

# Matematika s programem Maple

Jaroslav Urbánek

Listopad 2012

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod do systému Maple</b>	<b>6</b>
1.1	Systém Maple	6
1.1.1	Standardní zápisník (Standard Worksheet)	6
1.1.2	Klasický zápisník (Classic Worksheet)	7
1.1.3	Příkazový řádek a kalkulačka Maple	8
1.1.4	Document Mode, Worksheet Mode	9
1.1.5	Math Mode, Text Mode	9
1.2	Základní ovládání systému	10
1.2.1	Vyhodnocení příkazů	11
1.2.2	Palety	11
1.2.3	Názvy symbolů	12
1.3	Nápověda	13
1.3.1	Tour of Maple, Quick Reference, Quick Help	13
1.3.2	What's New, Startup Dialog	13
1.3.3	Manuals, Resources, and more	14
1.3.4	Pomocníci, instruktoři a řešené úlohy	15
1.3.5	Příkaz ? (otazník)	15
1.4	Provádění výpočtů	16
1.4.1	Příkazy	17
1.4.2	Označení výsledků	18
1.4.3	Přiřazení hodnot do proměnných	20
1.4.4	Balíky	21
1.4.5	Řešení rovnic	23
<b>2</b>	<b>Matematická analýza s Maple v <math>\mathbb{R}</math></b>	<b>28</b>
2.1	Výrazy a jejich úpravy	28
2.1.1	Zjednodušení výrazu	28
2.1.2	Omezující podmínky	28
2.1.3	Úprava polynomu	29
2.1.4	Převod výrazu na jiný tvar	29
2.2	Funkce jedné proměnné	34
2.2.1	Definice funkce	34
2.2.2	Vlastnosti funkcí	36
2.2.3	Inverzní funkce	39
2.2.4	Složená funkce	41
2.3	Vykreslení grafu funkce	41
2.3.1	Vykreslování	41
2.3.2	Animace	46
2.4	Limita a spojitost funkce	48

2.5	Derivace funkce . . . . .	54
2.5.1	Diferenciál . . . . .	58
2.5.2	Taylorův polynom . . . . .	59
2.6	Vyšetření průběhu funkce . . . . .	63
2.7	Integrál funkce . . . . .	72
2.7.1	Neurčitý integrál . . . . .	72
2.7.2	Metoda per partes . . . . .	73
2.7.3	Substituční metoda . . . . .	73
2.7.4	Určitý integrál . . . . .	76
2.7.5	Aplikace určitého integrálu . . . . .	80
2.7.6	Nevlastní integrál . . . . .	90
<b>3</b>	<b>Matematická analýza s Maple v <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>94</b>
3.1	Funkce více proměnných . . . . .	94
3.1.1	Definice funkce více proměnných . . . . .	94
3.1.2	Vykreslení funkce dvou proměnných . . . . .	94
3.1.3	Definiční obor funkce dvou proměnných . . . . .	96
3.2	Limita a spojitost funkce více proměnných . . . . .	101
3.2.1	Limita funkce . . . . .	101
3.2.2	Spojitosť funkce . . . . .	105
3.3	Parciální derivace funkce více proměnných . . . . .	106
3.3.1	Směrové derivace . . . . .	109
3.3.2	Diferenciál . . . . .	110
3.3.3	Taylorův polynom . . . . .	113
3.4	Extrémy funkce více proměnných . . . . .	114
3.4.1	Lokální extrémy . . . . .	114
3.4.2	Absolutní extrémy . . . . .	119
3.5	Vícerozměrný integrál . . . . .	123
3.5.1	Geometrická aplikace dvojného integrálu . . . . .	130
3.5.2	Geometrická aplikace trojného integrálu . . . . .	135
3.5.3	Transformace souřadnic ve dvojném a trojném integrálu . . . . .	138
3.6	Nekonečné řady . . . . .	139
3.6.1	Absolutní konvergence řad . . . . .	147
<b>4</b>	<b>Lineární algebra s Maple v <math>\mathbb{C}^n</math>.</b>	<b>150</b>
4.1	Vektorové prostory . . . . .	150
4.1.1	Vektory . . . . .	150
4.1.2	Matice . . . . .	155
4.1.3	Soustavy lineárních rovnic . . . . .	160
4.1.4	Gaussova eliminace . . . . .	164
4.1.5	Determinant . . . . .	168
4.2	Lineární zobrazení . . . . .	173
4.3	Afinní geometrie . . . . .	173
<b>5</b>	<b>Chyby</b>	<b>174</b>
5.1	Chybové zprávy (Error Messages) . . . . .	174
5.1.1	Math mode / Text mode . . . . .	174
5.1.2	Chybné argumenty příkazů . . . . .	174
5.1.3	Nesprávné použití závorek . . . . .	176
5.1.4	Nesprávné přiřazení . . . . .	176

5.1.5	Dělení nulou . . . . .	177
5.1.6	Nesprávný zápis mocnin . . . . .	177
5.1.7	Nesprávné použití objektů . . . . .	177
5.1.8	Nesprávné definice a použití funkcí . . . . .	177
5.1.9	Chyby při vykreslování . . . . .	179
5.1.10	Další chybové zprávy . . . . .	179
5.2	Varování (Warnings) . . . . .	180
5.3	Ostatní chyby . . . . .	181
5.3.1	Nenačtení balíku (knihovny) . . . . .	181
5.3.2	Nesprávné používání některých symbolů . . . . .	181
<b>6</b>	<b>Návody k řešení příkladů</b>	<b>183</b>
6.1	Úvod do systému Maple . . . . .	183
6.2	Matematická analýza s Maple v $\mathbb{R}$ . . . . .	184
6.3	Matematická analýza s Maple v $\mathbb{R}^n$ . . . . .	199
6.4	Lineární algebra s Maple v $\mathbb{C}^n$ . . . . .	220



# Předmluva

Učební text Matematika s programem Maple vznikl přepracováním původního díla „Matematická analýza – cvičení s použitím Maple“, které vzešlo z řešení projektu FRVŠ č. 2785/2010, rozšířením o některé nové funkcionality přítomné v později vydaných verzích systému Maple, tj. verzích 15 a 16, a doplněním o kapitoly věnované lineární algebře a diferenciálním rovnicím. Současně byly odstraněny některé známé nedostatky předchozího textu.

Nejviditelnější změnou uvedenou v Maple 16 je vylepšení vizualizace. Veškeré grafy vypadají mnohem lépe a profesionálněji. Další novinkou jsou matematické aplikace zvané *Math Apps* přinášející interaktivní výukové demonstrační dokumenty. Oproti verzi Maple 14 byly také vylepšeny různé pomocné nástroje jako např. *InverseTutor* pro vykreslení funkce a její inverze do jednoho grafu spolu s osou symetrie.

V matematice je zvykem vynechávat symbol pro násobení, tečku, mezi výrazy, které spolu násobíme. Dostáváme tak např. výrazy  $3x$ ,  $2\pi$ ,  $xy$  ve skutečnosti představující  $3 \cdot x$ ,  $2 \cdot \pi$ ,  $x \cdot y$ . Přestože je současná verze systému Maple již natolik „chytrá“ a umí s výrazy tímto způsobem pracovat (tj. vynechávat symbol pro násobení), je při tom třeba velké opatrnosti a především začínajícím uživatelům vynechávání symbolu pro násobení nemůžeme doporučit. Z tohoto důvodu je ve všech příkazech systému Maple i v samotném textu důsledně dodržováno vkládání symbolu pro násobení, byť to někdy působí nezvykle (viz např.  $2 \cdot \pi$ ).

TATO VERZE TEXTU JEŠTĚ NENÍ DOKONČENA.

POSLEDNÍ AKTUALIZACE: 5. 11. 2012.

# 1 Úvod do systému Maple

## 1.1 Systém Maple

Systém Maple je výkonný program pro řešení jednoduchých i složitějších matematických problémů. S jeho pomocí také můžeme vytvářet dokumenty vysoké kvality, prezentace a interaktivní uživatelské nástroje. Maple patří do skupiny systémů počítačové algebry umožňující jak symbolické, tak numerické výpočty. Systém navíc obsahuje komponenty podporující výuku matematiky.

Výrobce systému je kanadská společnost Maplesoft Inc., jejíž webové stránky<sup>1</sup> poskytují široké informace o systému a jeho dalších příbuzných programech jako je MapleSim, MapleNet, Maple T.A. a mnoho dalších nástrojů a programů. Webové stránky mimo jiné obsahují tzv. *Aplikační centrum*<sup>2</sup> (Application Center), z něž si může každý zaregistrovaný uživatel stáhnout ukázkové programy demonstrující použití systému Maple při řešení mnoha různých matematických i technických problémů. Poskytují i tzv. *Studentské centrum*<sup>3</sup> (Student Help Center), kde si zaregistrovaný student může stáhnout mnoho studijních materiálů. Dalšími významnými zdroji informací o Maple jsou diskuzní fórum uživatelů Maple<sup>4</sup> a web distributora Maple pro Českou a Slovenskou republiku<sup>5</sup>, kde je většina dokumentů v českém jazyce [5], [9].

Systém Maple je vyvíjen od roku 1980, v němž se objevila jeho první limitovaná verze. Přelomovým obdobím byly roky 2003–2005, v nichž vznikla devátá a následně desátá verze Maple 10 přinášející nové grafické uživatelské rozhraní zvané *Standard Worksheet* a poté tzv. dokumentový režim (*Document mode*). Díky nim se ovládání systému Maple stalo výrazně jednodušším. V současné době vzniká každý rok nová verze, v době psaní této inovované a rozšířené verze původního textu byla na trhu nejnovější verze Maple 16. Budeme proto prezentovat možnosti právě zmíněné nejnovější verze systému, nicméně naprostá většina příkazů a funkcí, jež budeme používat, je v Maple dostupná již od dřívějších verzí systému (zejména od přelomové desáté verze).

Se systémem je možné pracovat několika různými způsoby, které volíme při spuštění programu ze startovacího menu počítače nebo kliknutím na příslušnou ikonu na ploše. Maple je k dispozici pro různé operační systémy. V následujícím textu popíšeme, jak program spouštíme v nejrozšířenějším operačním systému Windows.

### 1.1.1 Standardní zápisník (Standard Worksheet)

Grafické uživatelské rozhraní Maple zvané *Standard Worksheet* se spustí ze startovacího menu počítače výběrem položky **Programy** > **Maple 16** > **Maple 16** nebo kliknutím

---

<sup>1</sup><http://www.maplesoft.com>

<sup>2</sup><http://maplesoft.com/applications/index.aspx>

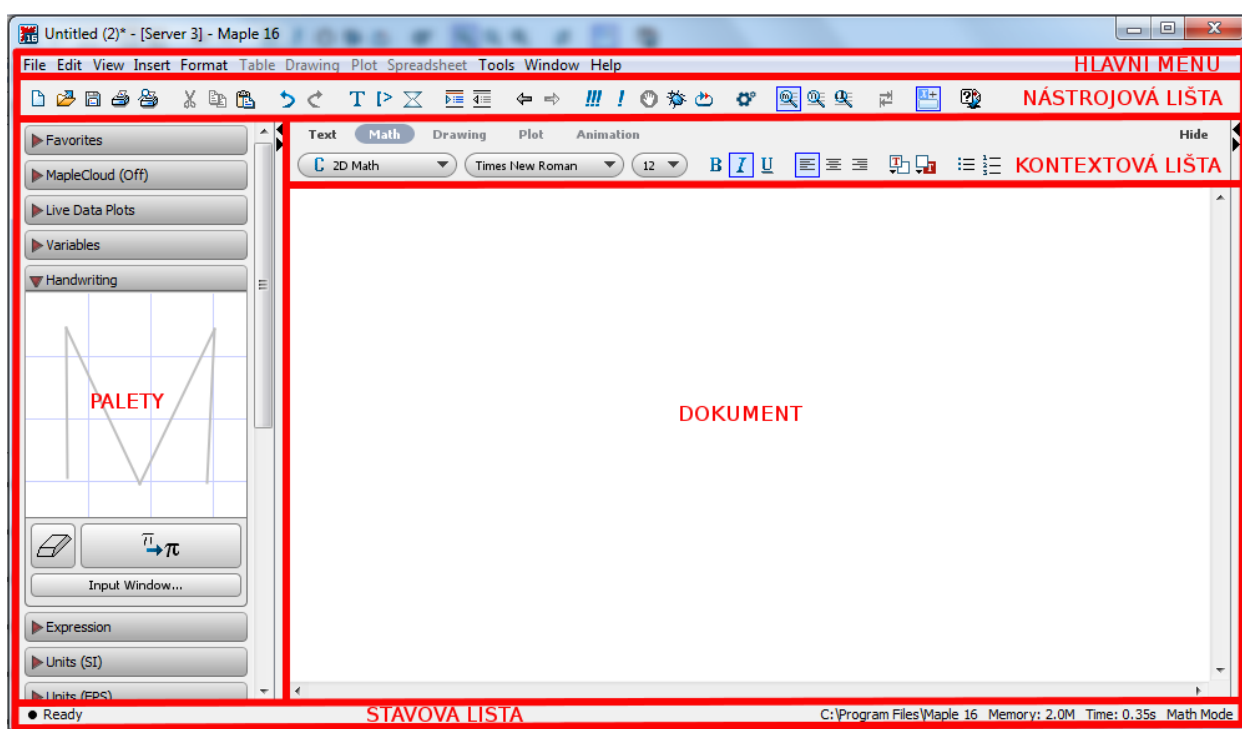
<sup>3</sup><http://maplesoft.com/studentcenter/index.aspx>

<sup>4</sup><http://www.mapleprimes.com>

<sup>5</sup><http://www.maplesoft.cz>

na ikonu **Maple 16** na ploše. Toto prostředí poskytuje veškeré možnosti systému Maple a pomáhá vytvářet elektronické dokumenty (zápisníky) zobrazující matematické výpočty, texty a komentáře spolu s propracovanou počítačovou grafikou. Některé je možné v zápisníku „schovat“ a nechat „odkryté“ jen nejdůležitější pasáže tak, aby dokument poskytoval uživateli potřebné informace. Jelikož jsou vytvořené dokumenty interaktivní, tj. v jistém smyslu „živé“, může si uživatel sám upravovat předdefinované hodnoty parametrů, vyhodnocovat příkazy, a získávat tak nové výsledky.

Menu zápisníku Maple má tři vodorovné lišty: *hlavní menu* (*Menu Bar*, zcela nahoře), *nástrojovou lištu* (*Toolbar*, pod hlavním menu) a *kontextovou lištu* (*Context Bar*, pod nástrojovou lištou). Zápisník dále obsahuje *palety* (*Palettes*, svislý blok na levé straně<sup>6</sup>), vlastní pracovní pole – *dokument* (*Document*), do nějž zadáváme příkazy, texty, provádíme výpočtové a grafické akce, a *stavovou lištu* (*Status Bar*, zcela dole). Vlastní pracovní pole je možné zobrazit přes celou obrazovku skrytím palet a všech lišt (kromě hlavního menu) kliknutím na příslušné položky v záložce **View** hlavního menu.

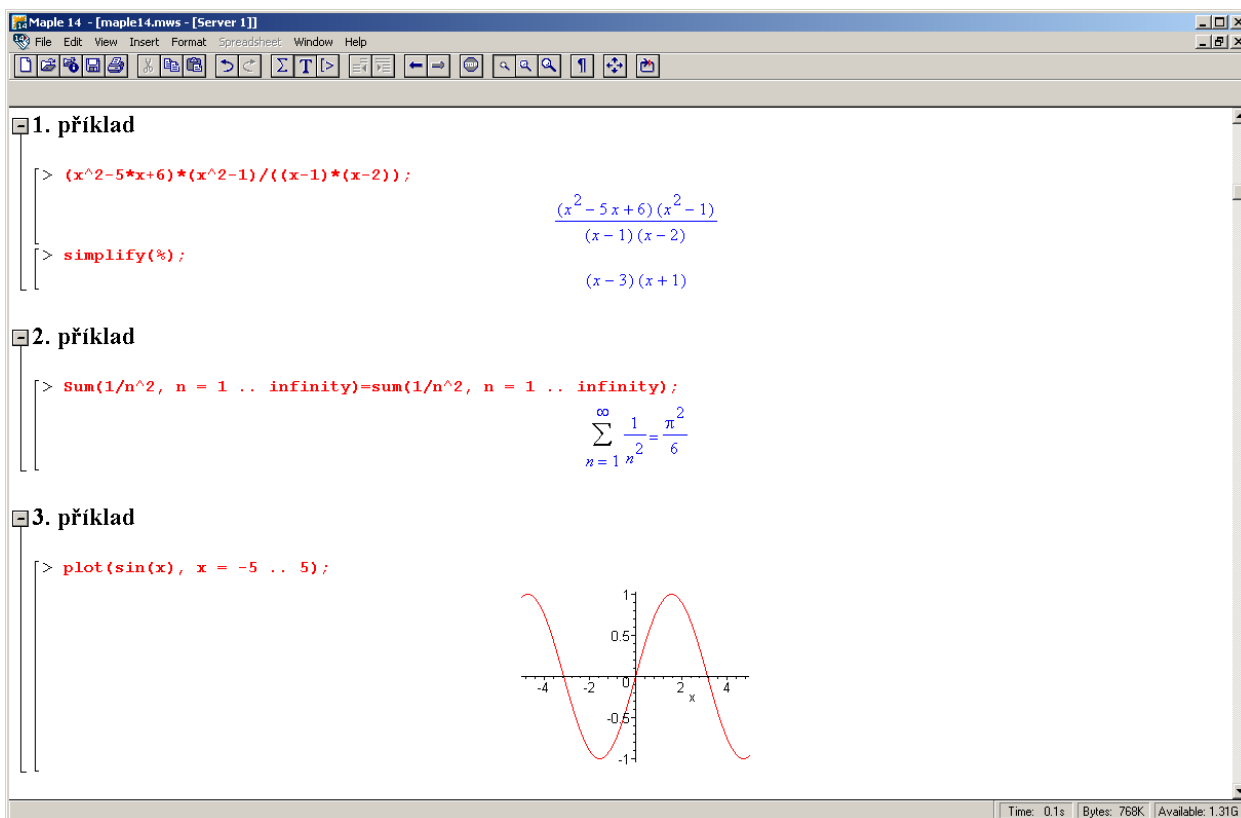


Obrázek 1.1: Maple 16: Prostředí Standard Worksheet.

### 1.1.2 Klasický zápisník (Classic Worksheet)

U 32bitových operačních systémů je k dispozici též tzv. *Classic Worksheet*, který se spustí ze startovacího menu počítače výběrem položky **Programy > Maple 16 > Classic Worksheet Maple 16** nebo kliknutím na ikonu **Classic Worksheet Maple 16** na ploše. Tento zápisník Maple je určen především pro méně výkonné počítače s omezenou pamětí. Neposkytuje také všechny funkce, příkazy a možnosti systému Maple jako *Standard Worksheet* [5].

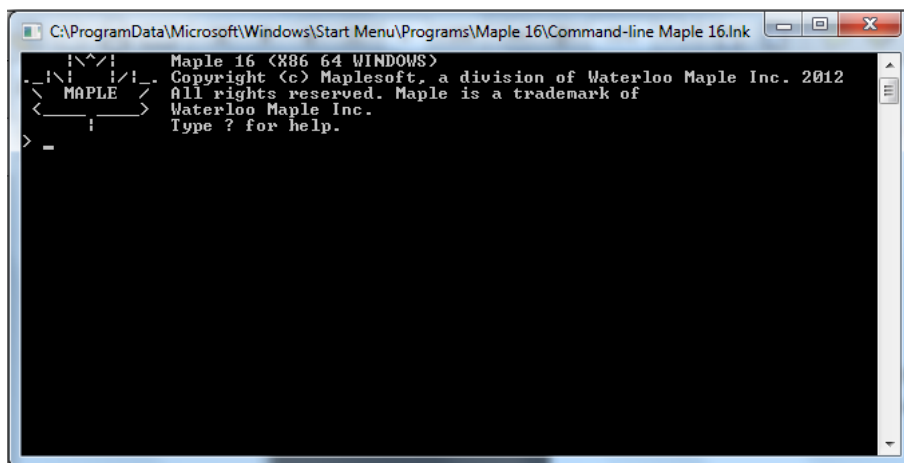
<sup>6</sup>Palety se automaticky zobrazují v levém bloku. Prostředí systému nabízí blok pro palety i po pravé straně obrazovky (automaticky zavřený), kam je možné některé (ale i všechny) přesunout.



Obrázek 1.2: Prostředí Classic Worksheet v Maple 14 (převzato z [5]).

### 1.1.3 Příkazový řádek a kalkulačka Maple

Se systémem Maple můžeme pracovat i pouze v režimu tzv. *příkazového řádku* spustitelného ze startovacího menu počítače výběrem položky **Programy** > **Maple 16** > **Command-line Maple 16**. Příkazový řádek je určen k řešení rozsáhlých a složitých úloh. K dispozici přitom nejsou žádné grafické prvky.



Obrázek 1.3: Maple 16: Příkazový řádek.

Dále je možné používat (a vytvářet) tzv. *maplety*, tj. grafická uživatelská rozhraní obsahující okénka, textová pole a další vizuální prvky umožňující pouhým klikáním spouštět výpočty. *Kalkulačka* systému Maple je speciální typ mapletu, který je k dispozici pouze

pro operační systémy Windows. Spouští se ze startovacího menu počítače, kde se vybere **Programy > Maple 16 > Maple Calculator** [5].

### 1.1.4 Document Mode, Worksheet Mode

Dále se budeme věnovat pouze rozšířenému prostředí *Standard Worksheet*. V tomto prostředí je možné pracovat ve dvou základních režimech: *Worksheet Mode* a *Document Mode*. Prvně jmenovaný odpovídá prostředí *Classic Worksheet*, v němž je každý příkaz Maple uvozen symbolem `>` a musí být ukončen středníkem (výsledek se zobrazí na dalším řádku uprostřed) nebo dvojtečkou (výsledek se nezobrazí). Otevírá se v hlavním menu zvolením **File > New > Worksheet mode**. *Document Mode* poskytuje přehlednější zápis příkazů a matematických vzorců bez „přebytečných“ symbolů. Při otevření nového souboru z nástrojové lišty je automaticky spuštěn právě tento režim, jinak je možné jej též otevřít z hlavního menu v položce **File > New**.

Obvykle je zápisník nastaven do jednoho režimu<sup>7</sup>, který je možné zvolit při otvírání nového souboru v hlavním menu (**File > New > ...**). Existuje však i možnost přepínat mezi režimy v rámci jednoho zápisníku, kdy je část vytvořena v jednom režimu, část v jiném. Z *Document Mode* se přepneme do *Worksheet Mode* kliknutím na ikonku `>` v nástrojové liště. Naopak z *Worksheet Mode* se do režimu *Document Mode* přepneme výběrem položky v hlavním menu (**Format > Create Document block**) [5].

Zápis v režimu <i>Document Mode</i>	Zápis v režimu <i>Worksheet Mode</i>
Tento text je v režimu <b>Text Mode</b> . Stiskem klávesy <b>Enter</b> jsme se dostali na další řádek. Na následujícím řádku se přepneme do režimu <b>Math Mode</b> .	Tento text je též v režimu <b>Text Mode</b> . Tento text je v režimu <b>Math Mode</b> .
příkaz	
příkaz	
nějaký text	
nějaký text	
256·125	
32000	
$\text{solve}(x^2 - 7x + 12 = 0)$	
4, 3	
	<code>&gt;</code> příkaz
	příkaz
	<code>&gt;</code> <b>příkaz;</b>
	příkaz
	<code>&gt;</code> 256·125
	32000
	<code>&gt;</code> <b>256*125;</b>
	32000

Obrázek 1.4: Režimy zápisu (převzato z [5]).

### 1.1.5 Math Mode, Text Mode

Pro rozlišení příkazů a obyčejného textu slouží kontextová lišta zápisníku, kde máme na výběr *Text Mode* a *Math Mode*. *Math Mode* odpovídá příkazům (po stisku klávesy **Enter** dojde k vyhodnocení), v *Text Mode* píšeme texty dokumentu podobně jako např. v textovém editoru (po stisku klávesy **Enter** přejdeme na nový řádek bez jakéhokoli vyhodnocení). Volit režim zápisu můžeme buď kliknutím myši (v kontextové liště nad dokumentem jsou uvedeny

<sup>7</sup>Ten zpravidla volíme při prvním spuštění po instalaci systému nebo jej můžeme následně nastavit v hlavním menu: **Tools > Options... > Interface**.

názvy představující jednotlivé možnosti) nebo výběrem položky v hlavním menu (**Edit > Switch to Text/Math Mode**). Totéž lze rychleji provést klávesou **F5**.

V režimu *Worksheet Mode* lze pro text i pro příkazy použít oba druhy zápisu. Pro psaní textu je nutné kliknout na ikonku **T** v nástrojové liště nebo zvolit položku v hlavním menu (**Insert > Text**). Podobně pro zápis příkazů jazyka Maple je nutné kliknout na ikonku **[>** v nástrojové liště nebo zvolit položku v hlavním menu (**Insert > Maple Input**). Při otevření nového souboru je zápisník automaticky nastaven na psaní příkazů.

K příkazům máme dále možnost zapisovat komentáře uvedením symbolu mřížky (**#**) před text, který má být komentářem (viz obrázek 1.5) [5].

```
256·125 # nějaký komentář
                                32000
[> 256*125; # nějaký komentář
                                32000
[>
```

Obrázek 1.5: Zápis komentáře v příkazovém režimu (převzato z [5]).

## 1.2 Základní ovládání systému

Již víme, jak spustit systém Maple a jak zvolit pracovní prostředí, které chceme. Otevřít již vytvořený program můžeme z hlavního menu (**File > Open...**) nebo spuštěním programu rovnou z operačního systému (prostřednictvím nějakého souborového manažeru). Když chceme vytvořený dokument uložit, zvolíme položku **File > Save** (resp. **File > Save As...**) v hlavním menu systému Maple. Dokumenty prostředí *Standard Worksheet* mají příponu *mw*, dokumenty prostředí *Classic Worksheet* příponu *mws*. V prostředí *Standard Worksheet* je možné otevřít oba typy souborů, v prostředí *Classic Worksheet* pouze typ *mws*.

Maple poskytuje také možnost exportovat dokumenty jako soubory jiných typů. Podporovány jsou typy: *HTML*, *PDF*, *LaTeX*, *Maple Input*, *Maplet*, *Maple Text*, *Plain Text*, *Maple T.A.* a *Rich Text Format*. Pro export dokumentu vybereme položku **Export As...** ze záložky **File** v hlavním menu.

Nyní si ukážeme, jak v *Document Mode* zadávat jednoduché příkazy. Budeme proto předpokládat, že zápisník je již nastaven pro psaní příkazů (*Math Mode*).

**Základní operace:** pro sčítání používáme symbol plus (+), pro odčítání mínus (−), pro násobení (\*), ale pozor, pro dělení musíme používat pouze lomítko (/), dvojtečka (:) má jiný význam (viz dále).

**Zadání zlomku:** zadáme číselník, lomítko (/) a jmenovatel. Pro opuštění zápisu jmenovatele stačí stisknout šipku doprava (ve zlomku je též možno pohybovat se šipkami).

**Zadání mocniny:** zadáme základ, symbol stříška (^) a exponent. Pro opuštění zápisu exponentu je opět možné použít šipku doprava.

## 1.2.1 Vyhodnocení příkazů

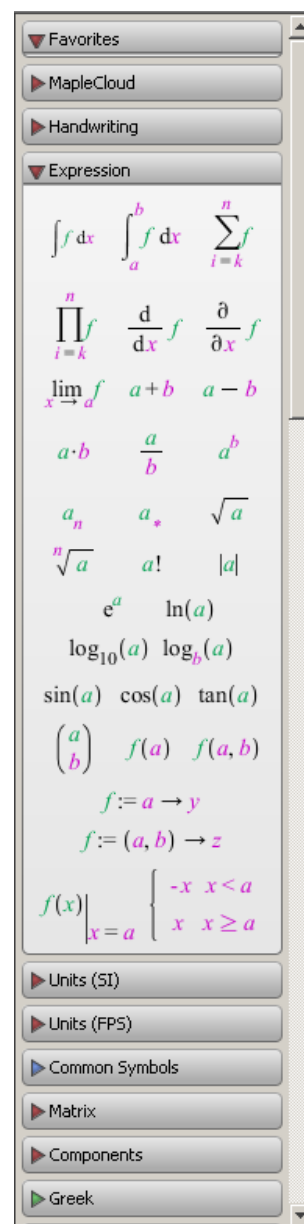
Příkaz vyhodnotíme stiskem klávesy **Enter**. Výsledek se zobrazí na dalším řádku uprostřed. V dřívějších verzích (méně než 10) systému Maple bylo nutné příkaz ukončovat středníkem, aby se provedl. Tato možnost nadále zůstala (tj. zadáme-li za příkaz středník, „nic nepokazíme“) a v některých situacích je dokonce jediná možná – např. textový režim (*Text Mode*) příkazů v *Worksheet Mode* nebo při psaní příkazů v prostředí *Classic Worksheet*. Z předešlých verzí Maple se uchovala i funkcionality symbolu dvojtečka (:), která po zařazení za příkaz a následného stisku klávesy **Enter** potlačí zobrazení výsledku na dalším řádku (tj. příkaz se vyhodnotí, ale na obrazovku se nic nevypíše). Proto není možné dvojtečku používat jako operátor dělení. V *Document Mode* je navíc možné zapisovat příkaz i s výsledkem na jeden řádek. Po napsání příkazu k tomu stačí namísto stisku klávesy **Enter** použít klávesovou zkratku „**Ctrl** + =“.

Jak bylo zmíněno dříve, interaktivní dokumenty v Maple jsou „živé“. Tím máme na mysli skutečnost, že i v dříve vytvořeném dokumentu s vyhodnocenými příkazy otevřeném po libovolně dlouhé době můžeme kterýkoli výraz upravit, znovu vyhodnotit (stisknout **Enter** nebo „**Ctrl** + =“) a dostaneme nový výsledek. Označíme-li myší několik (libovolně mnoho) příkazů a stiskneme ikonku **!** (vykřičník) z nástrojové lišty, všechny označené příkazy budou postupně vyhodnoceny. K vyhodnocení všech příkazů v dokumentu slouží ikonka **!!!** (tři vykřičníky).

Maple obsahuje více než tisíc symbolů, pomocí nichž můžeme tvořit matematické výrazy a typograficky kvalitní text. Patří mezi ně písmena a číslice, jimiž vytváříme jména (posloupnost znaků začínající písmenem, za kterým může následovat kombinace písmen, čísel a vybraných symbolů), reálná čísla (celá, racionální, iracionální, s desetinou tečkou nebo v notaci pohyblivé řádové čárky), komplexní čísla, aritmetické, booleovské a jiné operátory (+, −, !, /, \*,  $f$ , lim, ...), konstanty ( $\pi$ ,  $e$ , ...), imaginární jednotku, nekonečno, matematické funkce ( $\cos(x)$ ,  $\sin(\frac{\pi}{3})$ , ...) a proměnné (pojmenované jménem ...). Velkou předností systému Maple je jeho schopnost symbolických matematických výpočtů. Některé z matematických symbolů, které můžeme použít, nejsou na klávesnici, a tak se zadávají buď z palety nebo pomocí svých názvů [5].

