ANALÝZA CITLIVOSTI BLACK-SCHOLESOVA VZORCE

Miroslava Nováková

Seminář z finanční matematiky

5. 3. 2014

Osnova

- Black-Scholesův vzorec

Osnova

- Black-Scholesův vzorec
- Závislost cen opcí na parametrech modelu

Osnova

- Black-Scholesův vzorec
- Závislost cen opcí na parametrech modelu
- Greeks
  - Δ
  - Θ
  - Γ
  - ν
  - ρ

Osnova

- Black-Scholesův vzorec
- Závislost cen opcí na parametrech modelu
- Greeks
  - Δ
  - Θ
  - Γ
  - ν
  - ρ
- Vzájemný vztah mezi Δ, Θ a Γ

Osnova

- Black-Scholesův vzorec
- Závislost cen opcí na parametrech modelu
- Greeks
  - Δ
  - Θ
  - Γ
  - ν
  - ρ
- Vzájemný vztah mezi Δ, Θ a Γ
- Příklady

Black-Scholesův vzorec

- Black-Scholesův vzorec pro evropskou call opci má tvar:

$$C = S_0 \Phi(d_1) - K e^{-rT} \Phi(d_2)$$

- Black-Scholesův vzorec pro evropskou put opci má tvar:

$$P = K e^{-rT} \Phi(-d_2) - S_0 \Phi(-d_1)$$

kde $$d_1 = \frac{\ln \frac{S_0}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) T}{\sigma \sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T}$$

a Φ je distribuční funkce normalizovaného normálního rozdělení $N(0,1)$, tj.

$$\Phi(d_1) = \int_{-\infty}^{d_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} \mathrm{d}x$$

Hodnota opce tedy závisí na těchto pěti proměnných:

- realizační ceně K
- současné ceně akcie S_0
- volatilitě akcie σ
- čase expirace T
- úrokové míře r

Směr závislosti jednotlivých proměnných naznačuje následující tabulka:

Parametry modelu	**Call opce**	**Put opce**
cena akcie - S_0	$+$	$-$
realizační cena- K	$-$	$+$
úroková míra - r	$+$	$-$
volatilita - σ	$+$	$+$
čas expirace - T	$+$	$+$

kde **+** znamená rostoucí závislost - tj. přímou úměrnost
a **-** bude značit klesající závislost - tedy nepřímou úměrnost

Závislost cen opcí na parametrech modelu

Závislosti S_0 a K jsou zřejmé - ze vzorce pro vnitřní hodnotu opce:

- vnitřní hodnota call opce: $V_T = \max(S_t - K, 0)$
- vnitřní hodnota put opce: $V_T = \max(K - S_t, 0)$

Tedy je jasné že

-
  - čím roste cena akcie, tím roste hodnota CALL opce $(+)$
  - čím roste cena akcie, tím hodnota PUT opce klesá $(-)$
-
  - čím roste K, tím klesá cena CALL opce $(-)$
  - čím roste K, tím cena PUT opce roste$(+)$

Co se týká úrokové míry:

- CALL opce je potenciální výdej v budoucnosti, čili pokud r roste, jeho současná hodnota a tím i hodnota opce taktéž roste $(+)$
- PUT opce je potenciální budoucí příjem, tedy roste-li r, hodnota opce klesá $(-)$

Směr závislosti volatility a času expirace vysvětlíme pomocí podobného argumentu:

- Roste-li volatilita, potom rostou i šance velkého růstu / poklesu akcie. Majitel CALL profituje z růstu akcie, kdežto při poklesu je jeho ztráta omezena opční prémií. Majitel PUT opce profituje z poklesu akcie, zatímco při růstu je ztráta opět omezena opční prémií. Tedy z toho plyne, že jestliže roste volatilita, potom:
  - cena CALL opce roste $(+)$
  - cena PUT opce také roste$(+)$
- Podobně jako u volatility znamená delší čas větší nejistotu, tedy ze stejného argumentu jako pro volatilitu, pokud čas do expirace roste, potom rostou i ceny CALL $(+)$ a PUT $(+)$ opcí

