Pracovní text a úkoly ke cvičením MF002

2 Brownův most

Brownův most na intervalu $[0,1]$ je náhodný proces X_t definovaný předpisem

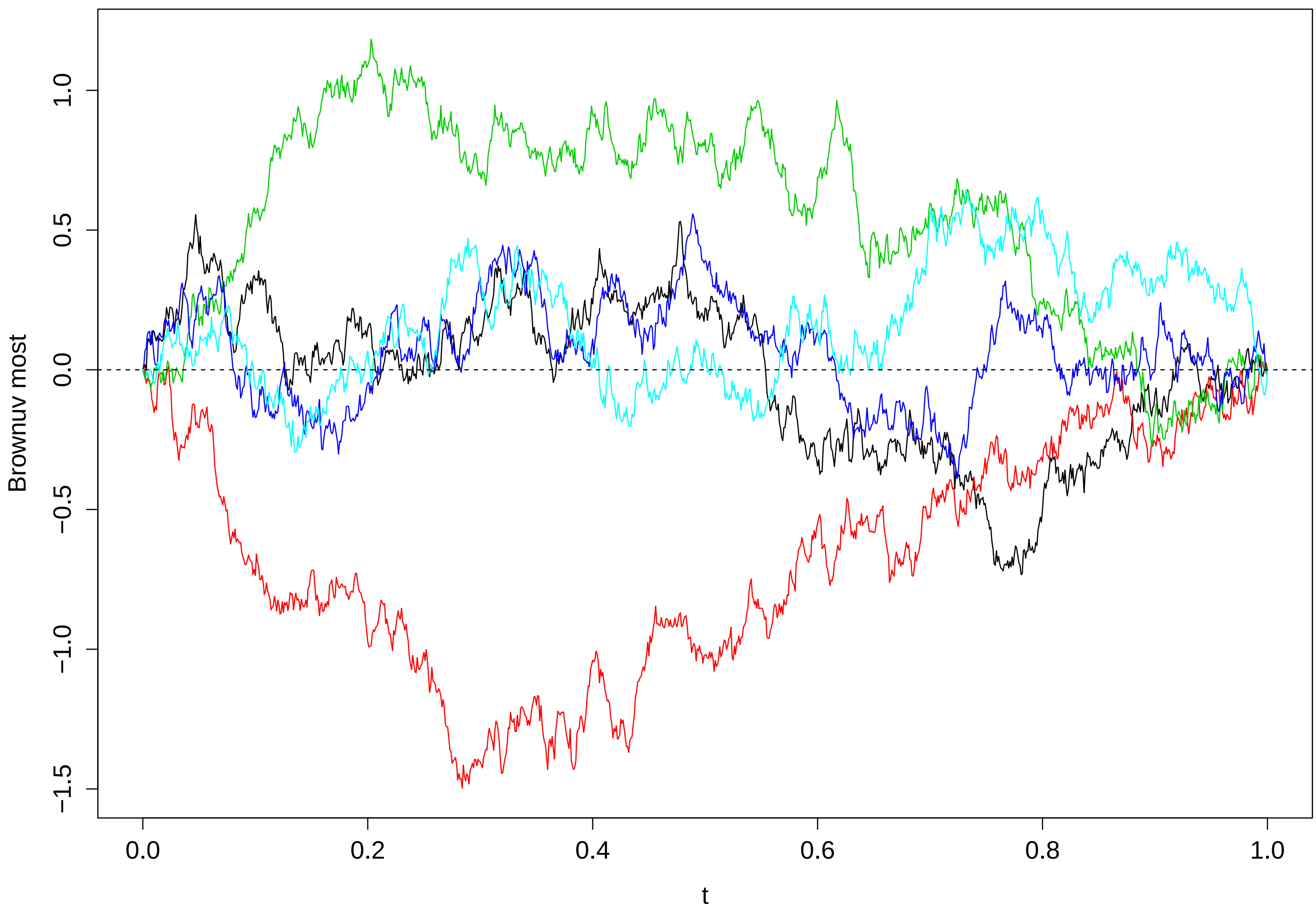
$$X_t = (W_t | W_1 = 0) \ , \qquad t \in [0,1] \ ,$$

kde W_t je Wienerův proces na intervalu $[0,1]$. Tzn. X_t je Wienerův proces podmíněný hodnotou v koncovém čase $t = 1$. Jednou z možností jak takový proces explicitně popsat, je