## 1.2.2 Palety

Palety jsou pojmenované „obdélníčky“ s nabídkou předdefinovaných symbolů, zápisů, výrazů apod. (obrázek 1.6), zpravidla při levém okraji zápisníku. Každá paleta obsahuje symboly příslušné skupiny. Například paleta s názvem *Expression* nabízí některé základní matematické výrazy, paleta *Greek* písmena řecké abecedy atd. Standardně zůstává několik palet nezobrazených. V hlavním menu (**View** > **Palettes**) můžeme seznam zobrazených palet upravit tím, že některé přidáme, odebereme, ale třeba i jinak seřadíme. Totéž lze provést jen za pomoci myši. Přidržením levého tlačítka vybranou paletu přesuneme na jiné místo, stisknutím pravého tlačítka vyvoláme stejnou nabídku, jako bychom postupovali přes hlavní menu. Kliknutí levého tlačítka myši na některou z palet zobrazí (příp. skryje) symboly, které paleta nabízí. Vložit z palety symbol



Obrázek 1.6: Palety.

do zápisníku pak stačí pouhým kliknutím, případně „přetáhnutím“ s pomocí levého tlačítka myši. Obecné barevně zvýrazněné symboly ve výrazu je možné dále specifikovat (upravovat) dosazením hodnoty, s níž potřebujeme pracovat [5].

**Příklad 1.1:** Vložte do dokumentu výraz  $\sum_{i=1}^{10} 2^i$ .

*Řešení:* Pro zapsání zadaného výrazu potřebujeme celkem dva různé symboly: *sumu* a *mocninu*. Sumační symbol nalezneme v paletě **Expression**. Kliknutím na tuto paletu ji otevřeme (na obrázku 1.6 je jako jediná otevřená) a vybereme z ní přítomný sumační symbol. Po jeho vložení do zápisníku pak jednoduše přepíšeme obecné symboly ( $k$ ,  $n$  a  $f$ ) požadovanými hodnotami. Pohybovat ve vzorci se můžeme pomocí šipek na klávesnici, s výhodou lze využít klávesy **Tab**, přitom k úpravě výrazu můžeme používat i všechny ostatní klávesy jako např. **Delete**, **Backspace**, **mezerník**, ... Znak  $f$  přepíšeme mocninným výrazem. To můžeme provést buď vložním dalšího symbolu z palety **Expression** (symbol  $a^b$ ) a následnou úpravou (specifikací hodnot  $a$ ,  $b$ ), nebo užitím již známé klávesy pro tvorbu mocnin – stříšky (^).

**Příklad 1.2:** Vložte do dokumentu výraz  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ .

**Příklad 1.3:** Vložte do dokumentu výraz  $\left| \frac{32^3 - 64^2}{17 \cdot 2^4} \right|$ .

**Příklad 1.4:** Vložte do dokumentu výraz  $\sqrt{\frac{\ln(e^5)! \cdot \sin(\frac{17 \cdot \pi}{2}) - 3 \cdot 13}{\sqrt{\log_2(16) - 1}}}$ .

### 1.2.3 Názvy symbolů

Mimo palet můžeme k zápisu symbolů užívat jejich názvů. Například symbol  $\pi$  vložíme zapsáním jeho názvu `Pi`<sup>8</sup>, pro odmocninu je vyhrazen název **sqrt**, takže  $\sqrt{x}$  vložíme napsáním `sqrt(x)`. Při vkládání symbolů pomocí názvů nebo při tvorbě příkazů se může hodit funkce „dokončování“. Pro zadání symbolu pak stačí napsat jeho úvodní písmeno (písmena) a pomocí klávesy **Esc** nebo kláves „**Ctrl** + **mezerník**“ následně z vyskakovacího okénka zvolit požadovaný příkaz. Na obrázku 1.7 je ukázka nabídky pro dokončení zápisu písmen **so** [5].

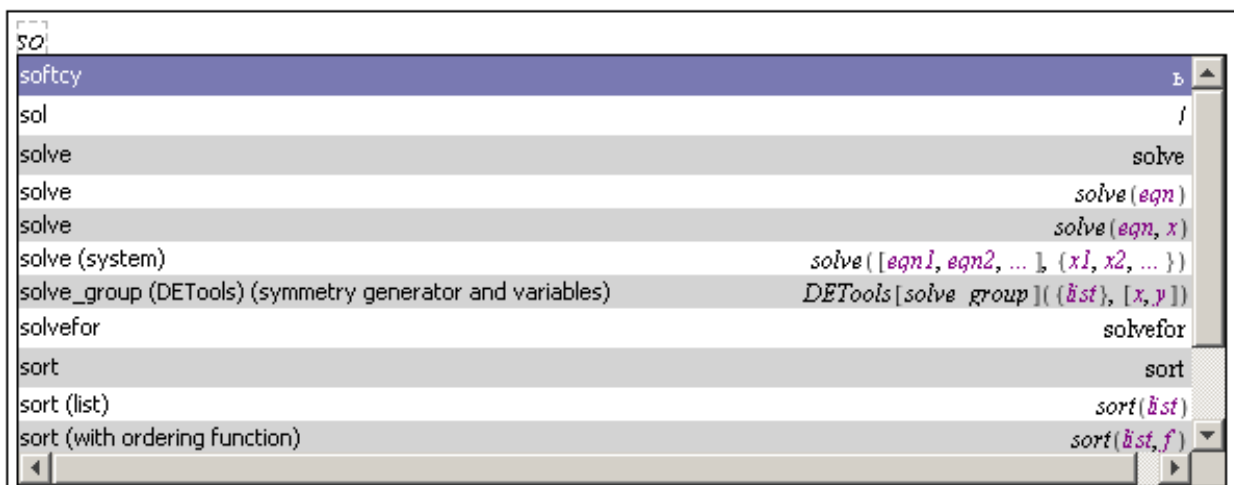
**Příklad 1.5:** Vložte do dokumentu výraz  $\left| \frac{32^3 - 64^2}{17 \cdot 2^4} \right|$  bez použití palet.

*Řešení:* Pro absolutní hodnotu z požadovaného výrazu použijeme příkaz **abs**, při zadávání mocnin využijeme symbolu stříšky (^). Výsledný zápis zadaného výrazu tedy bude: `abs((32^3-64^2)/(17*2^4))`.

**Příklad 1.6:** Vložte do dokumentu výraz  $\sqrt{\frac{\ln(e^5)! \cdot \sin(\frac{17 \cdot \pi}{2}) - 3 \cdot 13}{\sqrt{\log_2(16) - 1}}}$  bez použití palet.

<sup>8</sup>Maple rozlišuje malá a velká písmena. Například zápis `Pi` představuje Ludolfovo číslo  $\pi$  i s jeho hodnotou, zatímco zápis `pi` představuje pouze symbol (řecké písmeno)  $\pi$ .





Obrázek 1.7: Funkce automatického dokončování (převzato z [5]).

## 1.3 Nápověda

Významnou součástí systému Maple je jeho nápověda. K dispozici je několik různých typů nápovědy, které nejlépe najdeme v hlavním menu v nabídce **Help**. Základní stránky nápovědy zobrazíme výběrem položky **Maple Help**<sup>9</sup>.

Vyhledávat v nápovědě můžeme buď zadáním hledaného textu do textového pole v levé horní části okna (na obrázku 1.8 je v tomto poli zapsán text **abs**), nebo tematickým vyhledáváním v připravené stromové struktuře témat v levé části okna (na obrázku 1.8 je rozbalena Matematika a v ní téma Calculus, tedy Matematická analýza). Odkliknutím zadaného slova **abs** v textovém vyhledávacím poli nápovědy zobrazíme v hlavní části okna nápovědu právě k příkazu **abs**. Jak můžeme vidět na obrázku 1.8, nápověda obsahuje základní popis příkazu, obecný zápis příkazu pro jeho použití a konkrétní ukázkové příklady.

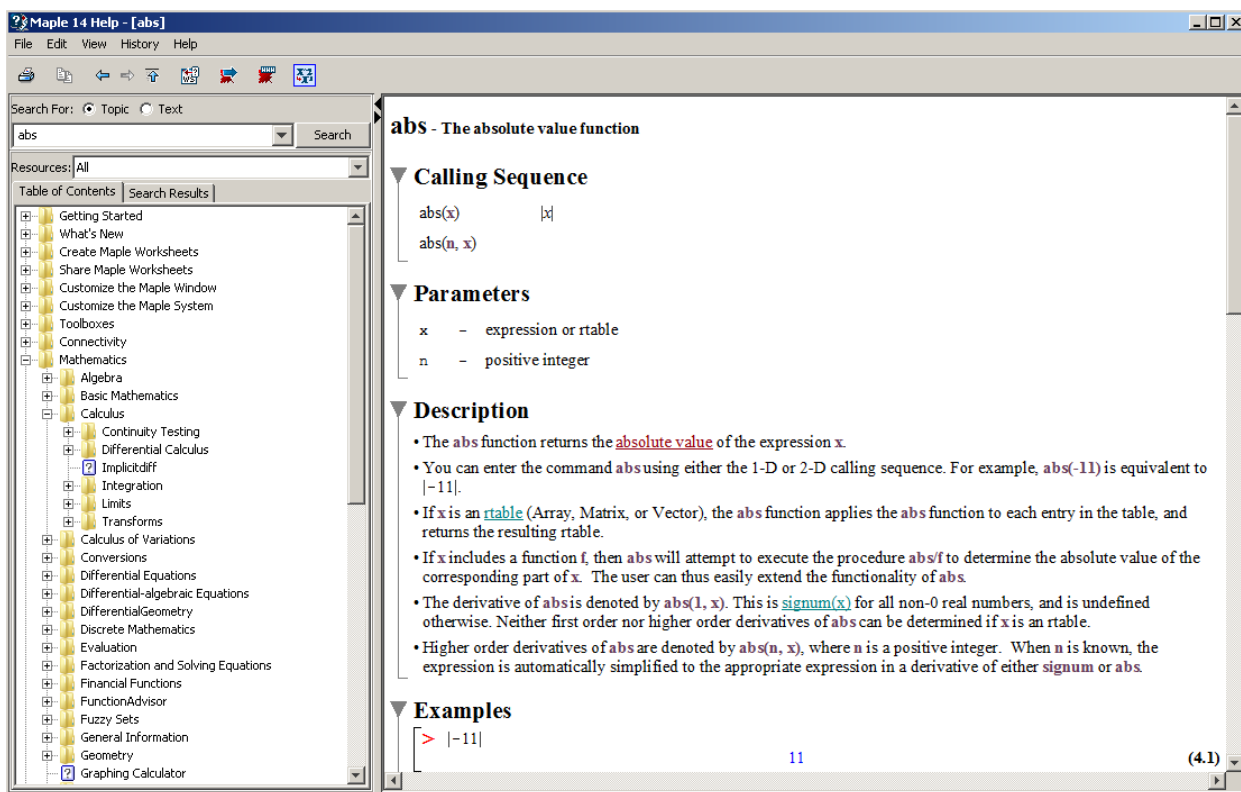
### 1.3.1 Tour of Maple, Quick Reference, Quick Help

Nabídka **Help** hlavního menu poskytuje ještě několik jiných forem nápovědy. Položka **Take a Tour of Maple** zobrazí interaktivní přehled systému (jeho nejdůležitějších prvků). Kliknutí na **Quick Reference** otevře tabulku informací o ovládní systému Maple, zejména pro nové uživatele. Jedná se o základní informace s odkazy do nápovědy **Maple Help** pro jejich případné doplnění. Položka **Quick Help** nabízí ještě stručnější tabulku než předchozí nápověda. Standardně se objevuje v každém novém zápisníku při pravé straně v podobě černého okénka (pokud toto nastavení nezrušíme). Po zavření je možné ji vyvolat stiskem klávesy **F1**, či jako položku v hlavním menu [5].

### 1.3.2 What's New, Startup Dialog

Dalšími druhy nápovědy jsou přehled rozšíření stávající verze Maple oproti předcházející verzi (dostupné přes **Help > What's New**) a tzv. **Startup Dialog** obsahující tipy pro práci se systémem Maple. **Startup Dialog** se zobrazuje vždy po spuštění systému (pokud toto nastavení nezrušíme) [5].

<sup>9</sup>Pro vyvolání této nápovědy můžeme také použít klávesovou zkratku „**Ctrl + F1**“, nebo poslední ikonku nástrojové lišty.



Obrázek 1.8: Hlavní nápověda systému Maple.

### 1.3.3 Manuals, Resources, and more

Vyvoláním **Manuals, Resources, and more** přejdeme do další oblasti nápovědy, z níž popíšeme tři nejdůležitější části.

#### Maple Portal

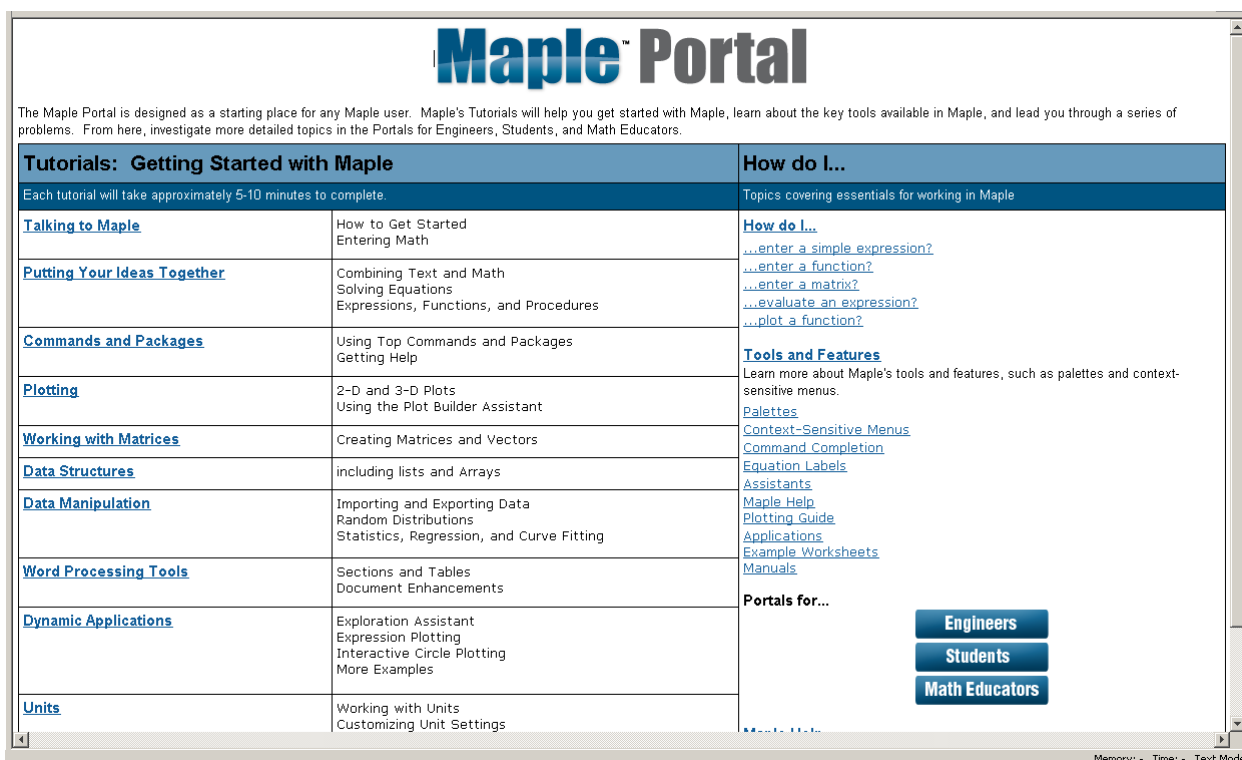
Od předcházející verze (tedy Maple 13) je k dispozici tzv. *Maple Portal*. Spustit jej můžeme samostatně (*Maple Portal* má vlastní ikonu na ploše) nebo přes nápovědu v hlavním menu (**Help > Manuals, Resources, and more > Maple Portal**). *Maple Portal* slouží jako pomocník novým i zkušenějším uživatelům hledajících pokročilejší nápovědu. Je v něm možné rychle najít detailní popis práce se systémem Maple od řešení nejjednodušších problémů až po velmi složité úlohy [5].

#### Applications and Examples

Z nápovědy je možno vyvolat i spustitelné soubory (tj. již vytvořené dokumenty) demonstující možnosti systému Maple. Otevřeme je přes nápovědu v hlavním menu (**Help > Manuals, Resources, and more > Applications and Examples**) a pak kliknutím na zvolený příklad [5].

#### Manuals

Dále je možné vyvolat anglické manuály **User manual**, **Introductory Programming Guide**, **Advanced Programming Guide** a **Getting Started with Maple Toolboxes** podrobně popisující možnosti systému Maple. Otevřeme je přes nápovědu v hlavním menu



Obrázek 1.9: Maple Portal (převzato z [5]).

(**Help** > **Manuals, Resources, and more** > **Manuals**) a pak kliknutím na zvolený manuál [5].

### 1.3.4 Pomocníci, instruktoři a řešené úlohy

System Maple poskytuje také již připravené „pomocné nástroje“ pro řešení úloh. Jsou to tzv. *Pomocníci* (*Assistants*), *Instruktoři* (*Tutors*) a *Úlohy* (*Tasks*), které vyvoláme z hlavního menu (**Tools** > **Assistants** nebo **Tools** > **Tutors** anebo **Tools** > **Tasks**). *Pomocníci* (*Assistants*) obsahují například nástroje pro hledání funkční závislosti v datech, optimalizaci funkcí, řešení diferenciálních rovnic a další. Pro daný typ úlohy mají implementováno několik často používaných algoritmů. Po vyvolání provedou uživatele nastavením a specifikací parametrů úlohy a zvolenou metodou úlohu vyřeší. *Instruktoři* (*Tutors*) provedou uživatele řešenou problematikou pomocí jednoduchých názorných příkladů. *Úlohy* (*Tasks*) zobrazují na příkladech, jak řešit různé úlohy. Zobrazí se vyvoláním z hlavního menu (**Tools** > **Tasks** > **Browse**) [5].

Od verze Maple 16 najdeme v záložce **Tools** hlavního menu také výukové demonstrační dokumenty pod názvem **Math Apps**. Tyto matematické aplikace byly vytvořeny ke znázornění různých matematických a fyzikálních konceptů. Každý z dokumentů obsahuje stručný popis příslušného konceptu a některé interaktivní prvky jako např. tlačítka, posuvníky, „klikatelné“ grafy apod.

### 1.3.5 Příkaz ? (otazník)

Symbol ? (otazník) je dalším ze způsobů zobrazení nápovědy. Zapsáním a provedením příkazu ? otevřeme hlavní stránku nápovědy. Otazník spolu s názvem příkazu otevře nápovědu na stránce týkající se zadaného příkazu. Tedy např. příkaz ?evalf otevře hlavní nápovědu

systému na stránce popisující syntaxi a sémantiku příkazu `evalf` spolu s příklady jeho použití. Zapsáním dvou otazníků na začátek příkazu otevřeme tutéž stránku nápovědy ve „sbaleném“ tvaru osnovy, v níž je možné otevřít (odkrýt) libovolné části. Zadáním tří otazníků před příkaz otevřeme nápovědu na příkladech použití tohoto příkazu [5].

Otevřít nápovědu na stránce zadaného příkazu (resp. klíčového slova) můžeme též stisknutím klávesy **F2** (za přítomnosti kurzoru na klíčovém slově).

**Příklad 1.7:** Zjistěte, k čemu slouží příkaz `sum` a jak se používá.

**Příklad 1.8:** Zjistěte, jak je možné v systému Maple pracovat s vektory a maticemi.

## 1.4 Provádění výpočtů

Maple provádí přesně numerické výpočty s celými, racionálními i iracionálními čísly. Každý zadaný matematický výraz se snaží zjednodušit (např. zlomek zkrátit a převést na základní tvar, upravit algebraický výraz, . . . ), ale ne za cenu ztráty přesnosti. To znamená, že například racionální čísla (zlomky) udržuje stále v jejich základním tvaru. Podobně s konstantami  $\pi$ ,  $e$  a dalšími, s odmocninami a jinými výrazy pracuje jako se symboly. Tímto je zaručena absolutní přesnost výpočtů i v případě, kdy nepracujeme pouze s celými čísly [5].

Jsou však situace, kdy potřebujeme znát přibližnou hodnotu reálného nebo racionálního čísla v pohyblivé řádové čárce. K tomu slouží příkaz `evalf`, jenž vrátí zaokrouhlenou hodnotu svého argumentu na počet platných cifer mantisy specifikovaný systémovou proměnnou `Digits`. Ta je standardně nastavena na hodnotu 10. Všechny výpočty, při nichž je nutné zaokrouhlovat čísla, provádí proto Maple s přesností na 10 platných míst. Proměnnou `Digits` můžeme nastavit na takřka libovolné přirozené číslo. Omezení, jak vysoké toto číslo může být, zjistíme příkazem `kernelopts(maxdigits)`. Pro představu uveďme, že pro Maple 14 je toto číslo 268 435 448, tedy více než 268 milionů platných cifer, s kterými dokáže systém „teoreticky“<sup>10</sup> počítat [5].

<code>Pi</code>	$\pi$
<code>Digits</code>	10
<code>evalf(Pi)</code>	3.141592654
<code>evalf(Pi, 5)</code>	3.1416
<code>evalf(Pi, 20)</code>	3.1415926535897932385

Obrázek 1.10: Příkaz `evalf` (převzato z [5]).

Aniž bychom měnili nastavení proměnné `Digits`, můžeme zobrazit libovolný výraz s požadovanou přesností pouze pomocí příkazu `evalf`. Příkaz je možné použít s jedním nebo dvěma parametry. Jediný zadaný parametr znamená, že tento zadaný výraz bude vyhodnocen na

<sup>10</sup>Výpočet se s rostoucím počtem platných míst prodlužuje a je paměťově náročnější, což způsobuje praktickou nepoužitelnost pro vyšší počet (závislý na typu úlohy) cifer.

počet platných míst specifikovaný v proměnné `Digits`. Přidaný druhý parametr řekne funkci `evalf`, na kolik platných míst má výraz vyhodnotit, viz příklady na obrázku 1.10 [5].

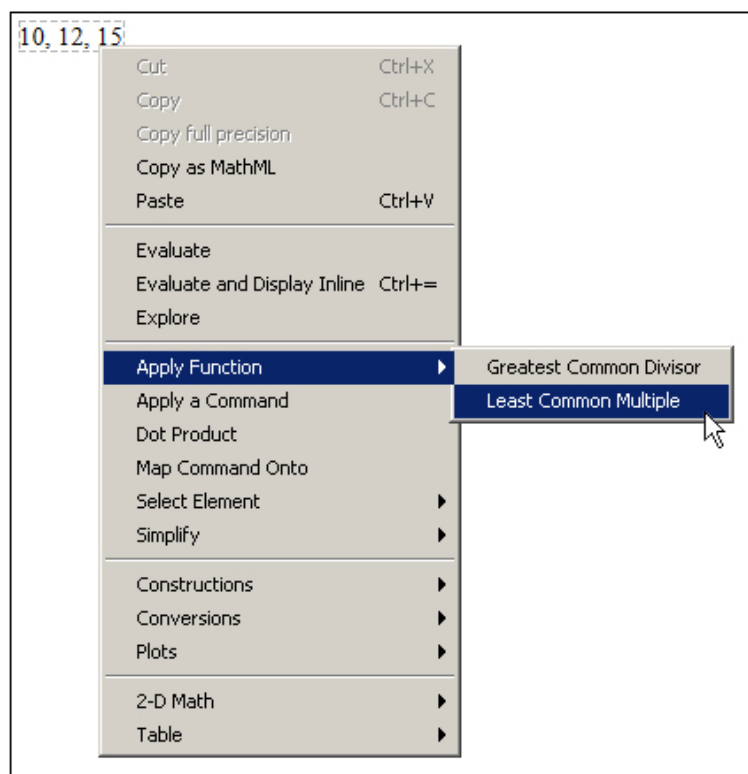
Maple rozeznává přesná čísla (mezi něž patří i zmíněné symboly  $\pi$  a  $e$ , zlomky atp.) a čísla typu *Floating-Point*, nebo-li čísla v pohyblivé řádové čárce. Jestliže systému zadáme výraz, v němž některý z jeho podvýrazů bude typu *Floating-Point*, může Maple na celý výraz pohlížet jako by byl tohoto typu a bude výsledky výpočtů zaokrouhlovat. To nejlépe uvidíme na dalších příkladech na obrázku 1.11 [5].

$\frac{2}{3} + \frac{3}{2} = \frac{13}{6}$ ,	ale	$\frac{2}{3} + 1.5 = 2.166666667$
$\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ ,	ale	$\sqrt{2.0} + \sqrt{3} = 1.414213562 + \sqrt{3}$

Obrázek 1.11: Přesná čísla a čísla typu **Floating-Point** (převzato z [5]).

### 1.4.1 Příkazy

Pro provedení výpočtu máme zpravidla více možností. Tou základní, která je k dispozici ve všech verzích systému, jsou příkazy jazyka Maple. Chceme-li například vypočítat odmocninu z čísla 2,5, zapíšeme v systému Maple příkaz `sqrt(2.5)`. Stejného výsledku dosáhneme použitím symbolu pro odmocninu z palety **Expression**. Pokud chceme určit nejmenší společný násobek čísel 10, 12 a 15, můžeme využít příkazu `lcm`, nebo zapsat čísla na řádek za sebe (oddělená čárkami) a přes pravé tlačítko myši zvolit z kontextové nabídky **Apply Function > Least Common Multiple**, viz obrázky 1.12, 1.13 [5].



Obrázek 1.12: Provedení výpočtu pomocí kontextové nabídky (převzato z [5]).

```

sqrt(2.5) = 1.581138830
sqrt(2.5) = 1.581138830
lcm(10, 12, 15) = 60
10, 12, 15 --integer lcm--> 60

```

Obrázek 1.13: Různé možnosti provedení výpočtu (převzato z [5]).

**Příklad 1.9:** Zobrazte číslo  $\pi$  s přesností na pět desetinných míst.

*Řešení:* Pro zobrazení přibližné (zaokrouhlené) hodnoty s požadovanou přesností využíváme příkazu `evalf`. Funkci `evalf` dáme jako první argument výraz, jehož přibližnou hodnotu chceme určit (tj.  $\pi$ ). Druhý argument bude specifikovat počet platných míst. Jelikož chceme, aby počet desetinných míst byl roven pěti, počet platných míst nastavíme na 6. Získáme tak výsledek na obrázku 1.14.

```

evalf(pi, 6) = 3.14159

```

Obrázek 1.14: Řešení příkladu 1.9.

**Příklad 1.10:** Zobrazte Eulerovo číslo s přesností na dvě desetinná místa.

**Příklad 1.11:** Vypočítejte, kolik je  $1 - \frac{1.0}{3.0} - \frac{1.0}{3.0} - \frac{1.0}{3.0}$ . Proč není výsledek roven 0?

## 1.4.2 Označení výsledků

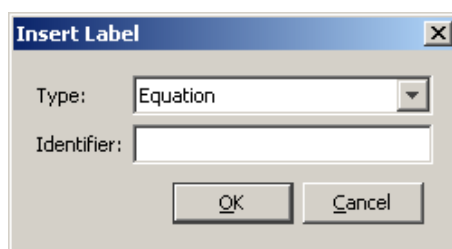
Každému zobrazenému výsledku se v zápisníku přiřazuje číselné označení, které se zapisuje zcela vpravo na řádek s odpovídajícím výsledkem. Označení je možné potlačit (tj. nezobrazovat), znovu vyvolat, případně upravit jeho formát v hlavním menu (**Format > Equation Labels > ...**). Díky označení se můžeme na předešlé výsledky odvolávat a používat je při tvorbě dalších příkazů. V ukázkách vytvořených dokumentů (prezentovaných v tomto textu) je označení výsledků vždy potlačeno. Použití označení ilustruje obrázek 1.15.

Pokud chceme například přičíst číslo **10** k výsledku s označením **(2)**, pak napíšeme „10 + “ a přes klávesovou zkratku „**Ctrl + L**“ vložíme požadované označení (tedy do „vyskakujícího okénka“ zadáme číslo 2 a potvrdíme (**OK**)). Místo klávesové zkratky „**Ctrl + L**“ je možné použít horní menu (**Insert > Label...**). Pozor, zápis **(2)** vytvořený (pouze) na klávesnici při tvorbě příkazu Maple nepochopí, pro vložení označení do příkazu je třeba důsledně používat předešlý postup s „vyskakujícím okénkem“ zobrazeným na obrázku 1.16 [5].

Maple dále nabízí možnost odkazovat se na poslední tři výsledky (v tomto případě je jedno, zda byly zobrazeny či nikoliv, a zda mají nějaké označení) pomocí symbolu **%** (procento). Jedno procento (**%**) představuje poslední výsledek, dvě procenta (**%%**) předposlední a tři procenta (**%%%**) před-předposlední. Upozorníme, že výsledek získaný těmito příkazy závisí na pořadí vykonaných příkazů, ne na jejich umístění v zápisníku! Tedy např. **%** vypíše poslední výsledek získaný předchozím (časově) vykonaným příkazem (obrázek 1.17).

$\frac{2}{3} - 6$		
	$-\frac{16}{3}$	(1)
$8 \cdot 3$		(2)
	24	
$5 - \pi$		(3)
	$5 - \pi$	
$10 + (2)$		(4)
	34	

Obrázek 1.15: Označení výsledků (převzato z [5]).



Obrázek 1.16: „Vyskakující okénko“ pro zadání označení (převzato z [5]).

$\frac{2}{3} + 5$		
	$\frac{17}{3}$	
$8 \cdot 3$		
	24	
$5 - \pi$		
	$5 - \pi$	
%, %, %%		
	$5 - \pi, 24, \frac{17}{3}$	

Obrázek 1.17: Využití procent při odkazování se na předchozí výsledky (převzato z [5]).

### 1.4.3 Přřazení hodnot do proměnných

Odkazovat se na výrazy můžeme také po jejich přřazení k nějaké proměnné. Operátorem přřazení je (dvoj)symbol `:=` (dvojtečka + rovnítko).

Namísto (dvoj)symbolu `:=` můžeme k přřazení použít příkaz `assign`. Tak, jak můžeme výrazy do proměnných přřazovat, můžeme též přřazení zrušit (tj. odebrat proměnné uloženou hodnotu). Zmíněné provedeme příkazem `unassign` nebo přřazením názvu proměnné v apostrofech (obrázek 1.18).

