Markowitzov model, tvorba optimálního portfolia

Simona Sestrienková

Brno 2014

Obsah

- Historický pohľad
- Markowitzov prístup k teórii portfólia
- Tvorba optimálneho portfólia
- Lagrangeova funkcia

Historický pohľad

- Harry Markowitz - americký ekonóm

- 1952 dielo - **Portfolio Selection**
    - pripcíp zostavenia portfólia využitím strednej hodnoty a rozptylu výnosností
    - výhoda diverzifikácie

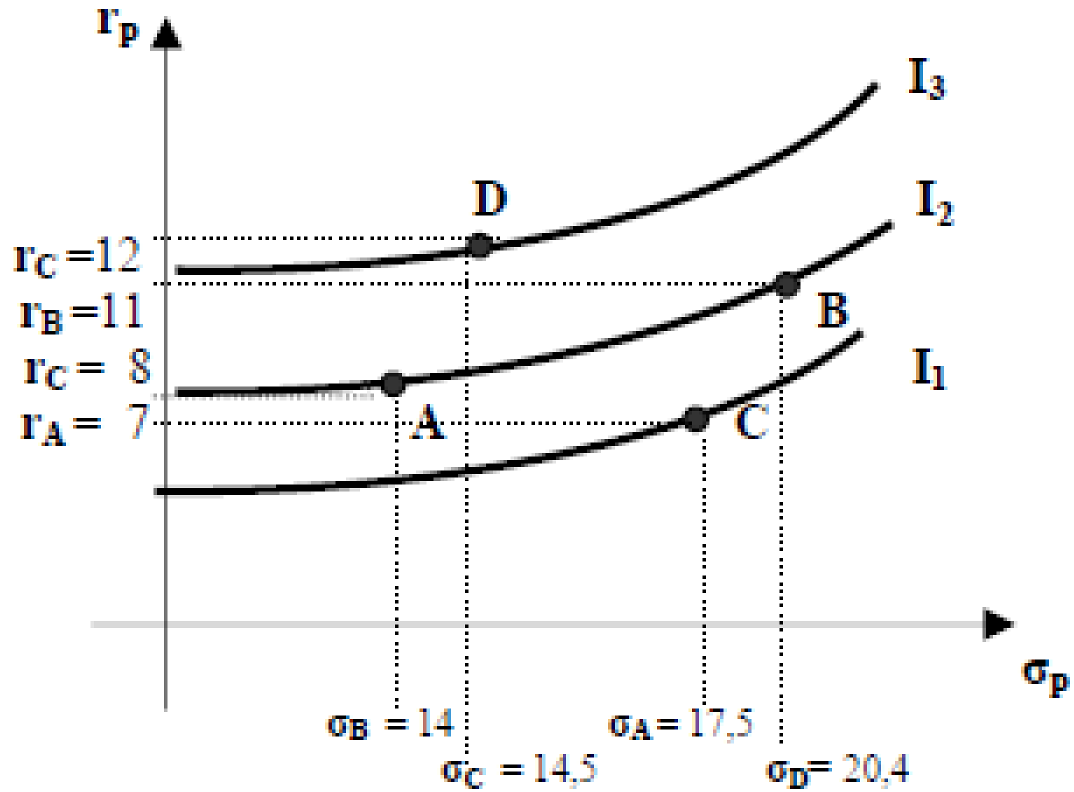
- 1990 - Nobelova cena

Markowitzov prístup

- Predpoklady:
- Investor má v súčasnosti k dispozícii určitú sumu peňazí
- Investuje ich na určité obdobie = doba držania portfólia
- Na konci tejto doby predá CP, ktoré na začiatku doby nakúpil
- Investor rieši problém výberu optimálneho portfólia z množiny možných portfólií

