Pracovní text a úkoly ke cvičením MF002

4 Jednoduché odhady parametrů geometrického Brownova pohybu

Cenu akcie stále modelujeme pomocí stochastické diferenciální rovnice (SDR)

$$\mathrm{d}X_t = r\,X_t\,\mathrm{d}t + \sigma\,X_t\,\mathrm{d}W_t \quad ,$$

s počáteční cenou $X_0 > 0$, kde parametr r je úroková míra a parametr $\sigma > 0$ *volatilita*. Uvažujeme konstantní parametry, tedy nezávislé na čase.

Řešením této SDR je nezáporný náhodný proces X_t zvaný *geometrický Brownův pohyb*,

$$X_t = X_0 \exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma\,W_t\right] \ .$$

4.1 Úkoly

S využitím výsledků z minulých cvičení na počítači určete rozdělení pravděpodobnosti a parametry následujících náhodných procesů (příp. náhodných veličin):

- $\dfrac{X_t}{X_0} \sim ?$
- $\ln\dfrac{X_t}{X_0} \sim ?$
- $R_t = \ln\dfrac{X(t+\Delta t)}{X(t)} \sim ?$, kde Δt je časový interval mezi pozorovanými hodnotami ceny akcie

Předpokládejte znalost jedné trajektorie geometrického Brownova pohybu X_t. Spočítejte realizace náhodných veličin R_t pro vámi zvolené časové okamžiky. Jsou náhodné veličiny R_t pro různé časy $\{\ t\ \}$ stochasticky nezávislé? Pomocí střední hodnoty a rozptylu veličin R_t můžete odhadnout parametry r a σ: buď momentovou metodou, anebo metodou maximální věrohodnosti. Odvoďte si tyto odhady $\hat{r}$ a $\hat{\sigma}$.

Přesnost odhadů $\hat{r}$ a $\hat{\sigma}$ ověřte pomocí simulací. Zvolte si teoretické hodnoty r a σ a pomocí vaší funkce z minulých cvičení si vygenerujte jednu trajektorii odpovídajícího geometrického Brownova pohybu. Následně spočítejte hodnoty R_t. Odhadněte hodnoty $\hat{r}$ a $\hat{\sigma}$ a porovnejte je s teoretickými hodnotami. Celý postup opakujte pro jinou trajektorii, resp. pro jiné teoretické hodnoty parametrů.

Jako ukázka je na následujících obrázcích zobrazena jedna simulovaná trajektorie geometrického Brownova pohybu s parametry s počáteční cenou akcie 100, očekávaným ziskem 55 % a směrodatnou odchylkou 30 % za rok, tzn. $X_0 = 100$, $r = 0.55$ a $\sigma = 0.3$. Trajektorie byla vygenerována pro období 4 let s předpokladem 252 obchodovaných dní v roce, tedy pro $\Delta t = 1/252$ a časový interval $[0, 4]$.

```
X0 <- 100
dt <- 1/252
r <- 0.55
sigma <- 0.3
t <- seq (0, 4, by=dt)

X <- generuj.gBp (t, dt, X0, r, sigma)

plot (t, X, type="l", col="red", xlab="t", ylab="geometricky Brownuv p
abline (h = X0 , lty = 2)
```