<code>a</code>	<code>a</code>	<code>c</code>	<code>c</code>
<code>a := 2</code>	<code>2</code>	<code>assign(c, 2)</code>	
<code>a</code>	<code>2</code>	<code>c</code>	<code>2</code>
<code>b</code>	<code>b</code>	<code>unassign('c')</code>	
<code>b := 3 · a</code>	<code>6</code>	<code>c</code>	<code>c</code>
<code>b</code>	<code>6</code>	<code>a</code>	<code>2</code>
		<code>a := 'a'</code>	
		<code>a</code>	<code>a</code>
		<code>a</code>	<code>a</code>

Obrázek 1.18: Přřazení hodnot do proměnných a odstranění uložené hodnoty (převzato z [5]).

Přřazovat hodnoty můžeme i do tzv. systémových proměnných. Již jsme se setkali s proměnnou `Digits` vyjadřující počet platných míst, s nimiž Maple počítá. Ilustraci na obrázku 1.19 můžeme srovnat s obrázkem 1.10.

<code>Pi</code>	<code>π</code>
<code>Digits</code>	<code>10</code>
<code>evalf(Pi)</code>	<code>3.141592654</code>
<code>Digits := 5</code>	<code>5</code>
<code>evalf(Pi)</code>	<code>3.1416</code>
<code>Digits := 20</code>	<code>20</code>
<code>evalf(Pi)</code>	<code>3.1415926535897932385</code>

Obrázek 1.19: Proměnná `Digits` a příkaz `evalf` (převzato z [5]).

Odstranit uloženou hodnotu v systémové proměnné nelze. Do systémových proměnných můžeme hodnoty pouze přřazovat, nebo vrátit příkazem `restart` nastavení všech systémových proměnných na jejich původní hodnoty. Provedení příkazu odstraní všechny uložené hodnoty



v paměti (tedy i námi definované proměnné, načtené balíky atd.). Příkaz `restart` se proto používá zpravidla na počátku řešení nové úlohy, zejména pak na začátku každé práce se zápisníkem (aby se předešlo tomu, že budeme používat proměnnou, v níž je z dřívějšíka uložena pro nás nesprávná hodnota) [5].

### 1.4.4 Balíky

Knihovna příkazů jazyka Maple je rozdělena na hlavní knihovnu a tzv. balíky<sup>11</sup>. Příkazy, s nimiž jsme se doposud setkali, patří do hlavní knihovny, a můžeme je tak používat ihned po spuštění systému. Naproti tomu většina speciálních příkazů náleží do balíčků, které musíme před použitím příslušného příkazu buď načíst do dokumentu pomocí příkazu `with`, nebo zadat příkaz spolu s názvem balíku. Načtení balíku pomocí příkazu `with` umožní používání všech příkazů z příslušného balíku. Naopak zadání příkazu spolu s názvem balíku je nutné provádět při každém použití tohoto příkazu, pokud balík nenačteme (příkazem `with`).

Načtení balíku můžeme zrušit příkazem `unwith`. Pokud balík nenačteme a použijeme z něj nějaký příkaz, Maple jej nerozpozná a příkaz vypíše jako textový řetězec. Například příkazy pro práci s vektory a maticemi náleží do balíku **LinearAlgebra**. Jestliže chceme tedy použít příkaz `Eigenvalues` pro nalezení vlastních čísel matice, načteme nejprve balík `LinearAlgebra`, jak dokumentuje obrázek 1.20 [5].

```

Matice :=  $\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ 
 $\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ 
with(LinearAlgebra):
Eigenvalues(Matice)
 $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$ 
unwith(LinearAlgebra)
Eigenvalues(Matice)
Eigenvalues( $\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ )
LinearAlgebra[Eigenvalues](Matice)
 $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$ 

```

Obrázek 1.20: Použití balíčků.

<sup>11</sup>Kromě pojmu *balík* se v češtině používá také termín *knihovna*.

Jedním z významných balíčků je balík s názvem `RealDomain`. Systém Maple pracuje s komplexními čísly a právě balík `RealDomain` umožňuje omezit se pouze na množinu reálných čísel<sup>12</sup> (obrázek 1.21).

$\text{simplify}(\sqrt{x^2})$ $(-8)^{\frac{1}{3}}$ $\text{solve}(x^3 + x, x)$ $\ln(-1)$	$\text{csign}(x) x$ $(-8)^{1/3}$ $0, 1, -1$ $i\pi$	<i>with(RealDomain) :</i> $\text{simplify}(\sqrt{x^2})$ $(-8)^{\frac{1}{3}}$ $\text{solve}(x^3 + x, x)$ $\ln(-1)$	$ x $ $-2$ $0$ <i>undefined</i>
--	---	---	--

Obrázek 1.21: Použití balíku `RealDomain`.

## Jednotky

Práci s jednotkami umožňuje balík `Units`. Při výpočtech tak nemusíme pracovat jen s čísly, ale můžeme jim přiřazovat i jednotky. K vložení jednotek do zápisníku využijeme palety `Units`. Obrázek 1.22 ilustruje použití jednotek při výpočtu gravitační síly působící v tíhovém poli Země (kde gravitační zrychlení je přibližně rovno  $9,81 \text{ m s}^{-2}$ ) na těleso o hmotnosti  $10 \text{ kg}$ . Vidíme, že Maple umí jednotky také zjednodušovat (resp. upravovat na jiný tvar). Ke zjednodušení výrazů přitom slouží příkaz `simplify`.

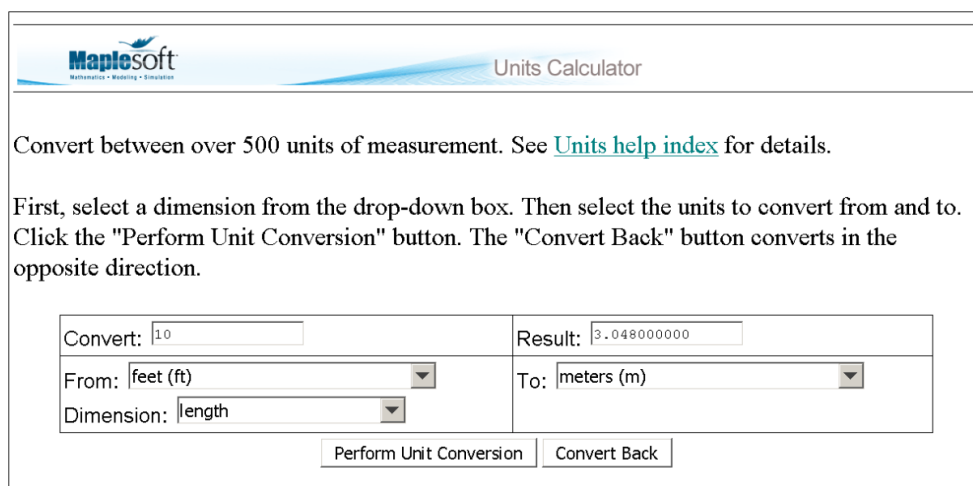
$$\begin{array}{l}
 F := 10 \llbracket \text{kg} \rrbracket \cdot 9.81 \frac{\llbracket \text{m} \rrbracket}{\llbracket \text{s} \rrbracket^2} \\
 \qquad \qquad \qquad \frac{98.10 \llbracket \text{kg} \rrbracket \llbracket \text{m} \rrbracket}{\llbracket \text{s} \rrbracket^2} \\
 \text{simplify}(\%) \\
 \qquad \qquad \qquad 98.10 \llbracket \text{N} \rrbracket
 \end{array}$$

Obrázek 1.22: Použití jednotek (převzato z [5]).

Maple rozpoznává jednotky různých soustav a velikostí, s nimiž umí pracovat a vzájemně je převádět. Pro převod jednotek je k dispozici speciální nástroj zvaný `Units Calculator`. Spustit jej můžeme z hlavního menu přes `Tools > Assistants > Units Calculator....` Ukázku poskytuje obrázek 1.23.

Pokud chceme použít jednotku, která není v paletě `Units`, můžeme si ji vytvořit sami tak, že přidáme jednotku s názvem `unit` a název přepíšeme. V systému Maple 16 je implementováno přes 500 jednotek (tzn. v paletě `Units` je pouze několik vybraných) [5].

<sup>12</sup>Úplný seznam případů (resp. příkazů), v nichž se můžeme pomocí tohoto balíku omezit jen na reálná čísla, nalezneme v nápovědě k balíku `RealDomain`



Obrázek 1.23: Units Calculator (převzato z [5]).

## 1.4.5 Řešení rovnic

K řešení rovnic v systému Maple slouží příkaz `solve` a několik příkazů k němu příbuzných závislých na typech rovnic, viz tabulka 1.1.

Tabulka 1.1: Příkazy pro řešení rovnic

Typ rovnice	Příkaz pro řešení
Rovnice a nerovnice	<code>solve</code> , <code>fsolve</code>
Obyčejné diferenciální rovnice	<code>dsolve</code>
Parciální diferenciální rovnice	<code>pdsolve</code>
Rovnice v oboru celých čísel	<code>isolve</code>
Rovnice v oboru celých čísel v konečném tělese	<code>msolve</code>
Lineární integrální rovnice	<code>intsolve</code>
Systémy lineárních rovnic	<code>LinearAlgebra[LinearSolve]</code>
Rekurentní rovnice	<code>rsolve</code>

Pomocí interaktivního prostředí *Standard Worksheet* můžeme řešit rovnice též pomocí kontextové nabídky. Zapišeme rovnici a pravým tlačítkem myši zvolíme požadovaný příkaz. Obrázek 1.24 ilustruje některé příklady řešení rovnic.

Příkazy pro řešení rovnic nemusí vždy zobrazit všechna řešení. Pokud je chceme zobrazit, přidáme příkazu `solve` nepovinný parametr `AllSolutions`, viz obrázek 1.25 [5].

Symbol `_Z2~` na obrázku 1.25 představuje libovolnou celočíselnou proměnnou. Že jde o celočíselnou proměnnou poznáme podle toho, že se v symbolu vyskytuje písmeno Z. Podobně by výskyt například písmena C značil proměnnou komplexní. Cifra 2 v symbolu proměnné označuje pořadí, v jakém byla proměnná v zápisníku zavedena. A nakonec znak `~` vyjadřuje, že proměnná splňuje nějaký předpoklad. Jaké předpoklady proměnná splňuje přitom zjistíme příkazem `about`, případně zápisem proměnné a po kliknutí pravým tlačítkem myši zvolením **What Assumptions** z kontextové nabídky. V zobrazeném příkladu na obrázku 1.25 je předpoklad celočíselnosti (u již celočíselné) proměnné přebytný.

```

Rovnice
solve(x2 + 5·x + 6 = 0)
                                -2, -3

x2 + 5·x + 6 = 0  $\xrightarrow{\text{solve}}$  {x = -2}, {x = -3}

Nerovnice
solve(x2 + 5·x + 6 < 0)
                                RealRange(Open(-3), Open(-2))

x2 + 5·x + 6 < 0  $\xrightarrow{\text{solve}}$  {-3 < x, x < -2}

Rekurentní rovnice
rsolve({N(t+1) = (1 + a - b)·N(t), N(0) = N0}, N(t))
                                N0 (1 + a - b)t

N(t+1) = (1 + a - b)·N(t), N(0) = N0  $\xrightarrow{\text{solve recurrence}}$  N0 (1 + a - b)t

Diferenciální rovnice
dsolve({  $\frac{d}{dt} N(t) = (a - b) \cdot N(t)$ , N(0) = N0 })
                                N(t) = N0 e(a-b)t

 $\frac{d}{dt} N(t) = (a - b) \cdot N(t)$ , N(0) = N0  $\xrightarrow{\text{solve DE}}$  N(t) = N0 e(a-b)t

```

Obrázek 1.24: Ukázka řešení různých druhů rovnic použitím jednak příkazu, jednak kontextové nabídky (převzato z [5]).

```

solve(sin(x) = cos(x))
                                 $\frac{1}{4} \pi$ 

solve(sin(x) = cos(x), AllSolutions)
                                 $\frac{1}{4} \pi + \pi\_Z2\sim$ 

about(_Z2)
Originally _Z2, renamed _Z2~:
  is assumed to be: integer

_Z2  $\xrightarrow{\text{list assumptions}}$  {_Z2~::integer}

```

Obrázek 1.25: Zobrazení všech řešení rovnice (převzato z [5]).

Dále může příkaz `solve` zobrazit výsledek se strukturou `RootOf` vyjadřující kořen (tj. řešení) rovnice v nevyhodnoceném tvaru. Řešení pak vyhodnotíme buď příkazem `allvalues` (pro symbolické vyjádření), nebo příkazem `evalf` (pro numerické vyjádření) – obrázek 1.26. Vedle příkazů můžeme též využít pravého tlačítka myši, zvolit z kontextové nabídky položku

**All Values** (pro symbolické vyjádření) a získaný výsledek převést na numerickou hodnotu zvolením **Approximate > 10** (pro 10 platných míst) z kontextové nabídky.

```

solve(x^4 - 2 x^3 + 2 = 0)
RootOf(_Z^4 - 2 _Z^3 + 2, index = 1), RootOf(_Z^4 - 2 _Z^3 + 2, index = 2),
  RootOf(_Z^4 - 2 _Z^3 + 2, index = 3), RootOf(_Z^4 - 2 _Z^3 + 2, index = 4)

allvalues({%})
{ 1/2 - 1/2 I - 1/2 sqrt(4 + 2 I), 1/2 - 1/2 I + 1/2 sqrt(4 + 2 I), 1/2 + 1/2 I
  - 1/2 sqrt(4 - 2 I), 1/2 + 1/2 I + 1/2 sqrt(4 - 2 I) }

evalf(%)
{-0.5290855140 - 0.7429341359 I, -0.5290855140 + 0.7429341359 I,
  1.529085514 - 0.2570658641 I, 1.529085514 + 0.2570658641 I}

```

Obrázek 1.26: Tvar zobrazení řešení rovnice (převzato z [5]).

```

solve(x^2 < 0)

infolevel[solve] := 1:

solve(x^2 < 0)
solve: Warning: no solutions found

```

Obrázek 1.27: Proměnná `infolevel` a „prázdný výpis“ příkazu `solve` (převzato z [5]).

Symboly `_Z` ve struktuře `RootOf` nyní nepředstavují celočíselnou proměnnou (neboť za písmenem `Z` nenásleduje číslo), nýbrž proměnnou libovolnou (tj. i komplexní).

Systém Maple po zadání příkazu vypíše zpravidla pouze řešení, případně chybová hlášení či varování. U příkazu `solve` (a nejen u něj) toto chování způsobuje „prázdný výpis“ v případě, že Maple žádné řešení nenašel. Pro výpis podrobnějších informací o průběhu vyhodnocení příkazu a výsledcích slouží proměnná `infolevel`. Můžeme ji nastavit buď pro každý příkaz samostatně, přičemž do hranatých závorek za proměnnou vložíme název příslušného příkazu, nebo ji nastavíme všem příkazům současně na stejnou hodnotu uvedením slova `all` do hranatých závorek. Proměnná může nabývat hodnot 1, 2, ..., 5. Čím vyšší hodnota je přiřazena v proměnné `infolevel`, tím více informací o vyhodnocení příkazu obdržíme. Standardně není proměnná nastavena na žádnou hodnotu, což v podstatě odpovídá nastavení proměnné na hodnotu 0. Použití proměnné `infolevel` dokumentují obrázky 1.27 a 1.28 [5].

**Příklad 1.12:** Řešte nerovnici:  $|x - 2| < 1$  pro  $x \in \mathbb{R}$ .

*Řešení:* Pro řešení nerovnice použijeme příkaz `solve`. Získaný výsledek odpovídá zápisu  $x \in (1, 3)$ . Výraz `RealRange` značí reálný interval, výraz `Open(1)` vyjadřuje otevřený interval (v bodě 1). Pokud bychom zadali argument příkazu `solve` do složených závorek (tj. `solve({|x-2|<1})`), získali bychom výsledek ve tvaru nerovností.

```

solve( {x + y=2, x - y=0} )
                                {x=1,y=1}

infolevel[ solve ] := 1:
solve( {x + y=2, x - y=0} )
                                {x=1,y=1}

infolevel[ solve ] := 3:
solve( {x + y=2, x - y=0} )
Main: Entering solver with 2 equations in 2 variables
Linear: solving 2 linear equations
Rational: # equations 2
Rational: 2 equations solved, rank: 2
Main: solving successful - now forming solutions
Main: Exiting solver returning 1 solution
                                {x=1,y=1}

infolevel[ solve ] := 5:
solve( {x + y=2, x - y=0} )
Main: Entering solver with 2 equations in 2 variables
Transformer: solving the uncoupled linear subsystem in {x, y}
Linear: solving 2 linear equations
Rational: # equations 2
Rational: # equations 1
Rational: # equations 0
Rational: backsubstitution at: 2
Rational: backsubstitution at: 1
Rational: 2 equations solved, rank: 2
Main: solving successful - now forming solutions
Main: Exiting solver returning 1 solution
                                {x=1,y=1}

```

Obrázek 1.28: Proměnná infolevel a příkaz solve.

```

solve(|x - 2| < 1)
RealRange(Open(1), Open(3))

```

Obrázek 1.29: Řešení příkladu 1.12.

**Příklad 1.13:** Řešte nerovnici  $|x - 2| < 1$  pro  $x \in \mathbb{Z}$ .

**Příklad 1.14:** Řešte nerovnici  $|x - 2| \geq 1$  pro  $x \in \mathbb{Z}$ .

**Příklad 1.15:** Určete kořeny polynomu  $x^3 - 3 \cdot x^2 - 13 \cdot x + 15$  pro  $x \in \mathbb{R}$ .

*Řešení:* Kořeny polynomu můžeme určit různými způsoby. Jednak je možné použít příkaz `solve` a hledat body, v nichž je polynom nulový. Systém Maple nabízí též příkaz `roots` pro hledání kořenů polynomu jedné proměnné. Oba postupy ilustruje obrázek 1.30.

Výstup příkazu `roots` je tvořen seznamem dvojic. Každá dvojice obsahuje hodnotu kořenu a jeho násobnost.

$\text{solve}(x^3 - 3 \cdot x^2 - 13 \cdot x + 15 = 0)$ $5, 1, -3$
$\text{roots}(x^3 - 3 \cdot x^2 - 13 \cdot x + 15)$ $[[1, 1], [5, 1], [-3, 1]]$

Obrázek 1.30: Řešení příkladu 1.15.

**Příklad 1.16:** Řešte nerovnici  $x \leq x^2 - 12 \leq 4 \cdot x$  pro  $x \in \mathbb{R}$ .

**Příklad 1.17:** Určete obecně kořeny kvadratického polynomu tvaru  $a \cdot x^2 + b \cdot x + c$  pro  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{C}$ . Zamyslete se, jak byste v řešení postupovali, kdybychom povolili možnost  $a = 0$  a  $x$  omezili jen na reálná čísla.

**Příklad 1.18:** Řešte rovnici  $\tan(x) = \sqrt{3}$  pro  $x \in \mathbb{R}$ .

**Příklad 1.19:** Řešte soustavu rovnic

$$5 \cdot x - 7 \cdot y = -9,$$

$$3 \cdot x + y = 5$$

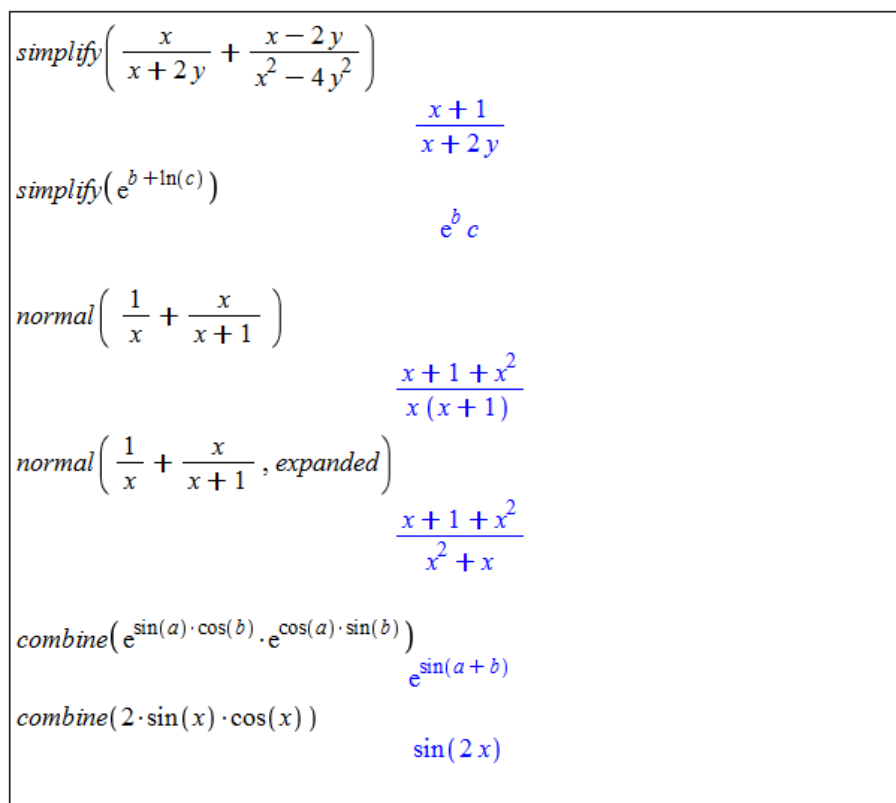
pro  $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ .

## 2 Matematická analýza s Maple v $\mathbb{R}$

### 2.1 Výrazy a jejich úpravy

#### 2.1.1 Zjednodušení výrazu

Ke zjednodušení výrazu slouží především příkazy `simplify`, `normal` a `combine`. Příkaz `simplify` provádí základní zjednodušení zadaného výrazu, příkaz `normal` je určen pro úpravy zlomků a příkaz `combine` slučuje výrazy. Vybrané příklady použití můžeme pozorovat na obrázku 2.1.



The image shows a list of Maple commands and their corresponding results:

- `simplify` applied to  $\frac{x}{x+2y} + \frac{x-2y}{x^2-4y^2}$  results in  $\frac{x+1}{x+2y}$ .
- `simplify` applied to  $e^{b+\ln(c)}$  results in  $e^b c$ .
- `normal` applied to  $\frac{1}{x} + \frac{x}{x+1}$  results in  $\frac{x+1+x^2}{x(x+1)}$ .
- `normal` applied to  $\frac{1}{x} + \frac{x}{x+1}$  with the option `expanded` results in  $\frac{x+1+x^2}{x^2+x}$ .
- `combine` applied to  $e^{\sin(a)\cos(b)} \cdot e^{\cos(a)\sin(b)}$  results in  $e^{\sin(a+b)}$ .
- `combine` applied to  $2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$  results in  $\sin(2x)$ .

Obrázek 2.1: Zjednodušování výrazů.

#### 2.1.2 Omezující podmínky

Příkazu `simplify` (stejně jako ostatním příkazům) můžeme doplnit omezující podmínky (resp. předpoklady), které budou aplikovány při zjednodušování zadaného výrazu. Provedeme to buď přidáním druhého parametru `assume = podmínka`, nebo zápisem `assuming`



*podmínka* za příkaz `simplify`. Jako druhý parametr můžeme uvést také množinu omezujících rovností. Konkrétní příklady vidíme na obrázku 2.2.

```

simplify( $\sqrt{x^2}$ )
                                csgn(x) x
simplify( $\sqrt{x^2}$ , assume = real)
                                |x|
simplify( $\sqrt{x^2}$ , assume = positive)
                                x
simplify( $\sqrt{x^2}$ , assume = negative)
                                -x

simplify( $\sqrt{x^2}$ ) assuming x :: real
                                |x|
simplify( $\sqrt{x^2}$ ) assuming x :: positive
                                x
simplify( $(-1)^z$ ) assuming z :: even
                                1
simplify( $(-1)^z$ ) assuming z :: odd
                                -1

v := x + 6 r + 5 x + 4 u - 2 r - 9 x·y + 12
                                6 x + 4 r + 4 u - 9 x y + 12
simplify(v, {x=2, r=3, u=1})
                                40 - 18 y

```

Obrázek 2.2: Zjednodušování výrazů – další možnosti příkazu `simplify`.

### 2.1.3 Úprava polynomu

Především pro úpravy polynomů máme k dispozici příkazy `collect`, `coeff`, `sort`, `factor` a `expand`, jejichž použití shrnuje tabulka 2.1 a na příkladech dokumentují obrázky 2.3, 2.4.

Tabulka 2.1: Příkazy pro úpravy především polynomů

Příkaz	Použití
<code>collect</code>	vytýkání ve výrazech (nejen polynomech)
<code>coeff</code>	koeficient u zvoleného členu polynomu
<code>sort</code>	setřídění členů polynomu (nebo prvků seznamu)
<code>factor</code>	rozklad polynomu na součin kořenových činitelů
<code>expand</code>	roznásobení / rozvinutí (nejen u polynomů)

### 2.1.4 Převod výrazu na jiný tvar

Závěrem této sekce zmíníme velmi univerzální příkaz `convert`. S jeho pomocí můžeme převádět zadaný výraz (případně jinou datovou strukturu jako např. seznam) na jiný (zvo-

```

a·ln(x) - ln(x)·x - x
                                a ln(x) - ln(x) x - x
collect(%, ln(x))
                                (a - x) ln(x) - x
collect(a + a·√3, a)
                                (1 + √3) a

p1 := x^6 - 8·x^5 + 23·x^4 + 68·x^3 - 244·x^2 - 224·x + 384:

coeff(p1, x, 4)
                                23
coeff(p1, x, 1)
                                -224
coeff(p1, x, 0)
                                384

sort(1 + x^3 + 3·x^2 - 4·x^4)
                                -4 x^4 + x^3 + 3 x^2 + 1
sort(1 + x^3 + 3·x^2 - 4·x^4, x, tdeg, ascending)
                                1 + 3 x^2 + x^3 - 4 x^4

```

Obrázek 2.3: Použití příkazů collect, coeff a sort.

```

pol1 := x^6 - 8·x^5 + 23·x^4 + 68·x^3 - 244·x^2 - 224·x + 384
                                x^6 - 8 x^5 + 23 x^4 + 68 x^3 - 244 x^2 - 224 x + 384
pol2 := x^4 - 6·x^3 + 22·x^2 - 48·x + 40
                                x^4 - 6 x^3 + 22 x^2 - 48 x + 40

s1 := factor(pol1)
                                (x - 1) (x - 3) (x^2 - 8 x + 32) (x + 2)^2
s2 := factor(pol2)
                                (x^2 - 2 x + 10) (x - 2)^2

expand(s1)
                                x^6 - 8 x^5 + 23 x^4 + 68 x^3 - 244 x^2 - 224 x + 384
expand(s2)
                                x^4 - 6 x^3 + 22 x^2 - 48 x + 40

```

Obrázek 2.4: Použití příkazů factor a expand.

lený) tvar<sup>1</sup>. Obrázky 2.5 a 2.6 ukazují použití příkazu pro převod desetinného čísla na zlomek

<sup>1</sup>Jelikož má příkaz convert mnoho různých použití, doporučujeme čtenáři podívat se na stránku nápovědy k tomuto příkazu (viz ?convert).

(přidáváme parametr `rational`) a pro převod výrazu na parciální zlomky (přidáváme parametr `parfrac`<sup>2</sup>).

<code>convert(0.125, rational)</code>	$\frac{1}{8}$
<code>convert(12.567, rational)</code>	$\frac{12567}{1000}$
<code>convert(0.33333333, rational)</code>	$\frac{33333333}{100000000}$
<b>ALE POZOR!!!</b> (za desetinou tečkou je 10 "trojek")	
<code>convert(0.3333333333, rational)</code>	$\frac{1}{3}$
$f := \frac{(x^5 + 1)}{(x^4 - x^2)}$	$\frac{x^5 + 1}{x^4 - x^2}$
<code>convert(f, parfrac)</code>	$x - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x - 1}$
$f := \frac{x}{(x-b)^2}$	$\frac{x}{(x-b)^2}$
<code>convert(f, parfrac, x)</code>	$\frac{1}{x-b} + \frac{b}{(x-b)^2}$
<code>convert(f, parfrac, b)</code>	$\frac{x}{(-x+b)^2}$

Obrázek 2.5: Použití příkazu `convert`.

Jak jsme již viděli, v prostředí *Standard Worksheet* je obvykle více možností, jak řešit danou úlohu. U výše uvedených příkladů (na obrázcích 2.1 – 2.6) je možné využít také kontextové nabídky. Do dokumentu vložíme výraz, který chceme upravovat, klikneme na něj pravým tlačítkem myši a z kontextové nabídky zvolíme požadovaný příkaz (často i s upřesněním požadované úpravy, tj. např. vybereme `Simplify>Simplify` nebo `Combine>exp` či `Simplify>Assuming Real` atp.). Tímto způsobem můžeme obdržet například výsledky na obrázku 2.7.

<sup>2</sup>Symbol `I` v systému Maple značí imagonární jednotku.

$$f := \frac{(4 \cdot x^3 - 6 \cdot x^2 - 2)}{(x^4 - 2 \cdot x^3 - 2 \cdot x + 4)}$$

$$\frac{4x^3 - 6x^2 - 2}{x^4 - 2x^3 - 2x + 4}$$

`convert(f, parfrac)`

$$\frac{3x^2}{x^3 - 2} + \frac{1}{x - 2}$$

`convert(f, parfrac, real)`

$$\frac{1.01}{x - 2} + \frac{1.27 + 2.00x}{x^2 + 1.259921050x + 1.587401052} + \frac{0.992}{x - 1.259921050}$$

`convert(f, parfrac, complex)`

$$\frac{0.980 + 0.00334I}{x - 2} + \frac{0.999 + 0.00528I}{x + 0.630 - 1.09I} + \frac{1.00 - 0.00294I}{x + 0.630 + 1.09I} + \frac{1.02 - 0.00568I}{-1.26 + x}$$

Obrázek 2.6: Možnosti příkazu `convert` při rozkladu výrazu na parciální zlomky.

$$\frac{x}{x + 2y} + \frac{x - 2y}{x^2 - 4y^2} \xrightarrow{\text{simplify}} \frac{x + 1}{x + 2y}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{x}{x + 1} \xrightarrow{\text{normal}} \frac{x + 1 + x^2}{x(x + 1)}$$

$$e^{\sin(a) \cdot \cos(b)} \cdot e^{\cos(a) \cdot \sin(b)} \xrightarrow{\text{combine}} e^{\sin(a) \cos(b) + \cos(a) \sin(b)} \xrightarrow{\text{combine}} e^{\sin(a + b)}$$

$$\sqrt{x^2} \xrightarrow{\text{assuming real}} |x|$$

$$a \cdot \ln(x) - \ln(x) \cdot x - x \xrightarrow{\text{collect}} (a - x) \ln(x) - x$$

$$x^6 - 8 \cdot x^5 + 23 \cdot x^4 + 68 \cdot x^3 - 244 \cdot x^2 - 224 \cdot x + 384 \xrightarrow{\text{factor}} (x - 1)(x - 3)(x^2 - 8x + 32)(x + 2)^2$$

$$(x - 1)(x - 3)(x^2 - 8x + 32)(x + 2)^2 \xrightarrow{\text{expand}} x^6 - 8x^5 + 23x^4 + 68x^3 - 244x^2 - 224x + 384$$

$$0.125 \xrightarrow{\text{convert to rational}} \frac{1}{8}$$

$$\frac{x}{(x - b)^2} \xrightarrow{\text{convert to partial fractions in x}} \frac{b}{(x - b)^2} + \frac{1}{x - b}$$

Obrázek 2.7: Zjednodušování výrazů pomocí kontextové nabídky.

