Jednoduchá náhodná procházka

Nataliia Romaniuk

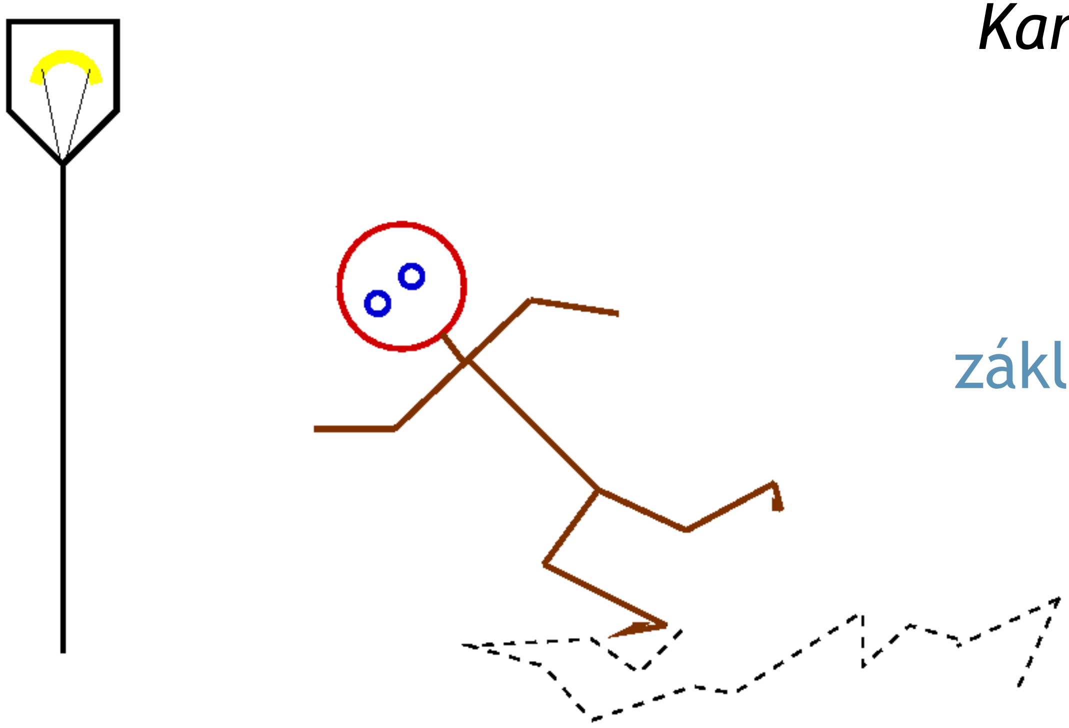
Obsah

- Jednoduchá náhodná procházka
- Základní vlastnosti
- Základní techniky pro počítání s náhodnou procházkou
  - Podmínění 1. krokem
  - Počítání trajektorií
  - Generující funkce

Jednoduchá náhodná procházka

„Nejpravděpodobnější místo, kde najít opilce, je někde poblíž začátku jeho cesty".

Karl Pearson, 1905



Náhodná procházka je základ diskrétních modelů pro pohyb cen aktiv.

+1 Kč

-1 Kč

Označme:

S_0... sumu, s kterou naš hrač přišel do kasina.