$$X_t = W_t - t\,W_1 \ , \qquad t \in [0,1] \ .$$

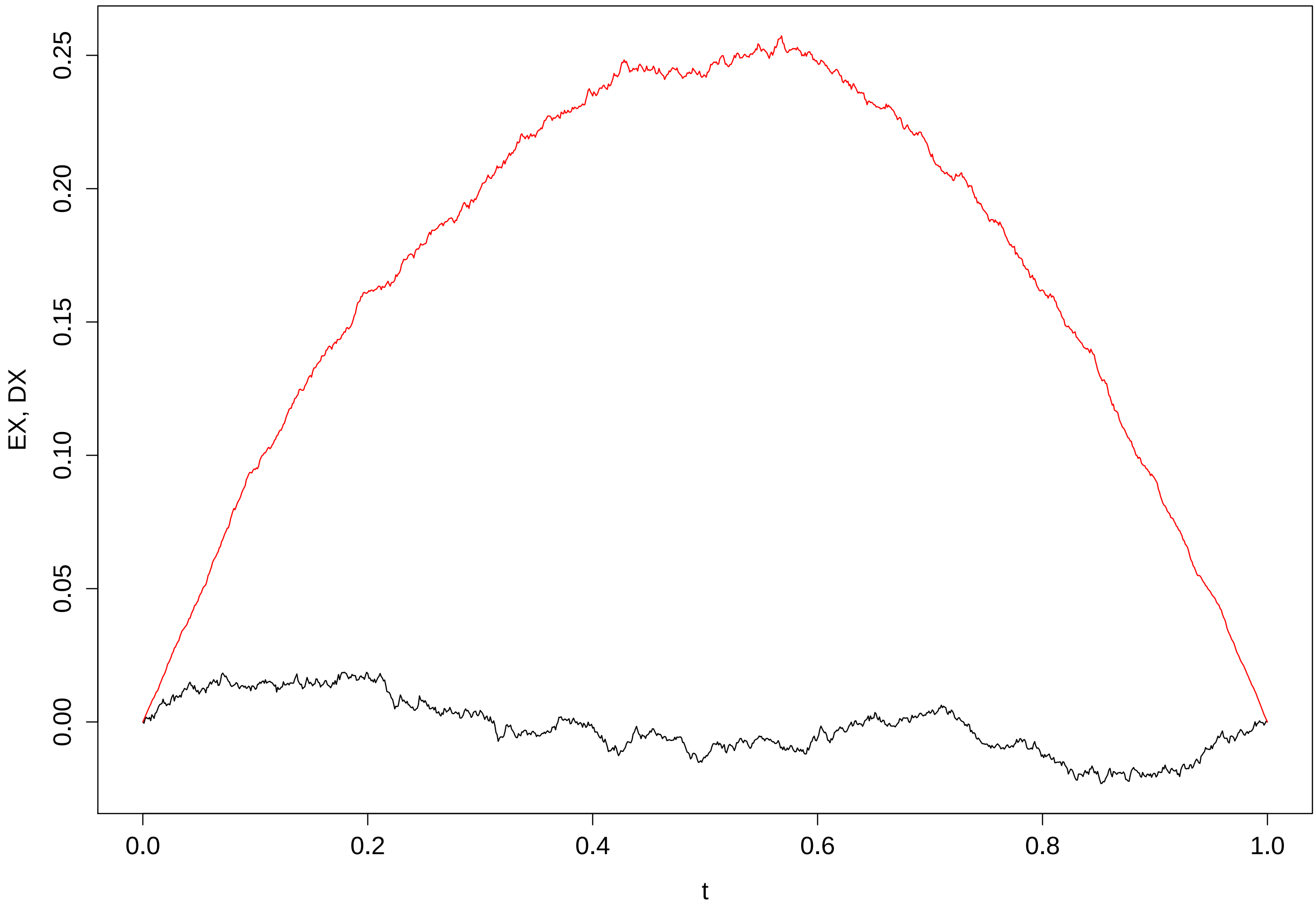
2.1 Úkoly

Využijte předchozího vztahu a napište skript, který bude generovat trajektorii Brownova mostu. Nejdříve si vygenerujte trajektorii Wienerova procesu W_t na intervalu $[0,1]$ a pak ji transformujte na Brownův most X_t. Do obrázku pak vykreslete několik jeho trajektorií:



Vygenerujte si 100, 1000, příp. i 10000, trajektorií Brownova mostu a spočítejte střední hodnotu a rozptyl pro každé $t \in [0,1]$. Obě závislosti pak vykreslete do grafu. Jakým dvěma funkcím odpovídají tyto závislosti?