**Příklad 2.1:** Určete hodnotu výrazu  $\frac{\sqrt{x+b} \cdot (a \cdot x - b \cdot x)}{y^3 \cdot (a-b)}$  pro  $b = 16, x = 9, y = 3$ .

*Řešení:* Pro vyřešení máme více možností. Použijme nejprve příkaz `simplify` podobně jako na obrázku 2.2. Může se stát, že příkaz neupraví „najednou“ zadaný výraz až na nejjednodušší tvar. V takovém případě (který právě nyní nastane) jej použijeme dvakrát. Další možností je použít vyhodnocovací příkaz `eval`.

$$\begin{aligned} & \text{simplify}\left(\frac{\sqrt{x+b}}{y^3} \cdot \frac{(a \cdot x - b \cdot x)}{a-b}, \{b=16, x=9, y=3\}\right) \\ & \qquad \qquad \qquad \frac{1}{3} \sqrt{25} \\ & \text{simplify}(\%) \\ & \qquad \qquad \qquad \frac{5}{3} \\ & \text{nebo} \\ & \text{simplify}\left(\text{simplify}\left(\frac{\sqrt{x+b}}{y^3} \cdot \frac{(a \cdot x - b \cdot x)}{a-b}, \{b=16, x=9, y=3\}\right)\right) \\ & \qquad \qquad \qquad \frac{5}{3} \\ & \text{či} \\ & \text{simplify}\left(\text{eval}\left(\frac{\sqrt{x+b}}{y^3} \cdot \frac{(a \cdot x - b \cdot x)}{a-b}, \{b=16, x=9, y=3\}\right)\right) \\ & \qquad \qquad \qquad \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Obrázek 2.8: Řešení příkladu 2.1.

**Příklad 2.2:** Vytvořte polynom, který má jeden trojnásobný kořen s hodnotou  $\frac{3}{2}$  a jeden dvojnásobný s hodnotou  $-5$ . Nechť je výsledný polynom v roznásobeném tvaru.

*Řešení:* Polynomů splňujících zadání je nekonečně mnoho, připustíme-li možnost mít i další kořeny. Kořeny jednoznačně určují kořenové činitele polynomu. Polynom mající pouze kořeny zmíněné v zadání bude tvořený třemi činiteli tvaru  $(x - \frac{3}{2})$  a dvěma tvaru  $(x - 5)$ . Roznásobený tvar získáme příkazem `expand`.

$$\begin{aligned} & \text{expand}\left(\left(x - \frac{3}{2}\right)^3 \cdot (x + 5)^2\right) \\ & \qquad \qquad \qquad x^5 + \frac{11}{2}x^4 - \frac{53}{4}x^3 - \frac{387}{8}x^2 + 135x - \frac{675}{8} \end{aligned}$$

Obrázek 2.9: Řešení příkladu 2.2.

**Příklad 2.3:** Zjednodušte výraz  $\cos(n \cdot \pi)$  za předpokladu, že  $n$  je sudé.

**Příklad 2.4:** Zjednodušte výraz

$$\frac{\frac{a-b}{a+b}}{1 - \frac{a}{b}}$$

**Příklad 2.5:** Zjednodušte výraz

$$\frac{\sin(2 \cdot x) - \cos(x)}{\cos(2 \cdot x) - 1 + \sin(x)}$$

**Příklad 2.6:** Rozložte na součin:  $4 \cdot x^2 \cdot (y^2 - z^2) + 25 \cdot v \cdot (z^2 - y^2)$ .

**Příklad 2.7:** Zjednodušte:  $(2 \cdot h + 5 \cdot s)^2 - (2 \cdot h + 5 \cdot s) \cdot (2 \cdot h - 5 \cdot s)$ .

**Příklad 2.8:** Necht'

$$p_1 = x^5 + 15 \cdot x^4 + 85 \cdot x^3 + 225 \cdot x^2 + 274 \cdot x + 120, \quad p_2 = x^2 + 6 \cdot x + 8.$$

Zjednodušte  $\frac{p_1}{p_2}$ . Výsledek rozložte na součin kořenových činitelů. Výraz  $\frac{p_2}{p_1}$  rozložte na parciální zlomky.

## 2.2 Funkce jedné proměnné

### 2.2.1 Definice funkce

V prostředí *Standard Worksheet* jsou 2 způsoby, jak definovat funkci. Vytvořme například funkci  $f(x) = x^2$ . První možností (k dispozici jen v prostředí *Standard Worksheet* a pro matematický režim *Math Mode*) je napsat funkční předpis stejně, jak jsme to udělali před chvílí, s tím rozdílem, že namísto rovnítka („=“) použijeme symbol pro přiřazení („:=“), tedy  $f(x) := x^2$ . Po spuštění příkazu musíme v následně zobrazeném vyskakujícím okénku potvrdit, že se jedná o definici funkce. Druhou možností (platnou i v jiných prostředích systému Maple), jak vytvořit funkci, je použití šipkové notace. Příkaz pak vypadá následovně:  $f := x \rightarrow x^2$ . Šipku vytvoříme pomlčkou následovanou symbolem „větší než“ („>“).

V prostředí *Standard Worksheet* si definování funkce můžeme ulehčit využitím palet. Buď je možné při vytváření příkazu použít šipku z palety **Arrows**, nebo můžeme vzít celou šablonu příkazu vytvoření funkce z palety **Expression** a modifikovat v ní požadované symboly. Funkční hodnotu definované funkce v daném bodě získáme zápisem názvu funkce spolu s hodnotami parametrů v závorce (nemusíme přitom zadávat pouze numerické hodnoty).

Důležité je v Maple důsledně rozlišovat funkce a výrazy, lépe řečeno funkční operátory a výrazy. V matematice totiž užíváme pojem funkce i v případech, které v Maple představují výrazy (funkční výrazy – např.  $f(x)$ ). Jestliže vytvoříme výraz, například  $x^2$ , a přiřadíme jej k nějaké proměnné, např.  $g$ , jedná se stále pouze o výraz. Hodnotu  $g$  pro  $x = 5$  nemůžeme proto určit jako funkční hodnotu v bodě 5, ale musíme použít vyhodnocovacího příkazu `eval`, případně do  $x$  přiřadit hodnotu 5. Naproti tomu funkční hodnotu funkce  $f$  (nebo vhodněji řečeno funkčního operátoru) v bodě 5 získáme specifikací argumentu operátoru (funkce)  $f$ , viz obrázek 2.11 [5].

Dále Maple nabízí příkaz `unapply`, který ze zadaného výrazu udělá funkci (funkční operátor). Tento příkaz má dva argumenty: výraz, z něhož chceme udělat funkci, a nezávisle

$f := x \rightarrow x^2$	$x \rightarrow x^2$
$z(x) := x^2$	$x \rightarrow x^2$
$f(5)$	25
$z(5)$	25
$f(a + b)$	$(a + b)^2$
$z(3 \cdot c)$	$9c^2$

Obrázek 2.10: Definice funkce v prostředí **Standard Worksheet**.

$f := x \rightarrow x^2$	$x \rightarrow x^2$	$x := 'x':$	
		$apply(f, x)$	$x^2$
$g := x^2$	$x^2$	$apply(f, 5)$	25
$f(5)$	25	$unapply(g, x)$	$x \rightarrow x^2$
$g(5)$	$x(5)^2$	$unapply(g, x)(5)$	25
$eval(g, x = 5)$	25		
$x$	$x$		
$x := 5$	5		
$g$	25		
$f(x)$	25		

Obrázek 2.11: Rozdíl mezi funkcí a výrazem (převzato z [5] a doplněno).

proměnnou. Podobně máme k dispozici též příkaz **apply**, který z funkčního operátoru udělá výraz (aplikuje funkční operátor na zadaný argument/argumenty) – pravá část obrázku 2.11.

Výrazy a funkce můžeme též definovat po částech pomocí příkazu **piecewise**. Argumenty v závorce určují vždy nejprve interval následovaný funkční hodnotou na tomto intervalu. Poslední množinu bodů již zapisovat nemusíme, stačí funkční hodnota. Maple ji

doplní ve zbývající množině zatím nedefinovaných bodů. Je možné též sestrojít funkci, která je definována pouze na libovolné podmnožině reálných čísel. Pokud má funkce definovaná po částech pouze dva různé předpisy, můžeme k jejímu vytvoření využít symbolu otevřené složené závorky z palety **Expression** (viz obrázek 2.12) [5].

```

f := x → piecewise(x < 0, -1, x = 0, 0, 1)
           x → piecewise(x < 0, -1, x = 0, 0, 1)
f(-8)
           -1
f(0)
           0
f(153.6)
           1

f2 := x → piecewise(x < 0, -x, undefined)
           x → piecewise(x < 0, -x, undefined)
f2(-8)
           8
f2(4)
           undefined

g(x) := { 0   x < π
          1   x ≥ π
           x → piecewise(x < π, 0, π ≤ x, 1)
g(0)
           0
g(3)
           0
g(4)
           1

```

Obrázek 2.12: Funkce definovaná po částech (převzato z [5]).

## 2.2.2 Vlastnosti funkcí

**Definice 2.1:** *Definičním oborem* funkce  $f$  nazýváme množinu všech hodnot, pro něž je funkce  $f$  definována. Značíme ji  $D(f)$ <sup>3</sup>. *Oborem hodnot* funkce  $f$  nazýváme množinu všech hodnot, kterých funkce  $f$  na svém definičním oboru nabývá. Značíme ji  $H(f)$ <sup>4</sup>.

**Definice 2.2:** Funkce  $f$  se nazývá *shora ohraničená*, pokud existuje  $K \in \mathbb{R}$  tak, že  $f(x) \leq K$  pro všechna  $x \in D(f)$ . Analogicky, funkce  $f$  se nazývá *zdola ohraničená*, pokud existuje  $L \in \mathbb{R}$  tak, že  $f(x) \geq L$  pro všechna  $x \in D(f)$ . Funkci  $f$  nazýváme *ohraničenou (omezenou)*, pokud je  $f$  ohraničená zdola i shora.

<sup>3</sup>V literatuře je též možné se setkat s označením  $Dom(f)$ .

<sup>4</sup>V literatuře je též možné se setkat s označením  $Im(f)$ , případně  $R(f)$ .



**Definice 2.3:** Funkce  $f$  se nazývá *sudá*, pokud pro všechna  $x \in D(f)$  platí, že  $-x \in D(f)$  a  $f(x) = f(-x)$ . Funkce  $f$  se nazývá *lichá*, pokud pro všechna  $x \in D(f)$  platí, že  $-x \in D(f)$  a  $f(x) = -f(-x)$ .

**Definice 2.4:** Nechtě  $M \subseteq D(f)$  obsahuje alespoň 2 body. Řekneme, že funkce  $f$  je na  $M$

- (a) *rostoucí*, jestliže  $\forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ ,
- (b) *klesající*, jestliže  $\forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ ,
- (c) *nerostoucí*, jestliže  $\forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ ,
- (d) *neklesající*, jestliže  $\forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ ,
- (e) *konstantní*, jestliže  $\forall x_1, x_2 \in M : f(x_1) = f(x_2)$ .

**Definice 2.5:** Nechtě  $M \subseteq D(f)$  obsahuje alespoň 2 body. Řekneme, že funkce  $f$  je na  $M$

- (a) *prostá (injektivní)*, jestliže  $\forall x_1, x_2 \in M : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ ,
- (b) *zobrazením na množinu  $N \subseteq H(f)$  (surjektivní)*, jestliže  $\forall y \in N : \exists x \in M \wedge f(x) = y$ ,
- (c) *bijektivní z  $M$  do  $N$* , jestliže je prostá na  $M$  a současně je zobrazením na množinu  $N$  (tedy injektivní a surjektivní).

System Maple nemá žádné příkazy na určování právě definovaných vlastností. To však neznamená, že tyto vlastnosti nemůžeme určovat sami. V některých případech nám může systém Maple pomoci.

I definiční obor a obor hodnot funkce musíme zjistit sami. Systém Maple můžeme efektivně využít pouze v případech, kdy si nejsme jisti, jestli daný bod patří do některé z množin, a to buď pokusem o vyhodnocení funkce v daném bodě nebo hledáním řešení rovnice, kdy se uvažovaná funkce rovná danému bodu.

**Příklad 2.9:** Určete  $D(f)$  a  $H(f)$  funkce  $f(x) = \ln(x)$ .

*Řešení:* Z přednášky Matematické analýzy víme, že  $D(f) = \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$  a  $H(f) = \mathbb{R}$ . Systém Maple bychom využili asi jen v případě, kdybychom si nebyli jisti, jak je definována funkce  $\ln(x)$  a chtěli se například přesvědčit, že není definována pro  $x = 0$ . V tom případě bychom mohli zkusit získat funkční hodnotu v bodě 0. Na obrázku 2.13 vidíme, že obdržíme chybovou zprávu, která je sice trochu matoucí (zmiňováno je dělení nulou), nicméně funkční hodnota neexistuje. Podobně můžeme například ověřit, že  $0 \in H(f)$ , řešením rovnice  $\ln(x) = 0$ . Upozorníme, že Maple počítá standardně s komplexními čísly, a tak vyhodnocení funkce  $\ln(x)$  pro záporné  $x$  nezpůsobí žádnou chybu. Jelikož se pohybujeme v oboru reálných čísel, je třeba se omezit pouze na něj načtením balíku `RealDomain` (viz obrázek 1.21).

```
ln(0)
Error, (in ln) numeric exception: division by zero

solve(ln(x) = 0)
1
```

Obrázek 2.13: Řešení příkladu 2.9.

Pro zjištění, zda je funkce (shora, zdola) ohraničená, či nikoliv, můžeme využít příkazů `minimize` a `maximize` pro hledání nejmenších a největších funkčních hodnot. V případě, že funkce není „v některém směru“ ohraničená, vrací zmíněné příkazy hodnotu  $\infty$ , resp.  $-\infty$ .

Další funkční vlastnosti můžeme určovat (ověřovat) za pomoci příkazů `evalb` nebo `verify`. Tyto příkazy otestují, zda je zadaný výraz pravdivý, či nikoliv. Ukažme si to na následujícím příkladu.

**Příklad 2.10:** Určete, zda je funkce  $\cos(x)$  sudá nebo lichá.

*Řešení:* Opět z přednášky víme, že funkce  $\cos(x)$  je funkcí sudou. Sudost funkce otestujeme zjištěním pravdivostní hodnoty výrazu  $\cos(x) = \cos(-x)$ , lichost podobně podle pravdivostní hodnoty výrazu  $\cos(x) = -\cos(-x)$ . I tentokrát bychom správně měli použít balík `RealDomain`, neboť bez něj ověřujeme zmíněné rovnosti pro všechna komplexní  $x$ . V obou případech však získáme stejný výsledek.

<code>evalb(cos(x) = cos(-x))</code>	<i>true</i>
<code>evalb(cos(x) = -cos(-x))</code>	<i>false</i>

Obrázek 2.14: Řešení příkladu 2.10.

Přestože můžeme vytvořit logické výrazy i pro zbylé funkční vlastnosti, příkazy `evalb` a `verify` většinou vracejí hodnotu `FAIL` jako znamení, že nedokáží o pravdivostní hodnotě rozhodnout. Některé další příklady je proto potřeba řešit samostatně a systém Maple využít jen k „drobným podúlohám“ – jako v následujícím příkladu 2.11.

**Příklad 2.11:** Určete, zda je funkce  $\cos(x)$  na  $\mathbb{R}$  rostoucí, klesající, prostá či bijektivní.

*Řešení:* Z přednášky víme, že funkce  $\cos(x)$  na celé množině  $\mathbb{R}$  žádnou ze zmíněných vlastností nespĺňuje, což můžeme dokázat nalezením protipříkladu. Vezměme např. body  $x_1 = 0$  a  $x_2 = 2 \cdot \pi$ . Platí, že  $x_1 < x_2$  (tj.  $x_1 \neq x_2$ ) a současně  $\cos(x_1) = \cos(x_2)$ . Tedy funkce není rostoucí, není klesající a není prostá, z čehož plyne, že nemůže být ani bijektivní. Systém Maple tu můžeme použít ke zjišťování funkčních hodnot (i když v tomto případě známe funkční hodnoty z paměti).

V praxi se nám však často hodí najít intervaly, v nichž funkce některé vlastnosti splňuje. Funkce  $\cos(x)$  je periodická s periodou  $2 \cdot \pi$  a na intervalech  $[k \cdot \pi, (k + 1) \cdot \pi]$  pro  $k \in \mathbb{Z}$  je bijektivní (tedy i prostá), pro sudá  $k$  je na těchto intervalech vždy klesající, pro lichá  $k$  rostoucí.

**Příklad 2.12:** Dokažte, že funkce  $\sin(x)$  je ohraničená.

**Příklad 2.13:** Uvažujme funkci  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$ . Je  $f$  sudá nebo lichá? Určete její definiční obor a obor hodnot. Je  $f$  ohraničená?

**Příklad 2.14:** U následujících funkcí určete, zda jsou sudé, liché, nebo ani jedno.

- (a)  $f(x) = 9 - x^2$ ,                      (b)  $f(x) = \sqrt{x}$ ,                      (c)  $f(x) = \frac{1}{x}$ .

**Příklad 2.15:** Definujte funkci  $f$ , pro niž platí:

- (a)  $D(f) = (0, 1)$ ,  $H(f) = (0, 2)$ ,
- (b)  $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ,  $H(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,
- (c)  $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $H(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ,
- (d)  $D(f) = \mathbb{R}$ ,  $H(f) = \mathbb{R}^+$ ,  $f$  je prostá,
- (e)  $D(f) = \mathbb{R} \setminus (-2, 2)$ ,  $H(f) = \mathbb{R}$ ,
- (f)  $D(f) = \mathbb{R}$ ,  $H(f) = \mathbb{R} \setminus (-2, 2)$ ,
- (g)  $D(f) = \mathbb{R}$ ,  $f$  je prostá a ohraničená,
- (h)  $H(f) = \mathbb{R}$ ,  $f$  je sudá.

**Příklad 2.16:** Nalezněte  $k \in \mathbb{R}$  tak, aby byla funkce  $f(x) = x^3 - k \cdot x^2 + 2 \cdot x$  lichá.

**Příklad 2.17:** U následujících funkcí určete, zda se jedná o bijekci, či nikoliv.

- (a)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = a \cdot x + b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,
- (b)  $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ ,  $f(x) = \sqrt{x}$ ,
- (c)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ ,  $f(x) = x^2$ ,
- (d)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3$ ,
- (e)  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x}$ .

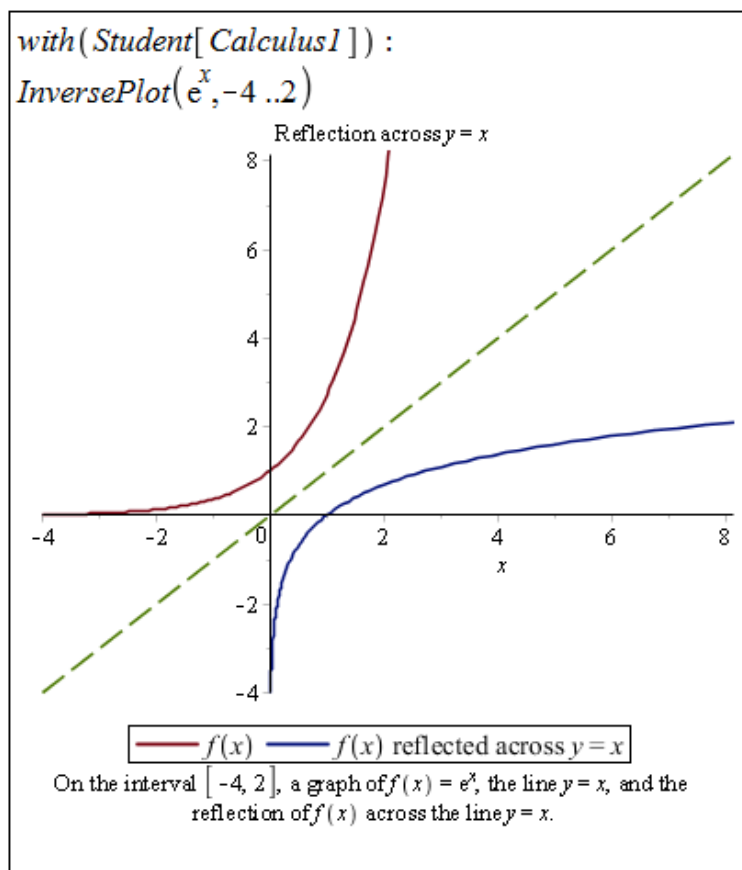
### 2.2.3 Inverzní funkce

**Definice 2.6:** Nechť  $f$  je prostá funkce. Funkci  $f^{-1}$ , pro niž platí:  $D(f^{-1}) = H(f)$  a  $\forall x \in D(f) : \exists y \in H(f)$  tak, že  $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$ , nazýváme *inverzní funkcí*.

**Poznámka 2.1:** Z definice plyne, že funkce a její inverze jsou osově symetrické vzhledem k přímce  $y = x$ .

System Maple má uchováno několik základních funkcí s jejich inverzemi v tabulce s názvem `invfunc`. Praktičtější je využít příkazů `InverseTutor` nebo `InversePlot` z balíku `Student [Calculus1]` vykreslujících do jednoho grafu funkci, její inverzi a osu  $y = x$  jakožto osu symetrie. Příkaz `InverseTutor` provádí zmíněné v mapletu, příkaz `InversePlot` slouží pro použití v dokumentu (obrázek 2.15).

Hledat předpis inverzní funkce můžeme rovnou podle definice 2.6, a to řešením rovnice  $f(y) = x$  pro neznámou  $y$ .



Obrázek 2.15: Vykreslení funkce a její inverze.

```
f(x) := x^2
x -> x^2
y(x) := solve(f(y) = x, y)
x -> solve(f(y) = x, y)

y(x)[1]
sqrt(x)

y(x)[2]
- sqrt(x)
```

Obrázek 2.16: Řešení příkladu 2.18.

**Příklad 2.18:** Nalezněte inverzní funkci k funkci  $f(x) = x^2$ .

*Řešení:* Naše odpověď by mohla být velice stručná, neboť funkce  $f$  není prostá, a tak k ní neexistuje funkce inverzní. Nicméně je možné funkci  $f$  rozdělit na dvě funkce prosté a hledat inverzi ke každé zvlášť.

V systému Maple provedeme dříve zmíněný postup, tj. budeme řešit rovnici  $f(y) = x$ . Získáme 2 řešení, a to právě pro 2 „prosté části“ funkce  $f$ . Pro  $x \leq 0$  je inverze k  $x^2$  rovna  $-\sqrt{x}$ , pro  $x \geq 0$  je rovna  $\sqrt{x}$  (obrázek 2.16).

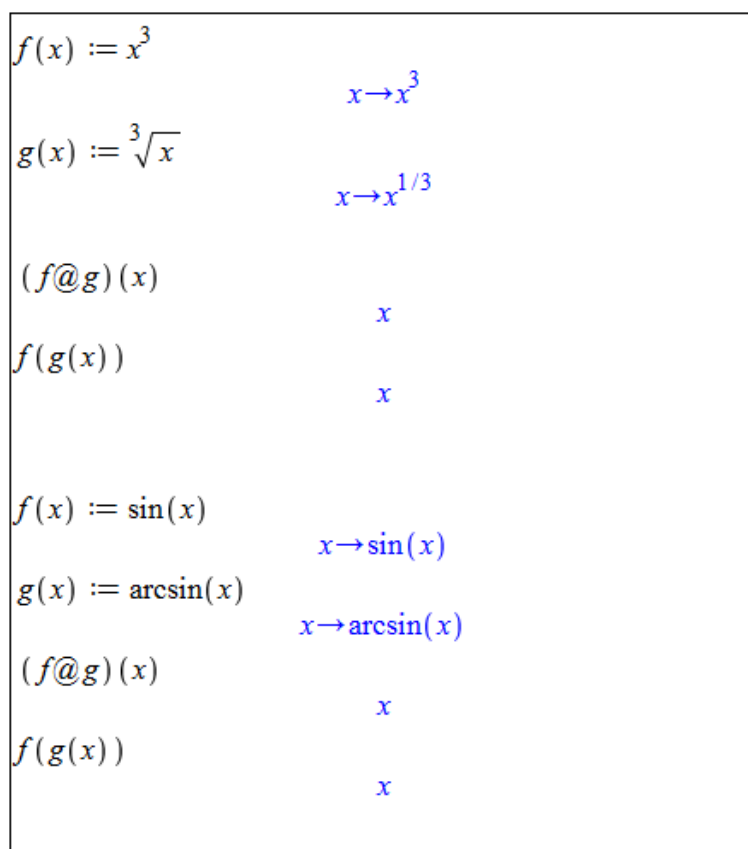
**Příklad 2.19:** Nalezněte inverzní funkce k následujícím funkcím:

- (a)  $f(x) = 2 \cdot x + 1$ ,      (c)  $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ ,      (e)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  
 (b)  $f(x) = x^3$ ,      (d)  $f(x) = \sqrt{1-x}$ ,      (f)  $f(x) = \left| \frac{1}{x} \right|$ .

**Příklad 2.20:** Existuje funkce, která je sama sobě inverzí? Pokud ano, je jediná, nebo jich existuje více?

## 2.2.4 Složená funkce

Operátorem složení funkcí je v systému Maple symbol @ (zavináč). V praxi se bez něj však obejdeme, když použijeme kulaté závorky. Na obrázku 2.17 je několik příkladů vytvoření složené funkce, které potvrzují rovnost  $f(f^{-1}(x)) = x$ .

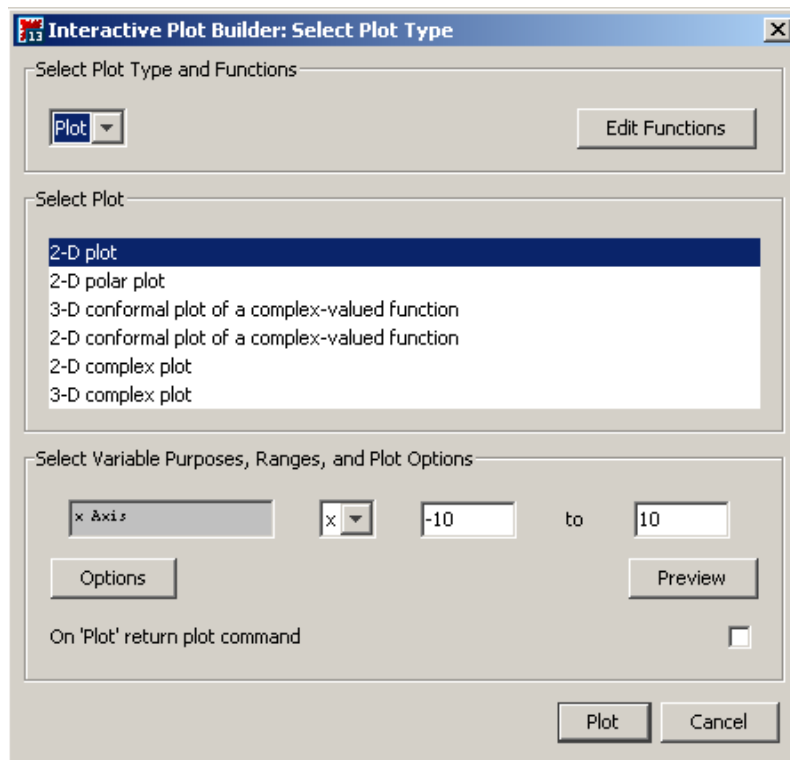


Obrázek 2.17: Složená funkce.

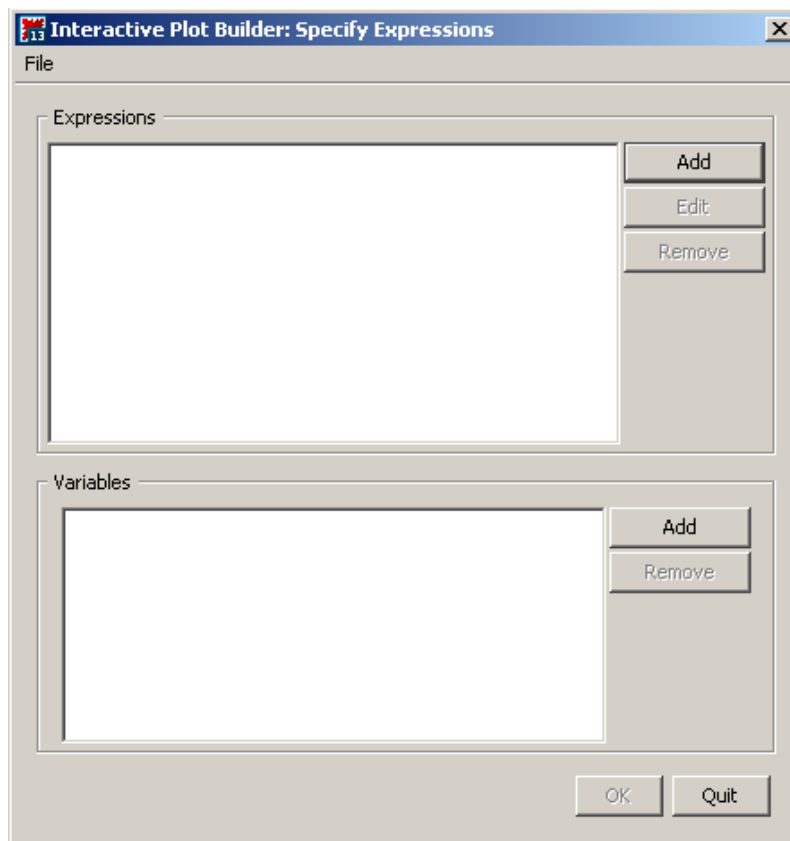
## 2.3 Vykreslení grafu funkce

### 2.3.1 Vykreslování

Prostředí *Standard Worksheet* poskytuje několik možností, jak zobrazit graf funkce nebo výrazu. Nejrychlejší a zřejmě nejjednodušší možností je zapsat do dokumentu výraz (resp. funkci), který chceme vykreslit, kliknout na něj pravým tlačítkem a z kontextové nabídky zvolit **Plots > 2-D Plot**.



