



# SPEKTRÁLNÍ ANALÝZA ČASOVÝCH ŘAD



**prof. Ing. Jiří Holčík, CSc.**

**[holcik@iba.muni.cz](mailto:holcik@iba.muni.cz)**

© Institut biostatistiky a analýz

# V. PARAMETRICKÉ METODY ODHADU VÝKONOVÉHO SPEKTRA

pokračování

# BURGOVA METODA

nejpopulárnější metoda odhadu parametrů AR modelu z  $N$  vzorků

☑ předpokládá:

→ stacionární proces v širším slova smyslu

☑ využívá:

→ optimální dopřednou a zpětnou lineární predikci z hlediska minimální energie chybové posloupnosti;

☑ požaduje:

→ aby AR parametry splňovaly Levinsonovu rekurzi

# BURGOVA METODA

✓ odhad hodnoty  $x(nT_{vz})$ :

→ dopřednou lin. predikcí:  $\hat{x}(nT_{vz}) = -\sum_{k=1}^p a_p(k)x(nT_{vz} - kT_{vz})$

→ zpětnou lin. predikcí:  $\hat{x}(nT_{vz} - pT_{vz}) = -\sum_{k=1}^p a_p^*(k)x(nT_{vz} + kT_{vz} - pT_{vz})$

✓ chyby odhadu:

→ dopřednou lin. predikcí:  $e_p^f(nT_{vz}) = x(nT_{vz}) - \hat{x}(nT_{vz})$

→ zpětnou lin. predikcí:  $e_p^b(nT_{vz}) = x(nT_{vz} - pT_{vz}) - \hat{x}(nT_{vz} - pT_{vz})$

✓ energie chybové posloupnosti

$$E_p = \sum_{n=p}^{N-1} \left[ |e_p^f(nT_{vz})|^2 + |e_p^b(nT_{vz})|^2 \right]$$

✓ chceme, aby byla splněna Levinsonova rekurze

$$a_p(k) = a_{p-1}(k) + a_p(p) \cdot a_{p-1}^*(p-k) = a_{p-1}(k) + K_p a_{p-1}^*(p-k)$$

( $K_p = a_p(p)$  je koeficient odrazu v mřížkovém realizačním schématu prediktoru)

chceme,  
aby byl  
AR  
model  
stabilní

# LEVINSONŮV – DURBINŮV ALGORITMUS

**obecně:**

$$a_k(k) = \frac{-\gamma_{yy}(k) + \sum_{r=1}^{k-1} a_{k-1}(r) \cdot \gamma_{yy}(k-r)}{E_{k-1}^f}$$

$$a_k(i) = a_{k-1}(i) + a_{k-1}(k-i) \cdot a_k(k)$$

$$E_k^f = \sigma_k^2 = [1 - a_k^2(k)] \cdot \sigma_{k-1}^2$$

# BURGOVA METODA

- ☑ až se všechno podosazuje je

$$E_p = f(a_p(p), E_{p-1})$$

tohle známe z předchozí rekurze

- ☑ abychom  $E_p$  minimalizovali, derivujeme podle  $a_p(p)$  a výsledek položíme roven nule, z toho pak je

$$a_i(i) = K_i = \frac{-2 \sum_{k=i}^{N-1} e_{i-1}^f(k) \cdot e_{i-1}^{b^*}(k-1)}{\sum_{k=i}^{N-1} \left( |e_{i-1}^f(k)|^2 + |e_{i-1}^{b^*}(k-1)|^2 \right)}, \quad i = 1, 2, \dots, p$$

$|K_i(i)| \leq 1$  ... model je tedy opravdu stabilní

**!!! HALELUJAH !!!**

# BURGOVA METODA

$$\hat{K}_i = \frac{-2 \sum_{k=i}^{N-1} e_{i-1}^f(k) \cdot e_{i-1}^{b*}(k-1)}{E_{i-1}^f + E_{i-1}^b}, \quad i = 1, 2, \dots, p$$

odhad celkové energie chyby  
dokážeme jej také počítat  
rekurzivně:

$$E_i = E_{i-1} \cdot (1 - |a_{i-1}(i-1)|^2) - |e_{i-1}^b(N-i)|^2 - |e_{i-1}^f(i)|^2$$

