Pracovní text a úkoly ke cvičením MF002

5 Oceňování evropské call/put opce

Označme V_t cenu opce (derivátu) a S_t cenu podkladové akcie v čase t. Předpokldámě, že opce má stanovenu realizační cenu (*strike price*) K a splatnost (*maturity*) T. Dále počítáme s úrokovou mírou r a předpokládáme, že podkladová akcie S má konstantní volatilitu $\sigma \geq 0$.

Evropská call opce C na akcii S dává majiteli právo koupit tuto akcii v čase T za cenu

$$V_T^C = (S_T - K)^+.$$

Podobně, evropská put opce P na akcii S dává majiteli právo prodat tuto akcii v čase T za cenu

$$V_T^P = (K - S_T)^+.$$

Oceňováním opce (derivátu) ve finanční matematice rozumíme nalezení současné ceny opce V_0 ze znalosti charakteristik $K,\ T,\ r,\ \sigma$ a současné ceny (*spot price*) akcie S_0.

Blackův-Scholesův-Mertonův vzorec počítá současnou cenu V_0^C evropské call opce,

$$V_0^C = S_0\,\Phi(z) - K\,\mathrm{e}^{-rT}\,\Phi\left(z - \sigma\sqrt{T}\right),$$

kde

$$z = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right].$$

Put-call parita (*put-call parity*) je princip, kterým dáváme do souvislosti cenu akcie S a cenu call opce C a put opce P na tuto akcii. Uvažujme dvě portfolia. Portofilo 1 je složeno z obligace B s výnosem K v čase T a z call opce C na akcii S s realizační cenou K a splatností T. Portofilo 2 je složeno z jednoho podílu akcie S a z put opce P na stejnou akcii S a se stejnou realizační cenou K a splatností T.

Sami si doplňte (místo ?) tabulky výplat při splatnosti pro obě portfolia.

portfolio 1	$S_T > K$	$S_T \leq K$
obligace B	?	?
call opce C	?	?
celkem	S_T	K

portfolio 2	$S_T > K$	$S_T \leq K$
akcie S	?	?
put opce P	?	?
celkem	S_T	K

Pro kontrolu máte uvedeny celkové výplaty pro obě portfolia. Jejich porovnáním odvodíme matematický vztah pro ceny akcie a opcí v libovolném čase $0 \leq t \leq T$. Speciálně pro současné ceny z put-call parity dostáváme užitečný vztah

$$K\,\mathrm{e}^{-rT} + V_0^C = S_0 + V_0^P.$$

Na minulých cvičeních jsme si ukázali postup, jak ze znalosti časové řady ceny akcie odhadnout úrokovou míru r a volatilitu σ. Takto odhadnutá volatilita se nazývá historickou volatilitou, neboť se počítá zpětně ze znalosti skutečných cen akcie.

Jiný způsob odhadu volality σ akcie vychází z předpokladue znalosti tržní hodnoty opce (derivátu) na tuto akcii. Předpokldáme, že známe charakteristiky určité opce a její tržní hodnotu V_0. Tzv. implikovaná volatilita (*implied volalitity*) je takové σ, které po dosazení do Blackova-Scholesova-Mertonova vzorce vytvoří cenu rovnou právě hodnotě V_0.

Implikovaná volatilita existuje a je jednoznačně určená, pokud cena call opce splňuje podmínku

$$S_0 - K\,\mathrm{e}^{-rT} < V_0^C < S_0,$$

krajní body jsou přitom určeny jako limitní případy pro $\sigma \to 0$ a $\sigma \to \infty$.

Ondřej Pokora, ÚMS PřF MU Brno, aktualizace 28. dubna 2014

5.1 Úkoly

Za otazníky doplňte správné výplaty v tabulkách výše.