S_n...celkove bohatstvi našeho hrače po n hrách

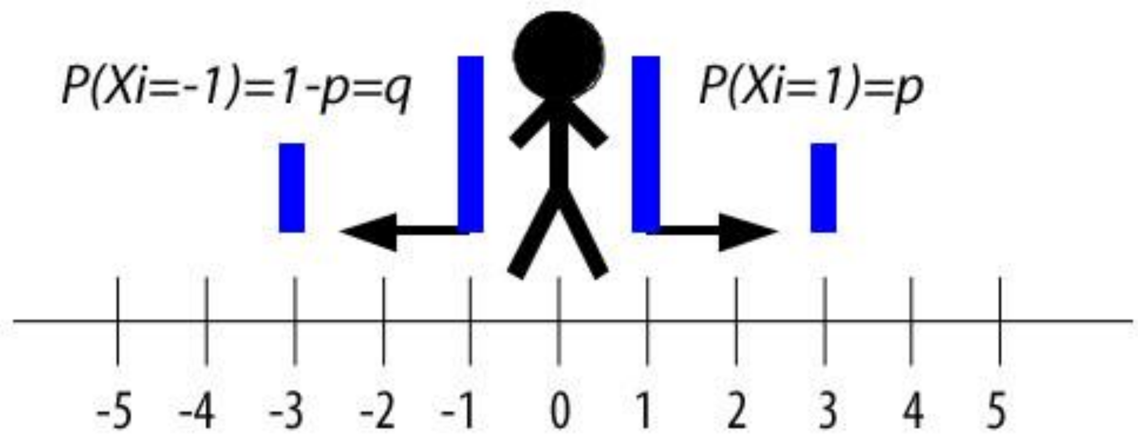
$$S_n = S_0 + X_1 + X_2 + \ldots + X_n = S_0 + \sum_{i=1}^{n} X_i$$

X_1, X_2,...,X_n...jsou nezávislé náhodné veličiny popisující výsledek n-té hry.

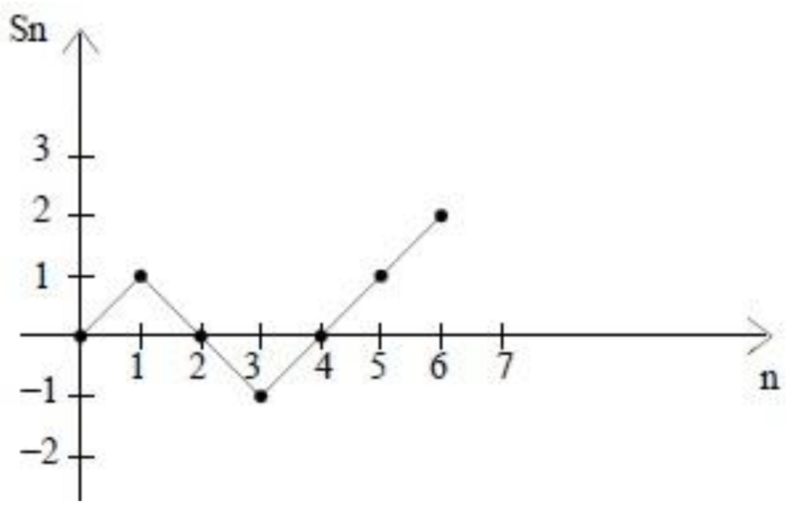
<u>Jednoduchá náhodná procházka</u> je stochastický proces $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$

Symetrická jednoduchá náhodná procházka, je-li p=q=1/2.

Jiná interpretace náhodné procházky: náhodný pohyb částice po přímce.



Trajektorie (cesta) náhodné procházky je gracké znázornění realizace náhodného procesu $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$



Základní vlastnosti náhodné procházky

Jednoduchá náhodná procházka je **prostorově homogenní**, tedy

$$P(S_n = j | S_0 = a) = P(S_n = j + b | S_0 = a + b)$$

Jednoduchá náhodná procházka je **časově homogenní**, neboli platí

$$P(S_n = j | S_0 = a) = P(S_{n+m} = j | S_m = a)$$

Jednoduchá náhodná procházka má **Markovovu vlastnost**, tedy

$$P(S_{m+n} = j | S_0, S_1, \ldots, S_m) = P(S_{n+m} = j | S_m)$$

Techniky počítání s náhodnou procházkou

- Podmínění 1. krokem
- Počítání trajektorií
- Generující funkce

Podmínění 1. krokem

Příklad („zruinování hráče“):

Uvažujme předchozí hru v kasinu s férovou mincí (p =1/2).