Andersonův vztah

odhad výkonového spektra podle pana Burga

$$\hat{P}_{xx}^{BU}(f) = \frac{T_{vz} \cdot \hat{E}_p}{\left| 1 + \sum_{k=1}^p a_p(k) \cdot e^{-j2\pi f k T_{vz}} \right|^2}$$

# BURGOVA METODA

## ☑ **výhody:**

- dobrá frekvenční rozlišovací schopnost;
- AR model je stabilní;
- dobře se to počítá

## ☑ **nevýhody:**

- štěpení spektrálních čar při velkém poměru signál/šum;
- parazitní vrcholy ve spektru při modelech vyšších řádů
- u harmonických signálů v šumu je odhad citlivý na počáteční fázi harmonického signálu – projevuje se to frekvenčním posunem



# BURGOVA METODA

☑ jak na uvedené nevýhody?

→ např. woknováním posloupnosti čtverců chyb

$$E_p^{WBU} = \sum_{n=p}^{N-1} w_p(nT_{vz}) \left[ |e_p^f(nT_{vz})|^2 + |e_p^b(nT_{vz})|^2 \right]$$

potom

$$\hat{K}_i = \frac{-2 \sum_{k=i}^{N-1} w_{i-1}(kT_{vz}) \cdot e_{i-1}^f(kT_{vz}) \cdot e_{i-1}^{b*}(kT_{vz} - T_{vz})}{\sum_{k=i}^{N-1} w_{i-1}(kT_{vz}) \left( |e_{i-1}^f(kT_{vz})|^2 + |e_{i-1}^{b*}(kT_{vz} - T_{vz})|^2 \right)}, \quad i = 1, 2, \dots, p$$

umí se to, dělalo se to s Hammingovým oknem, parabolickým oknem, adaptivně, ...

# SPEKTRÁLNÍ ODHAD S MAXIMÁLNÍ ENTROPIÍ (MEM)

- ☑ je založen na extrapolaci známého segmentu AK posloupnosti pro další hodnoty posunutí

máme  $\{\gamma_{xx}(0), \gamma_{xx}(1), \dots, \gamma_{xx}(p)\}$

a jak určit  $\{\gamma_{xx}(p+1), \gamma_{xx}(p+2), \dots\}$ , aby výsledná matice zůstala semidefinitní

existuje nepřeberně možností

Burg – extrapolaci provést tak, aby extrapolovaná AK posloupnost měla maximální entropii, tzn. posloupnost má být co nejnáhodnější ze všech co mají určených  $p+1$  prvních členů  $\Rightarrow$  funkce spektrální hustoty bude nejplošší

- ☑ takový odhad klade nejméně požadavků na neznámou posloupnost;
- ☑ maximální znáhodnění produkuje řešení s minimální chybou

# SPEKTRÁLNÍ ODHAD S MAXIMÁLNÍ ENTROPIÍ (MEM)

obecná formulace pro určení AR spektra posloupnosti s maximální entropií vede na soustavu nelineárních rovnic

Y-W odhad je odhad s maximální entropií pouze v případě, že je analyzovaná AK posloupnost generována náhodným procesem s normálním rozložením;

Burgův odhad by byl odhad autokorelační posloupnosti identický s průběhem skutečné AK posloupnosti

# NEPODMÍNĚNÁ METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ

$$E_p = \sum_{n=p}^{N-1} \left[ \left| e_p^f(nT_{vz}) \right|^2 + \left| e_p^b(nT_{vz}) \right|^2 \right] =$$

$$= \sum_{n=p}^{N-1} \left[ \left| x(nT_{vz}) + \sum_{k=1}^p a_p(k) \cdot x(nT_{vz} - kT_{vz}) \right|^2 + \left| x(nT_{vz} - pT_{vz}) + \sum_{k=1}^p a_p^*(k) \cdot x(nT_{vz} + kT_{vz} - pT_{vz}) \right|^2 \right]$$

až sem je to totéž jako u Burgovy metody, ale teď si nebudeme přát, aby koeficienty  $a_p(k)$  splňovaly Levinsonovu rekurzi