Pomocí put-call parity odvoďte vzorec pro současnou cenu V_0^P evropské put opce,

$$V_0^P = K\,\mathrm{e}^{-rT}\,\Phi\left(\sigma\sqrt{T} - z\right) - S_0\,\Phi\left(-z\right).$$

V *R* si definujte funkce `call` a `put` pro výpočet současné ceny call a put opce podle Blackova-Scholesova-Mertonova vzorce. Jako parametry funkcí zvolte σ, r, T, K, S (ideálně v tomto pořadí).

```
call <- function (sigma, r, T, K, S) {
  # ...
  # doplnte vzorec pro vypocet V^C_0
  # ...
}

put <- function (sigma, r, T, K, S) {
  # ...
  # doplnte vzorec pro vypocet V^P_0
  # ...
}
```

Nyní uvažujme např. roční úrokovou míru 1 %, a předpokládejme, že akcie má volatilitu 0,3 a její současná hodnota je 100 USD. Call opce s realizační cenou 120 USD s dobou do splatnosti půl roku bude mít cenu 2,6 USD, analogická put opce bude mít cenu 22 USD:

```
call (0.3, 0.01, 0.5, 120, 100)

put (0.3, 0.01, 0.5, 120, 100)
```

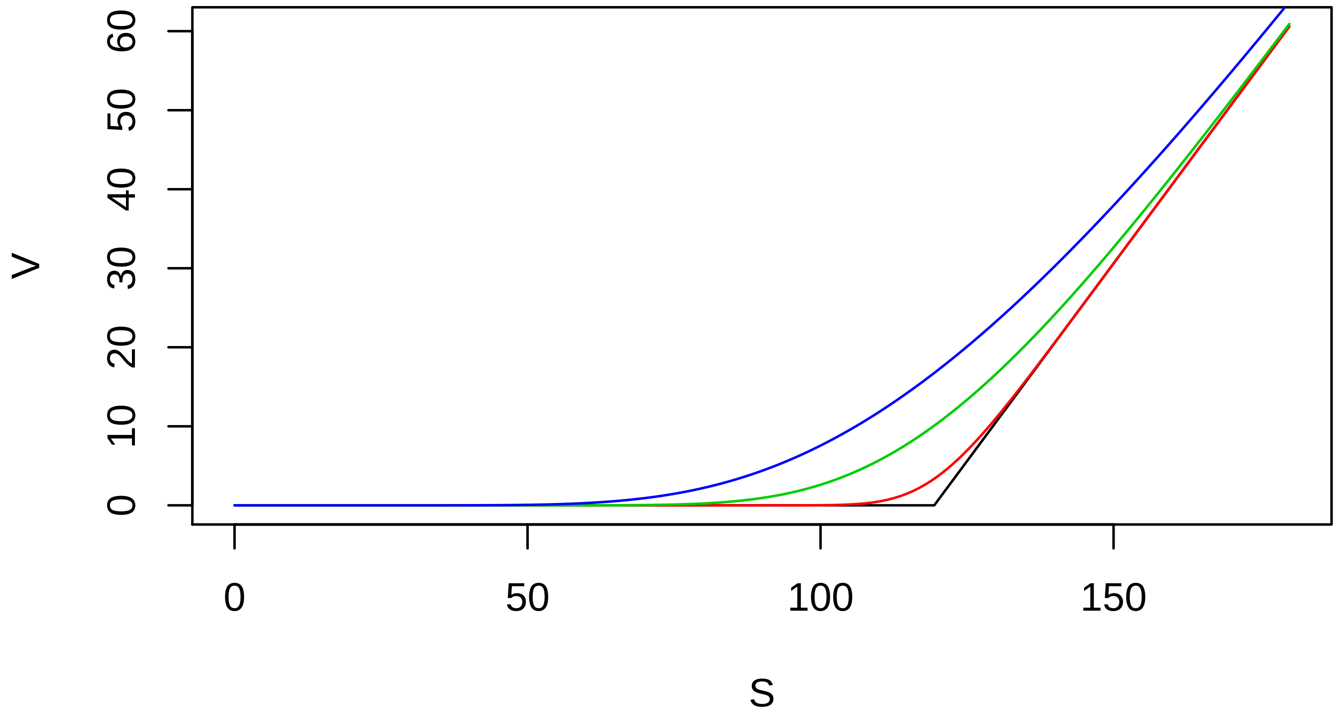
Vyzkoušejte si výpočet cen opcí pro další hodnoty parametrů.

V grafech si zobrazujte závislosti V_0^C, resp. V_0^P, na současné ceně akcie S_0. Do jednoho grafu si kreslete více křivek, u nichž budete měnit ještě jiný parametr, např. dobu do splatnosti T, nebo volatilitu σ. Do obrázku si přikreslete i výplatní funkci V_T^C, resp. V_T^P.