Ondřej Pokora, ÚMS PřF MU Brno, aktualizace 17. března 2014



3 Geometrický Brownův pohyb

Cena akcie je modelována pomocí stochastické diferenciální rovnice (SDR)

$$\mathrm{d}X_t = r X_t \,\mathrm{d}t + \sigma X_t \,\mathrm{d}W_t \ ,$$

kde parametr r je úroková míra a parametr $\sigma > 0$ *volatilita*. Pro jednoznačné řešení je nutno doplnit i počáteční hodnotu $X_0 > 0$. V jednoduchém modelu uvažujeme konstantní parametry, tedy nezávislé na čase. Řešením této SDR je nezáporný náhodný proces X_t zvaný *geometrický Brownův pohyb*, jehož trajektorie jsou pro hodnoty $X_0 = 100$, $r = 0$ a $\sigma = 0,2$ znázorněny na následujícím obrázku.

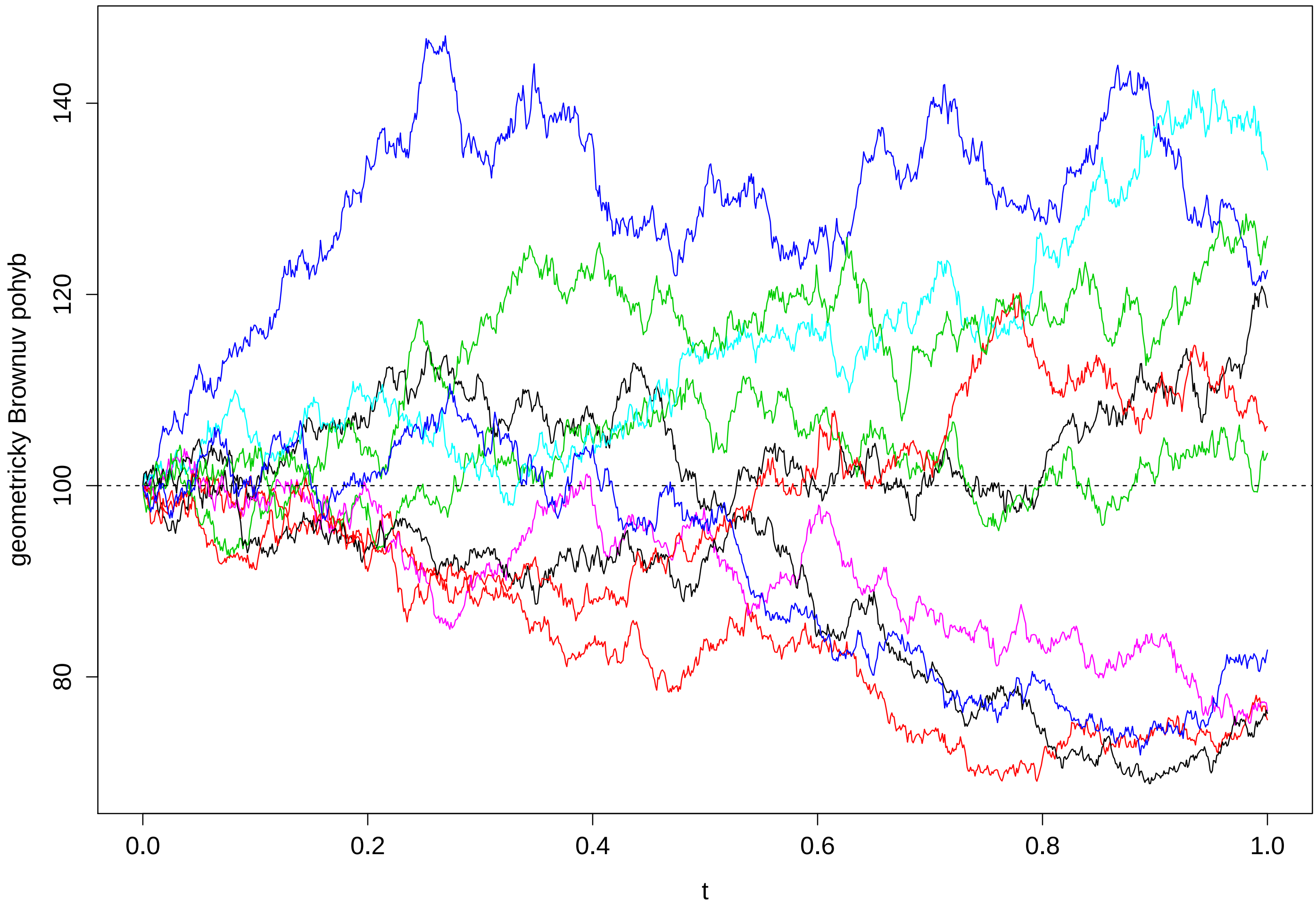
Výše uvedenou SDR lze přepsat do diferenčního tvaru