metoda nejmenších čtverců na rovnici  $E_p$  se všemi koeficienty  $a_p(k)$

# NEPODMÍNĚNÁ METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ

$$\sum_{k=1}^p a_p(k).r_{xx}(l,k) = -r_{xx}(l,0); \quad l = 1,2,\dots,p$$

kde  $r_{xx}(l,k)$  je cosi, čemu se říká autokorelace a je to definováno vztahem

$$r_{xx}(l,k) = \sum_{n=p}^{N-1} [x(nT_{vz} - kT_{vz}).x(nT_{vz} - lT_{vz}) + x(nT_{vz} - pT_{vz} + lT_{vz}).x(nT_{vz} - pT_{vz} + kT_{vz})],$$

$$0 \leq l, k \leq p$$

minimální energie predikční chyby je

$$E_p^{LS} = r_{xx}(0,0) + \sum_{k=1}^p a_p(k).r_{xx}(0,k)$$

$$\mathbf{R}_p \cdot \mathbf{A}_p = \mathbf{E}_p, \quad \text{kde}$$

# LEVINSONŮV – DURBINŮV ALGORITMUS

dopředná lineární predikce

normální rovnice:

$$\sum_{k=0}^p a_p(k) \gamma_{yy}(lT_{vz} - kT_{vz}) = 0 \quad l=1,2,\dots,p; \quad a_p(0)=1$$

výsledná minimální MSE

$$E_p^f = \gamma_{yy}(0) + \sum_{k=1}^p a_p(k) \gamma_{yy}(-kT_{vz})$$

rozšířené normální rovnice:

$$\sum_{k=0}^p a_p(k) \gamma_{yy}(lT_{vz} - kT_{vz}) = \begin{cases} E_p^f & l=0 \\ 0 & l=1,2,\dots,p \end{cases}$$

# NEPODMÍNĚNÁ METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ

$$\mathbf{A}_p = \begin{bmatrix} 1 \\ a_p(1) \\ \vdots \\ a_p(p) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R}_p = \begin{bmatrix} r_{xx}(0,0) & \cdots & r_{xx}(0,p) \\ \vdots & & \vdots \\ r_{xx}(p,0) & \cdots & r_{xx}(p,p) \end{bmatrix} \quad \mathbf{E}_p = \begin{bmatrix} E_p^{LS} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

konečně odhad výkonového spektra:

$$\hat{P}_{xx}^{LS}(f) = \frac{T_{vz} \cdot \hat{E}_p^{LS}}{\left| 1 + \sum_{k=1}^p a_p(k) \cdot e^{-j2\pi f k T} \right|^2}$$

# NEPODMÍNĚNÁ METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ

## počítání:

- ❖ Gaussovou eliminační metodou –  $O(p^3)$
- ❖ dá se to zefektivnit [Marple] -  $O(p^2)$

$R_p$  se vyjádří jako součty a součiny Toeplitzových a Hankelových matic, ve skutečnosti pracnost asi o 20% vyšší než u Burga

zvýšení pracnosti se vrátí v lepších vlastnostech:

- ❖ je menší frekvenční posun, není štěpení spektrálních čar, nejsou parazitní vrcholy;
- ❖ model nemusí být stabilní – ale to nám v podstatě moc nevadí



