Hry v rozšířené formě

Vlastislav Forch

březen 2014

Osnova

1. Úvod do teorie her
2. Strategické hry
3. Hry v rozšířené formě
4. Příklad

Úvod do teorie her

- hra je abstraktní model situace, jejíž výsledek závisí na rozhodnutí nejméně dvou hráčů
- hráči jsou nezávislí a uvažují racionálně, přičemž se snaží maximalizovat svůj užitek
- využití v biologii, politologii, sociologii, vojenství etc.

Strategické vs. hry v rozšířené formě

- **Strategické hry**
  - statické hry
  - hráči si zvolí akci/strategii na začátku hry současně
  - např. kámen-nůžky-papír

Strategické vs. hry v rozšířené formě

- **Strategické hry**
  - statické hry
  - hráči si zvolí akci/strategii na začátku hry současně
  - např. kámen-nůžky-papír
- **Hry v rozšířené formě**
  - dynamické hry, poziční hry
  - vždy když je hráč na tahu, zvolí akci
  - např. šachy

Normální tvar hry

- nechť $n \in \mathbb{N}$ a $n \geq 2$, pak $N = \{1, \ldots, n\}$ je množina hráčů
- nechť A_i je neprázdná množina akcí i-tého hráče, $\forall i \in N$
- pro každého hráče $i \in N$ definujeme výherní funkci jako

$$u_i : \prod_{j \in N} A_j \to \mathbb{R}$$

Normální tvar hry

- nechť $n \in \mathbb{N}$ a $n \geq 2$, pak $N = \{1, \dots, n\}$ je množina hráčů
- nechť A_i je neprázdná množina akcí i-tého hráče, $\forall i \in N$
- pro každého hráče $i \in N$ definujeme výherní funkci jako

$$u_i : \prod_{j \in N} A_j \to \mathbb{R}$$

- Hra v normálním tvaru je uspořádaná trojice $\langle N, (A_i), (u_i) \rangle$.

Dominování

- **situace** je n-tice akcí, tj. $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$
- nechť $\widehat{i} = N \setminus \{i\}$ je množina všech hráčů vyjma i-tého

Dominování

- **situace** je n-tice akcí, tj. $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$
- nechť $\widehat{i} = N \setminus \{i\}$ je množina všech hráčů vyjma i-tého
- akce $a \in A_i$ **dominuje** akci $a' \in A_i$, platí-li

$$\forall b \in A_{\widehat{i}} : u_i(a, b) \geq u_i(a', b) \wedge \exists b \in A_{\widehat{i}} : u_i(a, b) > u_i(a', b)$$

- akce $a \in A_i$ je **nedominovaná**, jestliže neexistuje žádná akce $a' \in A_i$, která by ji dominovala
- akci $a \in A_i$ nazveme **dominantní**, pokud

$$\forall a' \in A_i, \forall b \in A_{\widehat{i}} : u_i(a, b) \geq u_i(a', b)$$

Nashova rovnováha

Definice

Situace $\mathbf{a} \in \prod_{i \in N} A_i$ se nazývá rovnovážná podle Nashe, jestliže

$$\forall i \in N : u_i(\mathbf{a}) \geq u_i(a', a_{\hat{i}}).$$

Hry s úplnou a neúplnou informací

- **Hry s úplnou informací**
  - každý hráč je v době rozhodování obeznámen se všemi předešlými událostmi, které do této doby nastaly
  - vyjednávací hry, iterační hry

Hry s úplnou a neúplnou informací

- **Hry s úplnou informací**
  - každý hráč je v době rozhodování obeznámen se všemi předešlými událostmi, které do této doby nastaly
  - vyjednávací hry, iterační hry
- **Hry s neúplnou informací**
  - hráči neznají všechny předchozí akce ostatních hráčů
  - Bayesovské hry

Definice hry v rozšířené formě

Definice

Hra v rozšířené formě s úplnou informací je uspořádaná čtveřice $\langle N, H, P, (\succsim_i)\rangle$, kde N je množina všech hráčů, H je množina historií (jejíž prvky jsou posloupnosti zvolených akcí), funkce P přiřadí neukončené historii prvek z množiny N a operátor $\succsim_i$ porovnává užitky jednotlivých hráčů.

