Brownov pohyb vo finančnej matematike

Tomáš Kuric

MF006: Seminář z finanční matematiky

19. 3. 2014

Úvod

- Brownov pohyb
- Brownov pohyb ako proces ceny aktíva
- modely pre oceňovanie opcií

Úvod

- Brownov pohyb
- Brownov pohyb ako proces ceny aktíva
- modely pre oceňovanie opcií

Úvod

- Brownov pohyb
- Brownov pohyb ako proces ceny aktíva
- modely pre oceňovanie opcií

Štandardný Brownov pohyb

- matematicky - Wienerov proces
- stochastický proces
  - spojitý čas
  - spojité stavy
- popis komplikovanejších stochastických procesov
- kľúčový prvok modelovania (spojitého) vo finančnej matematike

Štandardný Brownov pohyb

- matematicky - Wienerov proces
- stochastický proces
  - spojitý čas
  - spojité stavy
- popis komplikovanejších stochastických procesov
- kľúčový prvok modelovania (spojitého) vo finančnej matematike

Štandardný Brownov pohyb

- matematicky - Wienerov proces
- stochastický proces
  - spojitý čas
  - spojité stavy
- popis komplikovanejších stochastických procesov
- kľúčový prvok modelovania (spojitého) vo finančnej matematike

Štandardný Brownov pohyb

- matematicky - Wienerov proces
- stochastický proces
  - spojitý čas
  - spojité stavy
- popis komplikovanejších stochastických procesov
- kľúčový prvok modelovania (spojitého) vo finančnej matematike

Štandardný Brownov pohyb

Definícia

Stochastický proces $\{W_t,\ t \in [0,\infty)\}$ na pravdepodobnostnom priestore $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ sa nazýva *štandardný Brownov pohyb*, ak platí:

(i) $W_0 = 0$ pre každé $\omega \in \Omega$;

(ii) s pravdepodobnosťou 1 sú trajektórie $t \to W_t$ spojité pre každé $\omega \in \Omega$,

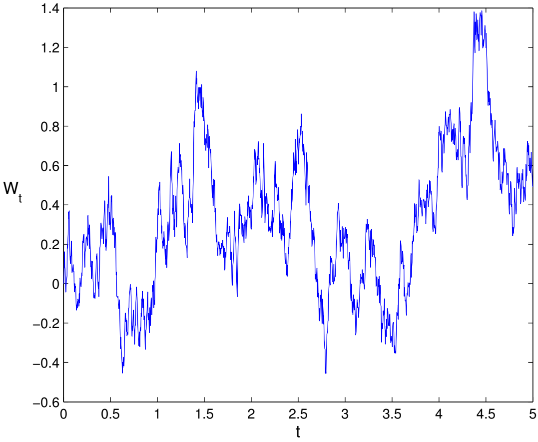
(iii) pre každé $0 \le s < t < \infty$ má prírastok $W_t - W_s$ normálne rozdelenie so strednou hodnotou 0 a rozptylom $t - s$;

(iv) pre každé $0 \le t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \infty$ sú prírastky stochastického procesu, (t.j. náhodné veličiny)

$$W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_2} - W_{t_1}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}},$$

nezávislé.

Štandardný Brownov pohyb



Obr.: Trajektória štandardného Brownovho pohybu.

Štandardný Brownov pohyb

- Brownov pohyb ako limita náhodnej prechádzky
  - zmenšovanie priestorového a časového kroku

- stochastický proces so spojitým časom $\{W_t,\ t \in [0, \infty)\}$

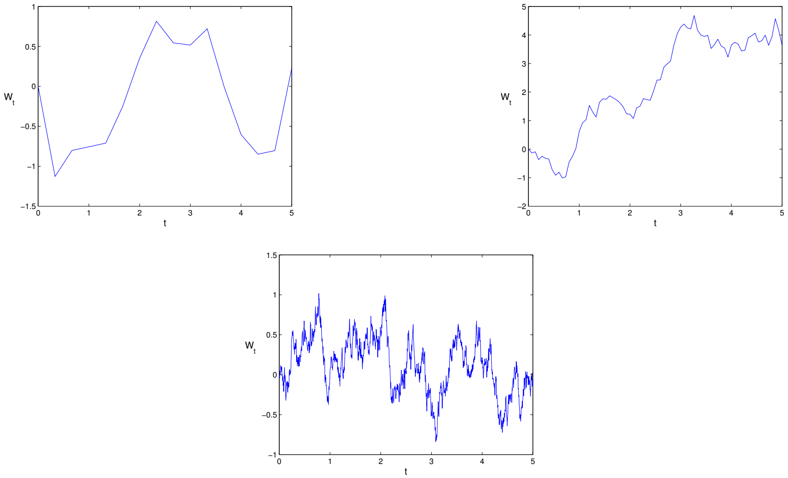
$$W_t = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} X_i .$$