# ILUSTRACE

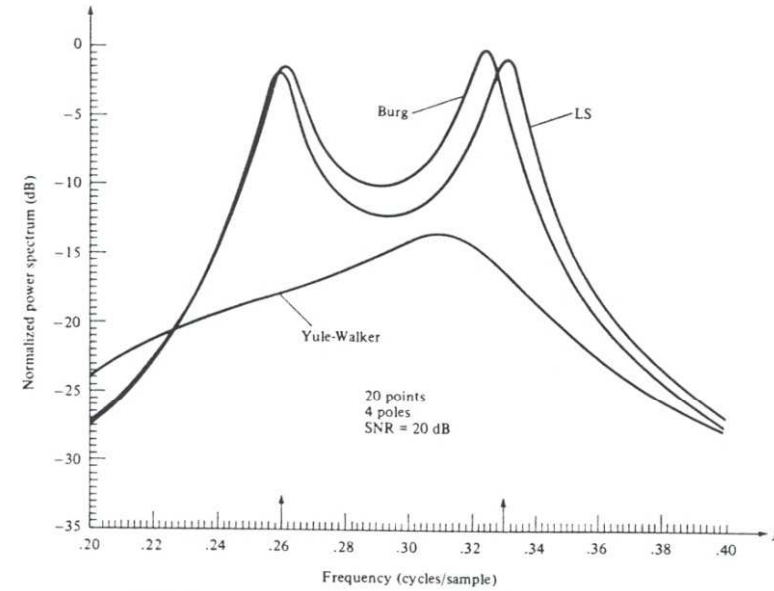
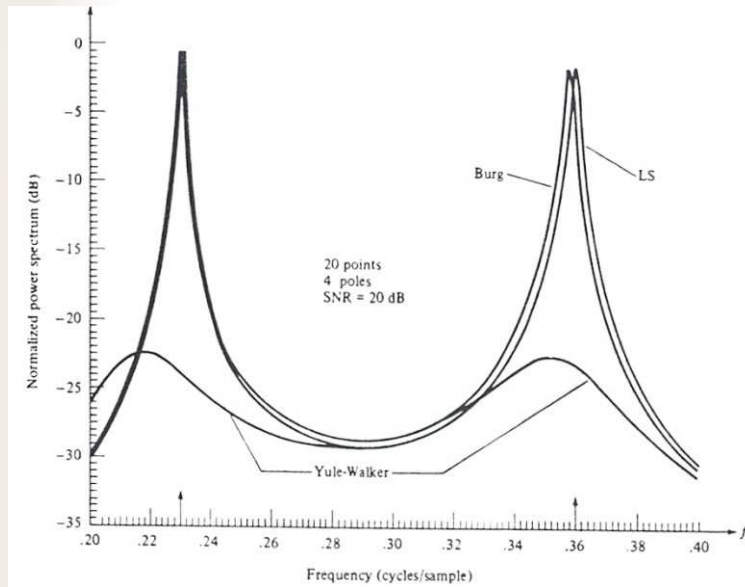
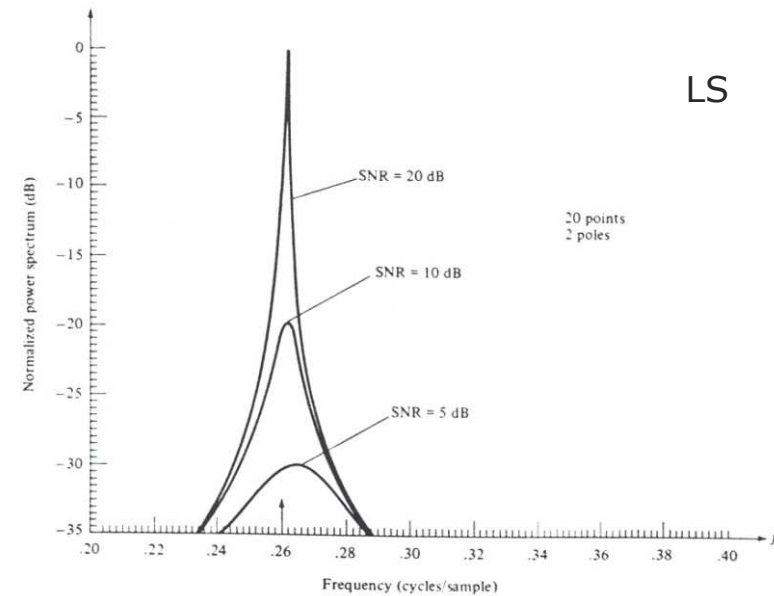


FIGURE 8.7 Comparison of AR spectrum estimation methods.



