

# *ANALÝZA CITLIVOSTI BLACK-SCHOLESOVA VZORCE*

Miroslava Nováková

Seminář z finanční matematiky

5. 3. 2014

- Black-Scholesův vzorec

- Black-Scholesův vzorec
- Závislost cen opcí na parametrech modelu

- Black-Scholesův vzorec
- Závislost cen opcí na parametrech modelu
- Greeks
  - $\Delta$
  - $\Theta$
  - $\Gamma$
  - $\nu$
  - $\rho$

- Black-Scholesův vzorec
- Závislost cen opcí na parametrech modelu
- Greeks
  - $\Delta$
  - $\Theta$
  - $\Gamma$
  - $\nu$
  - $\rho$
- Vzájemný vztah mezi  $\Delta$ ,  $\Theta$  a  $\Gamma$

- Black-Scholesův vzorec
- Závislost cen opcí na parametrech modelu
- Greeks
  - $\Delta$
  - $\Theta$
  - $\Gamma$
  - $\nu$
  - $\rho$
- Vzájemný vztah mezi  $\Delta$ ,  $\Theta$  a  $\Gamma$
- Příklady

## Black-Scholesův vzorec

- Black-Scholesův vzorec pro evropskou call opci má tvar:

$$C = S_0 \Phi(d_1) - Ke^{-rT} \Phi(d_2)$$

- Black-Scholesův vzorec pro evropskou put opci má tvar:

$$P = Ke^{-rT} \Phi(-d_2) - S_0 \Phi(-d_1)$$

kde

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S_0}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

a  $\Phi$  je distribuční funkce normalizovaného normálního rozdělení  $N(0,1)$ , tj.

$$\Phi(d_1) = \int_{-\infty}^{d_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Hodnota opce tedy závisí na těchto pěti proměnných:

- realizační ceně  $K$
- současné ceně akcie  $S_0$
- volatilitě akcie  $\sigma$
- čase expirace  $T$
- úrokové míře  $r$

Směr závislosti jednotlivých proměnných naznačuje následující tabulka:

Parametry modelu	Call opce	Put opce
cena akcie - $S_0$	+	-
realizační cena- $K$	-	+
úroková míra - $r$	+	-
volatilita - $\sigma$	+	+
čas expirace - $T$	+	+

kde + znamená rostoucí závislost - tj. přímou úměrnost  
a - bude značit klesající závislost - tedy nepřímou úměrnost

## *Závislost cen opcí na parametrech modelu*

Závislosti  $S_0$  a  $K$  jsou zřejmé - ze vzorce pro vnitřní hodnotu opce:

- vnitřní hodnota call opce:  $V_T = \max(S_t - K, 0)$
- vnitřní hodnota put opce:  $V_T = \max(K - S_t, 0)$

Tedy je jasné že

- ▶ čím roste cena akcie, tím roste hodnota CALL opce (+)
- ▶ čím roste cena akcie, tím hodnota PUT opce klesá (-)
- ▶ čím roste  $K$ , tím klesá cena CALL opce (-)
- ▶ čím roste  $K$ , tím cena PUT opce roste(+)

Co se týká úrokové míry:

- ▶ CALL opce je potenciální výdej v budoucnosti, čili pokud  $r$  roste, jeho současná hodnota a tím i hodnota opce taktéž roste (+)
- ▶ PUT opce je potenciální budoucí příjem, tedy roste-li  $r$ , hodnota opce klesá (-)

Směr závislosti volatility a času expirace vysvětlíme pomocí podobného argumentu:

- Roste-li volatilita, potom rostou i šance velkého růstu / poklesu akcie. Majitel CALL profituje z růstu akcie, kdežto při poklesu je jeho ztráta omezena opční prémie. Majitel PUT opce profituje z poklesu akcie, zatímco při růstu je ztráta opět omezena opční prémie. Tedy z toho plyne, že jestliže roste volatilita, potom:
  - ▶ cena CALL opce roste (+)
  - ▶ cena PUT opce také roste(+)
- Podobně jako u volatility znamená delší čas větší nejistotu, tedy ze stejného argumentu jako pro volatilitu, pokud čas do expirace roste, potom rostou i ceny CALL (+) a PUT (+) opcí