Obrázek 2.18: Zvolení typu vykreslení v **Plot Builder** (převzato z [5]).

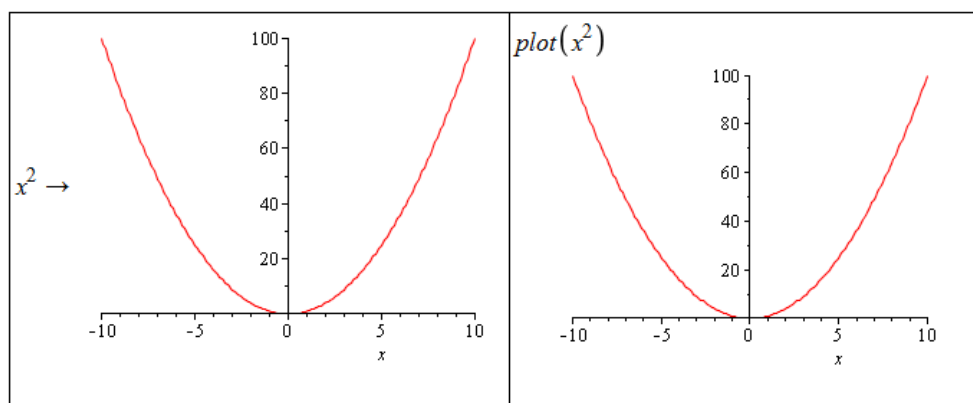


Obrázek 2.19: Okénko pro zadání výrazu z funkčního předpisu a nezávisle proměnných v **Plot Builder** (převzato z [5]).

Dále můžeme využít pomocník **Plot Builder**, a to dvěma způsoby. Buď opět zapíšeme do dokumentu výraz z funkčního předpisu, klikneme pravým tlačítkem myši a zvolíme **Plots > Plot Builder**, nebo zamíříme do hlavního menu a vybereme **Tools > Assistants > Plot Builder...** V prvním případě se objeví okénko **Interactive Plot Builder** (obrázek 2.18), v němž upřesníme typ vykreslení. Pokud uvažujeme funkci jedné proměnné, volíme **2-D Plot**. Je možné volit i jinou možnost jako například vykreslení v polárních souřadnicích (**2-D polar plot**). Kliknutím na tlačítko **Plot** zobrazíme graf v dokumentu [5].

V druhém případě, kdy **Plot Builder** vyvoláme z hlavního menu, se nám objeví okénko (viz obrázek 2.19), do něž zadáme výraz z předpisu funkce, kterou chceme zobrazit (zadání nám umožní tlačítka **Add**, resp. **Edit**), a proměnné (pokud výraz obsahuje pouze proměnné, systém je vyplní sám). Kliknutím na tlačítko **OK** přejdeme do již známého okénka pro zvolení typu vykreslení (obrázek 2.18). Další možností k vykreslení grafu výrazu nebo funkce je příkaz `plot`.

Při vykreslování můžeme specifikovat několik atributů měnících podobu grafu. Opět je několik možností, jak atributy zadávat. Při použití pomocníka **Plot Builder** se v okénku **Interactive Plot Builder** (obrázek 2.18) objevuje tlačítko **Options**. Kliknutím na toto tlačítko přejdeme na okénko (viz obrázek 2.21) umožňující nastavit parametry vykreslení jako jsou rozsah hodnot závisle i nezávisle proměnné, barva a styl vykreslované křivky, titulek grafu, legenda atd. Užitečné je navíc tlačítko **Preview** umožňující předběžně si prohlédnout současný stav a následně pokračovat v dalším nastavování atributů vykreslení grafu.

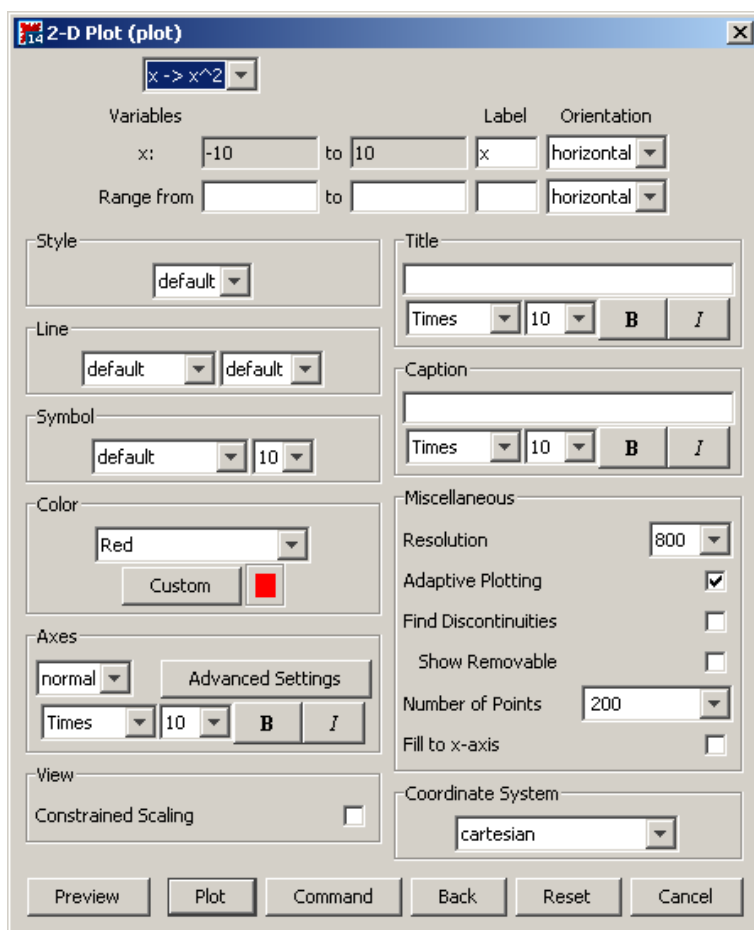


Obrázek 2.20: Vykreslení grafů pomocí kontextové nabídky a příkazu `plot` (převzato z [5]).

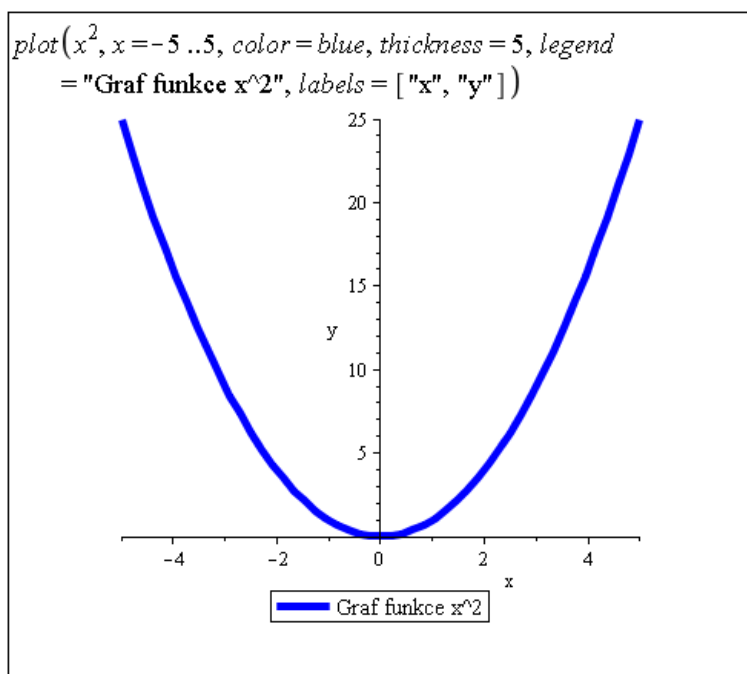
Při použití příkazu `plot` můžeme totéž provést specifikací nepovinných parametrů jako jsou `thickness` pro tloušťku křivky, `color` pro její barvu, `labels` pro popisky os, `legend` pro tvar legendy u obrázku, `axes` pro nastavení souřadných os a další. Ukázkou použití příkazu `plot` s nastavením některých nepovinných parametrů nabízí obrázek 2.22 [5].

Vzhled grafu můžeme upravovat i po jeho vytvoření a umístění do dokumentu. Jednak lze na graf kliknout pravým tlačítkem myši a z kontextové nabídky vybírat vlastnosti grafu, které jsme mohli měnit již dříve, nebo můžeme využít kontextové lišty těsně nad dokumentem. Po kliknutí levým tlačítkem myši na graf se ve zmíněné liště zobrazí nástroje skupiny nazvané **Plot**. K dispozici je též skupina s názvem **Drawing**. Nástroje v těchto skupinách umožňují do hotového grafu přidávat text, kreslit, či jinak graf upravovat [5].

Jestliže chceme vykreslit více funkcí (resp. výrazů) do jediného grafu, zapíšeme všechny do hranatých, případně složených, závorek jako první parametr příkazu `plot`. Uživateli doporučujeme používat spíše hranaté závorky, v nichž systém Maple respektuje pořadí. Pokud nechceme u vykreslovaných funkcí nic dále specifikovat, je nám jedno, v jakém pořadí Maple funkce „vezme“ a vykreslí, použijeme libovolné závorky (tj. hranaté nebo složené).



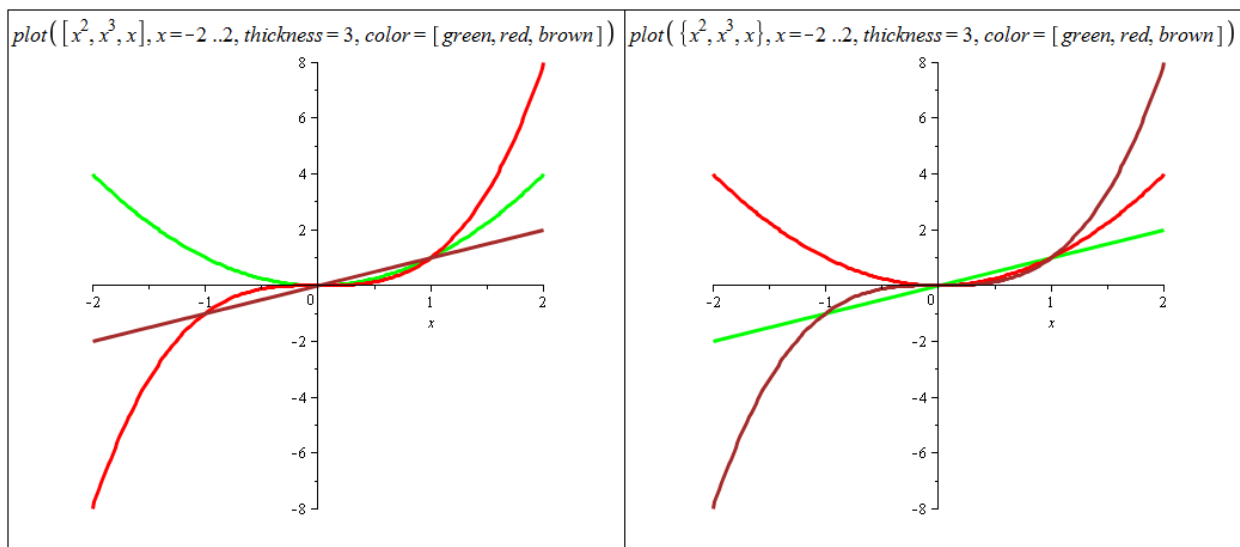
Obrázek 2.21: Okénko **Plot Builder** pro nastavení parametrů grafu (převzato z [5]).



Obrázek 2.22: Vykreslení grafu při specifikaci některých nepovinných parametrů (převzato z [5]).

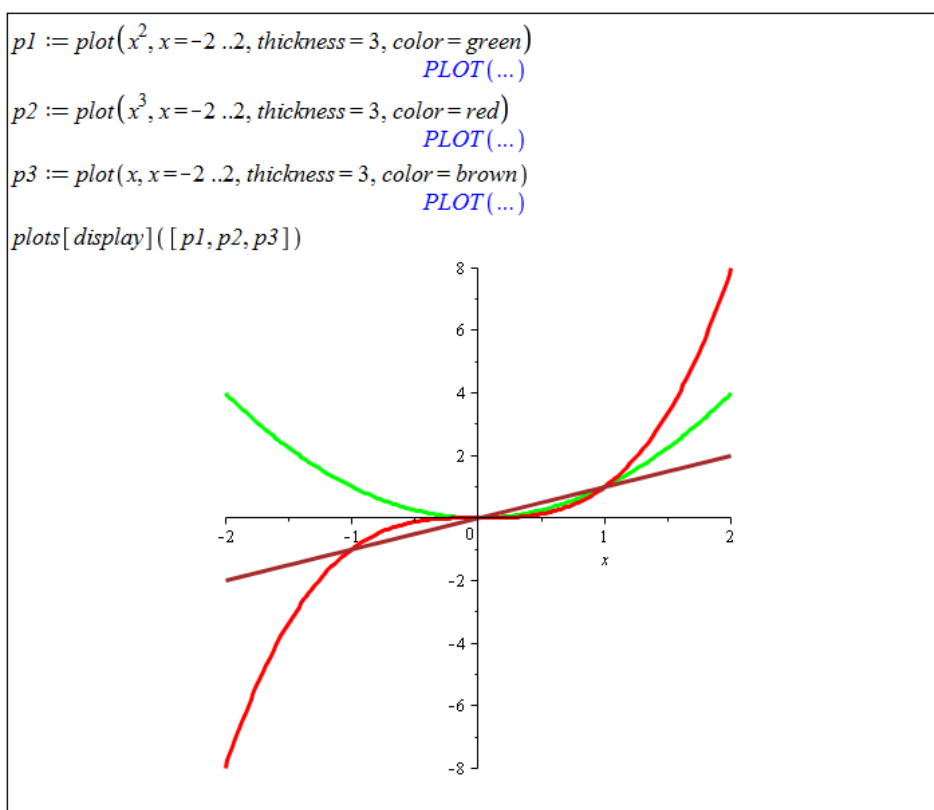


Pokud však chceme např. každé z křivek přiřadit nějakou barvu, použitím hranatých závorek se barvy aplikují v tom pořadí, v jakém očekáváme. Při použití složených závorek tomu tak být nemusí, viz obrázek 2.23.



Obrázek 2.23: Vykreslení grafu více výrazů příkazem `plot`.

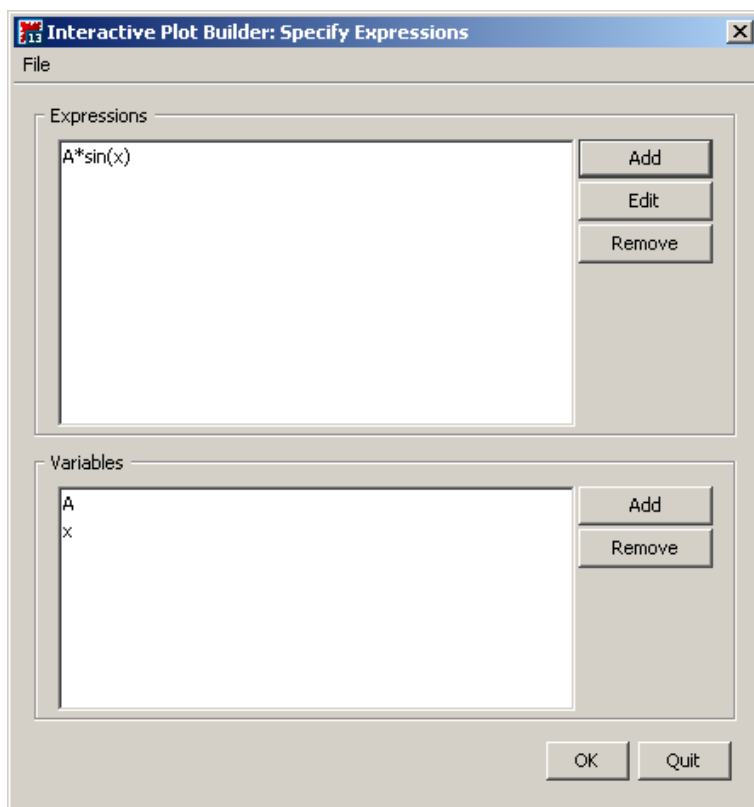
K dispozici je dále příkaz `display` z balíku `plots`, kterým můžeme dosáhnout stejného výsledku. Jednotlivé grafy nejprve vytvoříme a přiřadíme do proměnných, jež dáme jako parametry právě příkazu `display` (obrázek 2.24).



Obrázek 2.24: Vykreslení grafu více výrazů pomocí příkazu `display`.

## 2.3.2 Animace

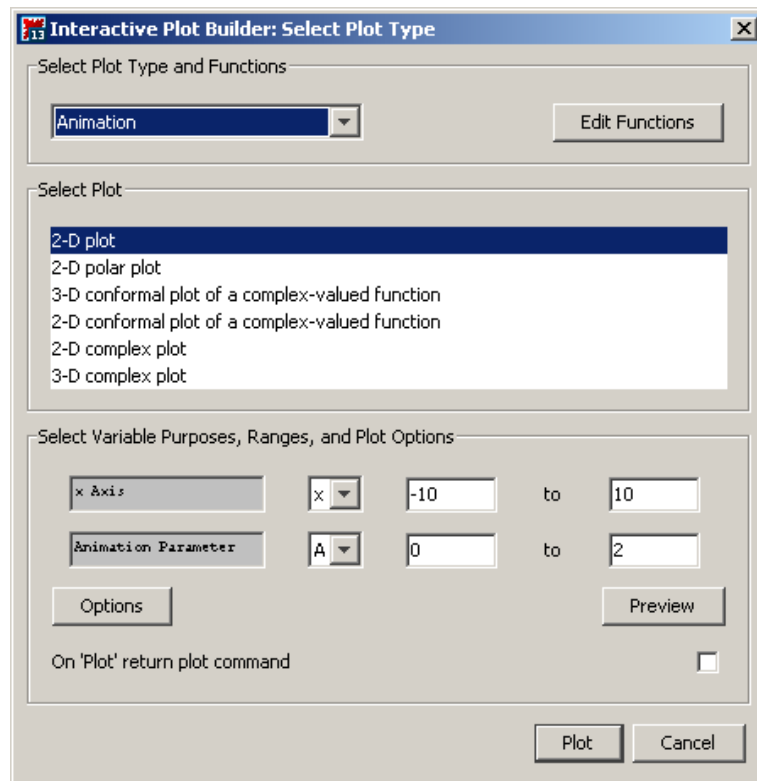
V systému Maple můžeme též vytvářet animace. Animace se skládá z několika grafů, které jsou po spuštění zobrazené v sekvenci za sebou. Vytvoříme ji buď příkazem `animate` z balíku `plots`, nebo pomocí **Plot Builderu**. Obrázky 2.25 a 2.26 ukazují nastavení **Plot Builderu** pro vytvoření animace, obrázek 2.27 ilustruje tentýž příklad při použití příkazu `animate`.



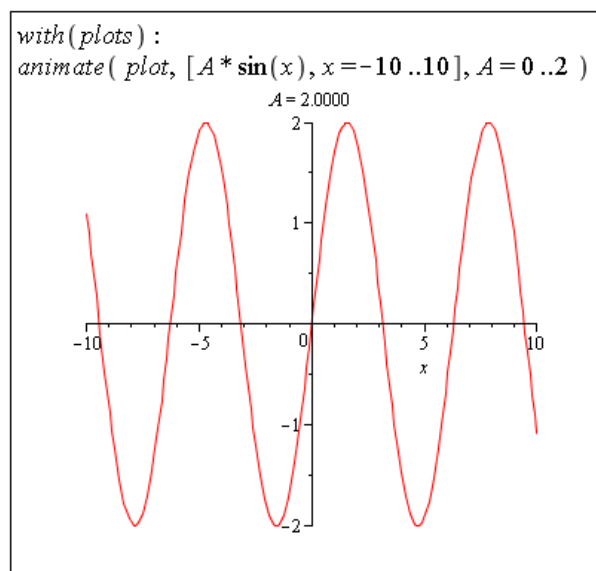
Obrázek 2.25: Zadání výrazu z předpisu funkce v **Plot Builderu** (převzato z [5]).

Ukončení **Plot Builderu**, resp. provedení příkazu, umístí do dokumentu „prázdný“ graf. Kliknutím na něj zobrazíme skupinu nástrojů v kontextové liště s názvem **Animation**. Pomocí těchto nástrojů můžeme animaci spustit, změnit její rychlost, podívat se na libovolný snímek animace atd.

Animace můžeme upravovat stejně jako grafy, tj. měnit tloušťku, barvu a druh křivky, souřadné osy, legendu apod. Navíc máme k dispozici několik nepovinných parametrů, díky nimž můžeme například určit počet grafů, z nichž se animace skládá (parametr `frames`), nebo kolik grafů vyjma posledního má zůstat trvale zobrazených po spuštění animace (parametr `trace`) [5].



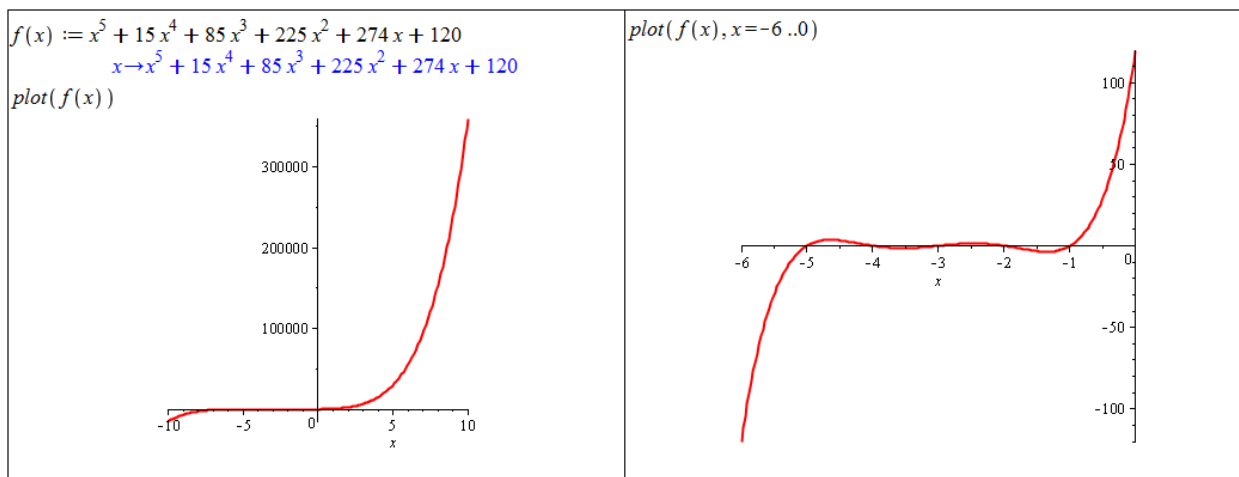
Obrázek 2.26: Zvolení druhu vykreslení (animace) v **Plot Builderu** (převzato z [5]).



Obrázek 2.27: Animace vytvořená příkazem *animate* (převzato z [5]).

**Příklad 2.21:** Vykreslete funkci  $f(x) = x^5 + 15 \cdot x^4 + 85 \cdot x^3 + 225 \cdot x^2 + 274 \cdot x + 120$ .

*Řešení:* K vykreslení zadané funkce ji stačí zapsat do dokumentu a použít některý z dříve uvedených postupů. Musíme však mít na paměti, co bychom rádi na grafu viděli a že je možné získaný výsledek ovlivnit. Například v tomto případě, když nespécifikujeme rozsah vykreslení (použije se standardní rozmezí **-10..10**) zcela zkusíme informaci o chování funkce na intervalu  $[-5, 0]$ .



Obrázek 2.28: Řešení příkladu 2.21.

**Příklad 2.22:** K funkci  $g(x) = e^{2 \cdot x}$  nalezněte inverzní funkci. Vykreslete do jednoho grafu funkci  $g(x)$ , její inverzi a funkci  $f(x) = x$ . Do grafu přidejte také legendu.

**Příklad 2.23:** Zkoumejte závislost funkce  $h(x) = e^{a \cdot x}$  na parametru  $a \in \mathbb{R}$  (pomocí animace). Kdy je funkce rostoucí a kdy klesající?

**Příklad 2.24:** Vraťte se k příkladům 2.12 – 2.20 předchozí sekce a vykreslením grafů se ujistěte o správnosti vašich odpovědí.

## 2.4 Limita a spojitost funkce

**Definice 2.7:** Funkce  $f(x)$  má v bodě  $x_0 \in \mathbb{R}$  limitu  $L \in \mathbb{R}$ , jestliže ke každému  $\varepsilon > 0$  existuje  $\delta > 0$  tak, že pro všechna  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  různá od  $x_0$  platí:  $|f(x) - L| < \varepsilon$ . Takovou limitu nazýváme vlastní limitou ve vlastním bodě.

**Definice 2.8:** Funkce  $f(x)$  má v bodě  $x_0 \in \mathbb{R}$  limitu  $L \in \mathbb{R}$  zleva, jestliže ke každému  $\varepsilon > 0$  existuje  $\delta > 0$  tak, že pro všechna  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$  platí:  $|f(x) - L| < \varepsilon$ . Analogicky definujeme limitu zprava.

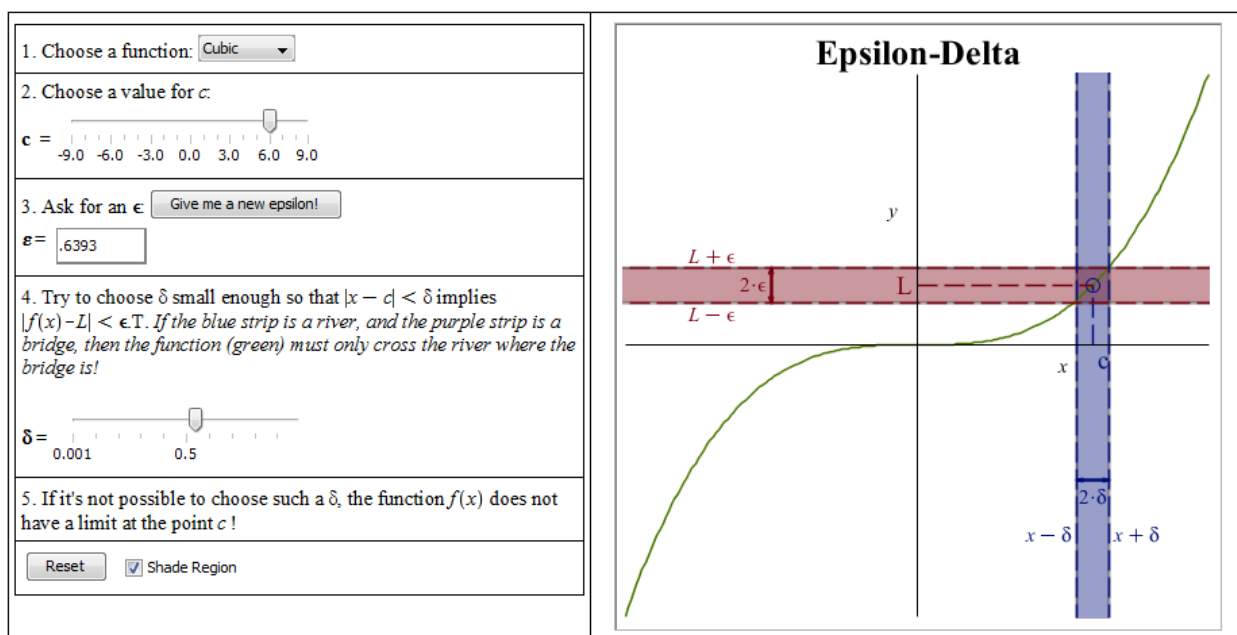
**Definice 2.9:** Funkce  $f(x)$  má v bodě  $x_0 \in \mathbb{R}$  limitu rovnu  $+\infty$ , jestliže ke každému  $M \in \mathbb{R}$  existuje  $\delta > 0$  tak, že pro všechna  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  různá od  $x_0$  platí:  $f(x) > M$ . Analogicky definujeme limitu rovnu  $-\infty$ . Takovou limitu nazýváme nevlastní limitou ve vlastním bodě.

**Definice 2.10:** Funkce  $f(x)$  má v bodě  $+\infty$  limitu rovnou  $L \in \mathbb{R}$ , jestliže ke každému  $\varepsilon > 0$  existuje  $K \in \mathbb{R}$  tak, že pro všechna  $x > K$  platí:  $|f(x) - L| < \varepsilon$ . Analogicky definujeme limitu v bodě  $-\infty$ . Takovou limitu nazýváme vlastní limitou v nevlastním bodě.

**Příklad 2.25:** Definujte limitu zprava.

**Příklad 2.26:** Definujte nevlastní limitu v nevlastním bodě.

System Maple ve verzi 16 nabízí též tzv. Matematické aplikace, které najdeme v hlavním menu (**Tools** > **Math Apps**). Jednou z položek v sekci **Calculus** je dokument s názvem **Definition of a Limit** s definicí limity a její názornou interaktivní demonstrací – viz obrázek 2.29.



Obrázek 2.29: Interaktivní demonstrace limity.

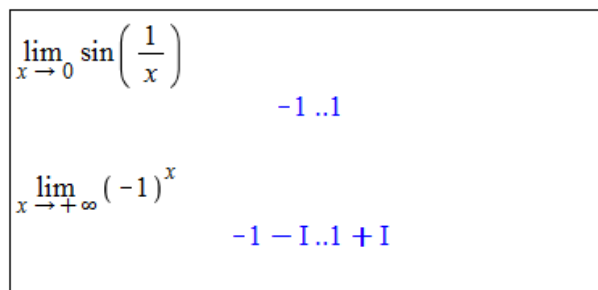
K výpočtu limity použijeme buď příslušný symbol z palety **Expression** (a upravíme v něm barevné symboly, jak potřebujeme), nebo příkaz **limit**, který má povinně dva parametry – výraz (tj. i funkční výraz) a bod, v němž hledáme limitu. Také je možné zadat do dokumentu výraz, jehož limitu chceme určit, kliknout na něj pravým tlačítkem a z kontextové nabídky zvolit položku **Limit**. Otevře se nám okénko, v němž je dále třeba specifikovat bod, v němž hledáme limitu. Můžeme dále uvést i typ limity – oboustrannou (základně zvolená), limitu zleva nebo limitu zprava.

V případě použití palety specifikujeme jednostrannou limitu zapsáním symbolu  $+$  nebo  $-$  do exponentu bodu, v němž chceme limitu určit. Příkazu **limit** můžeme zadat třetí (nepovinný) parametr ve tvaru *right* nebo *left* pro limitu zprava, resp. zleva. Všechny zmíněné postupy ilustruje obrázek 2.30. V jeho pravé části je definována funkce a při určování limit používán funkční výraz  $f(x)$ . Funkční operátor (tj.  $f$ ) použít nemůžeme.