# ILUSTRACE

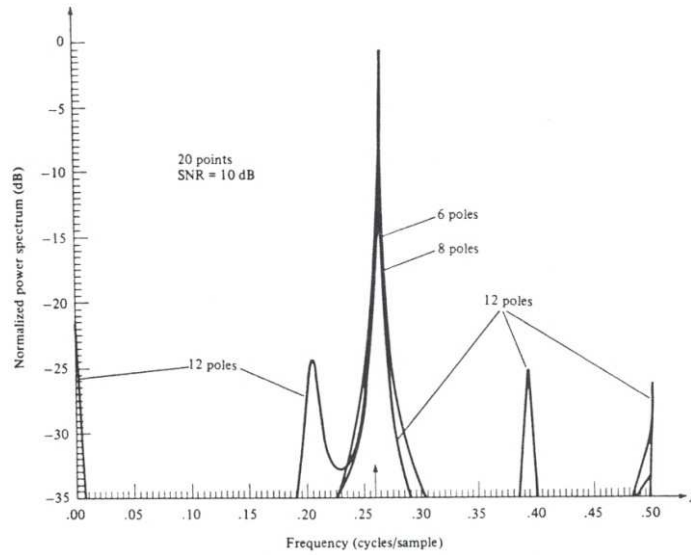


FIGURE 8.9 Effect of filter order on Burg method.

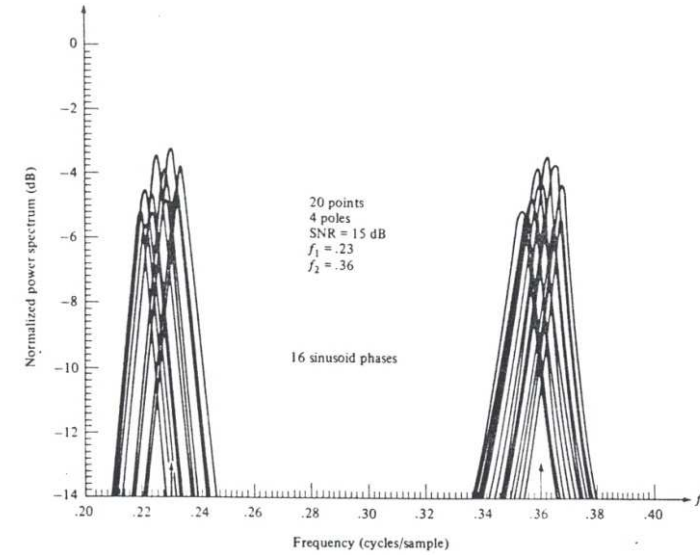
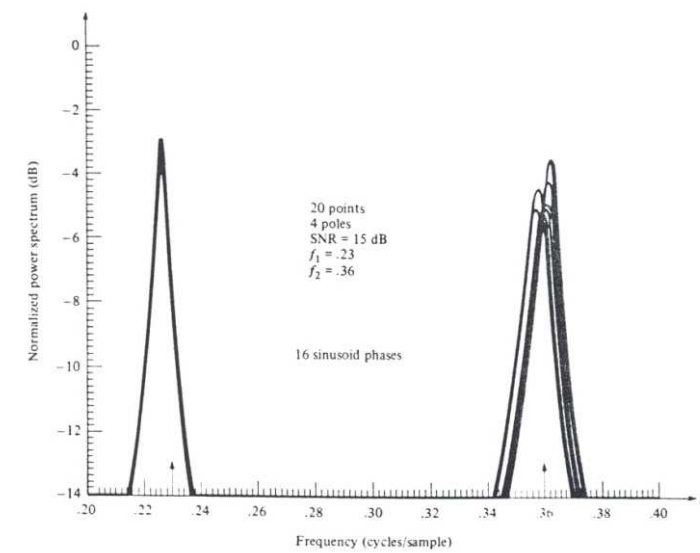
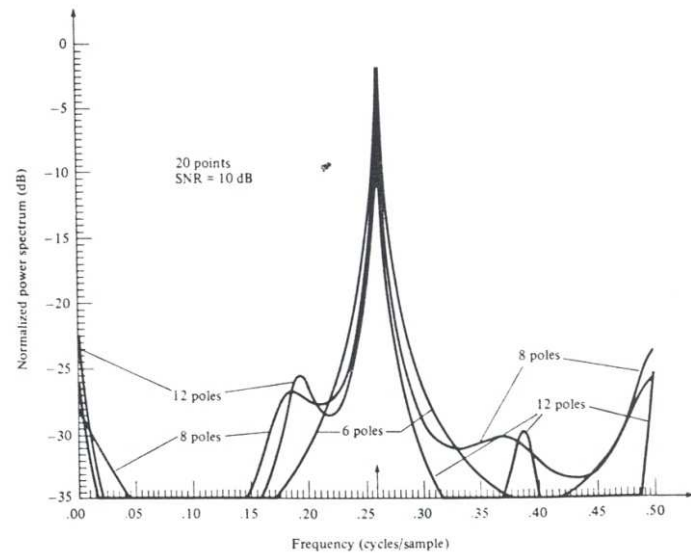


FIGURE 8.11 Effect of initial phase on Burg method.