+1 Kč

-1 Kč

Označme:

$S_0=K$… sumu, s kterou naš hrač přišel do kasina a bude hrát dokud:

$S_n=N$… koupí auto v ceně *N*

$S_n=0$…bankrot

<u>Jaká je pravděpodobnost, že hráč koupí auto?</u>

Podmínění 1. krokem
Řešení:

Uvažujme jevy:

A ... hráč nakonec zbankrotuje,
H ... první hod je hlava $(P(H) = p)$,
O ... první hod je orel $(P(O) = q)$.

Podle věty o úplné pravděpodobnosti:

$$P(A) = P(H) \cdot P(A \mid H) + P(O) \cdot P(A \mid O).$$

Podmínění 1. krokem
Řešení:

Dále označme:

$P_k(A)$...pravděpodobnost bankrotu při počáteční sumě k
Pak

$$P_k(A) = P(H) \cdot P_k(A \mid H) + P(O) \cdot P_k(A \mid O).$$

$P_k\ (A \mid H)$...udává pravděpodobnost, že po prvním hodu budeme mít sumu $k + 1$ – v důsledku nezávislosti X_i hra začíná znovu (ale s počáteční sumou $k + 1$)

Bude tedy platit

$$P_k\ (A \mid H) = P_{k+1}(A)$$
$$P_k(A \mid O) = P_{k-1}(A)$$

Podmíněnί 1. krokem
Řešení:

Pak můžeme psát: $p_k = pp_{k+1} + qp_{k-1} = \frac{1}{2}p_{k+1} + \frac{1}{2}p_{k-1},$

$$\frac{1}{2}(p_{k+1} - p_k) = \frac{1}{2}(p_k - p_{k-1}),$$

přírůstky jsou konstantní tedy můžeme je označit jako $p_{k+1} - p_k = b$, tedy $p_k = b \cdot k + p_0$.

Okrajové podmínky: $p_0 = 1$ (okamžitý ),
$p_N = 0$ (okamžitá koupě ).

Pak tedy výsledek je

$$1 + N \cdot b = 0 \text{ a } p_k = 1 - \frac{k}{N}$$

Počítání trajektorií

Uvažujme náhodnou procházku vycházející z bodu *a*. Máme tedy

$$S_0 = a, \quad P(X_i = 1) = p, \quad P(X_i = -1) = q,$$

$$S_n = a + \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Pravděpodobnost, že prvních *n* kroků bude sledovat právě tuto cestu, rovna $p^r q^l$,

r ...počet kroků doprava (nahoru) $r = \dfrac{n+b-a}{2}$,

l ...počet kroků doleva (dolů) $l = \dfrac{n-b+a}{2}.$

Počítání trajektorií

Každý jev můžeme vyjádřit pomocí vhodné množiny trajektorií (které jsou s ním v souladu), a jeho pravděpodobnost je součet pravděpodobností těchto trajektorií:

$$P(S_n = b) = \sum_r M_n^r(a,b) p^r q^{n-r},$$

pokud $r = \frac{1}{2}(n + b - a) \in \mathbb{N}$ (jinak je pravděpodobnost rovna 0).