System Maple v některých případech zobrazuje neočekávané výsledky, které můžeme označit za chybné. Jedná se například o limity na obrázku 2.31. Vypsáním výsledkem se nám systém snaží dát omezení na funkční hodnoty v okolí bodu, v němž hledáme limitu. Podle uvedených definic v tomto textu však musíme konstatovat, že příslušné limity neexistují.

$\text{limit}\left(\frac{1}{x}, x=0\right) = \text{undefined}$ $\text{limit}\left(\frac{1}{x}, x=0, \text{right}\right) = \infty$  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \text{undefined}$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$  <b>oboustranná limita:</b> $\frac{1}{x} \xrightarrow{\text{limit}} \text{undefined}$ <b>limita zprava:</b> $\frac{1}{x} \xrightarrow{\text{limit}} \infty$	$f(x) := \frac{1}{x}$  $x \rightarrow \frac{1}{x}$  $\text{limit}(f(x), x=0) = \text{undefined}$ $\text{limit}(f(x), x=0, \text{right}) = \infty$  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \text{undefined}$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$
---	--

Obrázek 2.30: Určení limity v bodě.



Obrázek 2.31: Nedostatky Maplu při určování limity.

**Příklad 2.27:** Určete následující limity:

- (a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$ , (c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ ,  
(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}$ , (d)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan(x)$ .

**Příklad 2.28:** Určete následující limity:

- (a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x^2} + \sqrt{x}}$ , (c)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x}$ , (e)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5^x+3^x}{4^x}$ ,  
(b)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\frac{x}{2}) - \sin(\frac{x}{2})}{\cos(x)}$ , (d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+2}{\sqrt{x^2-1}}$ , (f)  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t) \cdot \cos(t)}{t-t^2}$ .

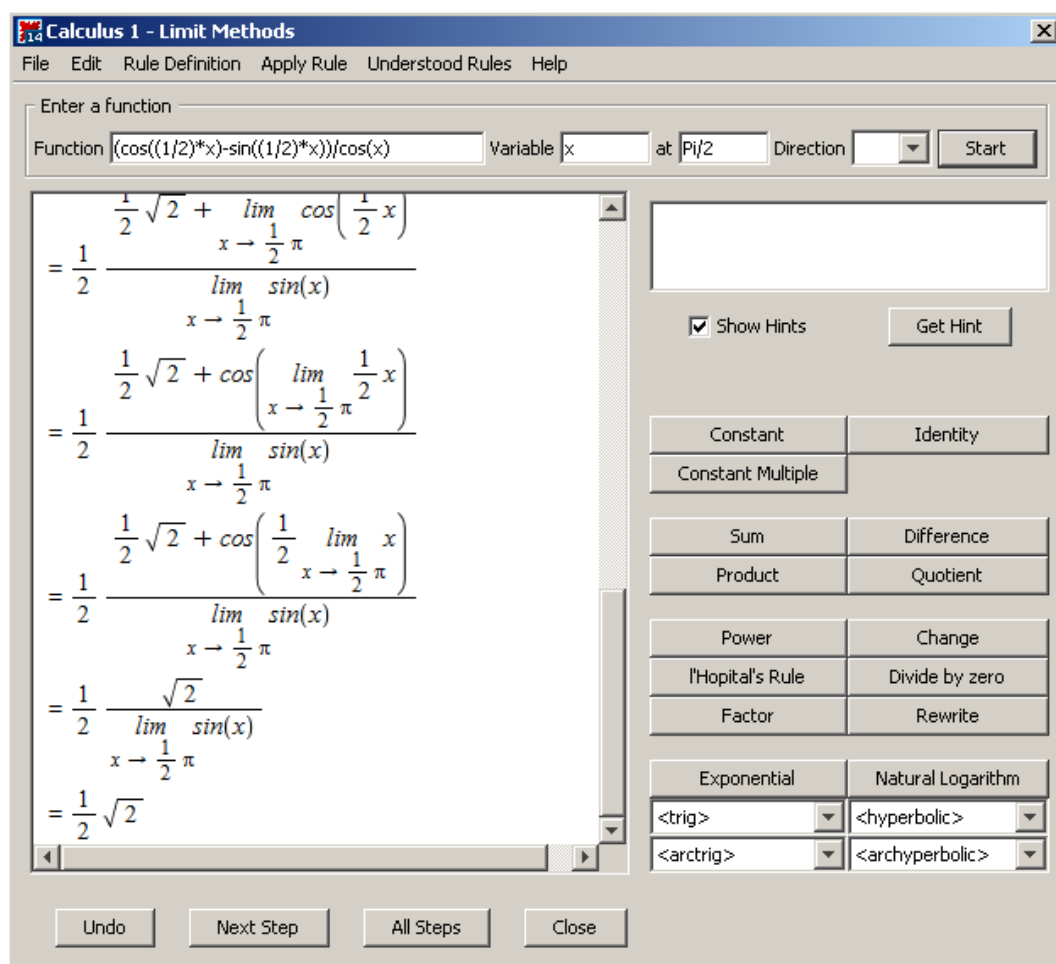
Jak byste limity určovali bez systému Maple?

**Příklad 2.29:** Definujte funkci, která:

- (a) má vlastní limitu ve vlastním bodě,  
(b) má vlastní limitu v nevlastním bodě,

- (c) má nevlastní limitu ve vlastním bodě,
- (d) má nevlastní limitu v nevlastním bodě,
- (e) splňuje všechny předchozí body (a) – (d).

Jak jsme se zmínili v sekci 1.3.4, Maple obsahuje pomocné nástroje, které nám ulehčují řešení úloh a pomáhají v učení některých matematických postupů při jejich řešení. Jedním z takových nástrojů je maplet zvaný **Limit Methods**. Spustíme jej z hlavní nabídky zvolením **Tools > Tutors > Calculus – Single Variable > Limit Methods...** Tento nástroj umí řešit zadané limity krok po kroku pomocí implementovaných matematických pravidel. Můžeme mu tedy zadat výraz a bod, v němž chceme určit jeho limitu, a nechat například maplet zobrazit celé řešení krok za krokem kliknutím na tlačítko **All Steps**. Výsledek tohoto postupu na příkladu 2.28.(b) můžeme vidět na obrázku 2.32. V mapletu si však můžeme zobrazit pouze následující krok výpočtu, pokusit se použít některé z implementovaných pravidel nebo požádat o nápovědu, které pravidlo použít.



Obrázek 2.32: Pomocník pro určování limit.

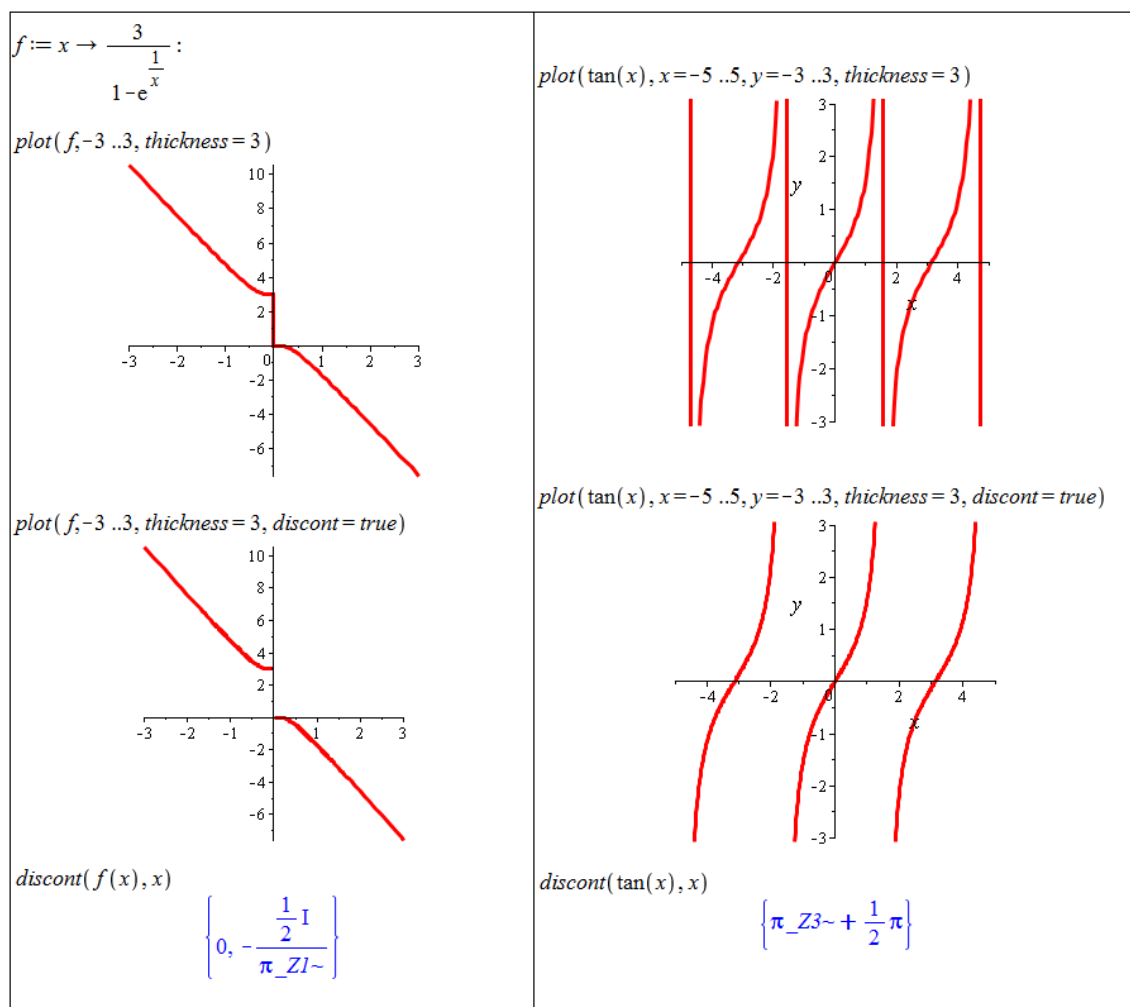
**Definice 2.11:** Řekneme, že funkce  $f(x)$  je spojitá v bodě  $x_0$ , pokud má v tomto bodě vlastní limitu a platí:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

**Definice 2.12:** Řekneme, že funkce  $f(x)$  je zprava (resp. zleva) spojitá v bodě  $x_0$ , pokud má v tomto bodě příslušnou jednostrannou vlastní limitu a platí:  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$  (resp.  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$ ).

**Definice 2.13:** Řekneme, že funkce  $f(x)$  je spojitá na intervalu  $J \in D(f)$ , pokud

- (a)  $f$  je spojitá v každém vnitřním bodě intervalu  $J$
- (b) a patří-li levý (resp. pravý) koncový bod do intervalu  $J$ , je v něm funkce  $f$  spojitá zprava (resp. zleva).

V systému Maple můžeme jednak testovat rovnost limity a funkční hodnoty, jak plyne z definice. Pro určování spojitosti funkce na intervalu je však možné (a vhodné) využít příkazu `discont` hledajícího nespojitosti funkce. Příkaz má dva povinné parametry, a to výraz, jehož nespojitosti určujeme, a nezávisle proměnnou. Další možností je použít příkaz `iscont` testující spojitost na zadaném intervalu. Odpovědí je pravdivostní hodnota, zda je funkce na daném intervalu spojitá, či nikoliv.



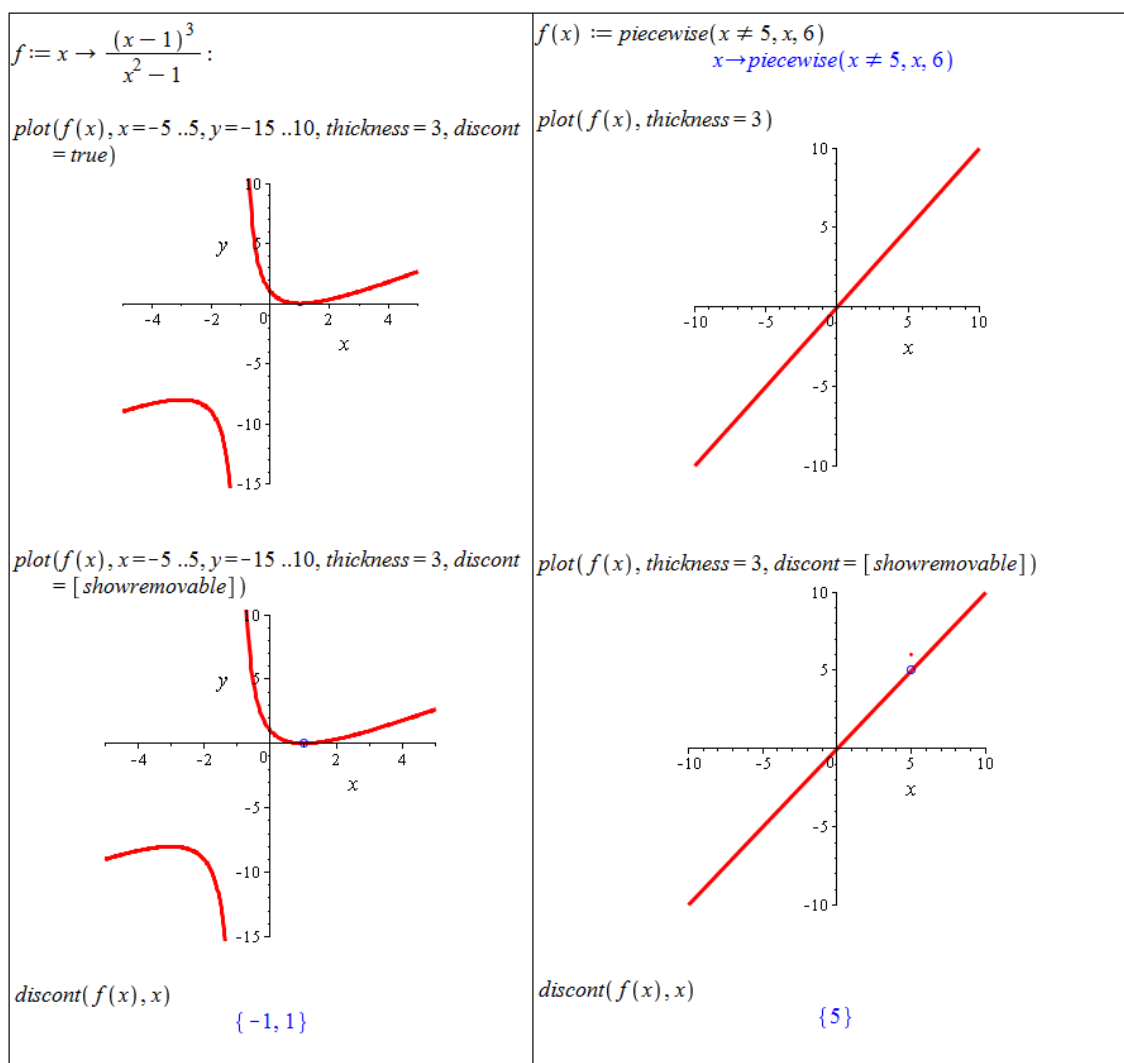
Obrázek 2.33: Zobrazování nespojitých funkcí.

Pokud je funkce  $y = f(x)$  nespojitá na daném intervalu jen v konečně mnoha (izolovaných) bodech, systém Maple ji v těchto bodech spojuje úsečkami rovnoběžnými s osou  $y$ .



Jestliže chceme nespojitosti zobrazit korektně, použijeme nepovinný atribut `discont` příkazu `plot`, který nastavíme na hodnotu `true` – viz obrázek 2.33.

Od verze Maple 14 je možné také zobrazovat odstranitelné nespojitosti (obrázek 2.34).



Obrázek 2.34: Zobrazování nespojitých funkcí a vyznačování odstranitelných nespojitostí.

Výsledkem příkazu `discont` u funkcí definovaných po částech jsou vždy body „podezřelé“ z nespojitostí. Pro zjištění, zda se jedná o nespojitosti či nikoliv, je potřeba v těchto bodech provést test (existence a) rovnosti limity a funkční hodnoty. Obrázek 2.35 ukazuje použití příkazu `discont` v případě funkce  $f(x)$  zadefinované po částech.

```
discont(piecewise(x < 0, x, x ≥ 0, x), x)
```

`{0}`

Obrázek 2.35: Použití příkazu `discont` u funkce definované po částech.

**Příklad 2.30:** Nalezněte číslo  $C \in \mathbb{R}$  tak, aby funkce  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-16}{x-4} & \dots x \neq 4 \\ C & \dots x = 4 \end{cases}$

byla spojitá pro všechna  $x \in \mathbb{R}$ .

*Řešení:* Jelikož  $x^2-16 = (x-4) \cdot (x+4)$ , platí  $f(x) = x+4$  pro  $x \neq 4$ , a tedy  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 8$ .

Z definice spojitosti pak dostáváme:  $C = f(4) = 8$ .

**Příklad 2.31:** Určete body nespojitosti funkcí:

$$(a) f(x) = \begin{cases} x+1 & \dots x \geq 2 \\ 2 \cdot x - 1 & \dots 1 < x < 2, \\ x-1 & \dots x \leq 1 \end{cases}$$

$$(b) f(x) = \frac{3 \cdot x + 3}{x^2 - 3 \cdot x - 4},$$

$$(c) f(x) = \frac{x^2 - b^2}{x - b}, b \in \mathbb{R}.$$

**Příklad 2.32:** Nalezněte čísla  $c, d \in \mathbb{R}$  tak, aby funkce  $f(x) = \begin{cases} 3 \cdot x^2 - 1 & \dots x < 0 \\ c \cdot x + d & \dots 0 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x+8} & \dots x > 1 \end{cases}$

byla spojitá pro všechna  $x \in \mathbb{R}$ .

**Příklad 2.33:** Uveďte příklad funkce, která na uzavřeném intervalu není spojitá, ale má limitu v každém bodě tohoto intervalu.

## 2.5 Derivace funkce

**Definice 2.14:** Nechť  $f$  je funkce,  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Existuje-li  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ , nazýváme tuto limitu *derivací* funkce  $f$  v bodě  $x_0$ .

**Poznámka 2.2:** Derivace funkce  $f(x)$  je funkce, která je definovaná ve všech bodech, v nichž existuje limita z předchozí definice. Tuto funkci značíme několika způsoby:  $f'(x)$ ,  $\frac{df(x)}{dx}$  nebo  $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$ . Analogicky můžeme definovat druhou derivaci funkce  $f(x)$  jako derivaci funkce  $f'(x)$  a podobně derivace vyšších řádů.

**Poznámka 2.3:** Limita v definici 2.14 může být vlastní i nevlastní. Podle toho rozlišujeme také vlastní a nevlastní derivaci. V tomto textu si situaci ulehčíme a budeme uvažovat pouze vlastní derivace. Z tohoto důvodu budeme slovo „vlastní“ vynechávat a slovem „derivace“ budeme vždy rozumět vlastní derivaci.

System Maple nabízí (jako obvykle) několik možností, jak určit derivaci funkce. Opět můžeme využít kontextové nabídky (tj. zapsat do dokumentu výraz, který chceme derivovat, kliknout na něj pravým tlačítkem myši a z nabídky zvolit položku **Differentiate** s výběrem nezávisle proměnné). Dále je možné použít oba již uvedené symboly zápisu derivace, které jsou k dispozici v paletě **Expression**. System Maple (v režimu *Document Mode*) rozpozná i zápis  $f'(x)$  (tj. použití apostrofu jako symbolu derivace). Další možností je příkaz **diff** mající dva povinné argumenty: výraz a nezávisle proměnnou.

$$\frac{d}{dx}(x^2 + 2 \cdot x + 6) = 2x + 2$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 2 \cdot x + 6) = 2x + 2$$

$$\text{diff}(x^2 + 2 \cdot x + 6, x) = 2x + 2$$

$$x^2 + 2 \cdot x + 6 \xrightarrow{\text{differentiate w.r.t. } x} 2x + 2$$

$$(x^2 + 2 \cdot x + 6)' = 2x + 2$$

Obrázek 2.36: Přehled možností při výpočtu derivace.

Při počítání derivací musíme být opět opatrní a rozlišovat mezi funkčním operátorem a výrazem. Všechny zmíněné způsoby určení derivace funkce (nebo lépe výrazu) vrací výsledek jako výraz. Pokud chceme poté určit jeho funkční hodnotu, musíme buď použít příkaz `eval`, nebo ze získaného výrazu udělat funkci příkazem `unapply`, případně použít apostrofovou notaci pro zápis derivace, viz obrázek 2.37.

$h(x) := x^2 + 2 \cdot x + 6$	$D(h)$
$x \rightarrow x^2 + 2x + 6$	$x \rightarrow 2x + 2$
$\frac{d}{dx}h(x)$	$D(h)(2)$
$2x + 2$	$6$
$\text{eval}(\%, x=2)$	$D(\sin)$
$6$	$\cos$
$g := \text{unapply}\left(\frac{d}{dx}h(x), x\right)$	$D(\sin)(x)$
$x \rightarrow 2x + 2$	$\cos(x)$
$g(2)$	
$6$	
$h'(2)$	
$6$	

Obrázek 2.37: Výpočet derivace v bodě.

System Maple disponuje též příkazem `D` představujícím diferenciální operátor. Jeho argumentem je funkční operátor a výsledkem derivace opět jako funkce (funkční operátor) –

pravá část obrázku 2.37.

$$\frac{d^2}{dx^2}(x^2 + 2 \cdot x + 6) = 2$$

$$\frac{d^3}{dx^3}(x^2 + 2 \cdot x + 6) = 0$$

$$\text{diff}(x^2 + 2 \cdot x + 6, x, x) = 2$$

$$\text{diff}(x^2 + 2 \cdot x + 6, x, x, x) = 0$$

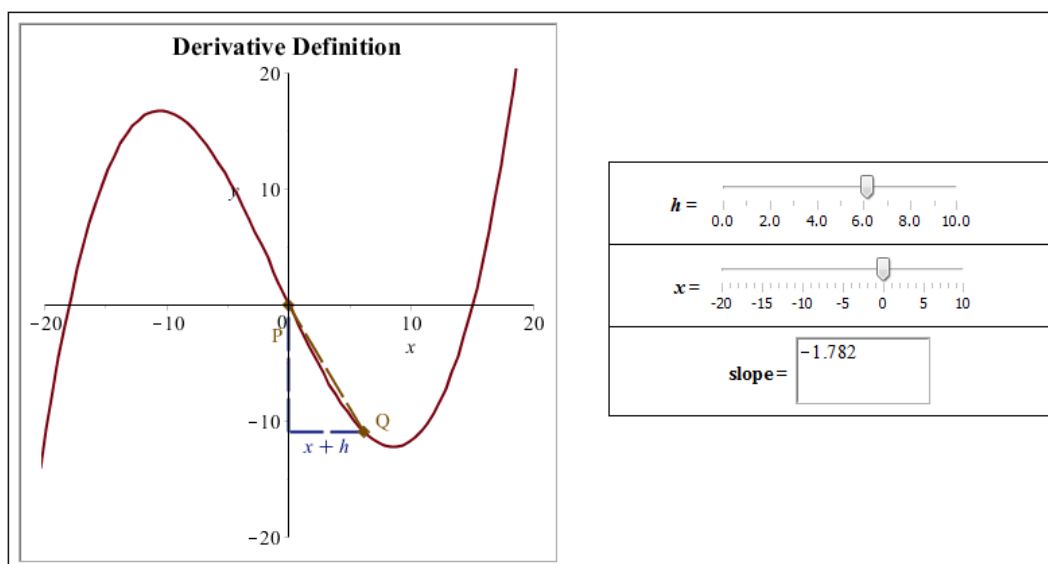
$$(x^2 + 2 \cdot x + 6)'' = 2$$

$$(x^2 + 2 \cdot x + 6)^{(3)} = 0$$

Obrázek 2.38: Výpočet derivací vyšších řádů.

Derivace vyšších řádů zadáváme tak, jak jsme zvyklí „s tužkou na papíře“. Při použití příkazu `diff` se  $n$ -tá derivace specifikuje tak, že zadáme nezávisle proměnnou  $n$ -krát (jako argument příkazu)<sup>5</sup>. Systém Maple (opět pouze v režimu *Document Mode*) umí rozpoznat i zápis s číslem derivace v exponentu výrazu v kulatých závorkách – toto je nutné při odkliknutí ještě potvrdit ve vyskakujícím okénku (obrázek 2.38).

Stejně jako u limit poskytuje Maple jednak pomocné nástroje pro výpočet derivací, ale od verze 16 také matematickou aplikaci s definicí a znázorněním derivace (**Tools > Math Apps > Calculus – Derivative Definition**) – viz obrázek 2.39.

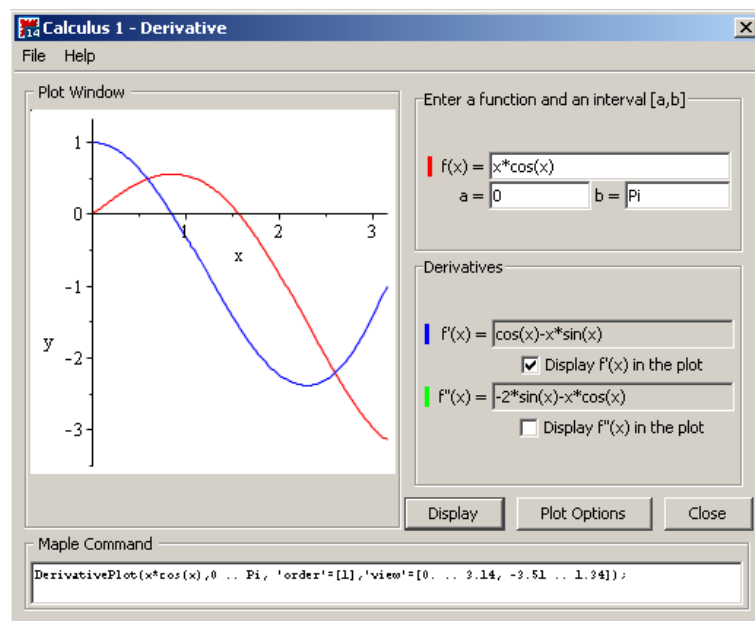


Obrázek 2.39: Interaktivní znázornění derivace.

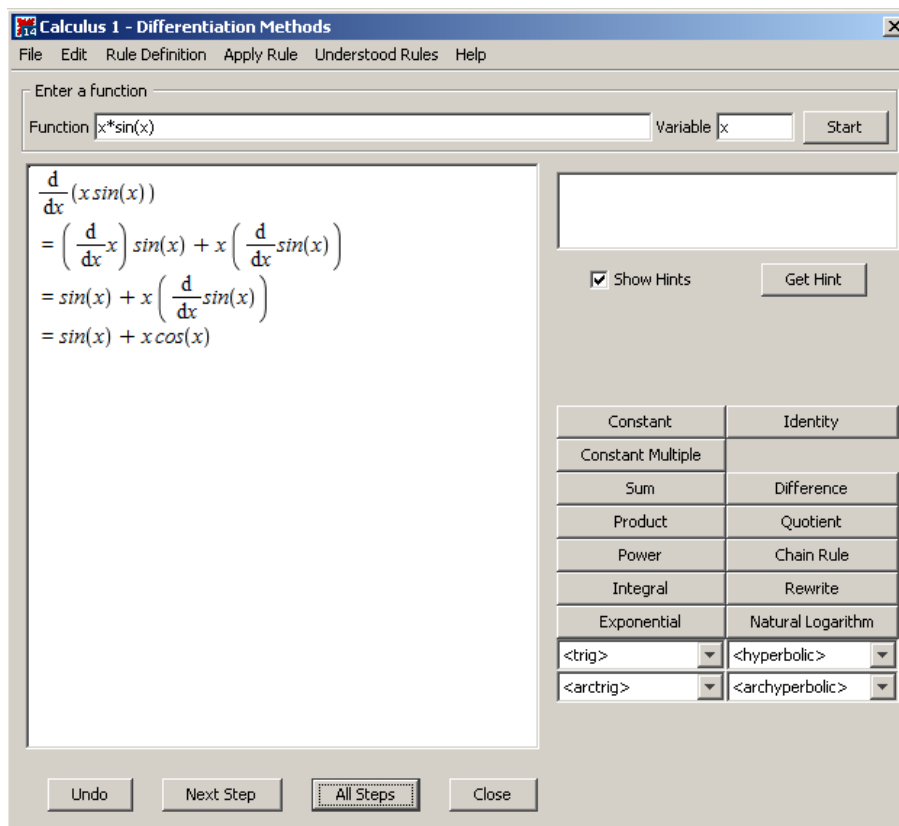
Prvním z pomocných nástrojů pro výpočet derivace je maplet zvaný **Derivatives**. Spustíme

<sup>5</sup>Je možné použít i zkrácený zápis ve tvaru `diff(f(x), x$n)`.

jej z hlavní nabídky zvolením **Tools > Tutors > Calculus – Single Variable > Derivatives....** Maplet pro zadanou funkci vypočítá její první a druhou derivaci, zvolené funkce vykreslí do jednoho grafu.



Obrázek 2.40: Pomocník pro výpočet a zobrazení derivací.



Obrázek 2.41: Pomocník pro výpočet derivací.

Druhý takový nástroj je maplet s názvem **Differentiation Methods**. Spustíme jej

z hlavní nabídky zvolením **Tools > Tutors > Calculus – Single Variable > Differentiation Methods...** Stejně jako analogický pomocník u limit umí řešit derivace zadaných funkcí krok po kroku pomocí implementovaných matematických pravidel (která nalezneme v nápovědě). Můžeme mu tedy opět zadat výraz a nezávisle proměnnou a nechat maplet zobrazit celé řešení krok za krokem kliknutím na tlačítko **All Steps**. Výsledek tohoto postupu můžeme vidět na obrázku 2.41. V mapletu si také můžeme zobrazit pouze následující krok výpočtu (**Next Step**), pokusit se použít některé z implementovaných pravidel nebo požádat o nápovědu (**Get Hint**), které pravidlo použít.

**Příklad 2.34:** Určete:

(a)  $\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)),$

(c)  $\frac{d}{dx}(a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d),$

(b)  $\frac{d}{dx}(f(g(x)),$

(d)  $\frac{d}{dx} \left( \frac{(x-1)^3}{x^2-1} \right).$

**Příklad 2.35:** Uveďte příklad spojitě funkce na intervalu  $J$ , která na tomto intervalu není diferencovatelná (tj. nemá v alespoň jednom bodě derivaci). Dokážete uvést příklad funkce spojitě na intervalu  $J$ , která na tomto intervalu nemá derivaci právě ve dvou bodech?

**Poznámka 2.4:** Geometrickou interpretací derivace funkce  $f(x)$  v bodě  $x_0$  je směrnice tečny k funkci  $f(x)$  v tomto bodě. Jestliže tedy  $y = k \cdot x + q$  je rovnicí tečny v bodě  $x_0$ , pak  $k = f'(x_0)$ .

