Matematické modely lidského života

Značení:
T_x náhodná veličina udávající délku života nějaké osoby od věku x.
$F_x(t)$ distribuční funkce této náhodné veličiny.
${}_tp_x = S_x(t) = 1 - F_x(t)$ funkce přežití.
$\mu_x := \lim_{t \to 0^+} \frac{F_x(t)}{t}$, intenzita úmrtnosti. (pravostranná derivace funkce $F_x(t)$ proměnné t v nule; za předpokladu, že $F(x)$ je třídy C^1 na $(0, \infty)$, je tedy $\mu_x = \lim_{t \to 0^+} f_x(t)$)

Vztahy pro intenzitu úmrtnosti

Snadno odvodíme

$$\mu_x = \frac{f_0(x)}{S_0(x)},$$

$$\mu_x = -\frac{d}{dx} \ln(S_0(x)),$$

$$S_x(t) = e^{-\int_0^t \mu_{x+s} ds}.$$

Diskrétní Markovovy řetězce.

Příklad. *Uvažujme následující situaci: Roztržitý profesor s sebou nosí deštník, ale s pravděpodobností $1/2$ jej zapomene tam, odkud odchází. Ráno odchází do práce. Po práci chodí na večeři do oblíbené restaurace a po té odchází domů. Uvažujme pro jednoduchost, že nikam jinam po dostatečně dlouhou dobu profesor nechodí a že v restauraci zůstává deštník na profesorově oblíbeném místě, odkud si ho může následující den vzít (pokud nezapomene). Uvažte tuto situaci jako Markovův proces a napište jeho matici. Jaká je pravděpodobnost, že se po mnoha dnech po ránu deštník bude nalézat v restauraci? (Je vhodné za časovou jednotku vzít jeden den – od rána do rána.)*

Řešení. Matice daného procesu je

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

normovaný vlastní vektor příslušný vlastní hodnotě 1 je $(1/2, 1/4, 1/4)$, hledaná pravděpodobnost je $1/4$. □

Spojité Markovovy řetězce.

Lidský život lze uvažovat jako spojitý Markovův proces (stavů procesu může být více, v základním modelu pouze dva: život a smrt, stavů lze uvažovat více: nemoc, trvalá invalidita, bezdomovectví, smrt různými způsoby). Proces je popsán intenzitami přechodu mezi jednotlivými stavy. Základní model, daný stavy život a smrt, umožňuje pouze přechod ze stavu život do stavu smrt, intenzita přechodu je dána intenzitou úmrtnosti.

V následujícím textu budeme používat indexů i, j, k, l, které jsou z množiny $\{0, 1, \ldots n\}$. Pro Markovův proces s n stavy $0, 1, \ldots, n$ definujeme ${}_tp_x^{ij}$ jako pravděpobnost, že proces (život), který je v čase x ve stavu i, bude v čase $x + t$ ve stavu j. Dále pak definujeme pravděpodobnost ${}_tp_x^{\overline{ii}}$ jako pravděpodobnost, že život, který je v čase x ve stavu i stav i do času $i + t$ (včetně) neopustí.

Dále pak definujeme

$$\mu_x^{ij} = \lim_{h \to 0^+} \frac{{}_hp_x^{ij}}{h},$$

$0 < i \neq j < n$, intenzitu přechodu mezi stavy i a j v čase x.

V dalším je ukázáno, že pomocí hodnot μ_x^{ij}, kde $i \neq j$ je kompletně zadán daný Markovův proces, tj. všechny pravděpodobnosti ${}_tp_x^{ij}$.

Více budeme pracovat se speciálními modely, a to dvoustavový (život, smrt – jedná se o model života uvedený výše), třístavový (život – 0, trvalá invalidita – 1, smrt – 2; podmínka trvalé invalidity říká, že ${}_tp_x^{10} = 0$). Pro tyto modely jsou odvozeny explicitní vztahy pro ${}_tp_x^{ij}$.

Obecně nám k určení ${}_t p_x^{ij}$ slouží Kolmogorovovy (dopředné) rovnice:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\,{}_t p_x^{ij} = \sum_{k=0,k\neq j}^{n} \left({}_t p_x^{ik} \mu_{x+t}^{kj} - {}_t p_x^{ij} \mu_{x+t}^{jk} \right).$$

Nyní se budeme snažit aplikovat daný model pro určení ceny pojistného.

Současná cena pojistky, renty

Předcházející modely života nám umožňují stanovit pojistnou politiku (výše pojistného, pojistky, cenu pojistné smlouvy ...)

