1 Určování polohy bodů pomocí souřadnic

Souřadnicové výpočty geodetických úloh řešíme v pravoúhlém souřadnicovém systému **S-JTSK,** ve kterém osa **+*X*** je orientována od severu na jih a osa **+*Y*** od východu na západ. Výpočty lokálního charakteru můžeme realizovat v místním souřadnicovém systému, jehož osy zachovávají stejný smysl pořadí jako **S-JTSK**. Souřadnicové výpočty je možné v plné míře uplatnit zejména při:

- určování pravoúhlých souřadnic bodů, kterými zhušťujeme existující bodové pole,
- projekční činnosti, přípravě vytyčovacích prvků a při vlastních vytyčovacích pracích stavebních objektů.

Základním úkolem při souřadnicovém určování polohy bodů je výpočet směrníků a délky strany mezi dvěma body, jejichž pravoúhlé souřadnice jsou známé.

1.1 Výpočet směrníků a délky stran

Poloha každého bodu je určena pravoúhlými souřadnicemi $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$ v daném souřadnicovém systému. Strana jako úsečka mezi dvěma body je v pravoúhlém systému orientovaná směrníkem, t. j. úhlem, který svírá rovnoběžka vedená v koncovém bodě strany s kladným směrem osy $\boldsymbol{X}$ a příslušnou stranou ve směru číslování hodin. Při každé straně proto rozlišujeme dva směrníky (obr.1.1):

$\boldsymbol{\sigma_{AB}}$ - směrník strany z bodu $\boldsymbol{A}$ do bodu $\boldsymbol{B}$,
$\boldsymbol{\sigma_{BA}}$ - směrník strany z bodu $\boldsymbol{B}$ do bodu $\boldsymbol{A}$,

přičemž platí:

$$\sigma_{AB} = \sigma_{BA} - 200^g \text{, resp.} \quad \sigma_{BA} = \sigma_{AB} + 200^g \tag{1.1}$$

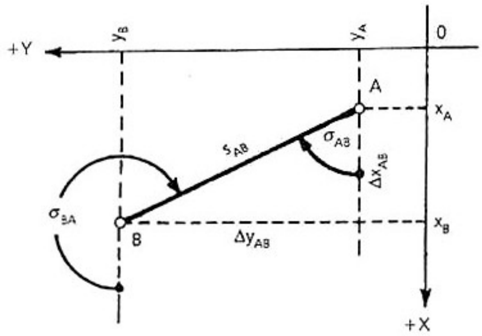
Směrník může mít hodnotu: 0^g až 400^g.

Výpočet směrníku a délky strany si můžeme odvodit z obr. 1.1. Dané jsou dva body pravoúhlými souřadnicemi $\boldsymbol{A}$ ($\boldsymbol{y_A, x_A}$) a $\boldsymbol{B}$ ($\boldsymbol{y_B, x_B}$). Máme určit směrník $\boldsymbol{\sigma_{AB}}$ a délku strany $\mathbf{s_{AB}}$. Rovnoběžky se souřadnicovými osami, vedené body $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$, tvoří se stranou $\mathbf{s_{AB}}$ pravoúhlý trojúhelník, jehož odvěsny jsou souřadnicové rozdíly $\boldsymbol{\Delta y_{AB}}$ a $\boldsymbol{\Delta x_{AB}}$ přičemž:

$$\Delta y_{AB} = y_B - y_A \quad \text{a} \quad \Delta x_{AB} = x_B - x_A \tag{1.2}$$

Směrník $\boldsymbol{\sigma_{AB}}$ určíme ze vztahu:

$$tg\sigma_{AB} = \frac{\sin\sigma_{AB}}{\cos\sigma_{AB}} = \frac{\Delta y_{AB}}{\Delta x_{AB}} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \tag{1.3}$$

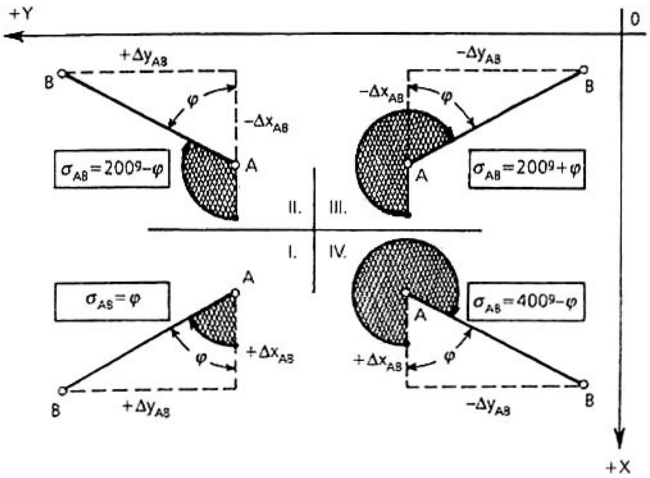


Obr. 1.1 Výpočet směrníků a délky strany

Uvedený vztah platí, když souřadnicové rozdíly Δy_{AB} a Δx_{AB} jsou kladné, což znamená, že σ_{AB} je v prvním kvadrantě. Hodnotu směrníku v kterémkoliv kvadrantě vypočítáme na základě znamének souřadnicových rozdílů Δy a Δx a pomocného úhlu φ podle vztahů na obr. 1.2. Úhel φ je vždy menší jako 100^g a vypočítá se podle vzorce (1.3) s tím, že souřadnicové rozdíly Δy a Δx uvažujeme v absolutních hodnotách.

Výpočet směrníku je třeba kontrolovat 50-grádovou zkouškou podle vzorce:

$$tg\left(\sigma_{AB} + 50^g\right) = \frac{\Delta x_{AB} + \Delta x_{AB}}{\Delta x_{AB} - \Delta y_{AB}} \tag{1.4}$$



Obr. 1.2 Hodnota směrníku v různých kvadrantech

Pro délku strany $\mathbf{s_{AB}}$ jako přeponu v pravoúhlém trojúhelníku (obr. 1.1) platí:

$$s_{AB} = \frac{\Delta y_{AB}}{\sin\sigma_{AB}} = \frac{\Delta x_{AB}}{\cos\sigma_{AB}} \tag{1.5}$$

V případech, když souřadnicové rozdíly mají velmi rozdílné hodnoty, bude přesnější hodnota strany vypočítaná z většího souřadnicového rozdílu.
Z trojúhelníku můžeme vyjádřit též vztah na výpočet souřadnicových rozdílů Δy_{AB} a Δx_{AB}:

$$\Delta y_{AB} = s_{AB}.\sin\sigma_{AB}, \quad \Delta x_{AB} = s_{AB}.\cos\sigma_{AB} \tag{1.6}$$

Vztahy platí (po změně indexů) všeobecně pro výpočet libovolného souřadnicového rozdílu Δy, resp. Δx.

1.2 Určení souřadnic bodu metodou polárních souřadnic

Úlohou je vypočítat pravoúhlé souřadnice bodu ***P*** (obr. 1.3), když:

- jsou dané dva body ***A*** a ***B*** pravoúhlými souřadnicemi,
- na bodě A byl měřený úhel ω a délka $\mathbf{d_{AP}}$

Výpočet vykonáme v tomto pořadí:

- výpočet směrníku σ_{AB} podle (1.3), (1.4),
- výpočet směrníku σ_{AP}:

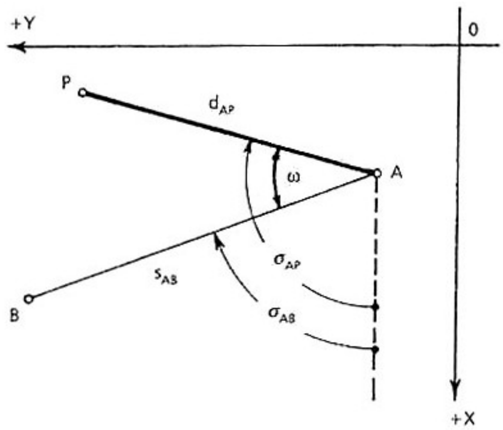
$$\sigma_{AP} = \sigma_{AB} + \omega \tag{1.7}$$

- výpočet souřadnicových rozdílů Δy_{AP} a Δx_{AP}:

$$\Delta y_{AP} = d_{AP}.\sin\sigma_{AP}\,,\ \Delta x_{AP} = d_{AP}.\sin\sigma_{AP} \tag{1.8}$$

- výpočet souřadnic bodu ***P***:

$$y_P = y_A + \Delta y_{AP}\,,\ x_P = x_A + \Delta x_{AP} \tag{1.9}$$



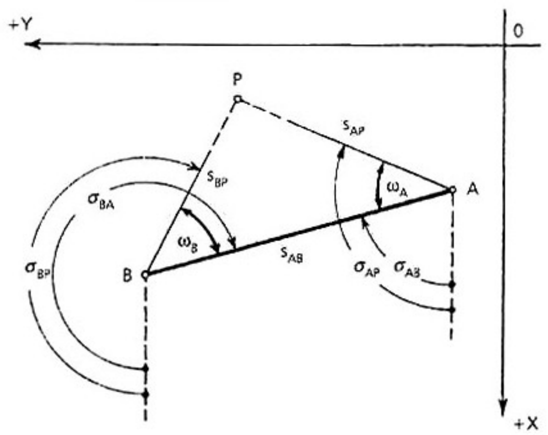
Obr. 1.3 Určení souřadnic metodou polárních souřadnic

Znaménko souřadnicového rozdílu bude totožné se znaménkem sínusu, resp. kosínusu směrníku v příslušném kvadrantě.

1.3 Určení souřadnic bodu metodou protínání napřed z úhlů

Na určení souřadnic bodu ***P*** protínáním napřed z úhlů musíme (obr. 1.4):

- znát souřadnice dvou bodů ***A*** a ***B***,
- změřit vodorovné úhly ω_A a ω_B v bodech ***A***, ***B***.



Obr. 1.4 Určení souřadnic bodu metodou protínání napřed z úhlů

Před vlastním výpočtem vyhotovíme nákres situace, bez kterého nemůžeme úlohu jednoznačně řešit.

Výpočet provedeme v tomto pořadí:

- výpočet směrníku $\boldsymbol{\sigma_{AB}}$ a strany $\mathbf{s_{BA}}$ podle (1.3), (1.4), (1.5),
- výpočet směrníků $\boldsymbol{\sigma_{AP}}$, $\boldsymbol{\sigma_{BP}}$:

$$\sigma_{AP} = \sigma_{AB} + \omega_A \;,\; \sigma_{BP} = \sigma_{BA} + \omega_B \tag{1.10}$$

- výpočet délek stran $\mathbf{s_{BA}}$:

$$s_{AP} = s_{AB} \frac{\sin\omega_{AP}}{\sin(\omega_A + \omega_B)} \;,\; s_{BP} = s_{AB} \frac{\sin\omega_A}{\sin(\omega_A + \omega_B)} \tag{1.11}$$

- výpočet souřadnicových rozdílů:

$$\begin{aligned} \Delta y_{AP} &= s_{AP}.\sin\sigma_{AP}, \qquad \Delta x_{AP} = s_{AP}.\cos\sigma_{AP} \\ \Delta y_{BP} &= s_{BP}.\sin\sigma_{BP}, \qquad \Delta x_{BP} = s_{BP}.\cos\sigma_{BP} \end{aligned} \tag{1.12}$$

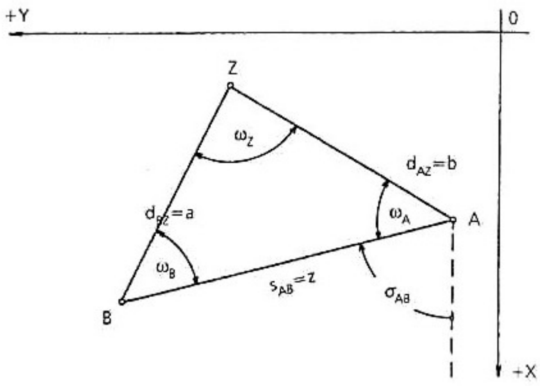
- výpočet souřadnic bodu ***P***:

$$\begin{aligned} y_P &= y_A + \Delta y_{AP} = y_B + \Delta y_{BP} \\ y_P &= y_A + \Delta y_{AP} = y_B + \Delta y_{BP} \end{aligned} \tag{1.13}$$

1.4 Určení souřadnic bodu metodou protínání napřed z délek

Přesné a rychlé měření délek elektronickými dálkoměry umožňuje více častěji určit polohu bodů protínáním napřed z délek.
Na určení souřadnic bodu ***Z*** protínáním napřed z délek musíme (obr. 1.5):

- poznat souřadnice bodů ***A*** a ***B***,
- změřit délky z bodů ***A*** a ***B*** na určený bod $\mathbf{d_{AZ}}$ a $\mathbf{d_{BZ}}$.



Obr. 1.5 Určení souřadnic bodu metodou protínání napřed z délek

Postup výpočtu je tento:

Po výpočtu směrníku $\boldsymbol{\sigma_{AB}}$ a strany $\boldsymbol{s_{AB}}$ (1.5) vypočítáme (např. podle Herónových vzorců) hodnoty úhlů $\boldsymbol{\omega_A}$, $\boldsymbol{\omega_B}$ a $\boldsymbol{\omega_Z}$:

$$tg\frac{\omega_A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-z)}{s(s-a)}} \quad ;$$

$$tg\frac{\omega_B}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-z)}{s(s-b)}} \quad ;$$

$$tg\frac{\omega_Z}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-z)}} \quad ;$$

kde $s = \dfrac{a+b+z}{2}$

Kontrolou výpočtů je : $\boldsymbol{\omega_A} + \boldsymbol{\omega_B} + \boldsymbol{\omega_Z} = 200^g$.

Dále výpočet pokračuje stejně jako při protínání napřed úhly, což znamená výpočtem směrníků na určený bod, souřadnicových rozdílů a nakonec souřadnic určeného bodu –dvojmo.
Úhly $\boldsymbol{\omega_A}$, $\boldsymbol{\omega_B}$ **a** $\boldsymbol{\omega_Z}$ je možné vypočítat taktéž pomocí kosínusové věty:

$$\cos\omega_A = \frac{b^2 + z^2 + a^2}{2bz} \quad ;$$

$$\cos\omega_B = \frac{a^2 + z^2 + b^2}{2az} \quad ;$$

$$\cos\omega_Z = \frac{a^2 + b^2 + z^2}{2ab} \quad ;$$