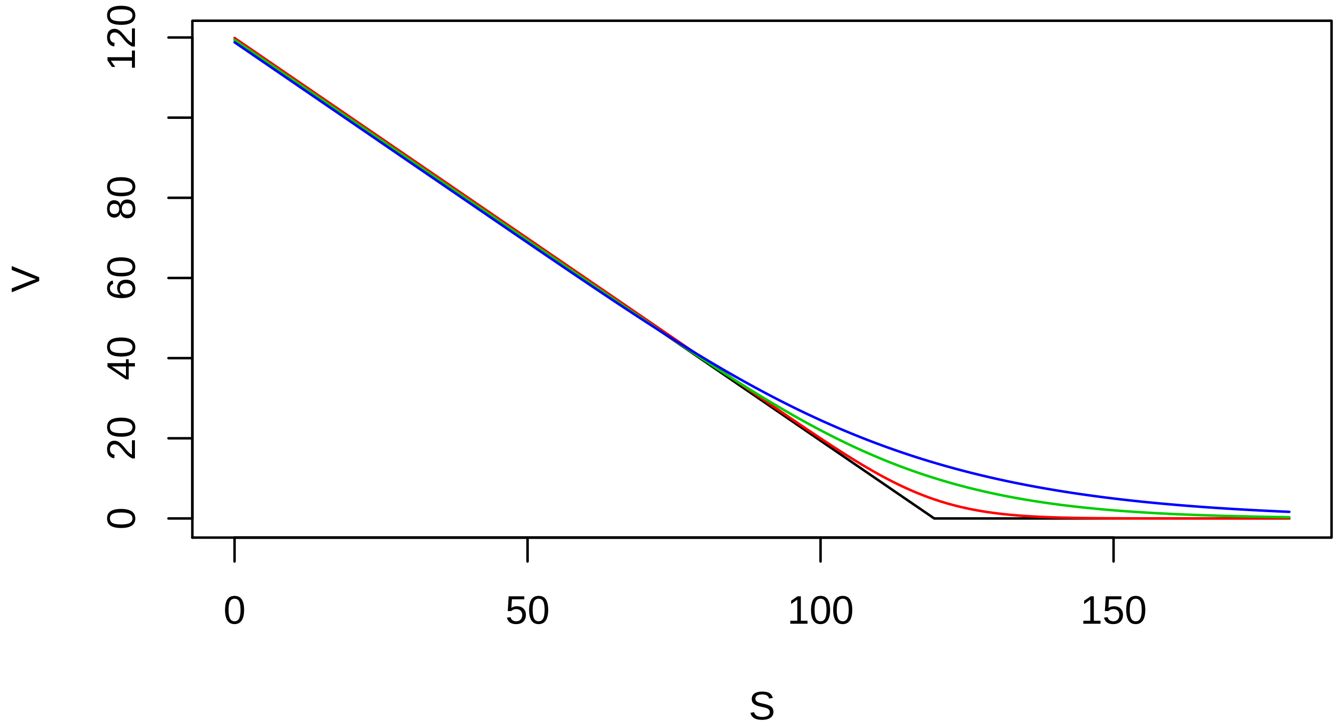
Analogicky zkoumejte další závislosti, např. na volatilitě σ a době do splatnosti T. Zkoumejte např. asymptotické vlastnosti cen opcí, když $\sigma \to 0$, $\sigma \to \infty$, $T \to 0$, $T \to \infty$, $r \to 0$, nebo $S \to K$.

Vykreslené chování závislostí matematicky vysvětlete a interpretujte i z pohledu finanční matematiky.