$$\Delta X(t) = r X(t) \Delta t + \sigma X(t) \Delta W \ .$$

Odtud dostáváme vztah pro generování trajektorií geometrického Brownova pohybu

$$X(t + \Delta t) = X(t) + \Delta X(t) = X(t) + r X(t) \Delta t + \sigma X(t) \Delta W \ .$$

Člen ΔW je přírůstek Wienerova procesu na intervalu délky Δt (viz přechozí cvičení).



3.1 Úkoly

Pomocí **for**-cyklu nebo funkce **sapply** napište skript, který bude generovat trajektorie geometrického Brownova pohybu s parametry X_0, r, σ. Vygenerujte pak několik trajektorií geometrického Brownova pohybu na intervalu $[0, 1]$ s parametry $X_0 = 100$, $r = 0$ a $\sigma = 0.2$, jak je naznačeno na obrázku výše.

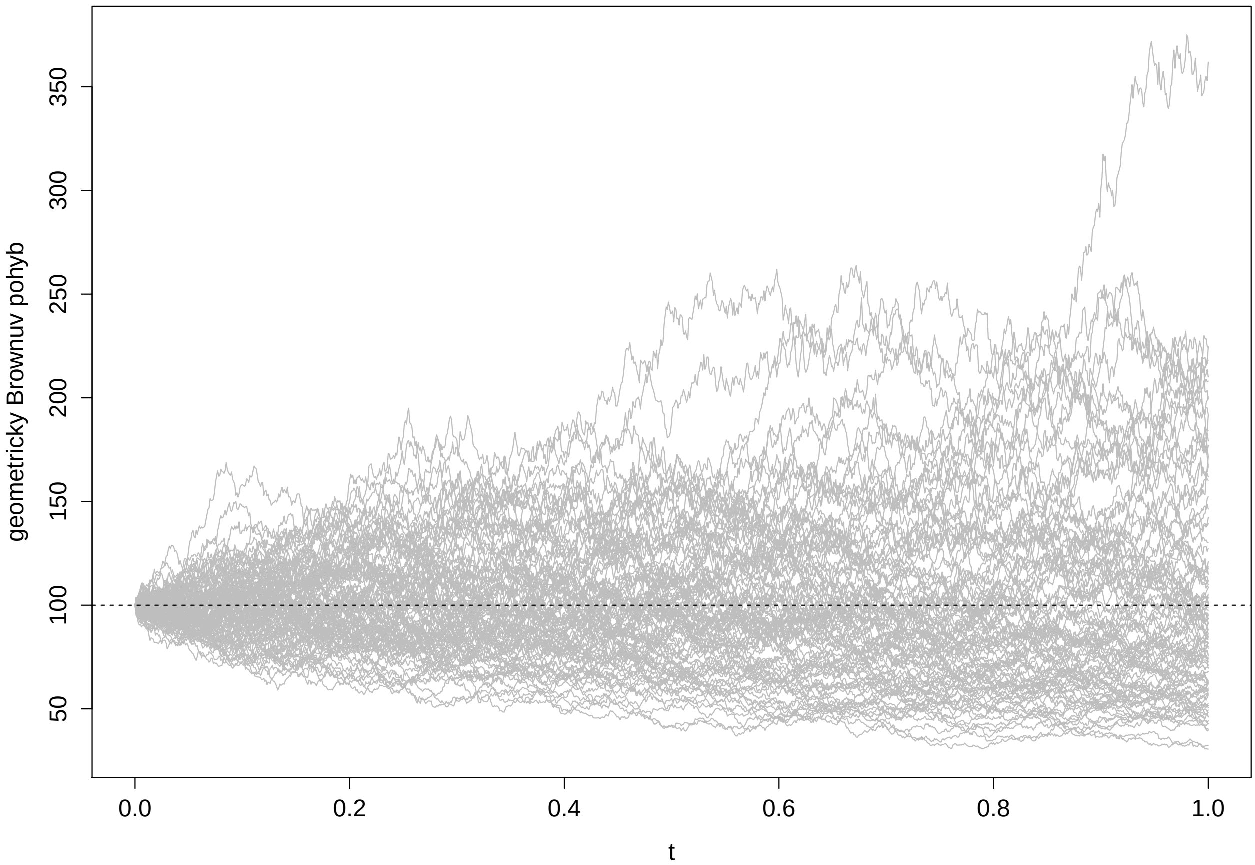
Měňte hodnoty parametrů $X_0 > 0, r, \sigma > 0$ a sledujte chování trajektorií v závislosti na těchto změnách.