Nechť r je roční úroková míra.

a_k současná hodnota renty vyplácené kontinuálně, rychlostí 1 peněžní jednotka za rok.

Příklad. *Určete současnou cenu pojistky* 200 000 *Kč na havarijní úraz, který může nastat na tříměsíční cestě. Pojistka je splatná vždy ke konci měsíce, kdy událost nastala. Intenzita nastání události je dána vztahem* $\mu_x = \frac{1}{x+2}$*, kde* x *je doba cesty v měsících. Předpokládáme úročení* 10% *měsíčně.*

Řešení. Pravděpodobnost, že nenastane událost v době t je rovna (v aktuárské notaci je to funkce přežití ${}_t p_x = S_x(t) = 1 - F_x(t)$)

$$e^{-\int_0^t \frac{1}{s+2}\,ds} = e^{-(\ln(t+2)-\ln 2)} = \frac{2}{t+2}.$$

Pravděpodobnosti nastání události po řadě v prvním, druhém a třetím měsíci cesty jsou $1 - 2/3 = 1/3$, $2/4 - 1/3 = 1/6$, $3/5 - 2/4 = 1/10$. Vzhledem k měsíčnímu úročení 10% je pak současná cena pojistky 1 Kč rovna

$$\frac{10}{11} \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{10}{11}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{10}{11}\right)^3 \cdot \frac{1}{10} \doteq 0{,}516,$$

tedy pojistka na 200 000 Kč má hodnotu cca 103181 Kč.

Pozn.: při okamžité výplatě pojistky by byla její hodnota

$$200\,000 \cdot \int_0^3 \left(\frac{10}{11}\right)^t \cdot \frac{2}{t+2} \cdot \frac{1}{t+2}\,dt \doteq 108\,853\,\text{Kč}.$$

□

Thieleho diferenciálí rovnice

Hodnota pojistné smlouvy (jako předmětu prodeje, např. mezi různými pojišťovnami) se mění v čase (v závislosti na délce jejího trvání a na tom, v jakém stavu se nachází pojištěný). Hodnotu má smysl zkoumat pro více než dvoustavové modely (dvoustavový model – život, smrt). Označíme-li hodnotu smlouvy v čase t od jejího uzavření, přičemž pojištěný je ve stavu (i), jako ${}_t V^{(i)}$, pak pro ni můžeme odvodit diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\,{}_t V^{(i)} = \delta_t\,{}_t V^{(i)} - B_t^{(i)} - \sum_{j=0,\ j\neq i}^{n} \mu_{x+t}^{ij} \left(S_t^{(ij)} + {}_t V^{(j)} - {}_t V^{(i)} \right),$$

kde $B_t(i)$ je rychlost platby benefitů (např. renta), $S_t^{(ij)}$ je rychlost kontinuální platby pojistné částky, splatné při přechhodu ze stavu i do stavu j.

Numerické řešení diferenciálních rovnic

Jak Thieleho a Kolmogorovovy rovnice tvoří soustavu diferenciálních rovnic. Můžeme je řešit numericky. Jednou z metod je Eulerova metoda. Uvažme diferenciální rovnici $y' = f(y)$, počáteční podmínkou $y(0) = y_0$ pro reálnou funkci $y(t)$ reálné proměnné t. Můžeme totiž psát psát

$$y(t+h) = y(t) + hy'(t) + o(h),$$

kde $\lim_{h\to 0} \frac{o(h)}{h} = 0$ (viz Taylorův rozvoj), a pro „malá“ h je odhad

$$y(t+h) = y(t) + hy'(t) = y(t) + hf(y(t)).$$

relativně přesný. Na tomto odhadu pak spočívá Eulerova metoda hledání řešení (funkce y) dané diferenciální rovnice. Funkci y počítáme totiž postupně, se zvoleným krokem h (čím menší h, tím přesnější, ale delší, výpočet). Hodnota funkce y v bodě 0 je dána: $y(0) = y_0$. Pomocí odhadu můžeme postupně spočítat hodnoty funkce y v bodech nh, $n \in \mathbb{N}$.

