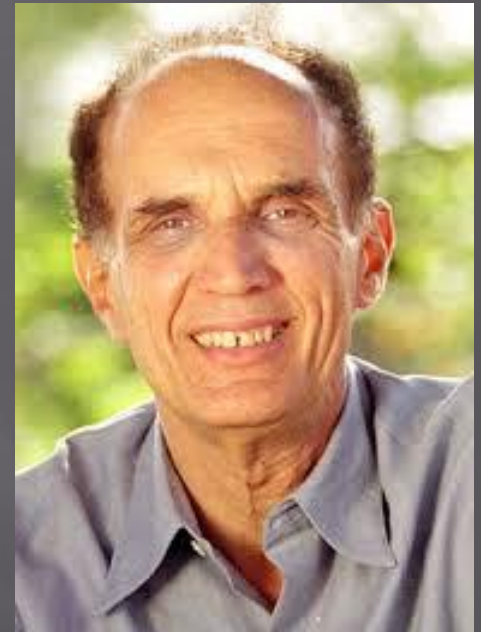


BOOTSTRAP VO FINANCIÁCH

MF006 Seminář z finanční matematiky
Miroslava Kuchárová

História

- predstavená v roku 1979
- Bradley Efron (*May 24, 1938)
- Stanford University
- National Medal of Science (2005)
- Bootstrap Methods: Another Look at the Jackknife (1979)
- An Introduction to the Bootstrap (+Robert Tibshirani , 1994)