Ověřte si, že následujícím způsobem generovaný náhodný proces je také geometrický Brownův pohyb X_t:

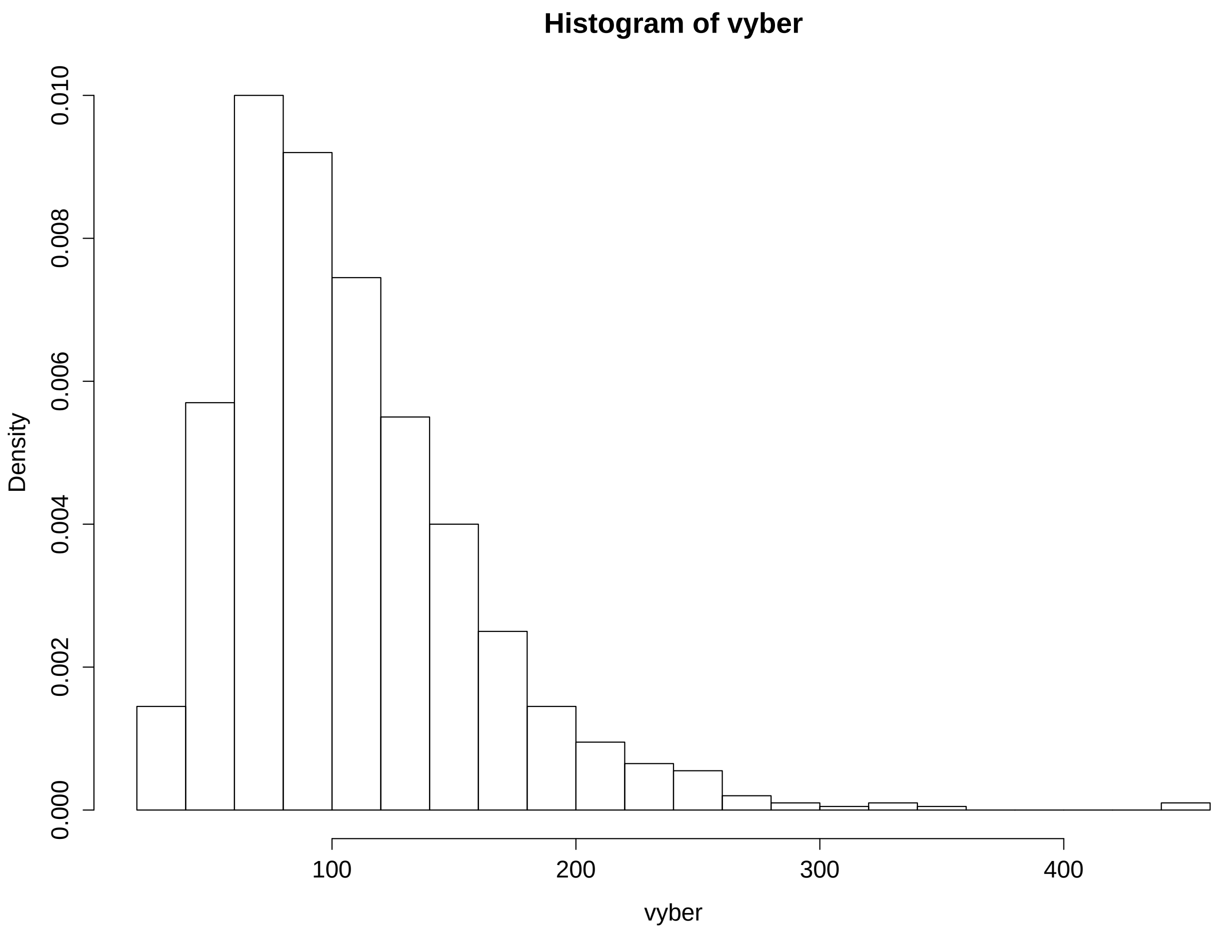
```
generuj.gBp <- function (t, dt, X0, r, sigma) {
  dW <- rnorm (length (t) - 1) * sqrt (dt)
  dX <- 1 + r * dt + sigma * dW
  X <- cumprod (c (X0 , dX))
}
```

