Vázané extrémy a jejich aplikace v ekonomii

Nikola Vavrečková

5. 3. 2014

Zaměření práce

Osnova

- Omezení ve tvaru rovností
- Omezení ve tvaru nerovností
- Smíšené omezení

Nástroj

- Metoda Lagrangeových multiplikátorů

1) **Omezení ve tvaru rovností**

$$f(x_1, \ldots, x_n) \to max(min), \quad H = \begin{cases} h_1(x_1, \ldots, x_n) = c_1 \\ \vdots \\ h_n(x_1, \ldots, x_n) = c_m \end{cases}$$

2) **Omezení ve tvaru nerovností**

$$f(x_1, \ldots, x_n) \to max(min), \quad G = \begin{cases} g_1(x_1, \ldots, x_n) \leq b_1 \\ \vdots \\ g_n(x_1, \ldots, x_n) \leq b_n \end{cases}$$

3) Smíšené omezení

$$f(x_1, \dots, x_n) \to max(min), \quad G = \begin{cases} h_1(x_1, \dots, x_n) = c_1 \\ \vdots \\ h_m(x_1, \dots, x_n) = c_m \\ g_1(x_1, \dots, x_n) \leq b_1 \\ \vdots \\ g_k(x_1, \dots, x_n) \leq b_k \end{cases}$$

Ekonomická aplikace pro omezení ve tvaru rovností

- **Spotřebitel** - jednotlivec, který poptává statky
- **Statek** - zvyšuje užitek
- **Užitek** - subjektivní pocit uspokojení plynoucí ze spotřeby statků

Předpokládejme, že jednotlivec volí mezi spotřebními statky $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Pořadí jejich atraktivity pro daného spotřebitele je možné popsat **užitkovou funkcí** $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Ekonomická aplikace pro omezení ve tvaru rovností - příklad

Užitková funkce spotřebitele je ve tvaru $100xy + x + 2y$. Předpokládejme, že statky A a B stojí 2 a 4 dolary. Spotřebitelův příjem je 1000 dolarů a chce jej utratit za statky A a B tak, aby maximalizoval svůj užitek.

Řešení:

$$u(x, y) \to max, \quad 2x + 4y = 1000$$

Vytvoříme Lagrangeovu funkci

$$L(x, y, \lambda) = 100xy + x + 2y - \lambda(2x + 4y - 1000),$$

zderivujeme podle obou proměnných a položíme rovno nule

$$L_x = 100y + 1 - 2\lambda = 0$$
$$L_y = 100x + 2 - 4\lambda = 0$$

S vazebnou podmínkou $2x + 4y = 1000$ řešíme soustavu tří rovnic o třech neznámých. Po úpravách dostaneme stacionární bod $[x^*, y^*] = [250, 125]$, s $\lambda = 6250, 5$. Ověříme, zda se jedná o maximum pomocí determinantu Hessovy matice.

Závěr: Aby spotřebitel maximalizoval svůj užitek, měl by kupovat 250 kusů statku A a 125 kusů statku B.

Ekonomická aplikace pro omezení ve tvaru rovností

- **Portfolio** - soubor akcií a jiných cenných papírů v majetku jednoho investora
- **Očekávaný výnos** - míra výnosnosti (ziskovosti) daného aktiva. Očekávaný výnos potrfolia lze vypočítat jako $\bar{r}_p = \sum_{i=1}^{n} r_i X_i$, kde r_i je výnosnost $i-$tého cenného papíru a X_i je podíl $i-$tého cennéhho papíru.
- **Riziko** - pravděpodobnost, že nebude dosaženo očekávaného výnosu. Riziko portfolia můžeme vypočítat jako $\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_i X_j \sigma_{ij}}$

Ekonomická aplikace pro omezení ve tvaru rovností - příklad

Uvažujme tři cenné papíry s hodnotami rizika $\sigma_1 = 1,2$, $\sigma_2 = 0,8$, $\sigma_3 = 1,1$ a hodnotami výnosnosti $r_1 = 0,8$, $r_2 = 0,3$ a $r_3 = 0,6$. Kovariance jsou $\sigma_{1,2} = -0,1$, $\sigma_{1,3} = -0,5$ a $\sigma_{2,3} = 0,3$. Nalezněte portfolio sestavené z těchto tří cenných papírů tak, aby riziko tohoto portfolia bylo co nejmenší a zároveň aby očekávaný výnos byl 35 %.