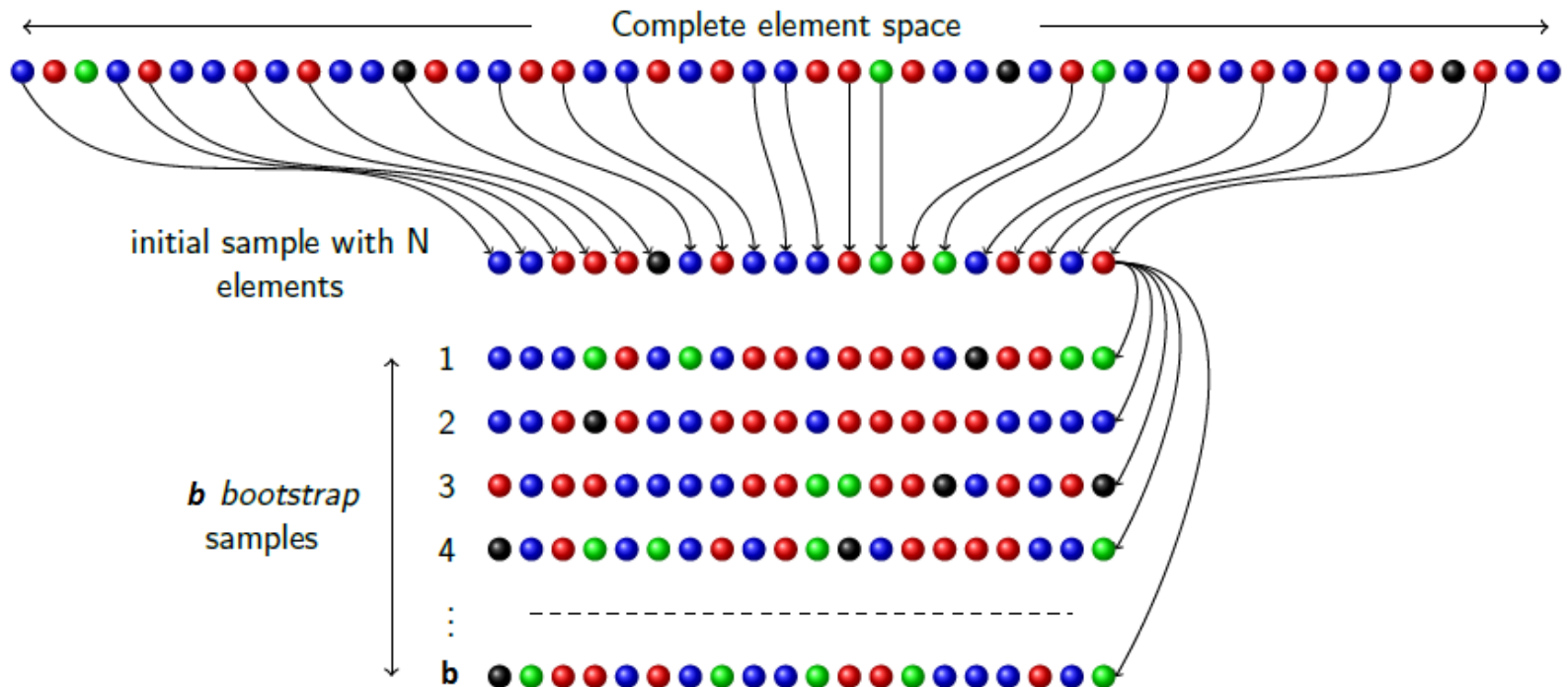


Metóda bootstrap

- simulačná metóda
- využitie:
 - inferenčná štatistika - odhady parametrov populácie - μ , σ
 - *bodové*
 - *intervalové – intervaly spoľahlivosti*
 - testovanie hypotéz
 - vo financiách – časové rady – odhadovanie parametrov modelu
- výhody:
 - neparametrická – žiadne predpoklady o rozdelení populácie
 - pri malých náhodných výberoch – presnejšie ako odhady založené na CLV
 - aplikovateľná aj pre komplikované odhady parametrov (analytický výpočet komplikovaný alebo nevieme odvodiť)

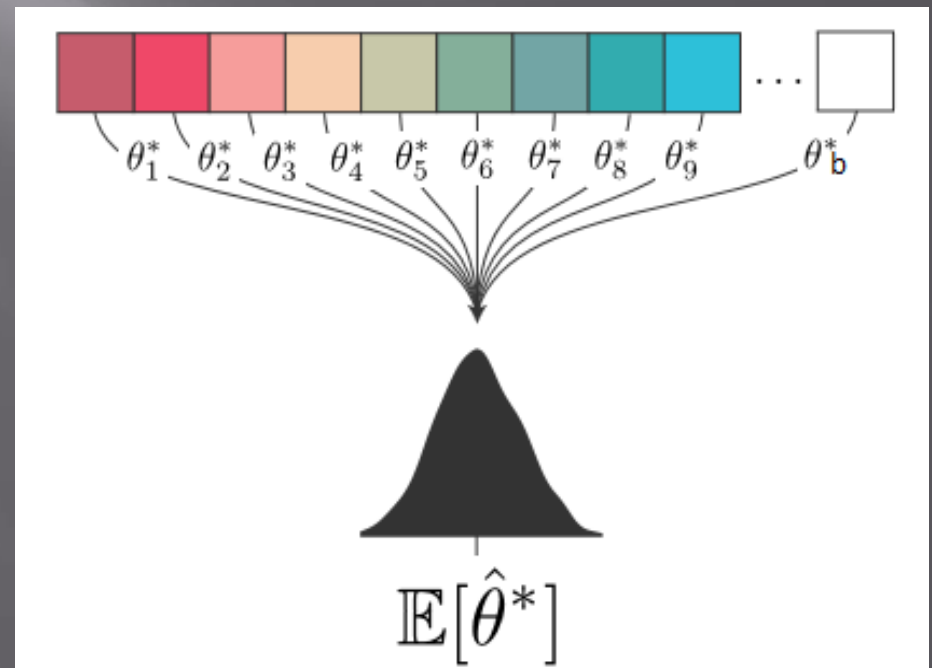
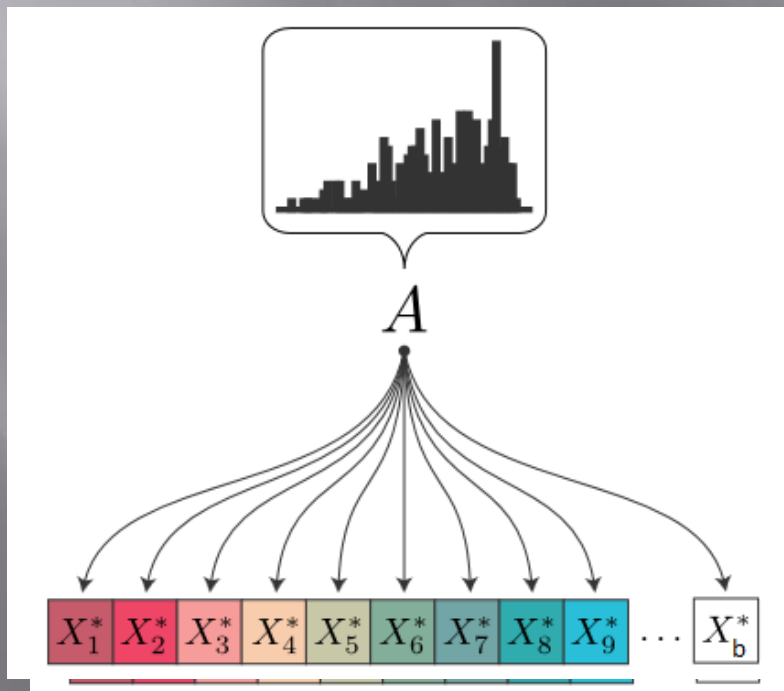
Standard Bootstrap