Krivky indiferencie

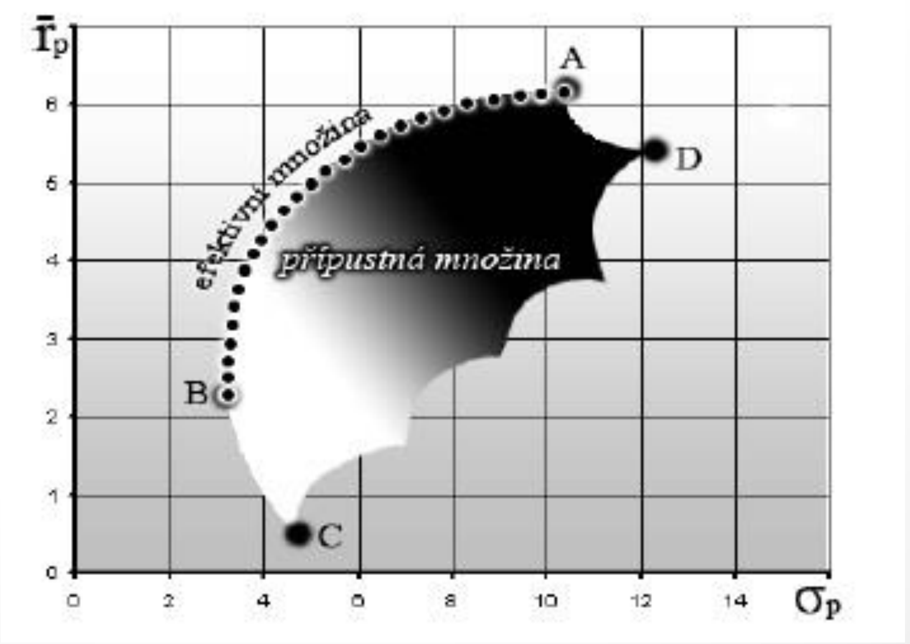
- Reprezentuje všetky kombinácie portfolií, ktoré by investor považoval za rovnako žiadúce.
- Jedinečné
- Vyššie sú lepšie
- Nepretínajú sa
- Nekonečne veľa
- Konvexné
  - Nenasýtenosť
  - Odpor k riziku