**Příklad 2.36:** Určete rovnici tečny k funkci  $f(x) = x^2$  v bodě  $x_0 = 1$ . Vykreslete do jednoho grafu funkci  $f(x)$  i tuto tečnu.

**Příklad 2.37:** Najděte bod  $x_0$  tak, aby tečna k funkci  $f(x) = x^3$  v tomto bodě byla rovnoběžná s přímkou  $y = 12 \cdot x - 5$ . Vykreslete do jednoho grafu funkci  $f(x)$ , nalezenou tečnu a zadanou přímku.

**Příklad 2.38:** Najděte bod  $x_0$  tak, aby tečna k funkci  $f(x) = x^3$  v tomto bodě byla kolmá na přímkou  $y = -\frac{1}{3} \cdot x - 5$ . Vykreslete do jednoho grafu funkci  $f(x)$ , nalezenou tečnu a zadanou přímku.

## 2.5.1 Diferenciál

**Definice 2.15:** Řekneme, že funkce  $f$  je diferencovatelná v bodě  $x_0$ , jestliže je v něm definovaná a jestliže existuje  $A \in \mathbb{R}$  tak, že  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - A \cdot h}{h} = 0$ . Funkce  $A \cdot h$  ( $h \in \mathbb{R}$ ) se nazývá *diferenciálem* funkce  $f$  v bodě  $x_0$  a značí se  $df(x_0)(h)$ .

**Poznámka 2.5:** Jak již bylo zmíněno v příkladu 2.35, „diferencovatelná funkce“ je totéž co „funkce mající derivaci“.

Diferenciál je možné použít k určení přibližné hodnoty funkce v okolí bodu se známou funkční hodnotou. V systému Maple se tato „výhoda“ smazává, jelikož samotný Maple nám okamžitě vypíše přibližnou funkční hodnotu s „libovolnou“ přesností. Přesto je možné si na příkladech význam pojmu ověřit a využít Maple alespoň k dílčím výpočtům.

**Příklad 2.39:** Určete přibližně:  $\arctan(1.01)$ .

*Řešení:* Vyjdeme z definice 2.15. Ta nám říká, že  $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + df(x_0) \cdot h$ . V našem případě  $x_0 = 1$  a  $h = 0.01$ . Řešení získané v Maple je znázorněno na obrázku 2.42.

<p>Derivace zadané funkce: <math>\frac{\partial}{\partial x} \arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}</math></p> <p>S přesností na 10 míst pomocí Maple: <math>\arctan(1.01) = 0.7903732467</math></p> <p>Přibližně pomocí diferenciálu: <math>\arctan(1.01) \approx \arctan(1) + \frac{1}{1+1^2} \cdot 0.01 = \arctan(1.0) + \frac{1}{200} = 0.7903981634</math></p>
---

Obrázek 2.42: Řešení příkladu 2.39.

**Příklad 2.40:** Určete přibližně:  $\sqrt{51}$ .

**Příklad 2.41:** Určete přibližně:  $\sqrt[3]{123}$ .

**Příklad 2.42:** Určete přibližně:  $2.95^4$ .

## 2.5.2 Taylorův polynom

**Definice 2.16:** Necht'  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  a  $f$  je funkce mající v bodě  $x_0 \in \mathbb{R}$  derivace až do řádu  $n$ . Polynom

$$T_n^f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n, x \in \mathbb{R},$$

se nazývá *Taylorův polynom* stupně  $n$  funkce  $f$  v bodě  $x_0$ . Funkci

$$R_n^f(x) = T_n^f(x) - f(x)$$

říkáme *Taylorův zbytek* a celý výraz

$$T_n^f(x) + R_n^f(x)$$

nazýváme *Taylorovým vzorcem*.

**Poznámka 2.6:** Jak jsme si mohli všimnout, aproximace funkční hodnoty pomocí diferenciálu je vlastně speciální případ Taylorova polynomu pro  $n = 1$ . Taylorův polynom také můžeme využít k aproximaci funkční hodnoty v okolí bodu se známou funkční hodnotou. Aproximace je tím přesnější, čím vyšší je  $n$ . Díky následující poznámce můžeme zjistit, jak vysoké musí být  $n$ , abychom docílili požadované přesnosti aproximace.

**Poznámka 2.7:** Necht' jsou splněny předpoklady definice 2.16. Pak existuje číslo  $\Theta \in (0, 1)$  tak, že

$$R_n^f(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \Theta \cdot (x - x_0))}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}.$$

**Poznámka 2.8:** Když položíme v Taylorově vzorci  $x_0 = 0$ , všechny výrazy se nám zjednoduší. V takovém případě také někdy mluvíme o *Maclaurinově vzorci*. Pro *Maclaurinův zbytek* pak platí:

$$R_n^f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\Theta \cdot x)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}.$$

Systém Maple obsahuje příkaz `taylor` vypisující Taylorův vzorec příslušný zadané funkci v prvním parametru příkazu. Druhým povinným parametrem je bod, v němž se vzorec realizuje. Standardně je vzorec vypisován pro  $n = 5$ , což je o jedna nižší hodnota než základní nastavení systémové proměnné `Order`. Tato proměnná představuje řád Taylorova zbytku, tedy číslo  $n + 1$ . Počet členů Taylorova vzorce tak můžeme ovlivnit přenastavením proměnné `Order` nebo zapsáním této hodnoty na místo třetího (nepovinného) parametru příkazu `taylor`<sup>6</sup>.

Někdy se nám může hodit pracovat pouze s Taylorovým polynomem (tedy bez Taylorova zbytku). K tomu je potřeba použít příkaz `convert`, kterému zadáme jako první parametr Taylorův vzorec (získaný příkazem `taylor`) a na místo druhého parametru zapíšeme slovo `polynom` (čímž se „zbavíme“ vyjádření Taylorova zbytku pomocí funkce  $O$ ).

The screenshot shows the following Maple commands and their outputs:

```
taylor(sin(x), x=x0) =
sin(x0) + cos(x0)(x-x0) - 1/2 sin(x0)(x-x0)^2 - 1/6 cos(x0)(x-x0)^3 + 1/24 sin(x0)(x-x0)^4 + 1/120 cos(x0)(x-x0)^5
+ O((x-x0)^6)

taylor(sin(x), x=0) = x - 1/6 x^3 + 1/120 x^5 + O(x^6)

taylor(e^x, x=0, 10) = 1 + x + 1/2 x^2 + 1/6 x^3 + 1/24 x^4 + 1/120 x^5 + 1/720 x^6 + 1/5040 x^7 + 1/40320 x^8 + 1/362880 x^9 + O(x^10)

convert(%, polynom) = 1 + x + 1/2 x^2 + 1/6 x^3 + 1/24 x^4 + 1/120 x^5 + 1/720 x^6 + 1/5040 x^7 + 1/40320 x^8 + 1/362880 x^9
```

Obrázek 2.43: Ukázka použití příkazu `taylor`.

Maple 16 dále poskytuje matematickou aplikaci Taylor's Theorem (**Tools > Math Apps > Calculus – Taylor's Theorem**) – viz obrázek 2.44 s interaktivní demonstrací zavedeného pojmu.

**Příklad 2.43:** Najděte Maclaurinův polynom funkce  $\tan(x)$  pátého stupně.

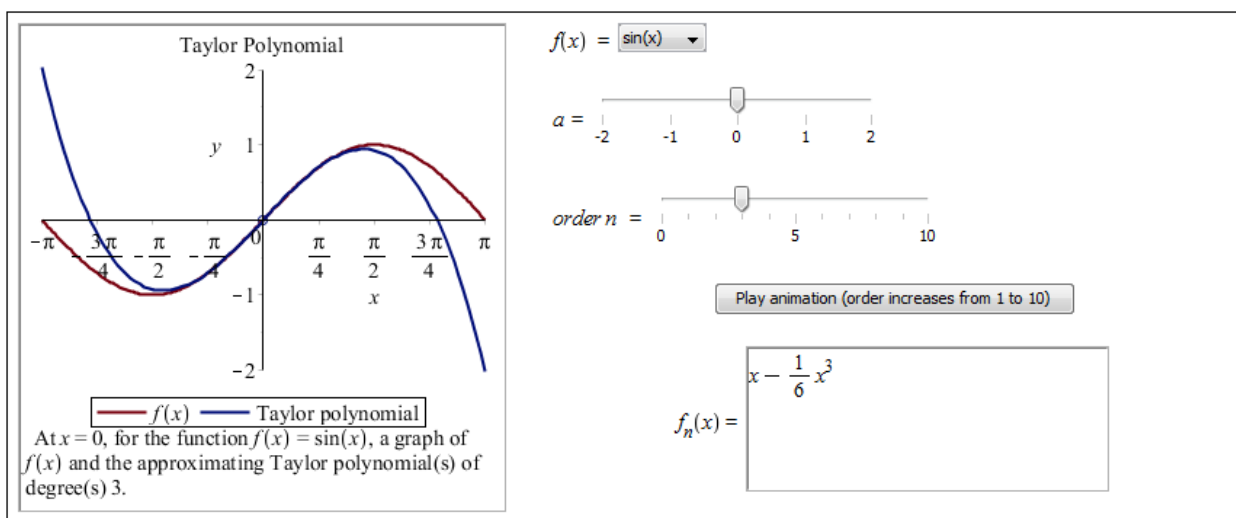
**Příklad 2.44:** Vytvořte Taylorův polynom pro funkci  $x^x$  čtvrtého stupně v bodě 1.

**Příklad 2.45:** Pomocí Taylorova polynomu vyjádřete funkci  $f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$  jako polynom v proměnné  $x - 2$ .

Jak jsme se zmínili v poznámce 2.6, Taylorův polynom můžeme využít k nalezení přibližné funkční hodnoty. Díky poznámkám 2.7 a 2.8 máme navíc nástroj, jak určit tuto hodnotu se zadanou přesností. Podobně jako v případě použití diferenciálu platí i zde, že (podstatně)

<sup>6</sup>V tomto případě nedojde ke změně hodnoty uložené v proměnné `Order`, ovlivněn bude pouze příslušný výpis příkazu `taylor`.





Obrázek 2.44: Interaktivní demonstrace Taylorova polynomu.

jednodušším způsobem získáme dokonce přesnější hodnotu pouhým použitím systému Maple. Přesto může Maple sloužit jako pomocník při výpočtu a současně díky němu můžeme ověřit, zda byla splněna požadovaná přesnost výpočtu.

**Příklad 2.46:** Určete hodnotu Eulerova čísla  $e$  s chybou menší než  $10^{-3}$ .

*Řešení:* Chceme zjistit hodnotu čísla  $e$ , vezmeme si proto na pomoc funkci  $f(x) = e^x$  a budeme hledat funkční hodnotu  $f(1)$ . Funkci musíme aproximovat v nějakém jiném bodě než je bod 1 (neboť pro ten bychom dostali přesnou hodnotu  $e$  a v ničem by nám to nepomohlo), současně ale ne příliš daleko od tohoto bodu (čím dále od tohoto bodu bychom hledali aproximaci, tím nepřesnější bude výsledek). Abychom si situaci co nejvíce zjednodušili, vezmeme bod 0 (který je „blízko“ bodu 1), pro nějž máme tvar Taylorova (resp. Maclaurinova) zbytku určený poznámkou 2.8.

Máme tedy funkci  $f(x) = e^x$  a víme, že pro příslušný Maclaurinův zbytek platí:

$$R_n^{e^x}(x) = \frac{e^{\Theta \cdot x}}{(n+1)!} \cdot x^{n+1},$$

kde  $\Theta \in (0, 1)$ . Nás bude zajímat funkční hodnota v bodě 1, tj. pro  $x = 1$  dostáváme:

$$R_n^{e^x}(1) = \frac{e^{\Theta}}{(n+1)!}.$$

V zadání je požadována přesnost  $10^{-3}$ . Má tedy platit:

$$|R_n^{e^x}(1)| < 10^{-3}.$$

Dosažením získáme:

$$\left| \frac{e^{\Theta}}{(n+1)!} \right| = \frac{e^{\Theta}}{(n+1)!} < 10^{-3}.$$

Nyní je třeba si uvědomit, že  $e^{\Theta} < 3$ , jelikož  $\Theta \in (0, 1)$ . Můžeme proto psát, že platí:

$$\frac{e^{\Theta}}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Když nyní najdeme  $n$  takové, že

$$\frac{3}{(n+1)!} < 10^{-3},$$

pak bude jistě platit:

$$\frac{e^\Theta}{(n+1)!} < 10^{-3}.$$

Získané  $n$  představuje stupeň Maclaurinova polynomu, takže už zbývá pouze popsany postup aplikovat v systému Maple – obrázek 2.45.

Hledáme tedy  $n$  splňující nerovnost:

$$\frac{3}{(n+1)!} < 10^{-3}$$

Což je to samé jako:

$$(n+1)! > 3 \cdot 10^3 = 3000$$

Maple takovou nerovnost vyřešit neumí, ale případně metodou "pokus-omyl" zjistíme, že:

$$(n+1)! > 3000 \rightarrow n \geq 6$$

Maclaurinův vzorec:

$$\text{taylor}(e^x, x=0, 7)$$
$$1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6 + O(x^7)$$

Maclaurinův polynom:

$$\text{app} := \text{convert}(\%, \text{polynom})$$
$$1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6$$

Vytvoření funkce ze získaného výrazu:

$$\text{aprox} := \text{unapply}(\text{app}, x)$$
$$x \rightarrow 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6$$

Aproximace Maclaurinovým polynomem:

$$\text{evalf}(\text{aprox}(1)) = 2.718055556$$

Přibližná hodnota v Maple:

$$\text{evalf}(e^1) = 2.718281828$$

Chyba aproximace:

$$\text{chyba} := |\text{evalf}(\text{aprox}(1)) - \text{evalf}(e^1)| = 0.000226272$$

Obrázek 2.45: Řešení příkladu 2.46.

**Příklad 2.47:** S chybou menší než  $10^{-3}$  určete hodnotu čísla:

(a)  $\frac{1}{e}$ ,

(b)  $\sqrt[5]{250}$ .

## 2.6 Vyšetření průběhu funkce

Než začneme s vyšetřováním průběhu funkce na příkladech, připomeňme si základní důležité pojmy a jejich vlastnosti.

**Poznámka 2.9:** Nechť  $f(x)$  je funkce. Pokud  $f'(x) > 0$  pro všechna  $x \in J$ , pak je  $f(x)$  na intervalu  $J$  rostoucí. Pokud  $f'(x) < 0$  pro všechna  $x \in J$ , pak je  $f(x)$  na intervalu  $J$  klesající.

**Definice 2.17:** Řekneme, že funkce  $f(x)$  má v bodě  $x_0 \in \mathbb{R}$  lokální minimum, jestliže existuje  $\delta \in \mathbb{R}$ ,  $\delta > 0$  tak, že  $f(x) \geq f(x_0)$  pro všechna  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ . Analogicky definujeme lokální maximum funkce. Lokální minima a maxima se souhrnně nazývají lokální extrémy.

**Poznámka 2.10:** Nechť  $f(x)$  je spojitá v bodě  $x_0$ . Jestliže existuje  $\delta \in \mathbb{R}$ ,  $\delta > 0$  tak, že  $f(x)$  je neklesající na intervalu  $(x_0 - \delta, x_0)$  a nerostoucí na intervalu  $(x_0, x_0 + \delta)$ , má  $f(x)$  v bodě  $x_0$  lokální maximum. Analogické tvrzení platí pro lokální minimum.

**Poznámka 2.11:** V předchozí poznámce jsou záměrně použity výrazy „neklesající“ a „nerostoucí“. Lokální minimum (resp. maximum) se totiž může podle definice nacházet i na intervalu, kde je funkce konstantní. V tom případě se jedná o tzv. neostrý extrém. Pro případ ostrých extrémů je možné v předchozí poznámce nahradit slovo „neklesající“ za „rostoucí“ a „nerostoucí“ za „klesající“.

**Poznámka 2.12:** Body  $x_0$ , v nichž  $f'(x_0) = 0$ , nazýváme *stacionárními body*. Tyto body a body, v nichž funkce  $f(x)$  nemá derivaci, jsou „podezřelé“ z toho, že jsou lokálními extrémy funkce. Jestli se skutečně jedná o extrém, určíme buď podle definice 2.17, poznámky 2.10 nebo poznámky 2.13.

**Poznámka 2.13:** Nechť  $f'(x_0) = 0$  a  $f''(x_0) \neq 0$ . Pokud  $f''(x_0) < 0$ , má funkce  $f(x)$  v bodě  $x_0$  lokální maximum. Pokud  $f''(x_0) > 0$ , má funkce  $f(x)$  v bodě  $x_0$  lokální minimum.

**Definice 2.18:** Nechť  $f(x)$  je funkce,  $J$  interval. Říkáme, že  $f$  je konvexní na  $J$ , jestliže pro každé dva body  $x_1, x_2 \in J$ ,  $x_1 < x_2$  a každá dvě nezáporná reálná čísla  $a_1, a_2$  taková, že  $a_1 + a_2 = 1$  platí:

$$f(a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2) \leq a_1 \cdot f(x_1) + a_2 \cdot f(x_2).$$

Pokud za týchž předpokladů platí:

$$f(a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2) \geq a_1 \cdot f(x_1) + a_2 \cdot f(x_2),$$

říkáme, že  $f$  je konkávní na  $J$ . Pokud změním všechny neostré nerovnosti na ostré, mluvíme o *ryzí konvexitě*, resp. *ryzí konkávitě*.

**Poznámka 2.14:** Nechť  $f$  má na intervalu  $J \subseteq D(f)$  druhou derivaci. Pokud  $f''(x) \geq 0$  pro všechna  $x \in J$ , pak je  $f$  na  $J$  konvexní. Pokud platí ostrá nerovnost, je  $f$  na  $J$  ryze konvexní. Analogicky, pokud  $f''(x) \leq 0$  pro všechna  $x \in J$ , pak je  $f$  na  $J$  konkávní. V případě ostré nerovnosti je ryze konkávní.

**Poznámka 2.15:** Body, v nichž se mění ryzí konvexitata funkce na ryzí konkávitatu a naopak, nazýváme *inflexními body*. Nechť tedy  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\delta \in \mathbb{R}$ ,  $\delta > 0$ . Pokud  $f(x)$  je na  $(x_0 - \delta, x_0)$  ryze konvexní a na  $(x_0, x_0 + \delta)$  ryze konkávní (resp. naopak), nazýváme bod  $x_0$  bodem inflexním.

**Poznámka 2.16:** V bodech nespojitosti  $x_0$  funkce  $f(x)$  zkoumáme, jestli v nich jsou asymptoty bez směrnice, a to ověřením, zda  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty$  nebo  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty$ .

Dále zkoumáme, zda má funkce  $f(x)$  asymptotu (asymptoty) se směrnicí, tj. zda existují  $A, B \in \mathbb{R}$  tak, že  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \cdot x + B$  nebo  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \cdot x + B$ .

Platí, že

$$A = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \quad \left( \text{resp. } A = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \right)$$

a

$$B = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - A \cdot x) \quad \left( \text{resp. } B = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - A \cdot x) \right).$$

Při vyšetřování průběhu zadané funkce  $f(x)$  zkoumáme vlastnosti popsané v předchozích definicích a poznámkách, spolu s některými dříve zavedenými pojmy. Aplikujeme tak následující postup:

1. Zjišťujeme  $D(f)$ , hledáme nulové body (tj. taková  $x$ , pro která  $f(x) = 0$ ), průsečík s osou  $y$  (tj.  $f(0)$ ), určujeme, kdy je funkce kladná, záporná, a hledáme body nespojitosti funkce  $f$ .
2. Vyšetřujeme funkci  $f'(x)$ . Hledáme  $D(f')$ , nulové body a intervaly, kde je funkce  $f'(x)$  kladná (tj.  $f(x)$  je rostoucí) a kde záporná (tj.  $f(x)$  je klesající).
3. Vyšetřujeme funkci  $f''(x)$ . Hledáme nulové body a intervaly, kde je funkce  $f''(x)$  kladná (tj.  $f(x)$  je konvexní) a kde záporná (tj.  $f(x)$  je konkávní). Ověřujeme, zda je některý z dříve nalezených stacionárních bodů lokálním extrémem funkce  $f(x)$ .
4. Hledáme asymptoty funkce  $f$ , a to asymptoty bez směrnice a asymptoty se směrnicí.
5. Vykreslujeme graf funkce  $f(x)$ .

**Příklad 2.48:** Vyšetřete průběh funkce  $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$ .

*Řešení:*

Budeme procházet právě uvedený postup, přičemž budeme využívat možností Maple 14.

1. Definiční obor funkce vidíme na první pohled z jejího předpisu. Funkce není definovaná pouze v bodě nula, tedy  $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . K nalezení nulových bodů a intervalů, kde je funkce kladná, resp. záporná, využijeme příkaz `solve`<sup>7</sup>. V tomto případě však příkaz žádné řešení nenajde. Musíme jej proto určit „sami“. Výraz  $e^{\frac{1}{x}}$  je pro libovolná  $x$  kladný, z čehož plyne, že  $f(x) > 0$  pro  $x > 0$  a  $f(x) < 0$  pro  $x < 0$ . Pro nalezení nespojitostí použijeme příkaz `discont`.

<sup>7</sup>Upozorníme, že příkaz `solve` má jednu „nepříjemnou“ vlastnost: v případech, kdy nenalezne žádné řešení, na výstup nic nevypíše a přejde na další řádek.

$f(x) := x \cdot e^{\frac{1}{x}}$ <p><b>Nulové body:</b>  <math>\text{solve}(f(x) = 0, x)</math></p> <p><b>Průsečík s osou y:</b>  Není. Funkce <math>f(x)</math> není definovaná v bodě 0.</p>	<p><b>Znaménka:</b></p> $\text{solve}(f(x) < 0)$ Warning, solutions may have been lost
	$\text{solve}(f(x) > 0)$ Warning, solutions may have been lost
	<p><b>Body nespojitosti:</b></p> $\text{discont}\left(x \cdot e^{\frac{1}{x}}, x\right) = \{0\}$

Obrázek 2.46: Řešení příkladu 2.48 – bod 1.

2. Vypočteme  $f'(x)$ . Definiční obor první derivace je stejný jako u původní funkce, tedy  $D(f') = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Dále použijeme příkaz `solve`. Nyní již dostáváme všechny požadované výsledky od Maple. Pro nalezení stacionárních bodů je možné též použít příkaz `extrema` vypisující funkční hodnoty ve stacionárních bodech. Prvním parametrem příkazu je výraz, jehož stacionární body hledáme, druhým parametrem je množina omezujících podmínek (když žádné nejsou, uvedeme prázdné složené závorky). Dalším parametrem je nezávisle proměnná zadané funkce a posledním čtvrtým parametrem je název proměnné (v apostrofech), do níž se uloží stacionární body – viz obrázek 2.47.

$\text{der1} := \frac{d}{dx} f(x)$ $e^{\frac{1}{x}} - \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$ <p><b>Nulové body:</b>  <math>\text{solve}(\text{der1} = 0, x)</math></p> <p style="text-align: center;">1</p>	<p><b>První derivace je kladná (tj. funkce <math>f</math> je rostoucí):</b></p> $\text{solve}(\text{der1} > 0, x)$ $\text{RealRange}(-\infty, \text{Open}(0)), \text{RealRange}(\text{Open}(1), \infty)$ <p><b>První derivace je záporná (tj. funkce <math>f</math> je klesající):</b></p> $\text{solve}(\text{der1} < 0, x)$ $\text{RealRange}(\text{Open}(0), \text{Open}(1))$ <p><b>Extrémy:</b></p> $\text{extrema}(f(x), \{ \}, x, 'bod')$ <p style="text-align: right;">{e}</p> <p><i>bod</i></p> <p style="text-align: right;">{{x=1}}</p>
---	---

Obrázek 2.47: Řešení příkladu 2.48 – bod 2.

3. Vypočteme  $f''(x)$  a do třetice použijeme příkaz `solve`, který podobně jako poprvé nezvládne vypočítat zkoumané nerovnosti. Jelikož je výraz  $e^{\frac{1}{x}}$  vždy kladný, můžeme nerovnosti zjednodušit a hledat pouze znaménka výrazu  $x^3$ . Vyhodnocením druhé derivace ve stacionárním bodě  $x = 1$  zjistíme, že se jedná o lokální minimum.
4. Počítáme dříve uvedené limity a zjišťujeme, že zadaná funkce má asymptotu se směrnici tvaru  $y = x + 1$  a asymptotu bez směrnice v bodě  $x = 0$  (obrázek 2.49).

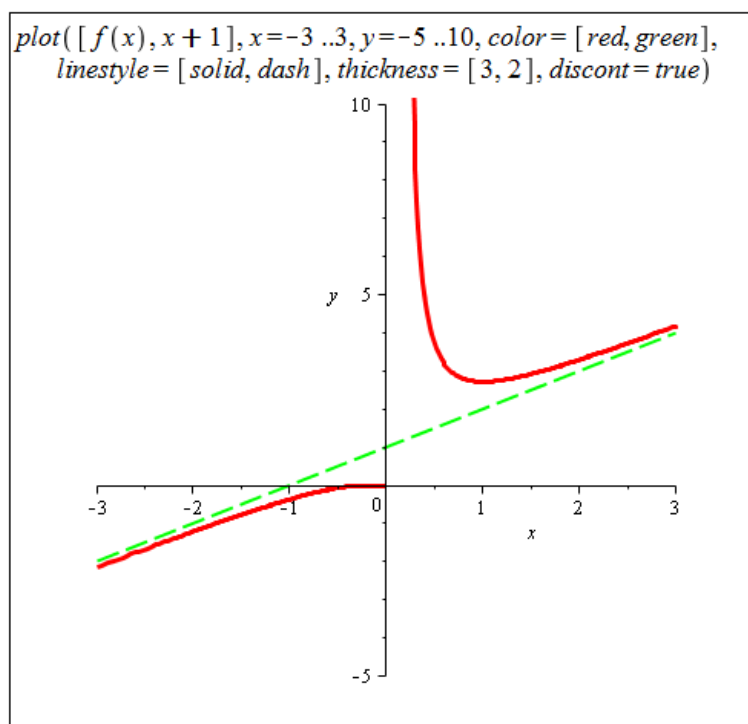
$der2 := \frac{d^2}{dx^2} f(x)$ $\frac{1}{x}$ $\frac{e^x}{x^3}$ <p><b>Nulové body:</b></p> $solve(der2=0, x)$	<p><b>Druhá derivace je kladná (tj. funkce <math>f</math> je konvexní):</b></p> $solve(der2 > 0, x)$ <p><u>Warning, solutions may have been lost</u></p> $solve(x^3 > 0, x)$ <p style="text-align: right;"><math>RealRange(Open(0), \infty)</math></p> <p><b>Druhá derivace je záporná (tj. funkce <math>f</math> je konkávní):</b></p> $solve(der2 < 0, x)$ <p><u>Warning, solutions may have been lost</u></p> $solve(x^3 < 0, x)$ <p style="text-align: right;"><math>RealRange(-\infty, Open(0))</math></p> <p><b>Extrémy:</b></p> $eval(der2, x=1)$ <p style="text-align: right;">e</p>
---	--

Obrázek 2.48: Řešení příkladu 2.48 – bod 3.

<p><b>Se směrnicí:</b></p> <p>Předpokládáme, že směrnice má rovnici <math>y = A \cdot x + B</math>.</p> $A_1 := \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ <p style="text-align: right;">1</p> $A_2 := \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ <p style="text-align: right;">1</p> $B_1 := \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - A_1 \cdot x)$ <p style="text-align: right;">1</p> $B_2 := \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - A_2 \cdot x)$ <p style="text-align: right;">1</p> <p>Asymptota se směrnicí bude jedna (tj. bude stejná pro <math>x \rightarrow \infty</math> a pro <math>x \rightarrow -\infty</math>). Bude mít tvar <math>y = x + 1</math>.</p>	<p><b>Bez směrnice:</b></p> <p>Očekávat ji můžeme pouze v bodě nespojitosti. Její obecný tvar je <math>x = K, K \in \mathbb{R}</math>.</p> $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$
---	---

Obrázek 2.49: Řešení příkladu 2.48 – bod 4.

- Vykreslíme graf funkce  $f(x)$ . Použijeme k tomu příkaz `plot`, jemuž nastavíme několik nepovinných parametrů pro lepší vzhled. Do grafu vykreslíme zadanou funkci  $f$  (červeně) a asymptotu se směrnicí  $y = x + 1$  (zeleně čárkovaně). Parametr `discont` nastavíme na `true`, aby byla správně zobrazena nespojitost funkce  $f$ .



Obrázek 2.50: Řešení příkladu 2.48 – bod 5.

**Příklad 2.49:** Vyšetřete průběh funkce  $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ .

*Řešení:*

1. Definiční obor funkce  $f$  je celá množina reálných čísel, tj.  $D(f) = \mathbb{R}$ . K nalezení nulových bodů a intervalů, kde je funkce kladná, resp. záporná, využijeme klasicky příkaz `solve`. Pro nalezení nespojitostí použijeme opět příkaz `discont`.

$f(x) := \frac{x}{x^2 + 1} :$	<b>Znaménka:</b> $\text{solve}(f(x) < 0)$ $\text{RealRange}(-\infty, \text{Open}(0))$ $\text{solve}(f(x) > 0)$ $\text{RealRange}(\text{Open}(0), \infty)$
<b>Nulové body:</b> $\text{solve}(f(x) = 0, x)$ $0$	<b>Body nespojitosti:</b> $\text{discont}(f(x), x) = \{ \}$
<b>Průsečík s osou y :</b> $f(0)$ $0$	

Obrázek 2.51: Řešení příkladu 2.49 – bod 1.

2. Postupujeme zcela analogicky předchozímu příkladu.  $D(f') = \mathbb{R}$ .
3. Opět postupujeme stejně jako v příkladu 2.48. Tentokrát však získáváme nulové body druhé derivace zadané funkce. Jak vidíme z intervalů konvexity a konkávity, všechny

$der1 := \frac{d}{dx}f(x)$ $\frac{1}{x^2+1} - \frac{2x^2}{(x^2+1)^2}$ <p><b>Nulové body:</b></p> $solve(der1=0, x)$ $-1, 1$	<p><b>První derivace je kladná (tj. funkce <math>f</math> je rostoucí):</b></p> $solve(der1 > 0, x)$ $RealRange(Open(-1), Open(1))$ <p><b>První derivace je záporná (tj. funkce <math>f</math> je klesající):</b></p> $solve(der1 < 0, x)$ $RealRange(-\infty, Open(-1)), RealRange(Open(1), \infty)$ <p><b>Extrémy:</b></p> $extrema(f(x), \{ \}, x, 'body')$ $\left\{ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}$ <p><b>body</b></p> $\{ \{x = -1\}, \{x = 1\} \}$
---	--

Obrázek 2.52: Řešení příkladu 2.49 – bod 2.

tři získané body jsou body inflexní. Stacionární body jsou dva, bod  $x = 1$  je lokálním maximem funkce  $f$  a bod  $x = -1$  jejím lokálním minimem.