- z pôvodného náhodného výberu (i.i.d. náhodné veličiny) rozsahu N vyberáme s opakovaním b bootstrap náhodných výberov s rovnakým rozsahom



Bootstrap bodový odhad parametra

- skúmaná populácia – študenti matematiky na PŘF MU
- θ – parameter populácie – stredná hodnota – priemerné študijné výsledky
- b – počet bootstrap výberov



Bootstrap-t interval spoľahlivosti

$\hat{\theta}$ - z pôvodného výberu

$\hat{\theta}^*(b)$ - bootstrap odhad

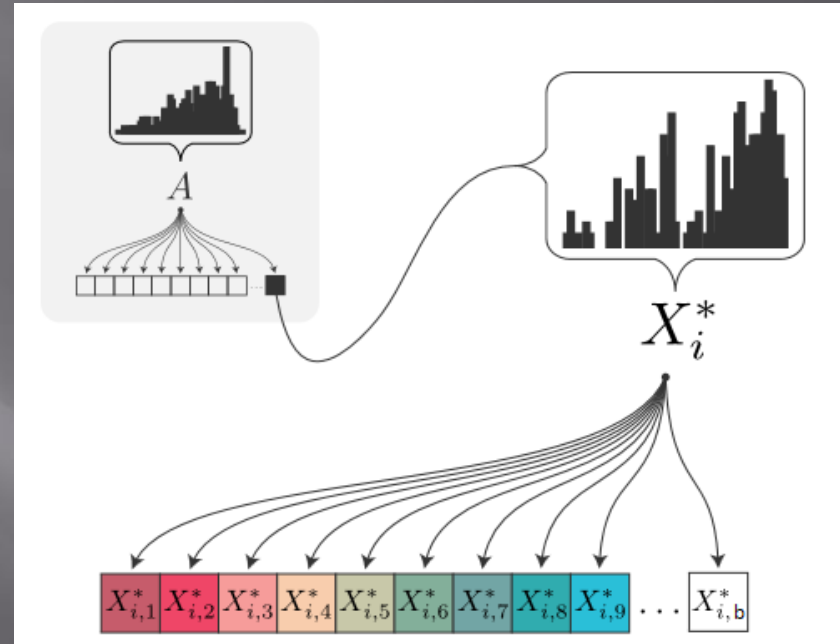
$\hat{se}^*(b)$ - pomocou vzorca alebo vnoreným bootstrapom

$$\hat{se}^*(b) = \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n (x_i^{*b} - \bar{x}^{*b})^2}{n} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$Z^*(b) = \frac{\hat{\theta}^*(b) - \hat{\theta}}{\hat{se}^*(b)}$$

$$\frac{\# \{Z^*(b) \leq \hat{t}^{(\alpha)}\}}{B} = \alpha$$

$$\left[\hat{\theta} - \hat{t}^{(1-\alpha)} \cdot \hat{se}, \hat{\theta} + \hat{t}^{(\alpha)} \cdot \hat{se} \right]$$



Bootstrap percentilový interval spoľahlivosti

$\hat{\theta}^*(b)$ - bootstrap odhad

$\hat{\theta}_B^{*(\alpha)}$ - 100* α -tý empirický percentil pre bootstrap odhady

- bootstrap odhady usporiadame vzostupne – vyberieme α *B-tý odhad a $(1-\alpha)$ *B-tý odhad

$$\left[\hat{\theta}_B^{*(\alpha)}, \hat{\theta}_B^{*(1-\alpha)} \right]$$

Block bootstrap

- pre závislé dáta – časové rady – využitie vo financiách (napr. vývoj ceny akcie)
- dáta rozdelíme do blokov, tieto bloky náhodne vyberáme s opakovaním a dostávame bootstrap náhodné výbery
- Non-overlapping bootstrap
- l – dĺžka bloku
- dáta rozdelené do b disjunktných blokov
- $b = \text{floor}(n/l)$
- Moving block bootstrap (Overlapping)
- $n-l+1$ – prekrývajúcich sa blokov