Vygenerujte si 100, 1000 (příp. 10000), trajektorií geometrického Brownova pohybu.
Zvolte několik časů, např. $t = 0.2$, $t = 0.8$, a zkoumejte pravděpodobnostní rozložení hodnot X_t, můžete využít emirickou distribuční funkci, histogramy, Kolmogorovův-Smirnovův test…Pro každý čas $t \in [0, 1]$ spočítejte střední hodnotu a směrodatnou odchylku realizací a obě závislosti vykreslete do grafu.

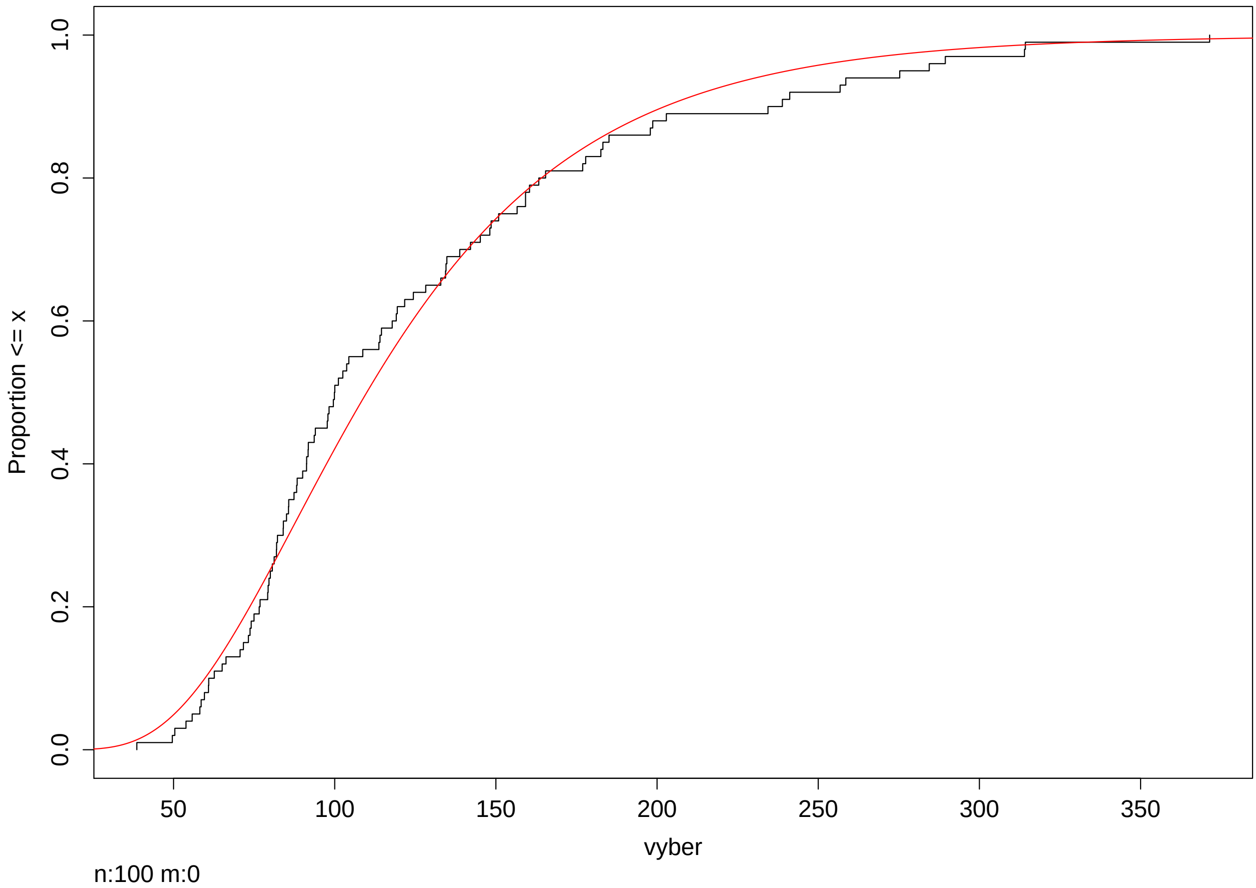
Měňte hodnoty parametrů X_0, r, σ a závislosti a pomocí grafů se pokuste vusledovat, jak střední hodnota a směrodatná odchylka procesu Y_t závisí na hodnotách těchto parametrů.