# ILUSTRACE

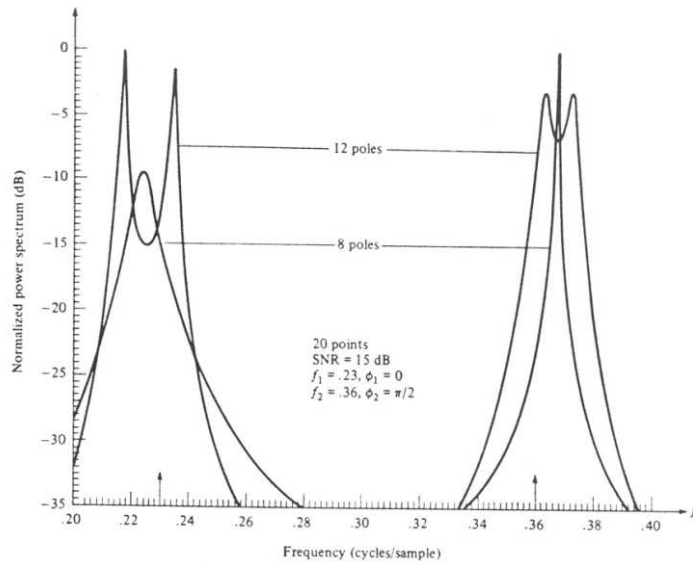
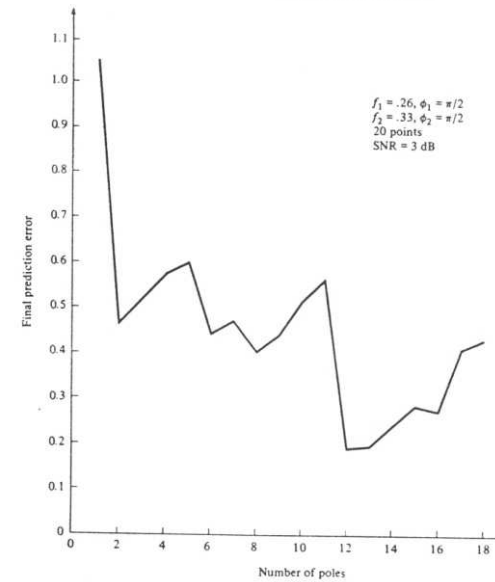
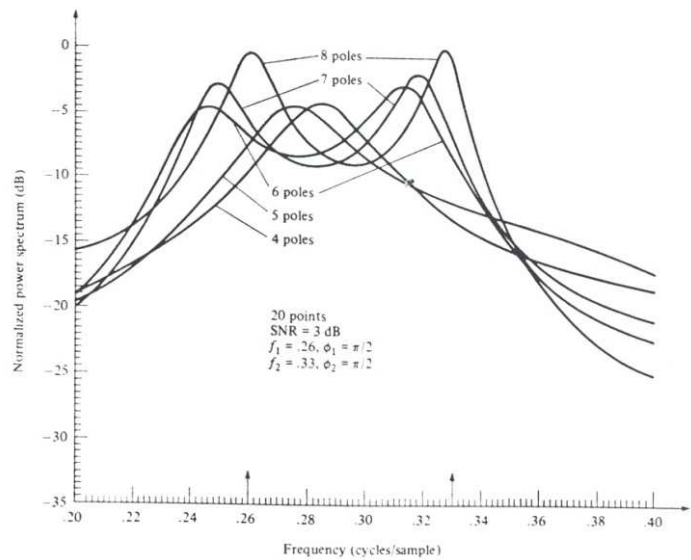
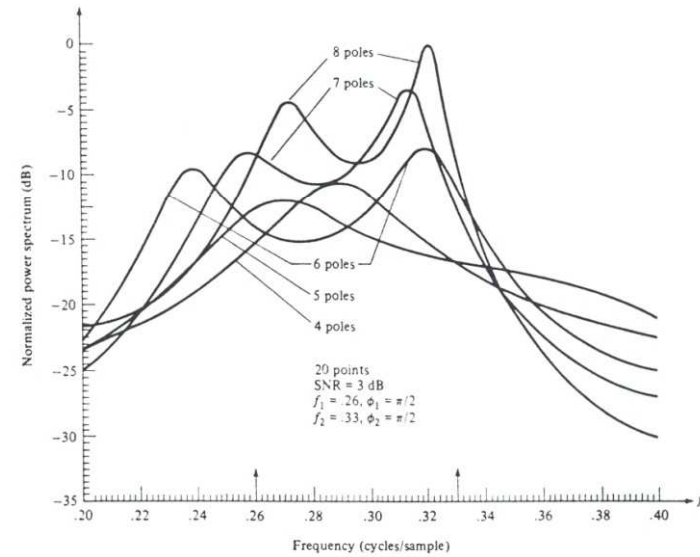