Definice hry v rozšířené formě

Definice

Hra v rozšířené formě s úplnou informací je uspořádaná čtveřice $\langle N, H, P, (\succsim_i) \rangle$, kde N je množina všech hráčů, H je množina historií (jejíž prvky jsou posloupnosti zvolených akcí), funkce P přiřadí neukončené historii prvek z množiny N a operátor $\succsim_i$ porovnává užitky jednotlivých hráčů.

Po každé historii h vybere hráč $P(h)$ akci z $A(h) = \{a : (h, a) \in H\}$.

Strategie, profil strategií

Definice

Strategie hráče $i \in N$ ve hře $\langle N, H, P, (\succsim_i) \rangle$ je funkce, která přiřadí akci z $A(h)$ každé historii, pro kterou platí $P(h) = i$. Jako profil strategií označíme n-tice strategií $\mathbf{s} = (s_i)_{i \in N}$.

Strategie, profil strategií

Definice

Strategie hráče $i \in N$ ve hře $\langle N, H, P, (\succsim_i) \rangle$ je funkce, která přiřadí akci z $A(h)$ každé historii, pro kterou platí $P(h) = i$. Jako profil strategií označíme n-tice strategií $\mathbf{s} = (s_i)_{i \in N}$.

Pro každý strategický profil $\mathbf{s} = (s_i)_{i \in N}$ definujeme výsledek hry $O(\mathbf{s})$, kdy se každý hráč řídil strategií s_i.

Nashova rovnováha

Definice

Nashova rovnováha hry v rozšířené formě s úplnou informací $\langle N, H, P, (\succsim_i)\rangle$ je profil strategií $\mathbf{s} = (s_i)_{i\in N}$ takový, že pro každého hráče $i \in N$ platí

$$O(\mathbf{s}) \succsim_i O(s_i', s_{\hat{i}})$$

pro každou strategii s_i' rozdílnou od strategie s_i.

Subgame perfect equilibrium

Podhra hry sledující historii h je opět hra v rozšířené formě, označme ji $\Gamma(h) = \langle N, H|_h, P|_h, (\succsim_i|_h)\rangle$.

Subgame perfect equilibrium

Podhra hry sledující historii h je opět hra v rozšířené formě, označme ji $\Gamma(h) = \langle N, H|_h, P|_h, (\succsim_i|_h)\rangle$.

Definice

Subgame perfect equilibrium hry $\langle N, H, P, (\succsim_i)\rangle$ je profil strategií $\mathbf{s} = (s_i)_{i\in N}$ takový, že pro každého hráče $i \in N$ a každou historii $h \in H$, pro kterou $P(h) = i$ platí

$$O_h\left(s_i|_h, s_{\hat{i}}|_h\right) \succsim_i|_h O_h\left(s_i', s_{\hat{i}}|_h\right)$$

pro každou strategii i-tého hráče s_i' v podhře $\Gamma(h)$.

Subgame perfect equilibrium

Podhra hry sledující historii h je opět hra v rozšířené formě, označme ji $\Gamma(h) = \langle N, H|_h, P|_h, (\succsim_i|_h)\rangle$.

Definice

Subgame perfect equilibrium hry $\langle N, H, P, (\succsim_i)\rangle$ je profil strategií $\mathbf{s} = (s_i)_{i\in N}$ takový, že pro každého hráče $i \in N$ a každou historii $h \in H$, pro kterou $P(h) = i$ platí

$$O_h\left(s_i|_h, s_{\hat{i}}|_h\right) \succsim_i|_h O_h\left(s_i', s_{\hat{i}}|_h\right)$$

pro každou strategii i-tého hráče s_i' v podhře $\Gamma(h)$.

Subgame perfect equilibrium se hledá pomocí zpětné indukce.

Zadání

Na trh, kde působí Firma A, zvažuje vstup Firma B. Firma A může buď aktivně bojovat proti vstupu druhé firmy nebo být pasivní a nic nedělat. Existují tři možné modely situace.

Zadání

Na trh, kde působí Firma A, zvažuje vstup Firma B. Firma A může buď aktivně bojovat proti vstupu druhé firmy nebo být pasivní a nic nedělat. Existují tři možné modely situace.