Štandardný Brownov pohyb

- Brownov pohyb ako limita náhodnej prechádzky
  - zmenšovanie priestorového a časového kroku
- stochastický proces so spojitým časom $\{W_t,\, t \in [0,\infty)\}$

$$W_t = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} X_i.$$

Štandardný Brownov pohyb



Obr.: Jednoduchá náhodná prechádzka pri zmenšovaní priestorového a časového kroku.

Cena aktíva ako stochastický proces

- cena aktíva - stochastický proces
  - diskrétny čas
  - diskrétne stavy
- modelovať ako stochastický proces
  - spojitý čas
  - spojité stavy
- nevhodnosť štandardného Brownovho pohybu
  - záporné hodnoty
  - nulová hodnota driftu
- modifikácia štandardného Brownovho pohybu
  - Brownov pohyb s driftom
  - geometrický Brownov pohyb

Cena aktíva ako stochastický proces

- cena aktíva - stochastický proces
  - diskrétny čas
  - diskrétne stavy
- modelovať ako stochastický proces
  - spojitý čas
  - spojité stavy
- nevhodnosť štandardného Brownovho pohybu
  - záporné hodnoty
  - nulová hodnota driftu
- modifikácia štandardného Brownovho pohybu
  - Brownov pohyb s driftom
  - geometrický Brownov pohyb

Cena aktíva ako stochastický proces

- cena aktíva - stochastický proces
  - diskrétny čas
  - diskrétne stavy
- modelovať ako stochastický proces
  - spojitý čas
  - spojité stavy
- nevhodnosť štandardného Brownovho pohybu
  - záporné hodnoty
  - nulová hodnota driftu
- modifikácia štandardného Brownovho pohybu
  - Brownov pohyb s driftom
  - geometrický Brownov pohyb

Cena aktíva ako stochastický proces

- cena aktíva - stochastický proces
  - diskrétny čas
  - diskrétne stavy
- modelovať ako stochastický proces
  - spojitý čas
  - spojité stavy
- nevhodnosť štandardného Brownovho pohybu
  - záporné hodnoty
  - nulová hodnota driftu
- modifikácia štandardného Brownovho pohybu
  - Brownov pohyb s driftom
  - geometrický Brownov pohyb

Definícia

Stochastický proces X_t nazývame *Brownovým pohybom s driftom*, ak spĺňa (je riešením) stochastickú diferenciálnú rovnicu

$$\mathrm{d}X_t = \mu \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t,$$

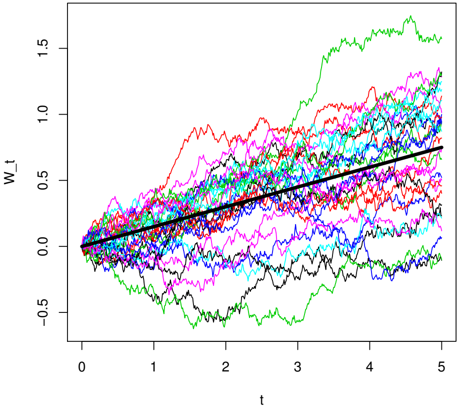
kde W_t je štandardný Brownov pohyb a μ, σ sú konštanty. Konštantu μ nazývame *koeficient driftu* a konštantu σ nazývame *koeficient volatility*.

Pre X_t teda musí platiť

$$X_t = X_0 + \mu t + \sigma W_t$$

pre každé $t > 0$.

Brownov pohyb s driftom



Obr.: Trajektórie Brownovho pohybu s driftom pre $X_0 = 0$, $\mu = 0.15$, $\sigma = 0.2$.