# Greeks

- vyjadřují závislost změny ceny opcí, při změně jednotlivých parametrů
- parciální derivace Black-Scholesova vzorce podle jednotlivých proměnných
- označení pomocí řeckých písmen = greeks
- - ▶ Delta :  $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$
  - ▶ Theta :  $\Theta = \frac{\partial V}{\partial T}$
  - ▶ Gamma :  $\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S} = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$
  - ▶ Vega :  $v = \frac{\partial V}{\partial \sigma}$
  - ▶ Rho :  $\rho = \frac{\partial V}{\partial r}$

kde  $V$  je cena opce

*Delta*  $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$

- $\Delta$  měří rychlost změny opční ceny vzhledem ke změně ceny akcie
- tedy pro call opci:  $\Delta_{call} = \Phi(d_1)$ ,
- a pro put opci (z put-call parity):  $\Delta_{put} = \Phi(d_1) - 1$
- Jestliže  $\pi$  je hodnota portfolia  $A$ , potom delta portfolia, které obsahuje  $\omega_i$  opcí  $i$ -tého typu je

$$\Delta(A) = \frac{\partial \pi}{\partial S} = \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta_i,$$

kde  $\Delta_i$  je  $\Delta$   $i$ -té opce

- Budeme se snažit o  $\Delta$ - neutrální portfolio - to nastává pro  $\Delta = 0$  protože jeho hodnota nebude reagovat na malý pohyb cen akcie
- Jelikož  $\Delta$  závisí na  $S$ , mění se s časem. Je tedy nutné provádět dynamický hedging
- $\Delta$ - neutrálního portfolia dosáhneme dynamickým "rebalancováním" a to pomocí prodeje akcií a nákupu opcí nebo naopak

Theta  $\Theta = \frac{\partial V}{\partial T}$

- $\Theta$  měří citlivost hodnoty opce na změnu času
- tedy pro call opci:  $\Theta_{call} = \frac{S_0 \Phi'(d_1) \sigma}{2\sqrt{T}} - rKe^{-rT} \Phi(d_2)$ ,
- a pro put opci:  $\Theta_{put} = \frac{S_0 \Phi'(d_1) \sigma}{2\sqrt{T}} + rKe^{-rT} \Phi(-d_2)$ ,

kde  $\Phi'(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}}$

- $\Theta$  je jiný typ parametru než  $\Delta$ , jelikož čas je deterministická proměnná a proti plynutí času nemá smysl se jistit

*Gamma*      $\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S} = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$

- $\Gamma$  měří rychlost změny  $\Delta$  vzhledem ke změně  $S$
- tedy pro call opci:  $\Gamma_{call} = \frac{\partial \Phi(d_1)}{\partial S_0} = \frac{\Phi'(d_1)}{S_0 \sigma \sqrt{T}}$ ,
- a pro put opci (z put-call parity):  $\Gamma_{put} = \Gamma_{call} = \frac{\Phi'(d_1)}{S_0 \sigma \sqrt{T}}$
- Je-li  $\Gamma$  malá, znamená to, že se  $\Delta$  je méně citlivá na změnu  $S$ , je-li  $\Gamma$  velká, pak se  $\Delta$  mění rychle a třeba rebalancovat častěji
- Opět se budeme snažit o  $\Gamma$  neutrální portfolio, tedy aby  $\Gamma = 0$ :
  - ▶ pozice v akcii má  $\Gamma = 0$
  - ▶ potřebujeme tedy nějaký nástroj, který nelineárně závisí na ceně akcie a pro který je  $\Gamma \neq 0$  - např. opci
  - ▶ označme
    - $\Gamma_A$  ... gamma portfolio A
    - $\Gamma_O$  ... gamma opce
    - $w_T$  ... počet opcí

- ▶  $\Gamma$  portfolia bude:  $\Gamma = \Gamma_A + w_T \Gamma_O$ ,
- $\Gamma$  – neutrální portfolio tedy dostaneme pro  $w_T = \frac{-\Gamma_A}{\Gamma_O}$
- přidáním opcí do portfolia se ale změní  $\Delta$  celého portfolia - bude  $\Delta \neq 0$ , abychom docílili i  $\Delta$  – neutrálního portfolia, musíme změnit i pozici v akcích
- $\Gamma$  – neutralita portfolia se nezmění, protože  $\Gamma_{AKCIE} = 0$
- Jestliže je portfolio  $\Delta$  i  $\Gamma$  – neutrální, potom je imunní i proti výraznějším výkyvům ceny podkladové akcie

