, G. P. *Funkcionaĺnyj analiz.* 3. vyd. „Nauka" 1984.

[11] Kolmogorov, A. N., Fomin, S. V. *Elementy těorii funkcij i funkcionaĺnogo analiza.* „Nauka" Moskva 1972.

[12] Laurent, P.–J. *Approximation et optimisation.* Hermann Paris, 1972.

[13] Kufner, A., John, O., Fučík, S. *Function spaces.* Academia Praha 1977.

[14] LIDA – 2. Prometheus Praha 1983 (*překlad z ruštiny*).

[15] Likeš, J., Machek, J. *Počet pravděpodobnosti.* SNTL Praha, 2.vyd. 1987 (str. 159); *Matematická statistika.* SNTL Praha, 2.vyd. 1988 (str. 178).

[16] Ljustěrnik, L. A., Sobolev, V. I. *Elementy funkcionaĺnogo analiza.* GITTL Moskva, Leningrad 1951.

[17] Loève, M. *Functions aléatoirs du second ordre. In P. Levy „Processus stochastiques et mouvement Brouwerien."* Paris Gauthier – Villars 1965, 367 – 420.

[18] Luenberger, D. G. *Optimization by vector space methods.* John Wiley New York 1969.

[19] Moore, E. H. *General analysis.* Memoirs Am. Phil. Soc., Part I 1935, Part II 1939.

[20] Najmark, M. A. *Linějnyje differenciaĺnyje operatory.* GITTL Moskva 1954.

[21] Rektorys, K. et al. *Přehled užité matematiky.* Prometheus Praha, 6.vyd. přeprac.(2 svazky) 1995 (str. 720 a 874).

[22] Sidhu, G. S., Weinert, H. L. *Dynamical Recursive Algorithms for Lg-Spline Interpolation of EHB Data.* Appl. Math. Comput. 5 (1979), 157 – 185.

[23] Vasilenko, V. A. *Splajn-funkcii: těorija, algoritmy, programmy.* „Nauka" Novosibirsk 1983.

[24] Weinert, H. L., Byrd, R. H. and Sidhu, G. S. *A stochastic framework for recursive computation of spline functions: Part II, Smoothing splines.* J. Optim. Th. Appl. 30(2) , February 1980, 255 – 268.

[25] Weinert, H. L. and Sidhu, G. S. *On Uniqueness Conditions for Optimal Curve Fitting.* J. Optim. Th. Appl. 23(2), October 1977, 211 – 216.

[26] Weinert, H. L. and Sidhu, G. S. *A stochastic framework for recursive computation of spline functions: Part I, Interpolating splines.* IEEE Trans. on Inform. Theory, IT 24(1), Januar 1978, 45 – 50.

[27] Yosida, K. *Functional analysis.* Springer 1965.

Rejstřík

Obsah