- Obě firmy se rozhodují současně.
- Firma A se rozhoduje první.
- Firma B se rozhoduje první.

Současné rozhodování

Tuto situaci modelujeme pomocí hry v normálním tvaru.

- $N = \{\mathrm{A}, \mathrm{B}\}$
- $A_A = \{\text{aktivní, pasivní}\}$, $A_B = \{\text{vstoupí, nevstoupí}\}$

Výplaty zapíšeme do matice, kde řádky jsou akce Firmy A a sloupce Firmy B.

	vstoupí	nevstoupí
aktivní	(2,-2)	(6,0)
pasivní	(4,4)	(8,0)

Současné rozhodování

Tuto situaci modelujeme pomocí hry v normálním tvaru.

- $N = \{\text{A}, \text{B}\}$
- $A_A = \{\text{aktivní, pasivní}\}$, $A_B = \{\text{vstoupí, nevstoupí}\}$

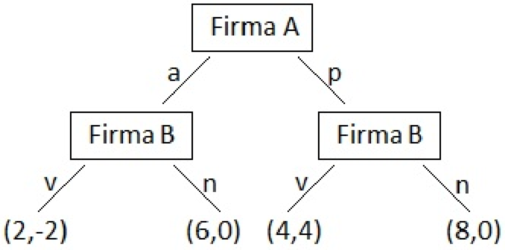
Výplaty zapíšeme do matice, kde řádky jsou akce Firmy A a sloupce Firmy B.

	vstoupí	nevstoupí
aktivní	(2,-2)	(6,0)
pasivní	(4,4)	(8,0)

Nashova rovnováha je situace (pasivní, vstoupí). Dále můžeme vidět, že Firma A má dominantní akci být pasivní.

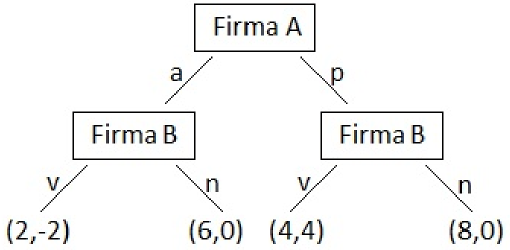
Firma A se rozhoduje první

Hra v rozšířené formě, kterou znázorníme pomocí stromu.



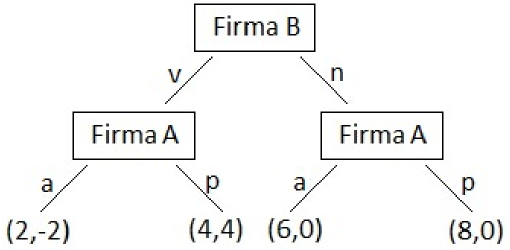
Firma A se rozhoduje první

Hra v rozšířené formě, kterou znázorníme pomocí stromu.

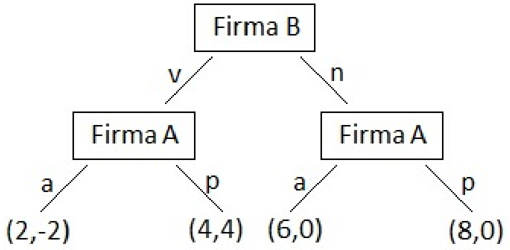


Subgame perfect equilibrium je profil strategií (a, nv).

Firma B se rozhoduje první



Firma B se rozhoduje první



Subgame perfect equilibrium je profil strategií (v, pp).

Literatura

- MAŇAS, Miroslav. *Teorie her a její aplikace.* 1. vyd. Praha: Stát. nakl. techn. lit., 1991, 278 s. ISBN 80-030-0358-X.
- MAŇAS, Miroslav. *Teorie her a konflikty zájmů.* Vyd. 1. V Praze: Vysoká škola ekonomická v Praze, 1991, 114 s. Teoretická knižnice inženýra. ISBN 80-245-0450-2.
- OSBORNE, Martin J a Ariel RUBINSTEIN. *A course in game theory.* Cambridge, Mass.: MIT Press, c1994, xv, 352 p. ISBN 02-626-5040-1.


THANK YOU
FOR YOUR ATTENTION