Cvičení Stoch. analýza – 10. týden:

Příklady k procvičení:

(1) Použijte Itôovu formuli pro přepis náhodného procesu $X_t$ na tvar Itôova procesu, tzn. $dX_t = U(t,\omega)dt + V(t,\omega)dW_t$:

(i) $X_t = W_t^{\,2}$

(ii) $X_t = 2 + t + e^{W_t}$

Řešení: (i) volíme funkci $g(t,w) = w^2$, $X_t = g(t, W_t)$,

vyjde: $dX_t = dt + 2W_t\, dW_t$.

(ii) volíme $g(t,w) = 2 + t + e^w$, $X_t = g(t, W_t)$,

vyjde: $dX_t = \left(1 + \frac{1}{2}e^{W_t}\right)dt + e^{W_t}\, dW_t$.

(2) Transformujte Stratonovichovy SDE na Itôovy SDE:

(i) $dX_t = c.X_t\, dt + \alpha.X_t \circ dW_t$

(ii) $dX_t = \sin X_t \cdot \cos X_t\, dt + (t^2 + \cos X_t) \circ dW_t$

Řešení: (i) $dX_t = \left(c.X_t + \frac{1}{2}\alpha^2 X_t\right)dt + \alpha.X_t\, dW_t$

(ii) $dX_t = \frac{1}{2}\sin X_t \cdot (\cos X_t - t^2)\,dt + (t^2 + \cos X_t)\, dW_t$

(3) Transformujte Itôovy SDE na Stratonovichovy SDE:

(i) $dX_t = r.X_t\, dt + \alpha.X_t\, dW_t$

(ii) $dX_t = 2.e^{-X_t}\, dt + X_t^2\, dW_t$

Řešení: (i) $dX_t = (r - \frac{1}{2}\alpha^2) X_t \, dt + \alpha . X_t \circ dW_t$

(ii) $dX_t = (2e^{-X_t} - X_t^3) \, dt + X_t^2 \circ dW_t$

(4) Pomocí Itôova lemmatu dokažte, že náhodný proces

$$Y_t = (W_t + t) . \exp[-W_t - \tfrac{1}{2} t]$$ je martingal.

Řešení: volíme $X_t = W_t$, $Y_t = g(t, X_t)$, $g(t, x) = (t+x) . e^{-x-\frac{1}{2}t}$.

Po úpravách obdržíme: $dY_t = e^{-W_t - \frac{1}{2}t} . (1 - t - W_t) \, dW_t$, tzn.

$$Y(t) = \int_0^t e^{-W_s - \frac{1}{2}s} . (1 - s - W_s) \, dW_s$$ , což je Itôův integrál.

(5) Dokažte, že řešením SDE $dS_t = \mu(t) . S_t \, dt + \sigma . S_t \, dW_t$

pro popis ceny akcie s konstantní volatilitou $\sigma > 0$

a ~~neuáhodnejm~~ neuáhodným driftem $\mu(t)$ je náhodný proces

$$S_t = S_0 . \exp\left[\sigma . W_t - \tfrac{1}{2}\sigma^2 . t + \int_0^t \mu(s) \, ds\right].$$

Řešení: Použijeme Itôovo lemma:

$X_t = W_t$, $g(t, x) = \exp[\sigma x - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \int_0^t \mu(s) \, ds]$,

$Y_t = g(t, X_t)$.

Spočítáním $dY_t$ obdržíme zadanou SDE.

2. možnost: zadanou SDE vyřešit postupem z přednášky.

(6) Ke Stratonovichově SDE nalezněte odpovídající Itôovu SDE:

$$dX_t = X_t\, dt + X_t^2 \circ dW_t$$

Řešení: $dX_t = (X_t + X_t^3)\, dt + X_t^2\, dW_t$

(7) Vyřešte SDE $dY_t = \theta \cdot (\mu - Y_t)\, dt + \sigma\, dW_t$.

Dále spočítejte $EY_t$, $DY_t$, když $X_0(\omega) = x_0$.

$\theta, \mu, \sigma > 0$ jsou konstanty, $x_0$ také.

Řešení: inspirujte se příkladem ze cvičení, a volte

$$X_t = e^{\theta t} \cdot Y_t = g(t, Y_t), \text{ tzn. s funkcí}$$

$$g(t,y) = y \cdot e^{\theta t}.$$

Použitím Itôova lemmatu dostaneme:

$$dX_t = d(e^{\theta t} \cdot Y_t) = \theta \cdot \mu \cdot e^{\theta t}\, dt + \sigma \cdot e^{\theta t}\, dW_t$$

$$\Downarrow$$

$$\int_0^t d(e^{\theta s} Y_s) = \theta\mu \cdot \int_0^t e^{\theta s}\, ds + \sigma \int_0^t e^{\theta s}\, dW_s$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{Y_t}} = Y_0 \cdot e^{-\theta t} + \mu \cdot (1 - e^{-\theta t}) + \sigma \cdot \int_0^t e^{\theta(s-t)}\, dW_s.$$

Tento proces se nazývá mean-reverting Ornsteinův-Uhlenbeckův proces.

Střední hodnota vyjde

$$\underline{\underline{EY_t}} = x_0 \cdot e^{-\theta t} + \mu(1-e^{-\theta t}),$$

neboť stř. hodnota stochastického integrálu je nulová.

Počítáme rozptyl

$$\underline{\underline{DY_t}} = E[Y_t - EY_t]^2 = E\left[\sigma \cdot \int_0^t e^{\theta(s-t)}\, dW_s\right]^2 =$$

$$= \sigma^2 \cdot \int_0^t e^{2\theta(s-t)}\, ds = \frac{\sigma^2}{2\theta} \cdot \left(1-e^{-2\theta t}\right),$$

využili jsme přitom Itôovu izometrii.