Vega  $v = \frac{\partial V}{\partial \sigma}$

- $v$  měří citlivost hodnoty opce na změnu volatility
- tedy pro call opci:  $v_{call} = S_0 \sqrt{T} \Phi'(d_1)$ ,
- a pro put opci:  $v_{put} = v_{call} = S_0 \sqrt{T} \Phi'(d_1)$
- Je-li  $v$  velká, znamená to, že portfolio je citlivé na změny volatility
- pozice v akcii má  $v_{AKCIE} = 0$
- obvykle, je-li portfolio  $\Gamma$ – neutrální, potom má  $v \neq 0$  a naopak
- abychom docílili  $\Gamma$  i  $v$ – neutrální portfolio, potřebovali bychom nejméně dva různé deriváty na podkladovou akcii

*Rho*    $\rho = \frac{\partial V}{\partial r}$

- $\rho$  měří hodnotu změny opce v závislosti na změně úrokové míry
- tedy pro call opci:  $\rho_{call} = KTe^{-rT}\Phi(d_2)$ ,
- a pro put opci:  $\rho_{put} = -KTe^{-rT}\Phi(-d_2)$

## Vztah mezi $\Delta$ , $\Theta$ a $\Gamma$

- Označme:
  - ▶  $f$  ... cena derivátu ( $f = C, P, \dots$ )
  - ▶  $\pi$  ... hodnota portfolia derivátů na jednu stejnou podkladovou akci
- z Black-Scholesovy rovnice pro cenu derivátu  $f$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf$$

pro hodnotu portfolia derivátu tedy dostaneme

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} + rS \frac{\partial \pi}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 \pi}{\partial S^2} = r\pi$$

odtud

$$\Theta + rS\Delta + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \Gamma = r\pi$$

- je-li portfolio  $\Delta$  – neutrální, potom

$$\Theta + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \Gamma = r\pi$$

## Příklad

- Máme 10 call opcí na penězích s realizační cenou  $K = 10$  Kč, s  $r = 0$ ,  $\sigma = 0,2$ ,  $T = 3$  měsíce. Sestrojte  $\Delta$  – neutrální portfolio.

- ▶ opce je na penězích, tedy  $S_0 = K$

- ▶  $\Delta_{call} = \Phi(d_1)$ , kde  $d_1 = \frac{\ln \frac{S_0}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$

- ▶ tedy  $d_1 = \frac{\ln 1 + (0,02) \cdot 0,25}{0,2 \cdot 0,5} = \frac{0 + 0,5}{0,1} = 0,05$

$\Delta$  jedné opce:

$$\Delta_{call} = \Phi(0,05) = 0,52$$

$$\Delta_{portfolio} = 10 \cdot 0,52 = 5,2$$

chceme  $\Delta = 0$ , tj. když bude  $\Delta > 0$ , budeme prodávat, bude-li  $\Delta < 0$ , budeme nakupovat

Jelikož  $\Delta_{AKCIE}$  je vždy rovna 1 ( protože  $\frac{\partial S}{\partial S} = 1$  ), **prodáme tedy 5,2 akcií.**

## Příklad

- Mějme  $\Delta$ - neutrální portfolio  $A$ ,  $\Gamma(A) = -5000$  a  $v(A) = -8000$ . Obchodovaná opce  $O_1$  má  $\Gamma_O = 0,5$ ,  $v_O = 2,0$  a  $\Delta_O = 0,6$ . Sestavte  $\Delta$  a  $v$  neutrální portfolio.
  1. Koupíme 4000 opcí. potom  $v(A + opce) = -8000 + 2 \cdot 4000 = 0$   $\Delta$  se mění na  $\Delta(A + opce) = 0 + 0,6 \cdot 4000 = 2400$
  2. Prodáme 2400 akcií a dosáhneme  $\Delta(A + opce) = 0$ . Jelikož  $v_{AKCIE} = 0$ , zůstane  $v$  nulové.
- Nechť další obchodovatelná opce  $O_2$  má  $\Gamma = 0,8, 0$   $v = 1,2$  a  $\Delta = 0,5$ . Sestrojte  $\Gamma$  a  $v$  neutrální portfolio.
  1. Máme  $w_1$  opcí  $O_1$  a  $w_2$  opcí  $O_2$  a chceme:  
 $\Gamma : w_1 \cdot 0,5 + w_2 \cdot 0,8 - 5000 = 0$   
 $v : w_1 \cdot 0,2 + w_2 \cdot 1,2 - 8000 = 0$ ,  
tedy  $w_1 = 400$  a  $w_2 = 6000$ .
  2. Ještě musíme spravit  $\Delta$  :  
 $\Delta(A + opceO_1 + opceO_2) = 0 + 400 \cdot 0,6 + 6000 \cdot 0,5 = 3240$ , abychom dostali  $\Delta$ - neutrální portfolio, musíme tedy ještě prodat 3240 akcií.