AR(1) model

- Y_t – AR(1) model $Y_t = c + \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t$
- generujeme pre $t=1, \dots, 50$ $Y_t = 0.8Y_{t-1} + \varepsilon_t$
- $Y_0 = 0$
- $\{\varepsilon_t\}$ je biely šum so strednou hodnotou 0 a rozptylom 0,01 $\varepsilon_t \sim N(0, 0.1)$
- realizácie Y_t

| | | | | | |
|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 0.0000000000 | 0.0060433311 | -0.0225468096 | 0.0444928675 | 0.1358344470 | 0.0389526362 |
| -0.1781310133 | -0.1497166881 | -0.2265699785 | -0.1547106964 | -0.1852952950 | -0.0088694268 |
| 0.0767390447 | 0.0610571155 | 0.1232552934 | 0.0475599890 | 0.0903033821 | 0.1933545445 |
| 0.1777672036 | 0.2372358571 | 0.1989781577 | 0.2209470303 | 0.2402999394 | 0.0725221291 |
| 0.2290634811 | 0.3235259934 | 0.2508692991 | 0.1605985943 | 0.1516526243 | 0.3022797761 |
| 0.3308803395 | 0.3979314591 | 0.4307964664 | 0.3922516167 | 0.2042088718 | 0.0894682118 |
| -0.0360996717 | -0.0652715312 | -0.0523428207 | 0.0190867547 | -0.0009856428 | 0.0383091376 |
| 0.0819499652 | 0.0369865265 | -0.1222355848 | -0.0454542201 | -0.0341239802 | -0.0656691639 |
| 0.1482601583 | 0.1682592836 | | | | |

- odhadneme $E(Y_t) = \mu$ ako \bar{y}
- definujeme $x_t = y_t - \bar{y}$
- X_t je autoregresný proces AR(1) a nech φ je odhad skutočnej hodnoty parametra ϕ .
- potom pre súčet štvorcov rezíduí (Residual Squared Error) platí

$$\text{RSE}(\varphi) = \sum_{i=2}^N (x_t - \varphi x_{t-1})^2$$

$$\text{RSE}(\hat{\phi}) = \min_{\varphi} \text{RSE}(\varphi)$$

- pre AR(1) proces platí

$$\hat{\phi} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{x}$$

- kde

$$\mathbf{x} = (x_2, x_3, \dots, x_N) \text{ and } \mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_{N-1})$$

Residual Bootstrap

- definujeme tzv. *aproximate disturbances*

$$\hat{\varepsilon}_t = x_t - \hat{\phi}x_{t-1}$$

- bootstrap algoritmus – počiatočná hodnota = konštanta $x_1 = y_1 - \bar{y}$

- generujeme bootstrap čas. radu

$$\begin{aligned}x_2^* &= \hat{\phi}x_1 + \varepsilon_2^* \\x_3^* &= \hat{\phi}x_2^* + \varepsilon_3^* \\&\vdots \\x_N^* &= \hat{\phi}x_{N-1}^* + \varepsilon_N^*\end{aligned}$$

- kde ε_t^* získame náhodným výberom s opakovaním z $(\varepsilon_2^*, \dots, \varepsilon_N^*)$
- algoritmus opakujeme B -krát, získame B odhadov $\hat{\phi}^*$