Greeks

- vyjadřují závislost změny ceny opcí, při změně jednotlivých parametrů
- parciální derivace Black-Scholesova vzorce podle jednotlivých proměnných
- označení pomocí řeckých písmen = greeks
-
  - Delta : $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$
  - Theta : $\Theta = \frac{\partial V}{\partial T}$
  - Gamma : $\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S} = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$
  - Vega : $\nu = \frac{\partial V}{\partial \sigma}$
  - Rho : $\rho = \frac{\partial V}{\partial r}$

kde V je cena opce

Delta $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$

- Δ měří rychlost změny opční ceny vzhledem ke změně ceny akcie
- tedy pro call opci: $\Delta_{call} = \Phi(d_1)$,
- a pro put opci (z put-call parity): $\Delta_{put} = \Phi(d_1) - 1$
- Jestliže π je hodnot portfolia A, potom delta portfolia, které obsahuje ω_i opcí $i-$tého typu je

$$\Delta(A) = \frac{\partial \pi}{\partial S} = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta_i,$$

  kde Δ_i je Δ $i-$té opce
- Budeme se snažit o $\Delta-$ neutrální portfolio - to nastává pro $\Delta = 0$ protože jeho hodnota nebude reagovat na malý pohyb cen akcie
- Jelikož Δ závisí na S, mění se s časem. Je tedy nutné provádět dynamický hedging
- $\Delta-$ neutrálního portfolia dosáhneme dynamickým ”rebalancováním” a to pomocí prodeje akcií a nákupu opcí nebo naopak

Theta $\Theta = \frac{\partial V}{\partial T}$

- Θ měří citlivost hodnoty opce na změnu času
- tedy pro call opci: $\Theta_{call} = \frac{S_0 \Phi'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} - rKe^{-rT}\Phi(d_2)$,
- a pro put opci: $\Theta_{put} = \frac{S_0 \Phi'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} + rKe^{-rT}\Phi(-d_2)$,

kde $\Phi'(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_2^2}{2}}$

- Θ je jiný typ parametru než Δ, jelikož čas je deterministická proměnná a proti plynutí času nemá smysl se jistit

Gamma $\quad \Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S} = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$

- Γ měří rychlost změny Δ vzhledem ke změně S
- tedy pro call opci: $\Gamma_{call} = \frac{\partial \Phi(d_1)}{\partial S_0} = \frac{\Phi'(d_1)}{S_0 \sigma \sqrt{T}}$,
- a pro put opci (z put-call parity): $\Gamma_{put} = \Gamma_{call} = \frac{\Phi'(d_1)}{S_0 \sigma \sqrt{T}}$
- Je-li Γ malá, znamená to, že se Δ je méně citlivá na změnu S, je-li Γ velká, pak se Δ mění rychle a třeba rebalancovat častěji
- Opět se budeme snažit o Γ neutrální portfolio, tedy aby $\Gamma = 0$:
  - pozice v akcii má $\Gamma = 0$
  - potřebujeme tedy nějaký nástroj, který nelineárně závisí na ceně akcie a pro který je $\Gamma \neq 0$ - např. opci
  - označme

Γ_A . . . gamma portfolia A
Γ_O . . . gamma opce
w_T . . . počet opcí

- Γ portfolia bude: $\Gamma = \Gamma_A + w_T \Gamma_O$,

- $\Gamma-$ neutrální portfolio tedy dostaneme pro $w_T = \frac{-\Gamma_A}{\Gamma_O}$
- přidáním opcí do portfolia se ale změní Δ celého portfolia - bude $\Delta \neq 0$, abychom docílili i $\Delta-$ neutrálního portfolia, musíme změnit i pozici v akciích
- $\Gamma-$ neutralita portfolia se nezmění, protože $\Gamma_{AKCIE} = 0$
- Jestliže je portfolio Δ i $\Gamma-$ neutrální, potom je imunní i proti výraznějším výkyvům ceny podkladové akcie