FIGURE 8.13 Line splitting in Burg method.



# KOMENTÁŘE K ILUSTRACÍM

## ☑ parazitní vrcholy

pokud by byl analyzovaný proces přesně typu AR(p), pak koeficienty modelu

$$\hat{a}_p(i) = \begin{cases} a_p(i) & i = 1, 2, \dots, p \\ 0 & i = p + 1, \dots, n \end{cases}$$

protože to tak není  $\hat{a}_p(i) \neq 0$  pro  $i > p \Rightarrow$  existuje  $n-p$  pólů navíc; pokud jsou tyto nadbytečné póly v blízkosti jednotkové kružnice, projeví se ve spektru

**doporučení:** řád modelu by neměl být větší než  $N/2$ ;  $N$  je počet vzorků v záznamu

## ☑ fázová závislost

- u AR modelů klesá s délkou posloupnosti;
- různá pro různé odhady (u Burgova odhadu je až 16 %);
- pomáhá woknování;

# KOMENTÁŘE K ILUSTRACÍM

## ☑ štěpení spektrálních čar

u Burgova algoritmu, když je:

- vysoký SNR;
- počáteční fáze sinové složky je rovna lichému násobku  $45^\circ$ ;
- doba záznamu je taková, že obsahuje lichý počet čtvrtin periody harmonické složky;
- AR parametrů je velký počet ve srovnání s počtem vzorků v sekvenci  $\Rightarrow$  roste-li počet vzorků relativně vůči řádu modelu, štěpení vrcholů se omezuje;
- vysvětluje se tím, že Burgův algoritmus optimálně neminimalizuje chybu

# KOMENTÁŘE K ILUSTRACÍM

## ☑ citlivost na šum

stejnosečná složka a lineární trend znehodnocuje spektrum na nízkých kmitočtech – **odstranit předem !!!**

zobecnění problému:

$y_n = x_n + w_n$  a necht' je  $w_n$  bílý šum s rozptylem  $\sigma_w^2$  a je nekorelovaný s  $x_n$ ;

pak výkonové spektrum

$$\hat{P}_y(f) = \frac{T_{vz} \cdot \sigma_x^2}{\left| 1 + \sum_i a_p(i) \cdot e^{-j2\pi f i T_{vz}} \right|^2} + \sigma_w^2 T_{vz}$$

$$\hat{P}_y(f) = \frac{T_{vz} \cdot \sigma_x^2}{A(z) \cdot A^*(1/z^*)} + \sigma_w^2 T_{vz} = \frac{[\sigma_x^2 + \sigma_w^2 A(z) \cdot A^*(1/z^*)] T_{vz}}{A(z) \cdot A^*(1/z^*)}$$

**!!! tohle už ale není přenosová funkce AR, alébrž ARMA !!!**

# KOMENTÁŘE K ILUSTRACÍM

## ☑ citlivost na šum – pokračování

Ize si pomoci:

1. použitím ARMA odhadu (o tom se dozvíme později);
2. odfiltrováním šumu (nejdříve je potřeba určit vlastnosti šumu);
3. použitím AR odhadu vyššího řádu

za tím je Woldova dekompozice

vzhledem k doporučení omezujícímu štěpení vrcholů (řád menší než polovina počtu vzorků), nelze řád modelu zvyšovat bezhlavě;