Brownov pohyb s driftom

- problémy Brownovho pohybu s driftom
  - záporné hodnoty
  - nezávislosť μ a σ na hodnote procesu
- použitie geometrického Brownovho pohybu
  - $$\mathrm{d}S_t = \mu S_t \mathrm{d}t, \quad \text{resp.} \quad \frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} = \mu \mathrm{d}t$$
  - integrácia medzi časmi 0 a T
    $$S_T = S_0 e^{\mu T}$$
  - zahrnutie variability vedie na obecný tvar
    $$\mathrm{d}S_t = \mu S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}W_t$$

Brownov pohyb s driftom

- problémy Brownovho pohybu s driftom
  - záporné hodnoty
  - nezávislosť μ a σ na hodnote procesu
- použitie geometrického Brownovho pohybu
  - $$\mathrm{d}S_t = \mu S_t \mathrm{d}t, \quad \text{resp.} \quad \frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} = \mu \mathrm{d}t$$
  - integrácia medzi časmi 0 a T
    $$S_T = S_0 e^{\mu T}$$
  - zahrnutie variability vedie na obecný tvar
    $$\mathrm{d}S_t = \mu S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}W_t$$

Definícia

Stochastický proces X_t nazývame *geometrickým Brownovým pohybom*, ak spĺňa stochastickú diferenciálnu rovnicu

$$\mathrm{d}X_t = \mu X_t \mathrm{d}t + \sigma X_t \mathrm{d}W_t,$$

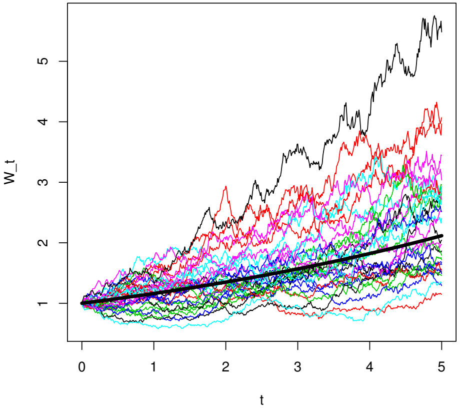
kde W_t je štandardný Brownov pohyb a μ, σ sú konštanty. Konštantu μ nazývame *koeficient driftu* a konštantu σ nazývame *koeficient volatility*.

Proces X_t musí teda spĺňať

$$X_t = X_0 \cdot \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right]$$

pre každé $t > 0$.

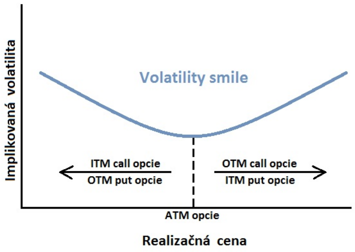
Geometrický Brownov pohyb



Obr.: Trajektórie geometrického Brownovho pohybu pre $X_0 = 1$, $\mu = 0.15$, $\sigma = 0.2$.

Modely oceňovania opcií

- Black-Scholesov model - cena aktíva ako GBP
  - normálne rozdelenie logaritmických výnosov aktíva
  - log-normálne rozdelenie ceny aktíva
- volatility smile



Obr.: Volatility smile.

Modely stochastickej volatility

- obecne

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}S_t &= \mu S_t \mathrm{d}t + \sqrt{v_t} S_t \mathrm{d}W_t, \\
\mathrm{d}v_t &= \alpha(S_t, v_t, t)\mathrm{d}t + \eta\beta(S_t, v_t, t)\sqrt{v_t}\mathrm{d}B_t,
\end{aligned}
$$

  s

$$
\mathrm{d}W_t \mathrm{d}B_t = \rho \mathrm{d}t.
$$

- Hestonov model

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}S_t &= \mu S_t \mathrm{d}t + \sqrt{v_t} S_t \mathrm{d}W_t, \\
\mathrm{d}v_t &= \kappa(\theta - v_t)\mathrm{d}t + \eta\sqrt{v_t}\mathrm{d}B_t.
\end{aligned}
$$

Modely stochastickej volatility

- obecne

$$\begin{aligned} \mathrm{d}S_t &= \mu S_t \mathrm{d}t + \sqrt{v_t} S_t \mathrm{d}W_t, \\ \mathrm{d}v_t &= \alpha(S_t, v_t, t)\mathrm{d}t + \eta\beta(S_t, v_t, t)\sqrt{v_t}\mathrm{d}B_t, \end{aligned}$$

s

$$\mathrm{d}W_t \mathrm{d}B_t = \rho \mathrm{d}t.$$

- Hestonov model

$$\begin{aligned} \mathrm{d}S_t &= \mu S_t \mathrm{d}t + \sqrt{v_t} S_t \mathrm{d}W_t, \\ \mathrm{d}v_t &= \kappa(\theta - v_t)\mathrm{d}t + \eta\sqrt{v_t}\mathrm{d}B_t. \end{aligned}$$