1. zkoušková písemná práce, jarní semestr 2014, Matematické modely ve finanční matematice

Příklad 1. *(5b.) Firma půjčující každý týden auta má dvě pobočky - jednu v Brně a jednu v Praze. Auto zapůjčené v Brně lze vrátit i v Praze a naopak. Po čase se zjistilo, že na konci týdne je vždy v Praze vráceno zhruba 80 % z aut vypůjčených v Praze a 60 % z aut vypůjčených v Brně (zbytek je vrácen v Brně).*

Jak je potřeba rozdělit auta mezi pobočky, aby na obou byl na začátku týdne vždy stejný počet aut jako předchozí týden?

Jak bude vypadat situace po jisté dlouhé době, pokud jsou auta mezi pobočky na začátku náhodně rozdělena?

Řešení. Situace odpovídá diskrétnímu Markovovu procesu s maticí

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Vlastnímu číslu pak odpovídá (normovaný) vektor $(3/4, 1/4)$. V dlouhodobém horizontu se poměr aut ustálí (bez ohledu na počáteční stav) na hodnotě $3:1$ (třikrát víc aut v Praze než v Brně). □

Příklad 2. *(5b.) Eulerovou metodou a vylepšenou Eulerovou metodou (midpoint metodou) s krokem 2 určete hodnotu řešení diferenciální rovnice*

$$y' = 2^y, \quad y(0) = 0$$

v bodě 6 *(y je reálná funkce jedné reálné proměnné).*

Řešení. Klasická Eulerova metoda: $y(6) = 2058$.

Midpoint metoda: $y(6) = 2^{21} + 4 + 2 \cdot 2^{(2^{21}+4+2^{(2^{21}+4)})}$. □

Příklad 3. *(5b.) Určete současnou cenu pojistky* 200 000 Kč *na havarijní úraz, který může nastat na tříměsíční cestě. Pojistka je splatná vždy ke konci měsíce, kdy událost nastala. Intenzita nastání události je dána vztahem $\mu_x = \frac{1}{x+2}$, kde x je doba cesty v měsících. Předpokládáme úročení* 10% *měsíčně.*

Řešení. Pravděpodobnost, že nenastane událost v době t je rovna (v aktuárské notaci je to funkce přežití ${}_tp_x = S_x(t) = 1 - F_x(t)$)

$$e^{-\int_0^t \frac{1}{s+2}\, ds} = e^{-(\ln(t+2) - \ln 2)} = \frac{2}{t+2}.$$

Pravděpodobnosti nastání události po řadě v prvním, druhém a třetím měsíci cesty jsou $1 - 2/3 = 1/3$, $2/4 - 1/3 = 1/6$, $3/5 - 2/4 = 1/10$. Vzhledem k měsíčnímu úročení 10% je pak současná cena pojistky 1 Kč rovna

$$\frac{10}{11} \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{10}{11}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{10}{11}\right)^3 \cdot \frac{1}{10} \doteq 0{,}516,$$

tedy pojistka na 200 000 Kč má hodnotu cca 103181 Kč.

Pozn.: při okamžité výplatě pojistky by byla její hodnota

$$200\,000 \cdot \int_0^3 \left(\frac{10}{11}\right)^t \cdot \frac{2}{t+2} \cdot \frac{1}{t+2}\, dt \doteq 108\,853\,\text{Kč}.$$

□

Příklad 4. *(5b.) Určete obecné řešení rovnice*

$$xu_x - yu_y = 0,$$

pro funkci $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Řešení. Nejpve sestavíme charakteristický systém:

$$x' = x, \; y' = -y,$$

tedy $yx' + xy' = 0$, neboli $\frac{x'}{x} + \frac{y'}{y} = 0$ a tak $\ln x + \ln y = K$ (rozmysli i pro nekladná x, y). To je možné přepsat jako $xy = C$. Charakteristické křivky jsou tedy hyperboly $xy = C$. Obecné řešení pak tvaru $u(x, y) = F(xy)$, kde $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je libovolná reálná funkce. $\square$