Vega $\nu = \frac{\partial V}{\partial \sigma}$

- ν měří citlivost hodnoty opce na změnu volatility
- tedy pro call opci: $\nu_{call} = S_0 \sqrt{T} \Phi'(d_1)$,
- a pro put opci: $\nu_{put} = \nu_{call} = S_0 \sqrt{T} \Phi'(d_1)$
- Je-li ν velká, znamená to, že portfolio je citlivé na změny volatility
- pozice v akcii má $\nu_{AKCIE} = 0$
- obvykle, je-li portfolio $\Gamma-$ neutrální, potom má $\nu \neq 0$ a naopak
- abychom docílili Γ i $\nu-$ neutrální portfolio, potřebovali bychom nejméně dva různé deriváty na podkladovou akcii

Rho $\rho = \frac{\partial V}{\partial r}$

- ρ měří hodnotu změny opce v závislosti na změně úrokové míry
- tedy pro call opci: $\rho_{call} = KTe^{-rT}\Phi(d_2)$,
- a pro put opci: $\rho_{put} = -KTe^{-rT}\Phi(-d_2)$

Vztah mezi Δ, Θ a Γ

- Označme:
  - f ... cena derivátu $(f = C, P, \dots)$
  - π ... hodnota portfolia derivátů na jednu stejnou podkladovou akcii
- z Black-Scholesovy rovnice pro cenu derivátu f

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf$$

pro hodnotu portfolia derivátu tedy dostaneme

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} + rS\frac{\partial \pi}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 \pi}{\partial S^2} = r\pi$$

odtud

$$\Theta + rS\Delta + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma = r\pi$$

- je-li portfolio $\Delta -$ neutrální, potom

$$\Theta + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma = r\pi$$

Příklad

- Máme 10 call opcí na penězích s realizační cenou $K = 10$ Kč, s $r = 0$, $\sigma = 0,2$, $T = 3$ měsíce. Sestrojte $\Delta -$ neutrální portfolio.
  - opce je na penězích, tedy $S_0 = K$
  - $\Delta_{call} = \Phi(d_1)$, kde $d_1 = \dfrac{\ln \frac{S_0}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$
  - tedy $d_1 = \frac{\ln 1 + (0{,}02)\cdot 0{,}25}{0{,}2\cdot 0{,}5} = \frac{0+0{,}5}{0{,}1} = 0{,}05$

    Δ jedné opce:
    $\Delta_{call} = \Phi(0,05) = 0,52$
    $\Delta_{portfolia} = 10 \cdot 0,52 = 5,2$

    chceme $\Delta = 0$, tj. když bude $\Delta > 0$, budeme prodávat, bude-li $\Delta < 0$, budeme nakupovat

  Jelikož Δ_{AKCIE} je vždy rovna 1 (protože $\frac{\partial S}{\partial S} = 1$), prodáme tedy 5,2 akcií.

Příklad

- Mějme $\Delta-$ neutrální portfolio A, $\Gamma(A) = -5000$ a $\nu(A) = -8000$. Obchodovaná opce O_1 má $\Gamma_O = 0{,}5$, $\nu_O = 2{,}0$ a $\Delta_O = 0{,}6$. Sestavte Δ a ν neutrální portfolio.
  1. Koupíme 4000 opcí. potom $\nu(A + opce) = -8000 + 2 \cdot 4000 = 0$ Δ se mění na $\Delta(A + opce) = 0 + 0{,}6 \cdot 4000 = 2400$
  2. Prodáme 2400 akcií a dosáhneme $\Delta(A + opce) = 0$. Jelikož $\nu_{AKCIE} = 0$, zůstane ν nulové.

- Nechť další obchodovatelná opce O_2 má $\Gamma = 0{,}8{,}0$ $\nu = 1{,}2$ a $\Delta = 0{,}5$. Sestrojte Γ a ν neutrální portfolio.
  1. Máme w_1 opcí O_1 a w_2 opcí O_2 a chceme:
     $\Gamma : w_1 \cdot 0{,}5 + w_2 \cdot 0{,}8 - 5000 = 0$
     $\nu : w_1 \cdot 2{,}0 + w_2 \cdot 1{,}2 - 8000 = 0,$
     tedy $w_1 = 400$ a $w_2 = 6000$.
  2. Ještě musíme spravit Δ :
     $\Delta(A + opceO_1 + opceO_2) = 0 + 400 \cdot 0{,}6 + 6000 \cdot 0{,}5 = 3240$, abychom dostali $\Delta-$ neutrální portfolio, musíme tedy ještě prodat 3240 akcií.