Řešení:
Minimalizujeme funkci

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} X_i X_j \sigma_{ij} =$$
$$= 1,44X_1^2 + 0,64X_2^2 + 1,21X_3^2 - 0,2X_1X_2 + 0,6X_2X_3 - X_1X_3$$

za podmínek $X_1 + X_2 + X_3 = 1$ a
$0,8X_1 + 0,3X_2 + 0,6X_3 = 0,35$

Vytvoříme Lagrangeovu funkci

$$L = 1,44X_1^2 + 0,64X_2^2 + 1,21X_3^2 - 0,2X_1X_2 + 0,6X_2X_3 - X_1X_3 +$$
$$+ \lambda_1(X_1 + X_2 + X_3 - 1) + \lambda_2(0,8X_1 + 0,3X_2 + 0,6X_3 - 0,35)$$

a derivace dle jednotlivých X_i položíme rovny 0.

$$L_{X_1} = 2,88X_1 - 0,2X_2 - X_3 + \lambda_1 + 0,8\lambda_2 = 0$$
$$L_{X_2} = 1,28X_2 - 0,2X_1 + 0,6X_3 + \lambda_1 + 0 - 3\lambda_2 = 0$$
$$L_{X_3} = 2,42X_3 - X_1 + 0,6X_2 + \lambda_1 + 0,6\lambda_2 = 0$$

Přidáme vazebné podmínky

$$X_1 + X_2 + X_3 = 1$$

$$0,8X_1 + 0,3X_2 + 0,6X_3 = 0,35$$

a řešíme následující soustavu

$$\begin{pmatrix} 2,88 & -0,2 & -1 & 1 & 0,8 \\ -0,2 & 1,28 & 0,6 & 1 & 0,3 \\ -1 & 0,6 & 2,42 & 1 & 0,6 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0,8 & 0,3 & 0,6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0,35 \end{pmatrix}$$

Upravíme a získáme hodnoty
$X_1 = 0,09$, $X_2 = 0,89$, $X_3 = 0,02$, $\lambda_1 = -1,78$ a $\lambda_2 = 2,15$.
Pro ověření vypočítáme determinant Hessovy matice.

Závěr: Abychom dosáhli co nejmenšího rizika, investujeme 9 % kapitálu do prvního cenného papíru, 89 % kapitálu do druhého a 2 % do třetího.

Ekonomická aplikace pro omezení ve tvaru nerovností - příklad

Spotřebitel kupuje statky A a B, jejižch ceny jsou 10 a 5. Jeho užitková funkce je ve tvaru $u(x, y) = \ln x + \ln y$. Spotřebitel může utratit maximálně 350. Spotřeba jedné jednotky statku A trvá 0,1 hodin a spotřeba jedné jednotky statku B zabere 0,2 hodin. Spotřebitel má maximálně 8 hodin na spotřebu veškerého množství obou statků. Jaké množství statku A a B by měl spotřebitel kupovat, abyt maximalizoval svůj užitek?