$M_n^r(a,b) = \binom{n}{r}$ ...počet cest takových, že $S_0 = a,\ S_n = b$

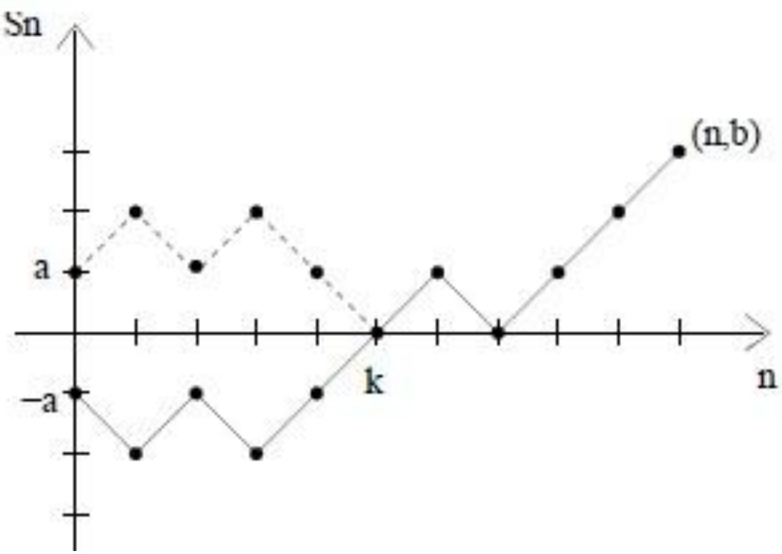
Počítání trajektorií. Princip reflexe

Víme, že $N_n(a,b) = M_n^r(a,b) = \binom{n}{\frac{1}{2}(n+b-a)}$.

Princip reflexe

Je-li a,b > 0 pak platí $N_n^0(a,b) = N_n(-a,b).$

$N_n^0(a,b)$...je počet všech cest z bodu (*0; a*) do bodu (*n; b*), které obsahují nějaký bod (*k; 0*) na ose x, tedy navštíví bod *0*.



Počítání trajektorií. Věta o volbách

Věta *(**o volbách**): Je-li* $b > 0$*, pak počet cest z bodu* $(0,0)$ *do bodu* (n,b)*, které se nevrátí do bodu* 0 *je*

$$\frac{b}{n} N_n\left(0,b\right),$$

kde $N_n\left(0,b\right)$ *je počet všech cest z bodu* $(0,0)$ *do bodu* (n,b).

Generující funkce

Generující funkce diskrétné náhodné veličiny *X* je denfiovaná jako generující funkce její pravděpodobnostní funkce, tedy

$$G_X(s) = \sum_{i=0}^{\infty} f(i)s^i = \sum_{i=0}^{\infty} P(X = i)s^i.$$

Vlastnosti generujících funkcí:

1. Existuje nezáporné číslo *R* (poloměr konvergence) takové, že *G(s)* konverguje pro $|s| < R$ a diverguje pro $|s| > R$.
2. *G(s)* můžeme derivovat nebo integrovat člen po členu, libovolně mnohokrát, pro $|s| < R$.
3. Jednoznačnost: Je-li $G_a(s) = G_b(s)$ pro $|s| < R'$, kde $0 < R' < R$, pak $a_n = b_n$ pro všechna *n*.

Generující funkce a náhodná procházka

Označme

$p_0(n) = P(S_n = 0)$ prst, že náhodná procházka je v *0* v čase *n*

$f_0(n) = P(S_1 \neq 0,\ S_2 \neq 0,\ \ldots,\ S_{n-1} \neq 0,\ S_n = 0)$

prst, že první návrat do počátku nastal v čase *n*.

Generující funkce těchto dvou posloupností jsou

$$P_0(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_0(n) s^n, \qquad F_0(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f_0(n) s^n.$$

Generující funkce a náhodná procházka

Platí

$$P_0(s) = \left(1 - 4pqs^2\right)^{-\frac{1}{2}} .$$

Platí

$$1)\ P_0(s) = 1 + P_0(s)F_0(s) ,$$

$$2)\ F_0(s) = 1 - \left(1 - 4pqs^2\right)^{\frac{1}{2}} .$$

Důsledek: Pravděpodobnost toho, že se částice někdy vrátí do počátku je rovna

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_0(n) = F_0(1) = 1 - \mid p - q \mid .$$

Quantum Cloud je moderní socha v Londýně, navrhl Antony Gormley pomocí algoritmu náhodné procházky, 1999.

LITERATURA

1. Grimmett, G.,Stirzaker, D.: Probability and Random Processes. Oxford, New York 2001
2. Kolář, M.: Stochastické procesy ve finanční matematice, Brno, 2009
3. Bartuňková, M.: Náhodná procházka a její aplikace, bakalářská práce, MU Brno, 2007
4. Wikipedia: RandomWalk. [online]. Dostupné z: *http://en.wikipedia.org/wiki/Random_walk*

Děkuji za pozornost ☺