Jedním z možných vylepšení této metody je používání odhadu

$$y(t+h) = y(t) + hy'(t + \frac{h}{2}),$$

kde přírůstek funkce y na intervalu $[t, t+h]$ odhadneme hodnotou $hy'(t + \frac{h}{2}) = hf(y(t + \frac{h}{2}))$, $y(t + \frac{h}{2})$ pak stejným způsobem jako výše odhadneme pomocí $y(t) + \frac{h}{2}y'(t) = y(t) + \frac{h}{2}f(y(t))$. Celkem dostáváme

$$y(t+h) = y(t) + hf\left(y(t) + \frac{h}{2}f(y(t))\right).$$

Příklad. *Je dán model mladého života se třemi stavy:* 0*: zdravý jedinec,* 1*: nemocný jedinec,* 2*: mrtvý jedinec. Intenzity přechodu mezi jednotlivými stavy jsou tyto:* $\mu^{01}(x) = \frac{2}{x+20}$, $\mu^{02}(x) = \frac{1}{x+20}$, $\mu^{10}(x) = \frac{2}{x+20}$, $\mu^{12}(x) = \frac{4}{x+20}$. *Pomocí numerickeho řesení Kolmogorovových dopředných rovnic (s krokem 1 měsíc) určete* ${}_4p_0^{12}$.

Řešení. Pro ${}_tp_x^{12}$ zní Kolmogorovova rovnice:

$$\frac{d\,{}_tp_x^{12}}{dt} = {}_tp_x^{11}\mu_{x+t}^{12} + {}_tp_x^{10}\mu_{x+t}^{02} - {}_tp_x^{12}\mu_{x+t}^{20} - {}_tp_x^{12}\mu_{x+t}^{21},$$

protože $\mu_{x+t}^{20} = \mu_{x+t}^{21} = 0$ dostáváme pro $x = 0$ vztah

$$\frac{d\,{}_tp_0^{12}}{dt} = {}_tp_x^{11}\mu^{12}(t) + {}_tp_x^{10}\mu_{02}(t).$$

Nyní bychom již přímo mohli numericky počítat pomocí přiblížení ${}_{t+h}p_x^{10} = h \cdot \mu^{01}(t+x)$, ale přesnější je sestavit rovnice i pro ${}_tp_0^{10}$ a ${}_tp_0^{11}$:

□

Parciální diferenciální rovnice

Zkoumané otázky:

1. Existence řešení.
2. Jednoznačnost.
3. Stabilita.

V případě exitence jediného řešení, které je stabilní (spojitě závisí na vstupních datech) mluvíme o *Dobře formulované úloze*.

Homogenní lineární rovnice 1.řádu

Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ souvislá otevřená s hranicí danou hladkými funkcemi. Uvažme rovnici

$$\sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0, u = u_0 \quad \text{na ploše } \Gamma \tag{1}$$

na Ω, kde $g_i : R^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots n$ a $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ třídy C^1 na Ω (mají na Ω spojité všechny parciální derivace) a Γ je dána funkcemi $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in C^1(D)$, ($D \subset \mathbb{R}^{n-1}$, otevřená) a

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ \frac{\partial \gamma_1}{\partial s_1} & \frac{\partial \gamma_2}{\partial s_1} & \dots & \frac{\partial \gamma_n}{\partial s_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \gamma_1}{\partial s_{n-1}} & \frac{\partial \gamma_2}{\partial s_{n-1}} & \dots & \frac{\partial \gamma_n}{\partial s_{n-1}} \end{vmatrix}$$

Pak existuje jediné řešení dané úlohy na nějakém okolí plochy Γ.

Řešení metodou charakteristik

Rovnice (1) se snažíme převést na řešení obyčejné diferenciální rovnice. Najdeme křivky, *charakteristiky*, podél kterých bude řešení dané rovnice konstantní a to křivky dané systém obyčejných diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1 \\ x_2' &= f_2 \\ &\vdots \\ x_n' &= f_n \end{aligned}$$

Příklad. *Určete obecné řešení rovnice*

$$xu_x - yu_y = 0,$$

pro funkci $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Řešení. Nejpve sestavíme charakteristický systém:

$$x' = x, \; y' = -y,$$

tedy $yx' + xy' = 0$, neboli $\frac{x'}{x} + \frac{y'}{y} = 0$ a tak $\ln x + \ln y = K$ (rozmysli i pro nekladná x, y). To je možné přepsat jako $xy = C$. Charakteristické křivky jsou tedy hyperboly $xy = C$. Obecné řešení pak tvaru $u(x, y) = F(xy)$, kde $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je libovolná reálná funkce. □

Kvazilineární a nehomgenní lineární rovnice 1.řádu

Řešíme převedením na homogenní lineární rovnici v prostoru vyšší dimenze:

Uvažme rovnici

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x_1, \ldots, x_n, u) = c(x_1, \ldots, x_n, u),$$

kde $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je hledaná reálná funkce n proměnných.