Řešení:

$$u(x, y) = \ln x + \ln y \to max, \quad G = \left\{ \begin{array}{r} 10x + 5y \leq 350 \\ 0,1x + 0,2y \leq 8 \end{array} \right.$$

Hodnost Jakobiho matice

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 0,1 & 0,2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 0 & -15 \end{pmatrix}$$

je 2, tedy rovnost může nastat v případe obou omezení. Vytvoříme Lagrangeův polynom

$$L(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = lnx + lny - \lambda_1(10x + 5y - 350) - \\ - \lambda_2(0,1x + 0,2y - 8).$$

Vypočítáme příslušné parciální derivace, které položíme rovny nule a zapíšeme podmínky komplementarity.

$$\begin{aligned} L_x = \frac{1}{x} - 10\lambda_1 - 0,1\lambda_2 &= 0 \\ L_y = \frac{1}{y} - 5\lambda_1 - 0,2\lambda_2 &= 0 \\ \lambda_1(10x + 5y - 350) &= 0 \\ \lambda_2(0,1x + 0,2y - 8) &= 0 \\ \lambda_1, \lambda_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Budeme uvažovat tři případy:

1) První omezení je aktivní, druhé je neaktivní. Přímým výpočtem získáme, že $x^* = 40$ a $y^* = 20$. Tyto hodnoty porušují první vazebnou podmínku, protože $10x^* + 5y^* = 500$.
2) První omezení je neaktivní, druhé je aktivní. Získáme hodnoty $x^* = 17,5$ a $y^* = 35$. Druhá vazebná podmínka je však porušena, neboť $0,1x^* + 0,2y^* = 8,75$.
3) Obě omezení jsou aktivní, tedy $10x + 5y = 350$ a $0,1x + 0,2y = 8$. Řešení této soustavy nám dá stacionární bod $[20,30]$ s $[\lambda_1, \lambda_2] = [1/225, 1/18]$.

Závěr: Spotřebitel by měl kupovat 20 kusů statku A a 30 kusů statku B.

Ekonomická aplikace pro omezení ve tvaru nerovností - příklad

Spotřebitel má užitkovou funkci ve tvaru $u(x, y, z) = xyz$. Jeho rozpočtové omezení je $p_1 x + p_2 y + p_3 z \leq I$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, kde p_1, p_2, p_3 jsou ceny statků, x, y, z představují množství daných statků a I je ropočet spotřebitele. Maximalizujte spotřebitelův užitek.

Řešení:

Tři poslední podmínky přepíšeme jako

$$-x \leq 0, \quad -y \leq 0, \quad -z \leq 0$$

Jakobiho matice je potom

$$J = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a její hodnost je tedy 3.

Lagrangeův polynom je

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = xyz - \lambda_1(p_1 x + p_2 y + p_3 z - I) + \lambda_2 x + \lambda_3 y + \lambda_4 z.$$

Parciální derivace Lagrangeova polynomu, podmínky komplementarity a vazebné podmínky dávají systém

(1) $L_x = yz - \lambda_1 p_1 + \lambda_2 = 0$

(2) $L_y = xz - \lambda_1 p_2 + \lambda_3 = 0$

(3) $L_z = xy - \lambda_1 p_3 + \lambda_4 = 0$

(4) $\lambda_1(p_1 x + p_2 y + p_3 z - I) = 0$

(5) $\lambda_2 x = 0$

(6) $\lambda_3 y = 0$

(7) $\lambda_4 z = 0$

(8) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \geq 0$

(9) $p_1 x + p_2 y + p_3 z \leq I$

(10) $x, y, z \geq 0$

Pro první omezení aktivní a další tři neaktivní dostaneme stacionární bod $x^* = \frac{I}{3p_1}$, $y^* = \frac{I}{3p_2}$ a $z^* = \frac{I}{3p_3}$ s $\lambda_1 = \frac{I^2}{9p_1p_2p_3}$ a $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 = 0$. Opět ověříme, zda se jedná o maximum.

Závěr: Aby spotřebitel maximalizoval svůj užitek za daných omezujících podmínek, mělo by být množství kupovaných statků $\frac{I}{3p_1}$, $\frac{I}{3p_2}$ a $\frac{I}{3p_3}$.

Děkuji za pozornost