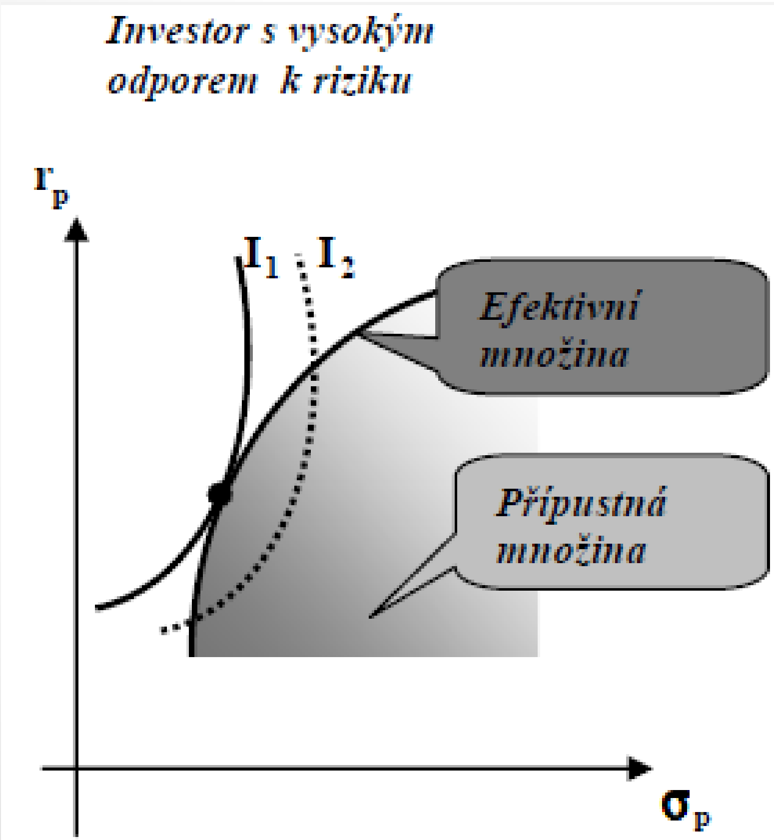
•

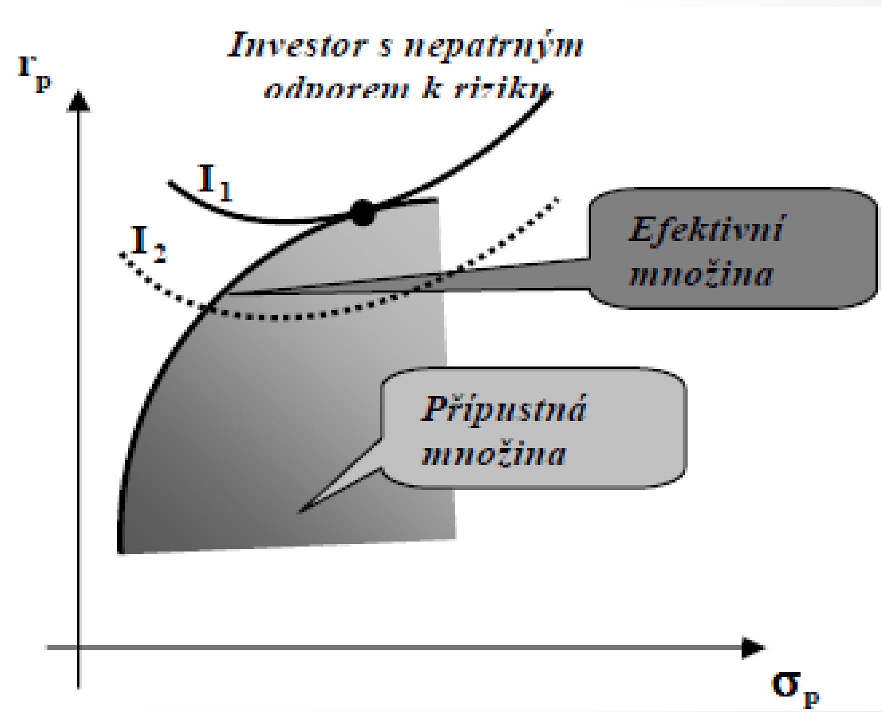
Efektívna množina

- Dve racionálne podmienky investora
  - o Maximálna očakávaná výnosnosť pri rovnakej úrovni rizika
  - o Minimálne riziko pri rovnakej úrovni očakávanej výnosnosti



Výber optimálneho portfólia





Výber optimálneho portfólia

- Účelová funkcia: $$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} X_i X_j \sigma_{ij}$$

σ_p^2 - *riziko portfólia vyjadrené rozptylom*
X_i - *podiel i-tého aktíva na hodnote portfólia*
X_j - *podiel j-tého aktíva na hodnote portfólia*
σ_{ij} - *kovariancia medzi výnosmi i-tého a j-tého aktíva*

- Obmedzujúca podmienka:
  - plné využitie investovanej čiastky: $$\sum_{i=1}^{N} X_i = 1$$
  - požiadavka na očakávaný výnos: $$\overline{r}_p = \sum_{i=1} \overline{r}_i X_i$$

$\overline{r}_p$ - *požadovaná celková výnosová miera portfólia*
$\overline{r}_i$ - *očakávaná výnosová miera i-tého aktíva*

Výber optimálneho portfólia

- **Minimalizácia rizika**

  Minimalizačná úloha:

$$\sigma_p^2(\vec{X}) \to MIN$$

$$f_i(\vec{X}) = 0 \quad \text{pre} \quad i = 1, \ldots, m$$

σ_p^2 - *riziko portfólia vyjadrené rozptylom*
$\vec{X}$ - *vektor zložený z váh cenných papierov*
$f_i(\vec{X})$ - *obmedzujúce podmienky*
m - *počet obmedzujúcich podmienok*

- Obmedzujúce podmienky: podmienky na vlastnosti portfólia
-

Lagrangeova funkcia

- Všeobecný tvar:

$$L(\vec{Y}) = L(\vec{X}, \vec{\lambda}, \lambda_0) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(\vec{X}),$$

$kde\ \vec{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m); \lambda_0 = 1$ - *Lagrangeove multiplikátory*

- Podmienky pre existenciu extrému:

$$\frac{\delta L\left(\vec{X}, \lambda\right)}{\delta X_i} = 0 \quad \text{pre} \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$f_j\left(\vec{X}\right) = 0 \quad \text{pre} \quad j = 1, \ldots, m$$

Ďakujem za pozornosť.