Sestavme rovnici pro funkci $v : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, která určuje funkci u implicitně vztahem $v(x_1, \ldots, x_n, u(x_1, \ldots, x_n)) = 0$. Pro libovolné i, $i = 1, \ldots n$, derivováním tohoto vztahu dostáváme

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0.$$

a úpravou původní rovnice

$$\sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + c\frac{\partial v}{\partial x_{n+1}} = 0$$

Cauchova úloha, věta Cauchyho-Kowalevské.

Diferenciální rovnice druhého řádu Klasifikace: hyperbolické, eliptické a parabolické rovnice. O povaze

řešení parciální diferenciální rovnice (pro funkci na $\mathbb{R}^n$) rozhodují členy nejvyššího stupně. Koeficienty u těchto členů zadávají kvadratickou formu na $\mathbb{R}^n$ a podle její definitnosti pak hovoříme o parabolické diferenciální rovnici (pozitivně či negativně semidefinitní), hyperbolické (idefinitní) či eliptické (pozitivně či negativně definitní).

Rovnici daného typu lze převést vhodnou transformací do tzv. kanonického tvaru (ten může pomoci při řešení).

Příklad. *Klasifikujte a převeďte do kanonického tvaru rovnici*

$$-12u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} + u_x = 0,$$

kde $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Základní pojmy z teorie her

Nechť N je množina $\{1, \dots, n\}$ (hráčů). Hrou G v normální formě nazýváme soubor strategií X_i, $i = 1, \dots, n$ (pro každého hráče i je X_i množina všech jeho možných postupů ve hře) a funkcí $u_i : \Pi_{i=1}^n X_i \to \mathbb{R}$. Prvek množiny $X = \Pi_{i=1}^n X_i$ nazýváme situace (ve hře).

Číslo

$$h_i^- = \sup_x \in X_i \inf (y_1, \dots, x, \dots y_n) \in X u_i(y) \quad (\in \mathbb{R} \cup -\infty, \infty$$

nazýváme *dolní hodnotou hry* i-tého hráče, číslo

$$h_i^+ = \inf (y_1, \dots, x, \dots y_n) \in X \sup_x \in X_i u_i(y) \quad (\in \mathbb{R} \cup -\infty, \infty$$

pak nazýváme *horní hodnotou hry* i-tého hráče.

Hráč i si pomocí strategie x_i *zaručuje*

$$\inf_{(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n)\in X} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$

Strategie x_i se nazývá *opatrnou strategií* i-tého hráče jestliže si pomocí ní zaručuje svojí dolní hodnotu hry.

Situace $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$ se nazývá rovnovážná (podle Nashe), pokud

$$\forall i \in N,\ x_i' \in X_i : u_i(x_1, \dots, x_i', \dots x_n) \le u_i(x_1, \dots x_n),$$

Příklad. *Uvažme hru tří hráčů X, Y, Z. Množina strategií je pro každého hráče množina nezáporných reálných čísel. Výplatní funkce je pro každého hráče stejná a je rovna $u(x, y, z) = 1 - x^2 - y^2 - z^2 - 6x + 8y + 2z - 26$. Nalezněte všechny rovnovážné situace této hry.*

Řešení. Rovnovážná situace nastane v bodech globálního maxima dané funce na množině situací $(R_0^+)^3$. Funkce má na $\mathbb{R}^3$ pouze jeden extrém, maximum v bodě $[-3, 4, 1]$. Tento bod však není situací hry, neboť x-ová souřadnice není „povolenou“ strategií hráče X. Body $[x, 4, 1]$ však mají tu vlastnost, že zde nastává maximum výplatní funkce jak vůči proměnné y tak z. Kdyby se nám podařilo z nich vybrat takový bod, že na intervalu $[0, \infty]$ (povolené strategie hráče X) tam bude mít účelová funkce maximum vůči proměnné x, bude to hledané maximum na množině všech situací. Extrém funkce jedné proměnné na intervalu nastává v jeho koncových bodech, nebo v bodech lokálního maxima uvnitř intervalu. Extrém nastává v bodě 0. Hledané globální maximum je tedy jediný bod (rovnovážná situace) $[0, 4, 1]$. □