Residual Bootstrap

- $\hat{\phi} = 0.8309982$ - odhad z originálnych dát
- bootstrap odhady

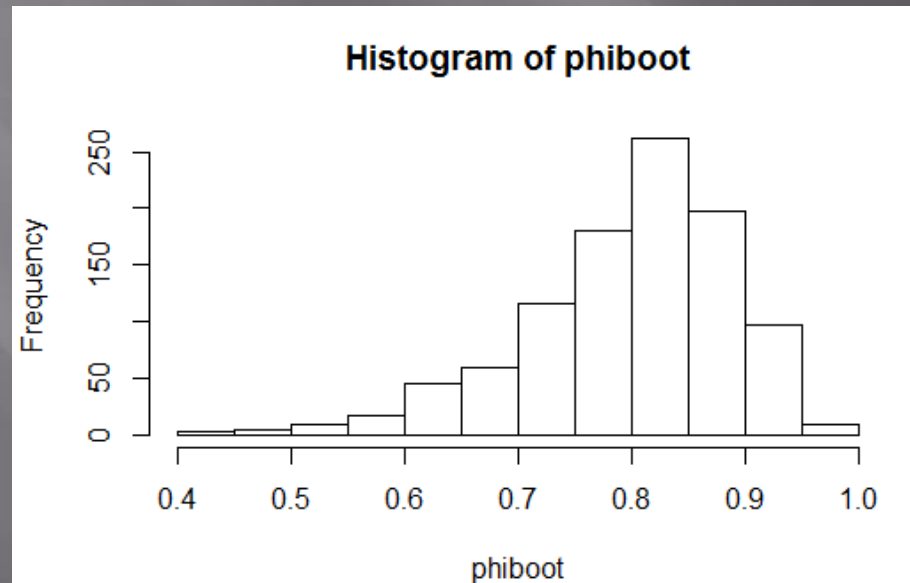
Estimated bootstrap standard error = 0.09149219

Mean of the bootstrap for $\hat{\phi}$ = 0.7979167

Lower percentile Confidence Interval for the model = 0.5891729

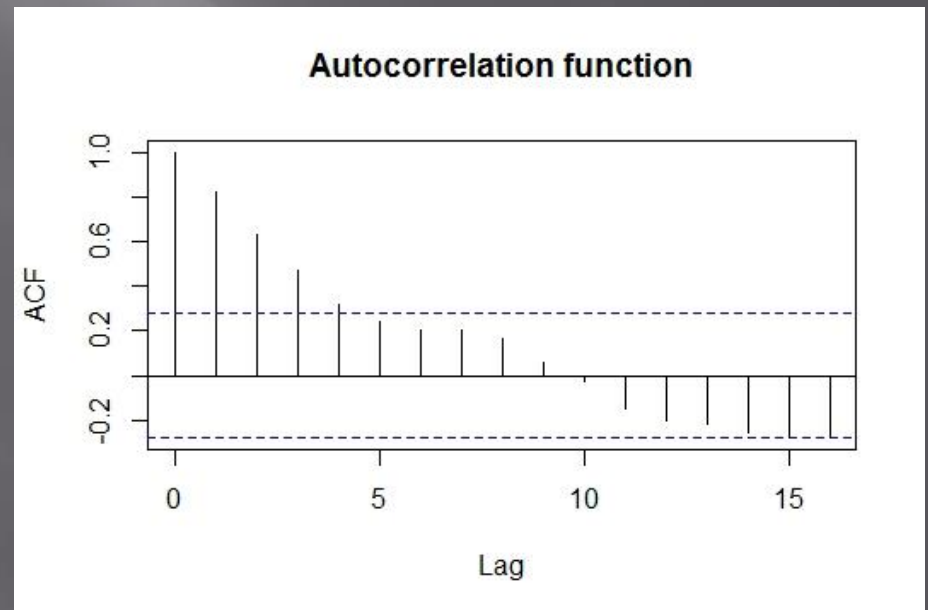
Upper percentile Confidence Interval for the model = 0.9318984

- histogram bootstrap odhadov parametra



Block Bootstrap

- namiesto bootstrapovania reziduí, bootstrapujeme bloky dát samotnej časovej rady - snaha o zachovanie časovej závislosti dát
- voľba vhodnej dĺžky bloku \Rightarrow pre lag 5 a viac sú už nekorelované
- dĺžka blokov $l = 5$