4. kompenzovat odhad AK funkce nebo reflexních koeficientů vzhledem k šumu

# MODEL SIGNÁLU PRŮCHODEM LINEÁRNÍ SOUSTAVOU

- ☑ dekompoziční teorém (Wold 1938)
  - jakýkoliv ARMA nebo MA proces může být jednoznačně reprezentován AR modelem max.  $\infty$  řádu;
  - jakýkoliv ARMA nebo AR proces lze reprezentovat MA modelem max.  $\infty$  řádu;

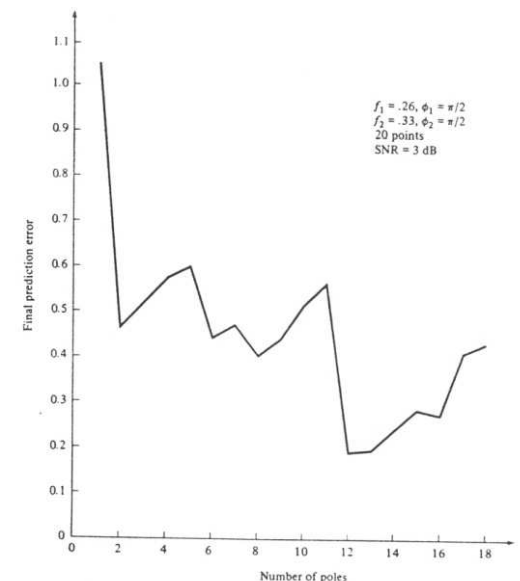


je nám jedno, co použijeme za model, jen by měl mít co nejméně parametrů, které se snadno počítají



# URČENÍ ŘÁDU AR MODELU

- ☑ řád nebývá znám apriori, je třeba jej odhadnout – je-li nízký – spektrum se vyhlazuje, je-li vysoký – zvýšený výskyt parazitních detailů
    - ➔ první možnost – zvyšovat řád, dokud predikční chyba nebude minimální
      - ☐ všechny LMS metody mají teoreticky monotónně klesající chybu
- $E_i = E_{i-1}[1 - |a_i(i)|^2] \dots$  Y.-W. metoda



# URČENÍ ŘÁDU AR MODELU

→ kritéria, která vykazují extrém se zvyšováním řádu modelu

## konečná predikční chyba

(final prediction error – FPE) – Akaike

$$FPE_p = E_p \cdot \frac{N+p+1}{N-(p+1)} \quad N \text{ je počet vzorků}$$

zlomek roste s  $p \rightarrow N$ , protože roste neurčitost odhadu  $E_p$ ;  
paráda na umělých datech čistých AR procesů; na reálných datech příliš malé

## Akaikovo informační kritérium (AIC)

pro normální rozložení

$AIC_p = \ln(E_p) + 2(p+1)/N$ , někdy  $\ln(E_p) + 2p/N$ ;  
druhý člen vyjadřuje cenu použití zbytečných AR koeficientů;  
AIC je statisticky nekonzistentní odhad; pravděpodobnost chyby odhadu řádu nejde k nule, když  $N \rightarrow \infty$

# URČENÍ ŘÁDU AR MODELU

→ kritéria, která vykazují extrém se zvyšováním řádu modelu

**minimalizace délky popisu** (Rissanenovo informační kritérium)  
(minimization of the description length – MDL)

$$\text{MDL}_p = N \cdot \ln(E_p) + p \cdot \ln(N)$$

je statisticky konzistentní;

**kritérium AR přenosu** (Parzenovo kritérium)

(criterion AR transfer – CAT)

$$\text{CAT}_p = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^p \frac{1}{\hat{E}'_k} - \frac{1}{\hat{E}_p}, \quad \hat{E}'_k = \frac{N}{N-k} \cdot \hat{E}_k$$

- pro krátké posloupnosti nefunguje nic;  $p \in \langle N/3; N/2 \rangle$ ;
- pro harmonický proces v šumu – FPE a AIC – malé  $p$ , je-li SNR vysoký;