Ondřej Pokora, ÚMS PřF MU Brno, aktualizace 23. března 2014

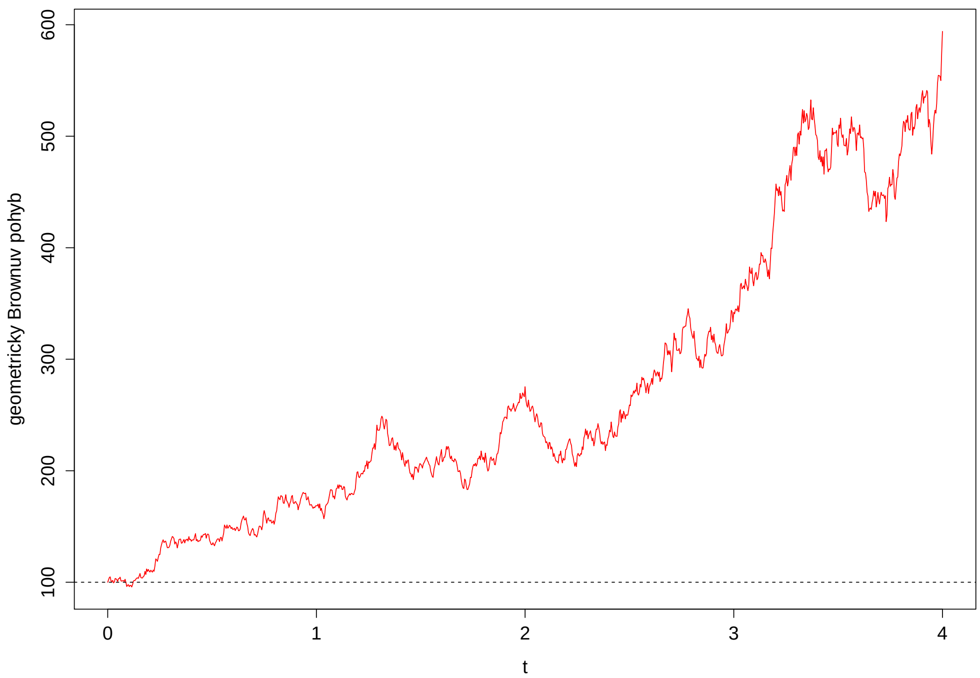
Dále jsou zobrazeny hodnoty procesu R_t.

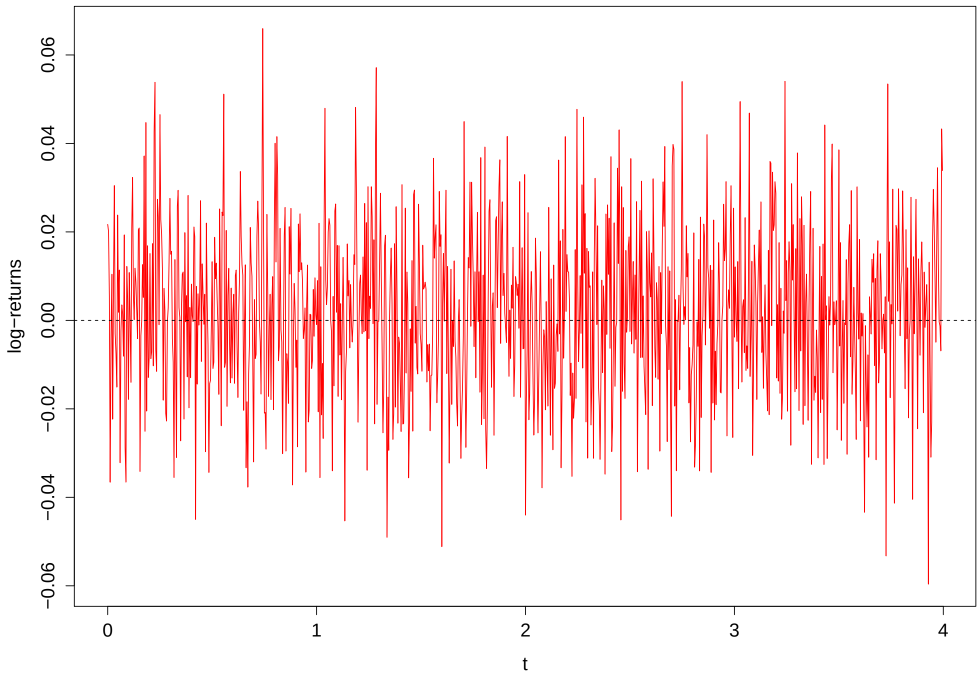
```
n <- length (X)
R <- log (X[2:n] / X[1:(n-1)])

plot (t[1:(n-1)], R, type="l", col="red", xlab="t", ylab="log-returns"
abline (h = 0 , lty = 2)
```