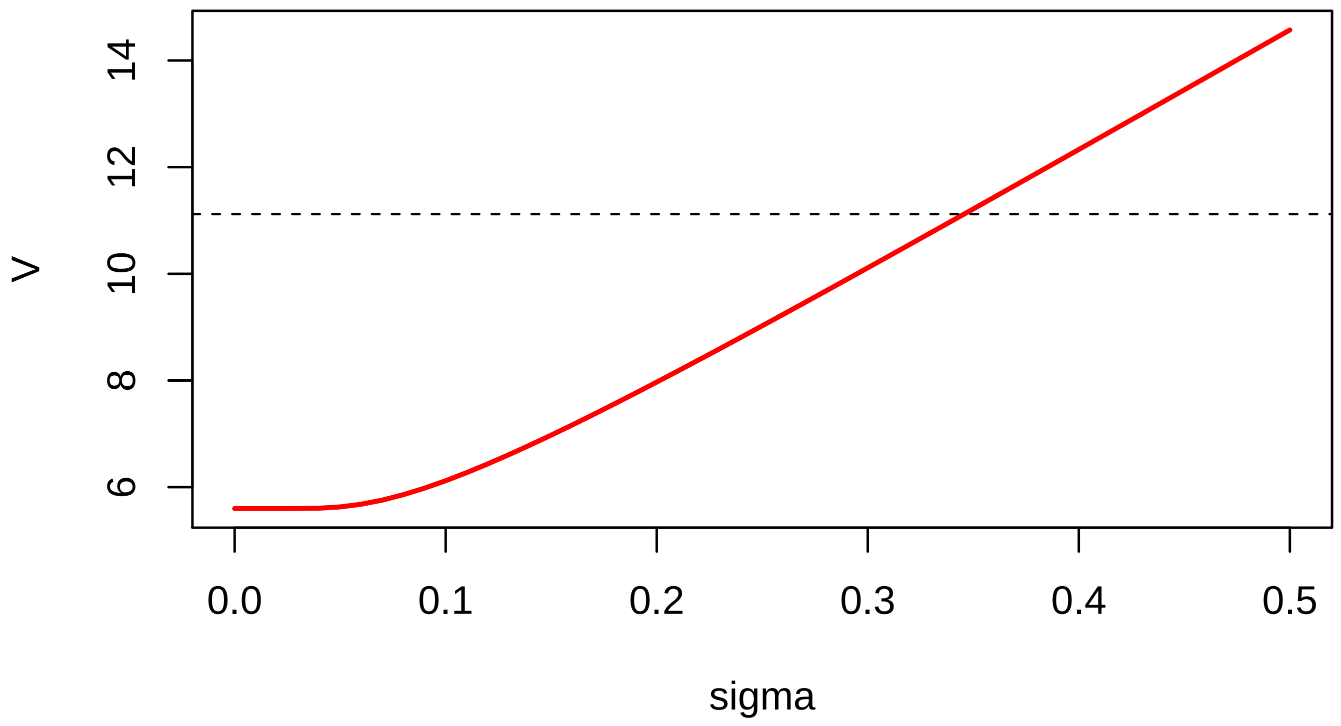
Závislost V_0^C na S_0 pro několik hodnot volatility σ:



Závislost V_0^P na S_0 pro několik dob do splatnosti T:



Jakou hodnotu má implikovaná volatilita akcie, jejíž současná hodnota akcie je 85, USD, když cena call opce s realizační cenou 80 USD s dobou do splatnosti 0,5 roku je 11,12 USD při roční úrokové míře 1 %? Vykreslíme si závislost V_0^C pro určitý interval volatilit σ a vložíme vodorovnou čáru pro $V_0^C = 11{,}12$ USD:



Vidíme, že implikovaná volatilita existuje a je určena jednoznačně průsečíkem křivky s vodorovnou čárou. Pro přesné řešení implikované volatility musíme najít takové σ, aby platilo $V_0^C = 11{,}12$ USD. Závislost V_0^C na σ však není lineární, jak je z grafu vidět. Pro nalezení kořenu rovnice

$$V_0^C - 11{,}12 = 0$$

proto použijeme některou z iteračních metod numerické matematiky, např. Newtonovu metodu. V *R* si tuto funkci proměnné σ s nulovou pravou stranou definujeme a pro nalezení jejího kořene použijeme funkci `uniroot`.

```
fn <- function (u) {
  call (u, 0.01, 0.5, 80, 85.2) - 11.12
}

reseni <- uniroot (fn, c (0, 0.5))
reseni$root
```

Obdržíme výsledek, že implikovaná volatilita uvažované akcie je rovna 0,346.

Vyzkoušejte si výpočet implikované volatility pro jiné hodnoty parametrů a také pomocí znalosti ceny V_0^P put opce.