Návrh zkoušky, jarní semestr 2014, Matematické modely ve finanční matematice

Příklad 1. *(5b.) Jistá populace malých hlodavců se množí následujícím způsobem: hlodavci stáří do jednoho měsíce splodí v průměru jednoho hlodavce, na jednoho hlodavce stáří mezi jedním a dvěma měsíci připadá v průměru 12 nově narozených hlodavců. Starší hlodavci neplodí. Umírá polovina hlodavců stáří do jednoho jednoho měsíce i polovina hlodavců stáří mezi měsícem a dvěma měsíci. Více než tří měsíců se nedožije žádný. Na jakém poměru se ustálí počet hlodavců stáří do jednoho měsíce ku počtu hlodavců stáří mezi jedním a dvěma měsíci ku počtu hlodavců stáří mezi dvěma a třemi měsíci.*

Řešení. $36:6:1$. □

Příklad 2. *(5b.) Je dán model života s třemi stavy: 0 – zdravý jedinec, 1 – trvale invalidní jedinec a 2 – mrtvý jedinec. Intenzity přechodu mezi jednotlivými stavy jsou: $\mu_x^{01} = 0{,}1x$, $\mu_x^{02} = x$, $\mu_x^{12} = x + 1$. Určete hodnotu životního pojištění prodávaného zdravému třicetiletému jedinci, při kterém se v případě smrti člověka do jeho sta let, vyplácí 300 000 Kč. Předpokládáme úročení vkladů 25% ročně.*

Řešení. Všimněme si, že při daných hodnotách intenzit přechodu, nám jedinec velmi rychle umírá. Pravděpodobnost, že zůstane zdravý během prvního měsíce je totiž

$$e^{-\int_0^{1/12}} 1{,}1(30+s)\,ds = e^{-\frac{33}{12}+0{,}55\cdot\frac{1}{144}} \doteq 0{,}936$$

Pravděpodobnost, že by zůstal invalidní je řádově menší, než že umře (intenzita přechodu do trvalé invalidity je desetinová oproti intenzitě přechodu do stavu smrti, intenzita přechdu z trvalé invalidity do stavu smrti je větší než intenzita přechdou ze zdravého stavu do stavu smrti.) Odhadneme tak současnou cenu pojistky na základě ceny výplaty v prvním, druhém a třetím měsíci, pozdější výplaty zanedbáme. Dostáváme odhad

$$0{,}936 \cdot (\frac{4}{5})^{\frac{1}{12}} \cdot 300000 + 0{,}054 \cdot (\frac{4}{5})^{\frac{2}{12}} \cdot 300000 + 0{,}001 \cdot (\frac{4}{5})^{\frac{3}{12}} \cdot 300000 \doteq 291519.$$

Pozn. Explicitní vyjádření pravděpodobností vede na vyšší funkce. □

Příklad 3. *(5b.) Určete typ a převeďte na kanonický tvar rovnici*

$$u_{xx} - yu_{xy} - (y+1)u_{yy} + u_x - 1 = 0.$$

Řešení. Hyperbolická. Pro nalezení transformace $(x,y) \mapsto (\xi,\eta)$ řešíme dvě homogenní lineární rovnice $\frac{\xi_x}{\xi_y} = y + 1$ a $\frac{\eta_x}{\eta_y} = -1$.

$$(4 + \frac{y^2}{y+1})u_{\xi\eta} + u_\xi(1 + \frac{1}{y+1} + u_\eta - 1 = 0.$$

□

Příklad 4. *(5b) Uvažujme dva výrobce produkující tentýž druh výrobku. Poptávka po výrobku prvního výrobce se řídí funkcí Cy/x^2, po výrobku druhého Dx/y^2, kde x je cena prvního výrobku, y cena druhého, C a D jsou kladné reálné konstanty. Náklady na výrobu jednoho kusu prvního výrobce jsou a, druhého jsou b. Oba výrobci jsou schopni plně uspokojit poptávku. Cílem každého je optimalizovat svůj zisk. Formulujte situaci jako hru v normální formě a nalezněte rovnovážné situace této hry.*

Řešení. Strategie jednotlivých hráčů: volba ceny. Tedy mají množinu strategií $(0,\infty)$. Výherní funkce (zisk) prvního je $C(x-a)y/x^2$, druhého pak $D(y-b)x/y^2$. Hledáme maximum vzhledem k proměnné x první funkce, vzhledem k y druhé funkce. $(2a, 2b)$ □