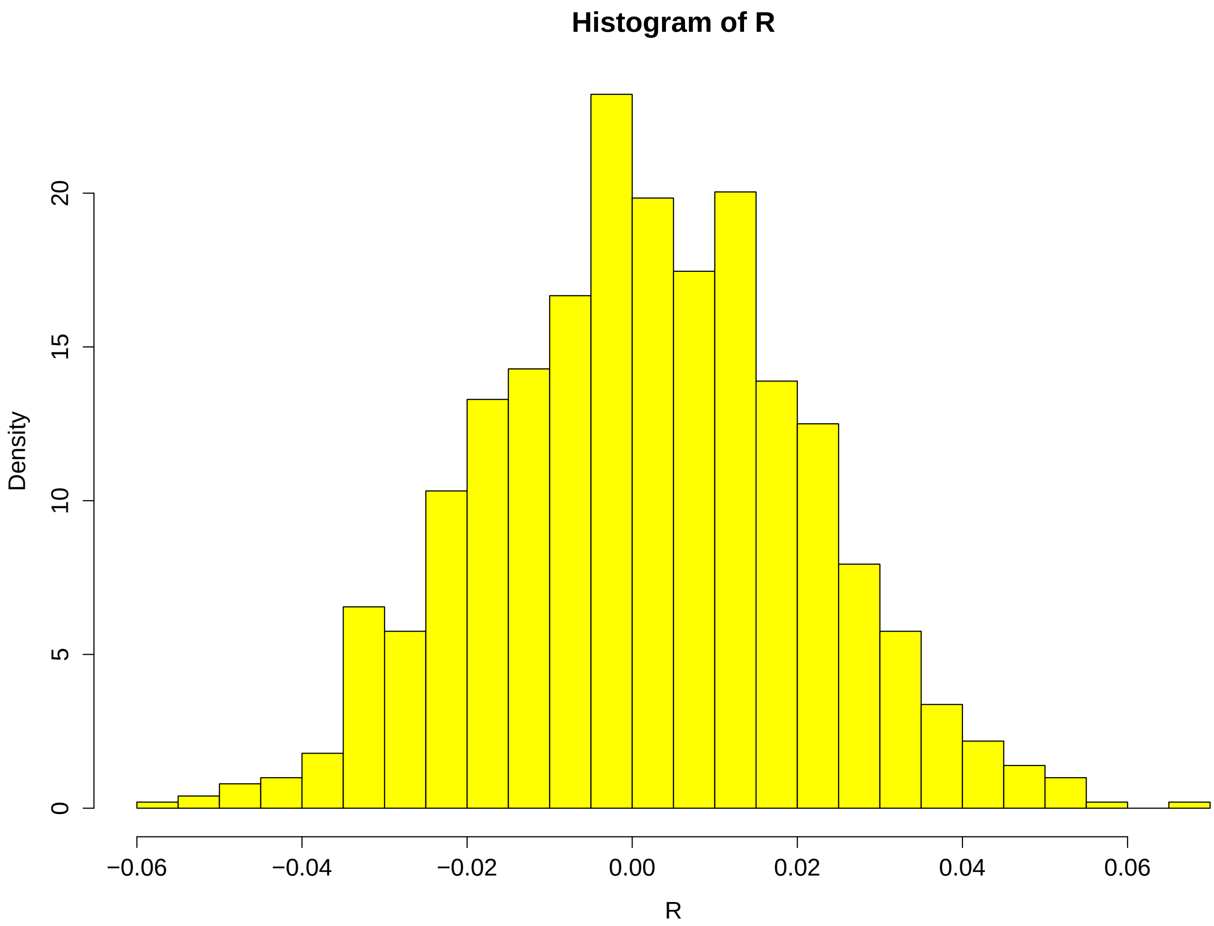
Následuje histogram (příkaz **hist**) a graf autokorelační funkce (tzv. *ACF*, příkaz **acf**). Připomeňte si význam ACF. Co z histogramu a grafu ACF vidíte? Spočítejte si také číselné charakteristiky: výběrový průměr (**mean**), výběrovou směrodatnou odchylku a rozptyl (**sd**, **var**), výběrovou šikmost a špičatost (příkazy **skewness**, **kurtosis** v knihovně **fBasics**).