geometricky Brownuv pohyb
50
100
150
200
250
300
350
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
t



Histogram of vyber
Density
0.000
0.002
0.004
0.006
0.008
0.010
100
200
300
400
vyber



Totéž potom proveďte se zlogaritmovanými hodnotami procesu,

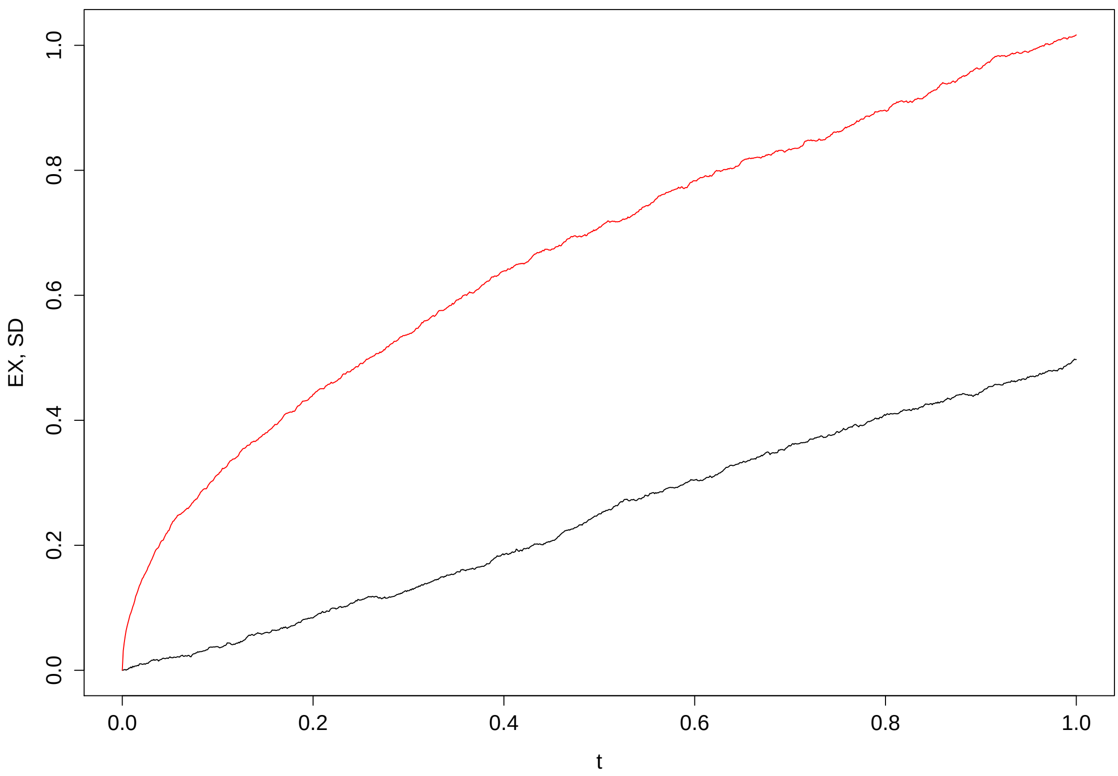
$$Y_t = \ln X_t.$$

Pro přirozený logaritmus je v R funkce `log`.

Zkoumejte a graficky zobrazujte rozdělení pravděpodobnosti, střední hodnotu a směrodatnou odchylku procesu Y_t.

Podaří se vám nalézt takovou kombinaci parametrů, aby střední hodnota procesu Y_t byla konstatní?

Např. následující graf zobrazuje závislosti střední hodnoty a směrodatné odchylky procesu Y_t na čase $t \in [0; 1]$ pro hodnoty parametrů $X_0 = 1,\ r = 1,\ \sigma = 1$:



a totéž pro $X_0 = 1,\ r = 0,\ \sigma = 1$: