**Animal Model – viz přednáška č. 10**

Odhad PH pomocí animal modelu pro mléčnou užitkovost dojnic a jejich otců.
Modelová rovnice nabývá konkrétní podoby podle toho, jaké efekty při odhadu PH zohledníme – výpočet BLUP se liší v každé zemi, podle živočišného druhu, plemene, kontroly užitkovosti, apod.

**Př.:** Předpokládáme, že naměřená užitkovost krávy je ovlivněna jen stádem, ve kterém je chována, věkem (tj. pořadím laktace) a genotypem (tj. jedincem se svou jedinečnou genetickou výbavou).
Data:

| jedince | stádo | laktace | užitkovost |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 4500 |
| 2* | 1 | 1 | 5000 |
| 3 | 1 | 2 | 6500 |
| 4 | 2 | 2 | 8000 |
| 5* | 2 | 1 | 7000 |

V 1. stádě jsou tři dojnice, z toho dvě jsou na první laktaci a jedna na druhé laktaci. Ve 2. stádě jsou dvě krávy, jedna na první a dvě na druhé laktaci. Podle původu víme, že dojnice č. 2 a 5 mají společného otce* – jsou tedy polosestry. Jiné příbuzenské vztahy nejsou známy. V populaci byl odhadnuta hodnota koeficientu heritability $h^2$ = 0,25.

a) modelová rovnice: $y_{ijkl} = S_i + L_j + u_k + e_{ijkl}$

y – naměřená užitkovost dojnice
S – pevný efekt stáda (1. a 2. stádo)
L – pevný efekt pořadí laktace (1. a 2. laktace)
u – náhodný efekt jedince
e – náhodné vlivy dalších nekontrolovatelných faktorů

b) maticový zápis: $\mathbf{y} = \mathbf{Xb} + \mathbf{Zu} + \mathbf{e}$

**y** – vektor s hodnotami užitkovostí dojnic
**X** – designován matice pro pevné efekty (S a L)
**b** – vektor řešení odhadu středních hodnot pevných efektů
**Z** - designová matice pro náhodné efekty (jedinec)
**u** – vektor řešení odhadu náhodných efektů (~ **<u>plemenná hodnota</u>**)
**e** – vektor náhodných vlivů

c) Odvozená soustava normálních rovnic smíšeného modelu:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X'X} & \mathbf{X'Z} \\ \mathbf{Z'X} & \mathbf{Z'Z} + \mathbf{A}^{-1}K \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X'y} \\ \mathbf{Z'y} \end{bmatrix}$$

Odhadněte střední hodnoty pevných efektů stáda a pořadí laktace a plemennou hodnotu pro všechny dojnice a otce.

**A** – aditivně genetická matice příbuznosti

$$K = \frac{1-h^2}{h^2}$$

Doc. Ing. Tomáš Urban, Ph.D.
UMFGZ
MENDELU v Brně
urban@mendelu.cz

**Řešení:**

```
> X1 <- matrix(c(1,1,1,0,0,0,0,0,1,1),5)
> X1
     [,1] [,2]
[1,]    1    0
[2,]    1    0
[3,]    1    0
[4,]    0    1
[5,]    0    1

> X2 <- matrix(c(1,1,0,0,1,0,0,1,1,0),5)
> X2
     [,1] [,2]
[1,]    1    0
[2,]    1    0
[3,]    0    1
[4,]    0    1
[5,]    1    0

> X <- cbind(X1,X2)
> X
     [,1] [,2] [,3] [,4]
[1,]    1    0    1    0
[2,]    1    0    1    0
[3,]    1    0    0    1
[4,]    0    1    0    1
[5,]    0    1    1    0

> A <-
matrix(c(1,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0.25,0.5,0,0,1,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0.25,0,0,1,0.5,0,0.
5,0,0,0.5,1),6)
> A
     [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6]
[1,]    1 0.00    0    0 0.00  0.0
[2,]    0 1.00    0    0 0.25  0.5
[3,]    0 0.00    1    0 0.00  0.0
[4,]    0 0.00    0    1 0.00  0.0
[5,]    0 0.25    0    0 1.00  0.5
[6,]    0 0.50    0    0 0.50  1.0

> y <- matrix(c(4500,5000,6500,8000,7000),5,1)
> y
     [,1]
[1,] 4500
[2,] 5000
[3,] 6500
[4,] 8000
[5,] 7000

> h2 <- 0.25
> K <- (1-h2)/h2
> K
[1] 3

> Z <- diag(1,5)
> Z
     [,1] [,2] [,3] [,4] [,5]
[1,]    1    0    0    0    0
[2,]    0    1    0    0    0
[3,]    0    0    1    0    0
[4,]    0    0    0    1    0
[5,]    0    0    0    0    1

> XX <- t(X)%*%X
> XX
     [,1] [,2] [,3] [,4]
[1,]    3    0    2    1
[2,]    0    2    1    1
[3,]    2    1    3    0
[4,]    1    1    0    2
```

```
> XZ <- t(X)%*%Z
> XZ
     [,1] [,2] [,3] [,4] [,5]
[1,]    1    1    1    0    0
[2,]    0    0    0    1    1
[3,]    1    1    0    0    1
[4,]    0    0    1    1    0

> ZX <- t(Z)%*%X
> ZX
     [,1] [,2] [,3] [,4]
[1,]    1    0    1    0
[2,]    1    0    1    0
[3,]    1    0    0    1
[4,]    0    1    0    1
[5,]    0    1    1    0
> ZZ <- t(Z)%*%Z
> ZZ
     [,1] [,2] [,3] [,4] [,5]
[1,]    1    0    0    0    0
[2,]    0    1    0    0    0
[3,]    0    0    1    0    0
[4,]    0    0    0    1    0
[5,]    0    0    0    0    1

> AK <- K*solve(A)
> AK
     [,1]          [,2] [,3] [,4]          [,5] [,6]
[1,]    3  0.000000e+00    0    0  0.000000e+00    0
[2,]    0  4.000000e+00    0    0  1.665335e-16   -2
[3,]    0  0.000000e+00    3    0  0.000000e+00    0
[4,]    0  0.000000e+00    0    3  0.000000e+00    0
[5,]    0  8.881784e-17    0    0  4.000000e+00   -2
[6,]    0 -2.000000e+00    0    0 -2.000000e+00    5

> AK <- round(AK)
> AK
     [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6]
[1,]    3    0    0    0    0    0
[2,]    0    4    0    0    0   -2
[3,]    0    0    3    0    0    0
[4,]    0    0    0    3    0    0
[5,]    0    0    0    0    4   -2
[6,]    0   -2    0    0   -2    5

/* Abychom mohli spojit matice ZZ(5x5) a AK (6x6) musíme přidat řádek a sloupec nul
do matice ZZ, aby vznikla matice o rozměrech 6x6
Stejně musíme upravit i matice XZ (+ 1 sloupec nul) a ZX (+ 1 řádek nul)
Přidáním nul se nic nemění - jen je pak možné spojit tyto submatice do matice levé
strany LS */

> ZO <- matrix(c(0,0,0,0,0))
> ZO
     [,1]
[1,]    0
[2,]    0
[3,]    0
[4,]    0
[5,]    0

> ZZ1 <- cbind(ZZ,ZO)
> ZZ1
     [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6]
[1,]    1    0    0    0    0    0
[2,]    0    1    0    0    0    0
[3,]    0    0    1    0    0    0
[4,]    0    0    0    1    0    0
[5,]    0    0    0    0    1    0
```

```
> ZO1 <- matrix(c(0,0,0,0,0,0),1,6)
> ZO1
     [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6]
[1,]    0    0    0    0    0    0

> ZZ2 <- rbind(ZZ1,ZO1)
> ZZ2
     [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6]
[1,]    1    0    0    0    0    0
[2,]    0    1    0    0    0    0
[3,]    0    0    1    0    0    0
[4,]    0    0    0    1    0    0
[5,]    0    0    0    0    1    0
[6,]    0    0    0    0    0    0

> XZ0 <- cbind(XZ,matrix(c(0,0,0,0)))
> XZ0
     [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6]
[1,]    1    1    1    0    0    0
[2,]    0    0    0    1    1    0
[3,]    1    1    0    0    1    0
[4,]    0    0    1    1    0    0

> ZX0 <- rbind(ZX,matrix(c(0,0,0,0),1,4))
> ZX0
     [,1] [,2] [,3] [,4]
[1,]    1    0    1    0
[2,]    1    0    1    0
[3,]    1    0    0    1
[4,]    0    1    0    1
[5,]    0    1    1    0
[6,]    0    0    0    0


> ZZAK <- ZZ2+AK
> ZZAK
     [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6]
[1,]    4    0    0    0    0    0
[2,]    0    5    0    0    0   -2
[3,]    0    0    4    0    0    0
[4,]    0    0    0    4    0    0
[5,]    0    0    0    0    5   -2
[6,]    0   -2    0    0   -2    5

> LS1 <- cbind(XX,XZ0)
> LS1
     [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6] [,7] [,8] [,9] [,10]
[1,]    3    0    2    1    1    1    1    0    0     0
[2,]    0    2    1    1    0    0    0    1    1     0
[3,]    2    1    3    0    1    1    0    0    1     0
[4,]    1    1    0    2    0    0    1    1    0     0

> LS2 <- cbind(ZX0,ZZAK)
> LS2
     [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6] [,7] [,8] [,9] [,10]
[1,]    1    0    1    0    4    0    0    0    0     0
[2,]    1    0    1    0    0    5    0    0    0    -2
[3,]    1    0    0    1    0    0    4    0    0     0
[4,]    0    1    0    1    0    0    0    4    0     0
[5,]    0    1    1    0    0    0    0    0    5    -2
[6,]    0    0    0    0    0   -2    0    0   -2     5

> LS <- rbind(LS1,LS2)
> LS
      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6] [,7] [,8] [,9] [,10]
 [1,]    3    0    2    1    1    1    1    0    0     0
 [2,]    0    2    1    1    0    0    0    1    1     0
 [3,]    2    1    3    0    1    1    0    0    1     0
 [4,]    1    1    0    2    0    0    1    1    0     0
 [5,]    1    0    1    0    4    0    0    0    0     0
 [6,]    1    0    1    0    0    5    0    0    0    -2
```

```
 [7,]    1    0    0    1    0    0    4    0    0     0
 [8,]    0    1    0    1    0    0    0    4    0     0
 [9,]    0    1    1    0    0    0    0    0    5    -2
[10,]    0    0    0    0    0   -2    0    0   -2     5

> Xy <- t(X)%*%y
> Xy
      [,1]
[1,] 16000
[2,] 15000
[3,] 16500
[4,] 14500

> Zy <- t(Z)%*%y
> Zy
     [,1]
[1,] 4500
[2,] 5000
[3,] 6500
[4,] 8000
[5,] 7000

> PS <- rbind(Xy,Zy,matrix(c(0)))             /* rovněž u matice pravé strany musíme
> PS                                              přidat nulu, aby vznikl vektor
     [,1]                                          o 10 řádcích  */
[1,] 16000
 [2,] 15000
 [3,] 16500
 [4,] 14500
 [5,]  4500
 [6,]  5000
 [7,]  6500
 [8,]  8000
 [9,]  7000
[10,]     0

> det <- round(det(LS))
> det
[1] 0
> bu <- solve(LS)%*%PS
Error in solve.default(LS) :
  system is computationally singular: reciprocal condition number = 1.33628e-17

/* Protože determinant matice LS je roven nule, je tato matice singulární a nelze
ji invertovat -> jedním z řešení je použít zobecněnou inverzi…
Je nutné si nahrát balíček MASS z nabídky: Packages -> Load Packages    */


> bu <- ginv(LS)%*%PS
> bu
             [,1]
 [1,] 2302.23138    ~ odhadnutá odchylka stáda 1
 [2,] 4229.74702    ~ odhadnutá odchylka stáda 2 (odchylka 1927)
 [3,] 2547.96760    ~ odhadnutá odchylka 1. laktace
 [4,] 3984.01080    ~ odhadnutá odchylka 2. laktace (odchylka 1436)
 [5,]  -87.54974    ~ OPH krávy č. 1
 [6,]   47.47015    ~ OPH krávy č. 2
 [7,]   53.43945    ~ OPH krávy č. 3
 [8,]  -53.43945    ~ OPH krávy č. 4
 [9,]   61.96703    ~ OPH krávy č. 5
[10,]   43.77487    ~ OPH otce krav č. 2 a 5
```

```
/* Nebo dodám podmínky řešitelnosti: 1. sloupec matice LS zaměním za sloupec nul
s jedničkou na prvním řádku a 2. sloupec budu porovnávat k prvnímu sloupci.    */

/* smažu 1. sloupec a vložím místo něj vektor (1,0,0,0,0,0,0,0,0,0), ke kterému
budu porovnávat sloupec 2. */

> LS = LS[,-1]
> LS
      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6] [,7] [,8] [,9]
 [1,]    0    2    1    1    1    1    0    0    0
 [2,]    2    1    1    0    0    0    1    1    0
 [3,]    1    3    0    1    1    0    0    1    0
 [4,]    1    0    2    0    0    1    1    0    0
 [5,]    0    1    0    4    0    0    0    0    0
 [6,]    0    1    0    0    5    0    0    0   -2
 [7,]    0    0    1    0    0    4    0    0    0
 [8,]    1    0    1    0    0    0    4    0    0
 [9,]    1    1    0    0    0    0    0    5   -2
[10,]    0    0    0    0   -2    0    0   -2    5


> LSS <- cbind(matrix(c(1,0,0,0,0,0,0,0,0,0)),LS)
> LSS
      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6] [,7] [,8] [,9] [,10]
 [1,]    1    0    2    1    1    1    1    0    0     0
 [2,]    0    2    1    1    0    0    0    1    1     0
 [3,]    0    1    3    0    1    1    0    0    1     0
 [4,]    0    1    0    2    0    0    1    1    0     0
 [5,]    0    0    1    0    4    0    0    0    0     0
 [6,]    0    0    1    0    0    5    0    0    0    -2
 [7,]    0    0    0    1    0    0    4    0    0     0
 [8,]    0    1    0    1    0    0    0    4    0     0
 [9,]    0    1    1    0    0    0    0    0    5    -2
[10,]    0    0    0    0    0   -2    0    0   -2     5


> bu <- solve(LSS)%*%PS
> bu <- round(bu)
> bu
      [,1]
 [1,]    0
 [2,] 1928
 [3,] 4850
 [4,] 6286
 [5,]  -88
 [6,]   47
 [7,]   53
 [8,]  -53
 [9,]   62
[10,]   44

> bu <- round(bu,2)    /* zaokrouhlení na 2 desetinná místa */
> bu
         [,1]
 [1,]    0.00
 [2,] 1927.52
 [3,] 4850.20
 [4,] 6286.24
 [5,]  -87.55
 [6,]   47.47
 [7,]   53.44
 [8,]  -53.44
 [9,]   61.97
[10,]   43.77
```

Závěry:

- Stáda se liší v chovatelské péči o 1972 kg mléka, druhá laktace převyšuje první o 1436 kg mléka. Nejlepší kráva je č. 5 (OPH = +62 kg) a nejhorší je kráva č. 1 (OPH = -88 kg). Genetický rozdíl mezi nimi je 150kg mléka.

- Kráva č. 4 je druhá nejhorší s plemennou hodnotou -53 kg mléka, přestože v rámci ledovaného souboru dosahuje nejvyšší užitkovost (8000 kg mléka). Při pozornějším ledování však zjistíme, že je na druhé laktaci, tzn., že její vysoká užitkovost je dána vyšším stupněm tělesné dospělosti (+ 1436 kg mléka) a je ve stádě s lepší chovatelskou péčí (+ 1927 kg mléka). Jestliže o tyto položky, které jsou dány technikou chovu, se praví její užitkovost, dostane se na podprůměrnou úroveň.

- Naopak její vrstevnice – kráva č. 5 – je na první laktaci a na druhé laktaci lze tedy u ní očekávat užitkovost 7000 + 1436 = 8436 kg mléka. Kráva č. 5 je proto po korekci +436 kg mléka lepší než kráva č. 4, což činí v plemenné hodnotě rozdíl (v odhadu rozdílu genetického založení) 115 kg mléka (62 + 53).

- U krav č. 2 a č. 5 jsou při odhadu plemenné hodnoty využity vlastní užitkovosti zároveň vzájemný příbuzenský vztah zásluhou společného otce. Jejich plemenné hodnoty jsou proto stanoveny přesněji než u ostatních krav. Plemenná hodnota otce e stanovena na základě užitkovosti těchto dcer a činí +44 kg mléka.

- Jak ukazuje příklad, nelze se při výběru do plemenitby řídit naměřenou užitkovostí, neboť ta je ovlivněna několika činiteli.

- Na základě odhadu plemenných hodnot dáme přednost zařazení do plemenitby krávám podle tohoto pořadí:

| pořadí | kráva | OPH | užitkovost |
|---|---|---|---|
| 1 | 5 | +62 | 7000 |
| 2 | 3 | +53 | 6500 |
| 3 | 2 | +47 | 5000 |
| 4 | 4 | -53 | 8000 |
| 5 | 1 | -88 | 4500 |

Rozdíly v užitkovostech působené chovatelským prostředím jsou mnohem větší, než genetické rozdíly mezi zvířaty. Naměřená užitkovost je ovlivněna větším počtem významných faktorů, a proto jsou soustavy rovnic složitější a zahrnují více efektů.