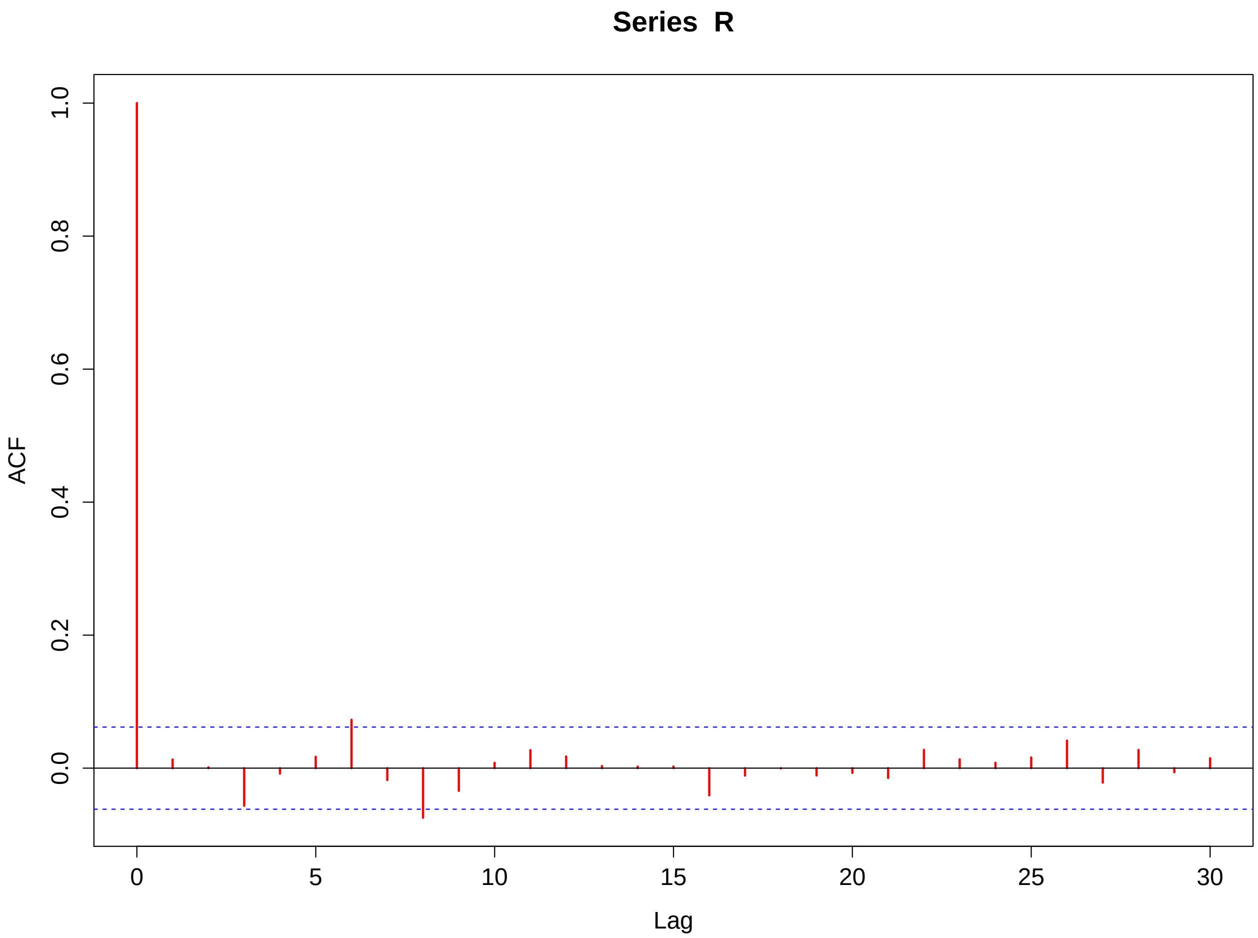
```
hist (R, freq = FALSE)
acf (R)

mean (R)
sd (R)

library (fBasics)
skewness (R, method = "moment")
kurtosis (R, method = "moment")
```

V uvedeném příkladu vyšly momentové odhady následovně: $\hat{r} = 0.492$, $\hat{\sigma} = 0.304$, tedy odhadnutý očekávaný zisk 49.2 % a odhadnutá směrodatná odchylka 30.4 % za rok.




log−returns
0.06
0.04
0.02
0.00
−0.02
−0.04
−0.06
0
1
2
3
4
t


Histogram of R
Density
20
15
10
5
0
−0.06
−0.04
−0.02
0.00
0.02
0.04
0.06
R



Postup řešení tohoto úkolu a odvozené odhady $\hat{r}$ a $\hat{\sigma}$ momentovou metodou či metodou maximální věrohodnosti vám pomohou při zpracování projektu.