Moving Block Bootstrap

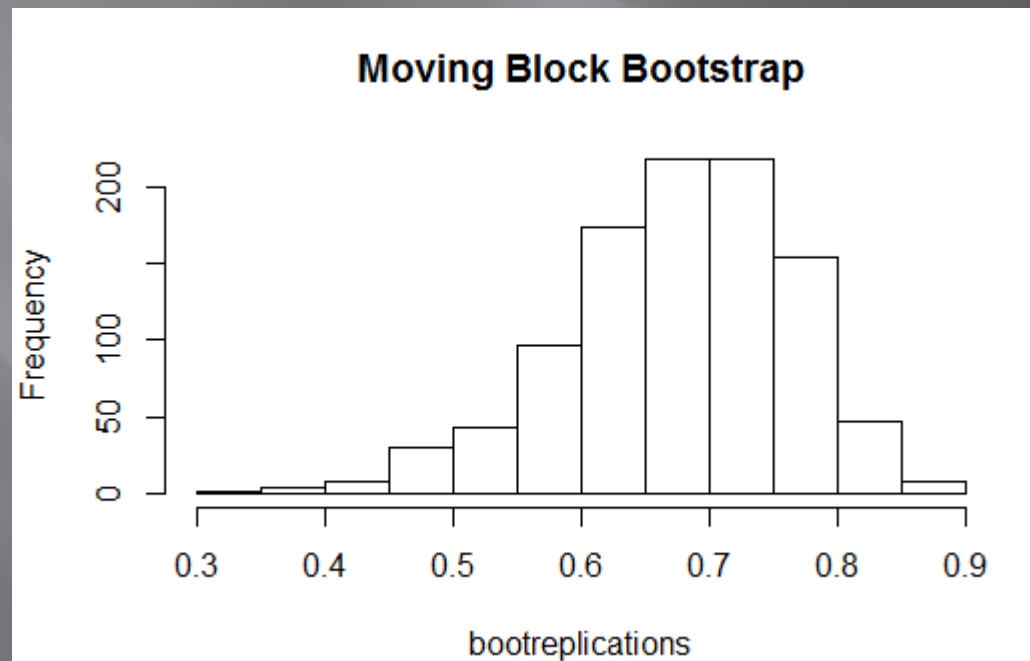
- bootstrap odhady a histogram

Estimated bootstrap standard error = 0.08866063

Mean of the bootstrap for $\hat{\phi}$ = 0.6757111

Lower percentile Confidence Interval for the model = 0.4759429

Upper percentile Confidence Interval for the model = 0.8260366



Non-overlapping Block Bootstrap

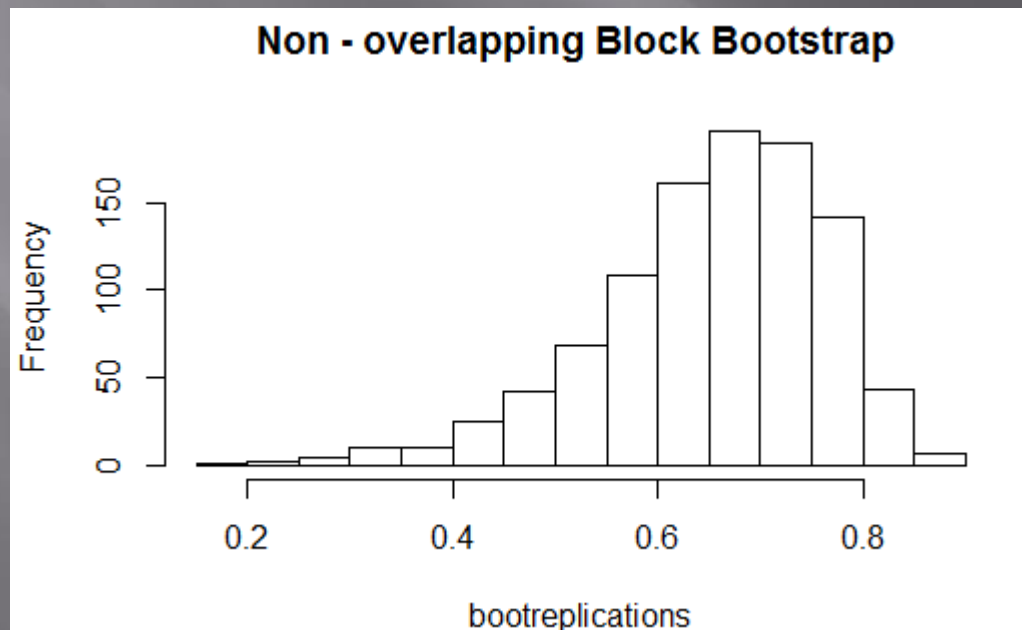
- bootstrap odhady a histogram

Estimated bootstrap standard error = 0.1100766

Mean of the bootstrap for $\hat{\phi}$ = 0.6519881

Lower percentile Confidence Interval for the model = 0.3915149

Upper percentile Confidence Interval for the model = 0.8125728



Záver

- najpresnejší – Residual bootstrap
- Moving block presnejší ako Non-overlapping block bootstrap
- Nedostatky:
 - block bootstrap – narušená (slabšia) závislosť – vyberať bloky z blokov
 - dopredu musíme vybrať vhodný model (AR, ARMA, GARCH,...)

Thank you for
your attention and
have a nice day!