Příklad. *Máme šestibokou kostku, na které se s každým hodem mění pravděpodobnost padnutí čísel. Uvádíme vektor pravděpodobností počínaje od šestky:* (1/9, 1/9, 1/9, 2/9, 2/9, 2/9), (1/10, 1/10, 1/10, 1/5, 1/5, 3/10), (1/12, 1/12, 1/12, 1/6, 1/4, 1/3). *Hrajeme hru na maximálně tři kola. Strategií rozumíme postup, který určí, jestli si padlé číslo v daném kole ponecháme (to bude náš výsledek hry), či budeme pokračovat dalším kolem (ve třetím kole už si musíme ponechat, co nám padne – to je náš výsledek). Hodnotou dané stategie rozumíme střední hodnotu výsledku, kterého při ní můžeme dosáhnout. Jaká je opatrná strategie?*

Řešení. Úlohu vyřešíme použitím tzv. „zpětné indukce“. Hru rozdělíme na několik podher. V posledním kole je výhra střední hodnota náhodné veličiny udávající padlé číslo. Ta je

$$\frac{1}{12} \cdot 6 + \frac{1}{12} \cdot 5 + \frac{1}{12} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 1 = 2\,\frac{11}{12}.$$

V naší hře tedy si tedy po druhém kole buď ponecháme, co nám padne, nebo budeme hrát hru s danou výhrou $2\,\frac{11}{12}$. Pokud si tedy ponecháme pouze číslo vyšší než dvě, střední hodnota naší výhry se zvětší. V prvím kole si tedy buď ponecháme padlé číslo, nebo budeme hrát hru s výhrou (střední hodnotou výsledku):

$$\frac{1}{10} \cdot 6 + \frac{1}{10} \cdot 5 + \frac{1}{10} \cdot 4 + \frac{1}{5} \cdot 3 + \left(\frac{1}{5} + \frac{3}{10}\right) \cdot 2\,\frac{11}{12} = \frac{427}{120} \doteq 3{,}558.$$

Honotu očekávané výhry tedy zvětšíme, ponecháme-li si právě číslo větší než tři. Střední hodnota výhry je pak

$$\frac{1}{9} \cdot 6 + \frac{1}{9} \cdot 5 = \frac{1}{9} \cdot 4 + \left(\frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9}\right) \cdot \frac{427}{120} \doteq 4{,}03.$$

Při hře si tedy můžeme zajistit vhodnou strategií výhru 4,03. Jiná strategie než popsaná, by zřejmě znamenala menší hodnotu očekávané výhry. Je tedy opatrnou strategií: v prvním hodu si nechat číslo čtyři a větší (padne-li číslo menší, pokračujeme v házení), ve druhém kole si pak ponechat číslo tři a větší (padne-li menší číslo, pokračujeme v házení).

□

Příklad. *Uvažujme hru jednoho hráče, ve které sází na výsledek daného tenisového utkání u sázkové kanceláře. Kurz na výhru prvního týmu je $a : 1$, na výhru druhého pak $b : 1$. K dispozici má hráč P peněz, strategií je volba poměru $k : l$, $k + l = 1$, $k, l \geq 0$, ve kterém rozdělí sázku (P) v daném poměru na výhru prvního, resp. druhého hráče. Výhrou je pak částka akP v případě výhry prvního hráče, částka blP v případě výhry druhého hráče. Jakou podmínku musí splňovat čísla a a b, aby si sázející nemohl zaručit výhru (větší než P)?*

Řešení. Hráč si při strategii $k : l$ zaručuje $\min\{akP, blP\}$. Je tedy jeho dolní hodnota hry $\max_{k,l \geq 0, k+l=1}\{\min\{akP, blP\}\}$. Minimum bude maximální, když se obě položky budou rovnat (s rostoucím k jedna roste, druhá klesá). Tedy $akP = b(1-k)P$, tudíž

$$k = \frac{b}{a+b},$$

a odpovídající výhra (dolní hodnota hry) je

$$\frac{abP}{a+b}.$$

Pokud má být tato menší než P, je to ekvivalentní podmínce

$$\frac{ab}{a+b} < 1.$$

□

Příklad. *Uvažujte předchozí příklad pro tři sázky s kurzy $a : 1$, $b : 1$, $c : 1$.*

Řešení. Podmínka na kurzy zní

$$\frac{abc}{ab+bc+ca} < 1.$$

□

Reference

[F] Jan Franců, Parciální diferenciální rovnice, skripta VUT

[DHW] David C.M.Dickson, Mary R. Hardy and Howard R. Waters, second edition, 2013, Cambidge university press

[P] Libor Polák, Teorie her, texty ke stejnojmenné přednášce, MUNI