$der2 := \frac{d^2}{dx^2}f(x)$ $-\frac{6x}{(x^2+1)^2} + \frac{8x^3}{(x^2+1)^3}$ <p><b>Nulové body:</b></p> $solve(der2=0, x)$ $0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$	<p><b>Druhá derivace je kladná (tj. funkce <math>f</math> je konvexní):</b></p> $solve(der2 > 0, x)$ $RealRange(Open(-\sqrt{3}), Open(0)), RealRange(Open(\sqrt{3}), \infty)$ <p><b>Druhá derivace je záporná (tj. funkce <math>f</math> je konkávní):</b></p> $solve(der2 < 0, x)$ $RealRange(-\infty, Open(-\sqrt{3})), RealRange(Open(0), Open(\sqrt{3}))$ <p><b>Extrémy:</b></p> $eval(der2, x=1)$ $-\frac{1}{2}$ $eval(der2, x=-1)$ $\frac{1}{2}$
--	--

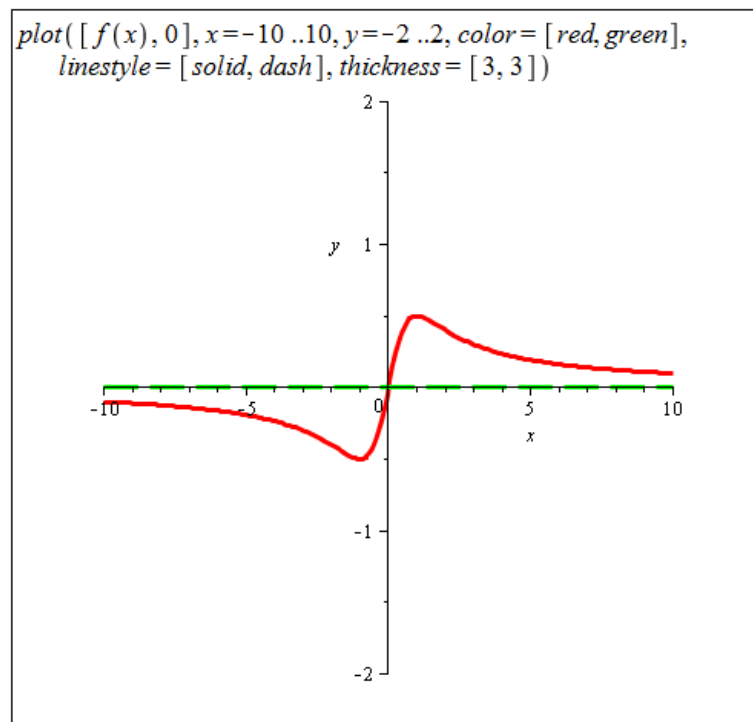
Obrázek 2.53: Řešení příkladu 2.49 – bod 3.

4. Určíme asymptoty se směrnicí a bez směrnice.
5. Vykreslíme graf funkce  $f(x)$ .



<b>Se směrnicí:</b>	<b>Bez směrnic:</b>
Předpokládáme, že směrnice má rovnici $y = A \cdot x + B$ .	Funkce je spojitá na celé množině $\mathbb{R}$ , a nemá tak asymptotu bez směrnic.
$A_1 := \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ 0	
$A_2 := \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ 0	
$B_1 := \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - A_1 \cdot x)$ 0	
$B_2 := \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - A_2 \cdot x)$ 0	
Asymptota se směrnicí bude jedna (tj. bude stejná pro $x \rightarrow \infty$ a pro $x \rightarrow -\infty$ ). Bude mít tvar $y = 0$ .	

Obrázek 2.54: Řešení příkladu 2.49 – bod 4.



Obrázek 2.55: Řešení příkladu 2.49 – bod 5.

**Příklad 2.50:** Vyšetřete průběh funkce:

(a)  $f(x) = (x^2 - 1)^3,$

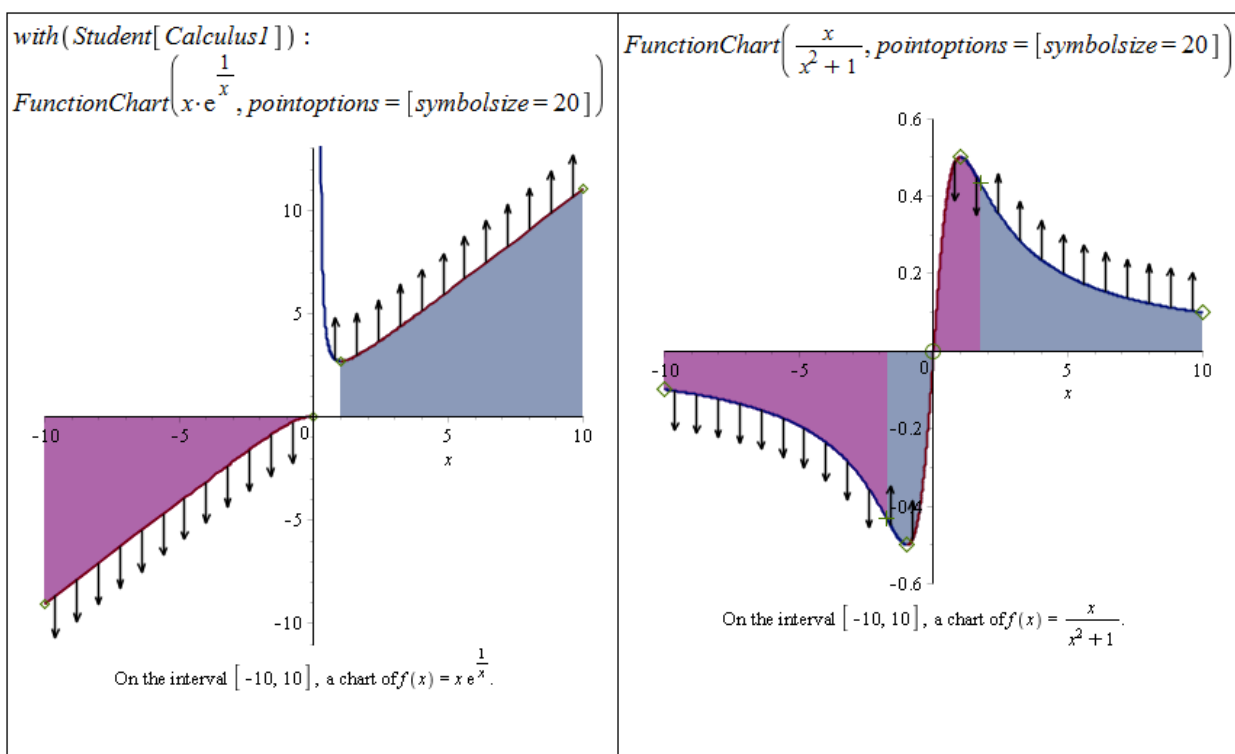
(d)  $f(x) = \sin(x) + x,$

(b)  $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}},$

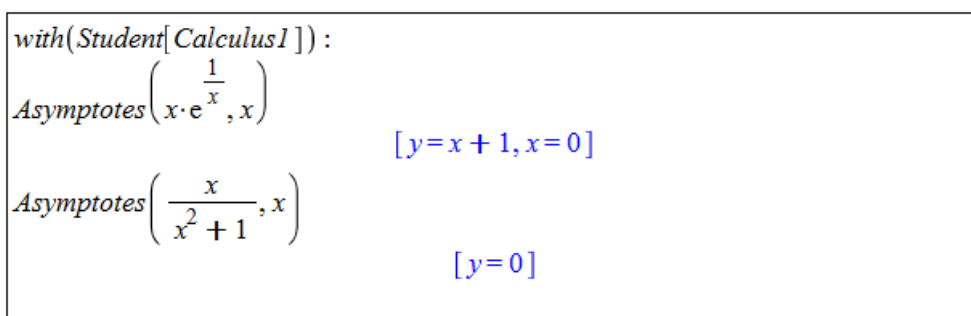
(e)  $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \ln|x| & \dots x \neq 0 \\ 0 & \dots x = 0. \end{cases}$

(c)  $f(x) = \frac{(x-1)^3}{x^2},$

Při vyšetřování průběhu funkce nám mohou dále pomoci některé příkazy nacházející se v balíku **Student** [**Calculus1**]. Představme si alespoň několik z nich. Příkaz **FunctionChart** zobrazí graf funkce (zadané jako výraz) s vyznačením významných bodů a funkčních vlastností. Na obrázku 2.56 jsou zobrazeny graf vyšetřovaných funkcí z příkladů 2.48 a 2.49. Jsou v něm znázorněny extrémní a limitní body, monotonie funkce a konvexita s konkávitou.



Obrázek 2.56: Použití příkazu **FunctionChart** z balíku **Student** [**Calculus1**].

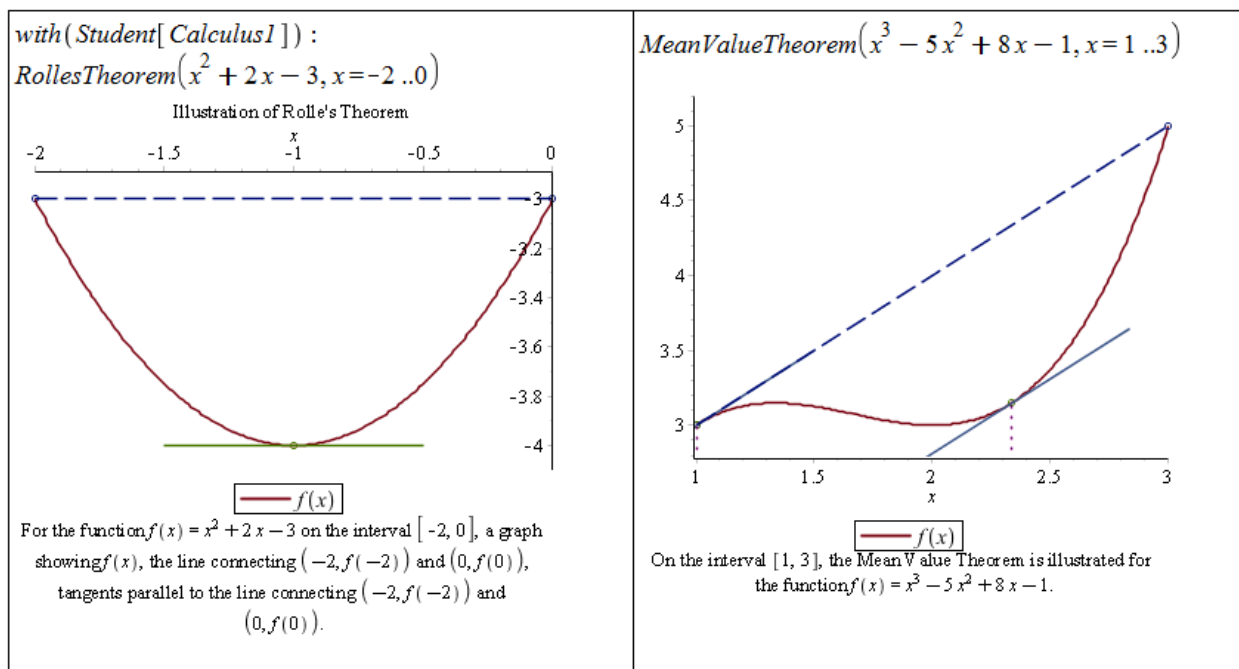


Obrázek 2.57: Použití příkazu **Asymptotes** z balíku **Student** [**Calculus1**].

Díky dalšímu příkazu, `Asymptotes`, získáme asymptoty funkce (zadané systému jako výraz) se směrnicí i bez směrnice. Použití na funkcích z příkladů 2.48 a 2.49 ilustruje obrázek 2.57.

Do balíku `Student[Calculus1]` dále náleží příkazy `CriticalPoints` pro hledání stacionárních bodů, `ExtremePoints` pro hledání extrémů, `InflectionPoints` pro hledání inflexních bodů, `Roots` pro hledání kořenů a další.

Závěrem uvedeme ještě příkazy `RollesTheorem` a `MeanValueTheorem` pro vizualizaci Rolleovy věty, resp. Lagrangeovy věty o střední hodnotě.



Obrázek 2.58: Ilustrace významných tvrzení příkazy z balíku `Student[Calculus1]`.

**Poznámka 2.17: Rolleova věta:** Nechť funkce  $f$  splňuje tyto předpoklady:

- (1) Je spojitá na uzavřeném intervalu  $[a, b]$ .
- (2) V každém bodě otevřeného intervalu  $(a, b)$  má vlastní nebo nevlastní derivaci.
- (3) Platí  $f(a) = f(b)$ .

Pak existuje číslo  $c \in (a, b)$  tak, že  $f'(c) = 0$ .

**Poznámka 2.18: Lagrangeova věta o střední hodnotě:** Nechť funkce  $f$  splňuje tyto předpoklady:

- (1) Je spojitá na uzavřeném intervalu  $[a, b]$ .
- (2) V každém bodě otevřeného intervalu  $(a, b)$  má vlastní nebo nevlastní derivaci.

Pak existuje číslo  $c \in (a, b)$  tak, že platí  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .

## 2.7 Integrál funkce

### 2.7.1 Neurčitý integrál

**Definice 2.19:** Řekneme, že funkce  $F(x)$  je na intervalu  $I$  *primitivní funkcí* k  $f(x)$ , jestliže pro všechna  $x \in I$  platí  $F'(x) = f(x)$ .

**Poznámka 2.19:** Ke každé funkci  $f(x)$  spojitě na  $I$  existuje na intervalu  $I$  nekonečně mnoho primitivních funkcí lišících se o tzv. *integrační konstantu*.

**Definice 2.20:** Množinu všech primitivních funkcí k funkci  $f(x)$  nazýváme *neurčitý integrál* a značíme

$$\int f(x) dx.$$

**Poznámka 2.20:** Nechť  $F(x)$  je primitivní k funkci  $f(x)$ . Pak platí:

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

kde  $C \in \mathbb{R}$  je integrační konstanta.

V systému Maple máme opět několik možností, jak spočítat integrál ze zadané funkce, přesněji řečeno, jak k této funkci určit funkci primitivní. Systém Maple totiž k výsledkům nepřidává integrační konstantu (resp. ji pokládá standardně rovnu 0), což musíme mít stále na paměti.

Při výpočtu můžeme využít symbol pro integrování z palety **Expression**, příkaz `int`, jehož parametry jsou výraz, který chceme integrovat, a proměnná podle níž integrujeme. Nakonec můžeme zapsat výraz do dokumentu, kliknout na něj pravým tlačítkem myši a z kontextové nabídky zvolit **Integrate** a následně proměnnou, podle níž chceme integrovat (viz obrázek 2.59).

$\int x^n dx$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
<code>int(x^n, x)</code>	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$x^n \xrightarrow{\text{integrate w.r.t. } x}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$

Obrázek 2.59: Výpočet primitivní funkce.

K výpočtu integrálů se nejčastěji používají 2 základní metody - *metoda per partes* a *substituční metoda*.

**Poznámka 2.21:** Metoda per partes vychází z pravidla pro derivaci součinu. Její předpis pro funkce  $u(x)$  a  $v(x)$  (které mají na daném intervalu spojité derivace) vypadá následovně:

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx.$$

Substituční metoda poskytuje řešení pro integraci složené funkce. Jestliže  $F(x)$  je primitivní funkcí k  $f(x)$  a funkce  $\varphi(x)$  má derivaci v každém bodě svého definičního oboru, pak platí:

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = \int f(t) dt = F(t) = F(\varphi(x))$$

při substituci  $t = \varphi(x)$ .

## 2.7.2 Metoda per partes

System Maple obsahuje balík s názvem **IntegrationTools**. Pro aplikaci metody per partes slouží příkaz **Parts** mající dva parametry – integrál, který chceme určit, a funkci, jejíž derivaci chceme počítat (v poznámce 2.21 tomu odpovídá funkce  $u(x)$ ). Pro zápis integrálu se v tomto případě používá příkaz **Int**<sup>8</sup>, který vytvoří integrál symbolicky a nevyhodnotí jej (narozdíl od příkazu **int**). Pro vyhodnocení symbolicky zapsaného výrazu můžeme použít příkaz **value**.

**Příklad 2.51:** Pomocí metody per partes určete  $\int x \cdot e^x dx$ .

*Řešení:* V systému Maple použijeme výše popsané příkazy. Při aplikaci metody per partes máme vždy více možností<sup>9</sup>, jak volit funkci, která se bude derivovat. Některé možnosti vedou k cíli, jiné ne, jak je vidět i na tomto řešení (obrázek 2.60). Druhá volba funkce, která se má derivovat, vedla k ještě výpočetně náročnějšímu integrálu, než byl v zadání.

**Příklad 2.52:** Pomocí metody per partes určete  $\int x^2 \cdot \sin(x) dx$ .

*Řešení:* Aplikujeme stejný postup jako v předchozím příkladu<sup>10</sup>. Přestože zvolíme vhodně funkci, která se bude derivovat, nedospějeme hned k výsledku. Metodu per partes je třeba v některých případech aplikovat vícekrát, a toto je právě jeden z nich. Takže metodu per partes aplikujeme na získaný výsledek ještě jednou a získáme hledané řešení (které opět vyhodnotíme příkazem **value**).

## 2.7.3 Substituční metoda

Pro aplikaci substituční metody slouží příkaz **Change**, opět z balíku **IntegrationTools**. Příkaz má dva parametry (zcela analogicky k příkazu **Parts**) – integrál, který chceme určit, a substituci, již zamýšlíme použít.

Zavedením substituce přejdeme k jiné proměnné, v níž také obdržíme výsledek. Na závěr se proto musíme „vrátit“ k proměnné původní, což provedeme zavedením téže substituce (nazpět) pomocí příkazu **subs**. Příkaz **subs** má 2 povinné parametry – substituce, jež hodláme zavést, a výraz, v němž budou substituce aplikovány<sup>11</sup>.

<sup>8</sup>Pozor na to, že Maple rozlišuje malá a velká písmena!

<sup>9</sup>Ve skutečnosti jich je nekonečně mnoho.

<sup>10</sup>Pouze nebudeme načítat balík **IntegrationTools**, neboť jsme jej načetli již dříve.

<sup>11</sup>Upozorníme na rozdíl mezi příkazy **Change** a **subs**. Příkaz **Change** zavede substituci proměnných v zadaném integrálu, zatímco příkaz **subs** provede substituce v zadaném výrazu.

```

Načtení balíku IntegrationTools:
with(IntegrationTools)
[Change, CollapseNested, Combine, Expand, ExpandMultiple,
 Flip, GetIntegrand, GetOptions, GetParts, GetRange,
 GetVariable, Parts, Split, StripOptions]

Chceme integrovat po částech integrál:
Int(x·e^x, x)

$$\int x e^x dx$$


Nejprve zvolme  $x$  jako funkci, která se má derivovat:
Parts(Int(x·e^x, x), x)

$$x e^x - \left( \int e^x dx \right)$$


Nyní zvolme funkci  $e^x$  jako funkci, která se má derivovat :
Parts(Int(x·e^x, x), e^x)

$$\frac{1}{2} x^2 e^x - \left( \int \frac{1}{2} x^2 e^x dx \right)$$


Vyhodnocení prvně získaného výsledku:
value(%%)

$$x e^x - e^x$$


```

Obrázek 2.60: Řešení příkladu 2.51.

```

i := Int(x^2·sin(x), x)

$$\int x^2 \sin(x) dx$$


Parts(i, x^2)

$$-\cos(x) x^2 - \left( \int (-2 x \cos(x)) dx \right)$$


Metodu per partes aplikujeme ještě jednou...

Parts(%, x)

$$-\cos(x) x^2 + 2 x \sin(x) + \int (-2 \sin(x)) dx$$


a pomocí příkazu value určíme výslednou hodnotu integrálu:
value(%)

$$-\cos(x) x^2 + 2 x \sin(x) + 2 \cos(x)$$


```

Obrázek 2.61: Řešení příkladu 2.52.

**Příklad 2.53:** Pomocí substituční metody určete  $\int \sin^3(x) \cdot \cos(x) dx$ .

*Řešení:* Postupujeme analogicky jako v předchozích příkladech. Pokud jsme při předchozí práci se systémem Maple nenačetli balík **IntegrationTools**, je třeba jej načíst. Zavedeme substituci, získáme „tabulkový“ integrál, který vyhodnotíme příkazem **value**, a další substi-

tucí se vrátíme k původní proměnné.

```

Int(sin^3(x) * cos(x), x)
      
$$\int \sin(x)^3 \cos(x) \, dx$$


Použijeme substituční metodu:
Change(Int(sin^3(x) * cos(x), x), t = sin(x))
      
$$\int t^3 \, dt$$


Pomocí příkazu value určíme hodnotu získaného integrálu:

value(%)
      
$$\frac{1}{4} t^4$$


a pomocí příkazu subs se vrátíme k původní proměnné:

subs(t = sin(x), %)
      
$$\frac{1}{4} \sin(x)^4$$


```

Obrázek 2.62: Řešení příkladu 2.53.

Při výpočtech integrálů se uplatňují i některé další postupy jako například rozklad na parciální zlomky, pravidlo o integraci součtu funkcí, či pravidlo o integraci funkce násobené konstantou (podrobnosti najdeme též v nápovědě systému). Pro rozklad na parciální zlomky je možné použít již dříve zmíněný příkaz `convert` s parametrem `parfrac`.

**Příklad 2.54:** Pomocí vhodné metody (resp. vhodného postupu) určete následující integrály. Příkazem `int` následně ověřte správnost vašeho výpočtu.

(a)  $\int \frac{5x^2-3}{\sqrt{x}} \, dx,$

(g)  $\int \frac{1}{x \cdot \ln(x)} \, dx,$

(b)  $\int \frac{\sqrt{x^4-2+x^{-4}}}{x^3} \, dx,$

(h)  $\int x \cdot \sqrt{x^2+1} \, dx,$

(c)  $\int (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) \, dx,$

(i)  $\int x \cdot \cos^2(x) \, dx,$

(d)  $\int \frac{x}{(x-1) \cdot (x-2)^2} \, dx,$

(j)  $\int x \cdot \ln(x) \, dx,$

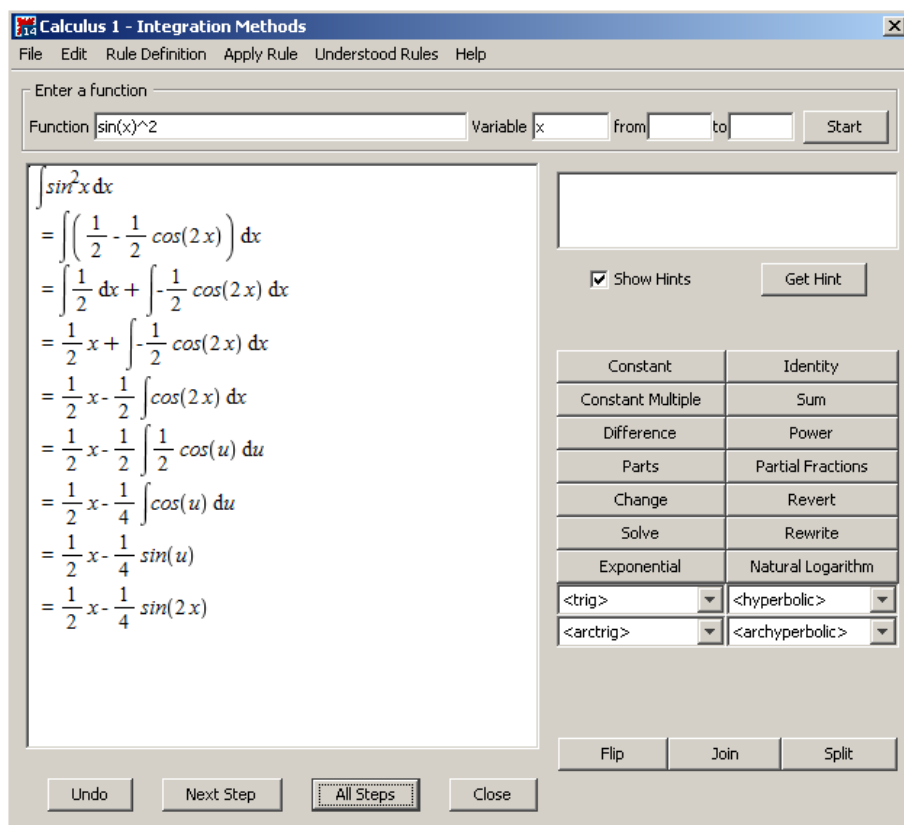
(e)  $\int \frac{1}{x^3+1} \, dx,$

(k)  $\int \arctan(x) \, dx,$

(f)  $\int \cos(5 \cdot x + 6) \, dx,$

(l)  $\int x^3 \cdot e^{x^2} \, dx.$

Již jsme se setkali s výukovými nástroji pro výpočet limit a derivací. Podobný nástroj je k dispozici i pro integrování. Spustíme jej z hlavní nabídky zvolením **Tools > Tutors > Calculus – Single Variable > Integration Methods...** Maplet nás krok po kroku provede výpočtem zadaného integrálu, nabízí tradičně nápovědu k jednotlivým krokům a pravidla, která je možno použít (viz obrázek 2.63).



Obrázek 2.63: Výukový nástroj pro počítání integrálů.

## 2.7.4 Určitý integrál

**Definice 2.21:** Mějme funkci  $f(x)$ , která je ohraničená na uzavřeném intervalu  $[a, b]$ . Rozdělme interval  $[a, b]$  na  $n$  podintervalů a označme toto dělení  $d$ . Délku  $i$ -tého podintervalu (pro  $i = 1, 2, \dots, n$ ) i samotný podinterval označme stejným symbolem  $\Delta x_i$ . Označme dále  $m_i$  infimum  $f(x)$  pro  $x \in \Delta x_i$  a  $M_i$  supremum  $f(x)$  na tomtéž intervalu. Nyní definujeme *dolní integrální součet* předpisem:

$$s(d) = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \Delta x_i$$

a *horní integrální součet* předpisem:

$$S(d) = \sum_{i=1}^n M_i \cdot \Delta x_i.$$

**Definice 2.22:** Nechť platí předpoklady a označení definice 2.21. Nyní definujeme *dolní integrál* jako supremum všech dolních integrálních součtů (pro různá dělení  $d$ ), tj.:

$$\int_a^b f(x) dx = \sup_d s(d)$$



a *horní integrál* jako infimum všech horních integrálních součtů (pro různá dělení  $d$ ), tj.:

$$\int_a^b f(x) dx = \inf_d S(d).$$

**Definice 2.23:** Jestliže platí:

$$\int_{\bar{a}}^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx,$$

pak řekneme, že ohraničená funkce  $f(x)$  je na intervalu  $[a, b]$  *integrovatelná* (resp. má určitý integrál). Společnou hodnotu z předchozí rovnosti nazýváme *Riemannovým integrálem* z funkce  $f(x)$  na intervalu  $[a, b]$  a značíme:

$$\int_a^b f(x) dx.$$

**Poznámka 2.22:** (**Newtonova-Leibnizova formule**) Jestliže je funkce  $f(x)$  na intervalu  $[a, b]$  integrovatelná, funkce  $F(x)$  na intervalu  $[a, b]$  spojitá a primitivní k  $f(x)$ , pak platí:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

K výpočtu určitého integrálu systém Maple nabízí předdefinovaný symbol v paletě **Expression**. Je možné použít i příkaz `int` podobně jako pro neurčitý integrál s tím rozdílem, že nyní při specifikaci proměnné, podle níž integrujeme, uvádíme i její rozsah (rozsah integrace).

$\int_1^5 x^2 dx$	$\frac{124}{3}$
<code>int(x^2, x=1..5)</code>	$\frac{124}{3}$
$\int_a^b x \cdot e^x dx$	$e^a - e^a a - e^b + e^b b$
<code>int(x * e^x, x=a..b)</code>	$e^a - e^a a - e^b + e^b b$

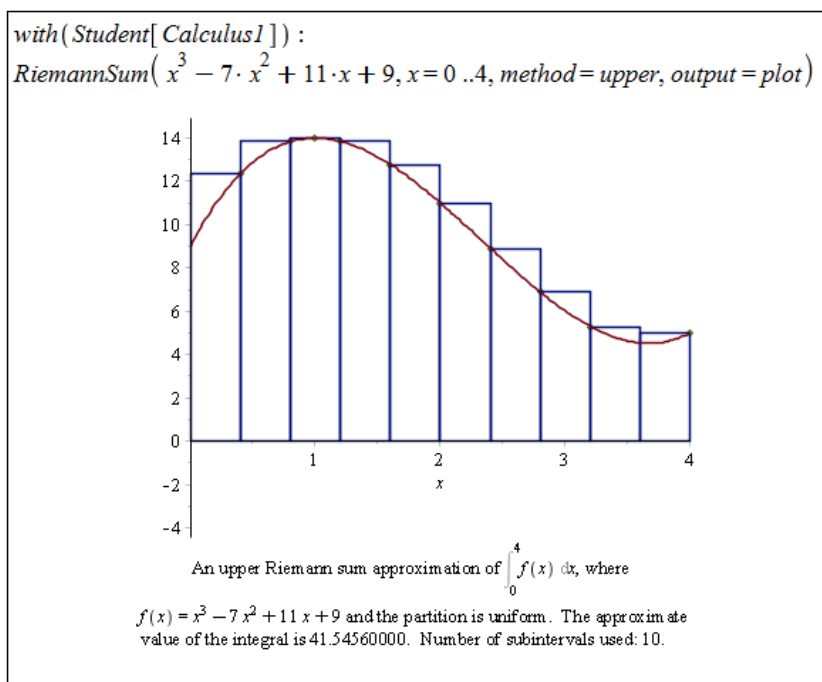
Obrázek 2.64: Výpočet určitého integrálu.

$$\begin{aligned}
 F &:= \text{unapply}\left(\int x^2 dx, x\right) \\
 & \qquad \qquad \qquad x \rightarrow \frac{1}{3} x^3 \\
 F(5) - F(1) & \qquad \qquad \qquad \frac{124}{3} \\
 \\
 F &:= \text{unapply}\left(\int x \cdot e^x dx, x\right) \\
 & \qquad \qquad \qquad x \rightarrow (-1 + x) e^x \\
 F(b) - F(a) & \qquad \qquad \qquad (-1 + b) e^b - (-1 + a) e^a
 \end{aligned}$$

Obrázek 2.65: Výpočet určitého integrálu pomocí Newtonovy-Leibnizovy formule.

Je samozřejmě možné využít i Newtonovy-Leibnizovy formule, přičemž si pomůžeme příkazem `unapply` pro převod výrazu na funkci. Na tomto příkladu si můžeme všimnout, že různými postupy je možné dojít ke stejnému, ale jinak upravenému výsledku.

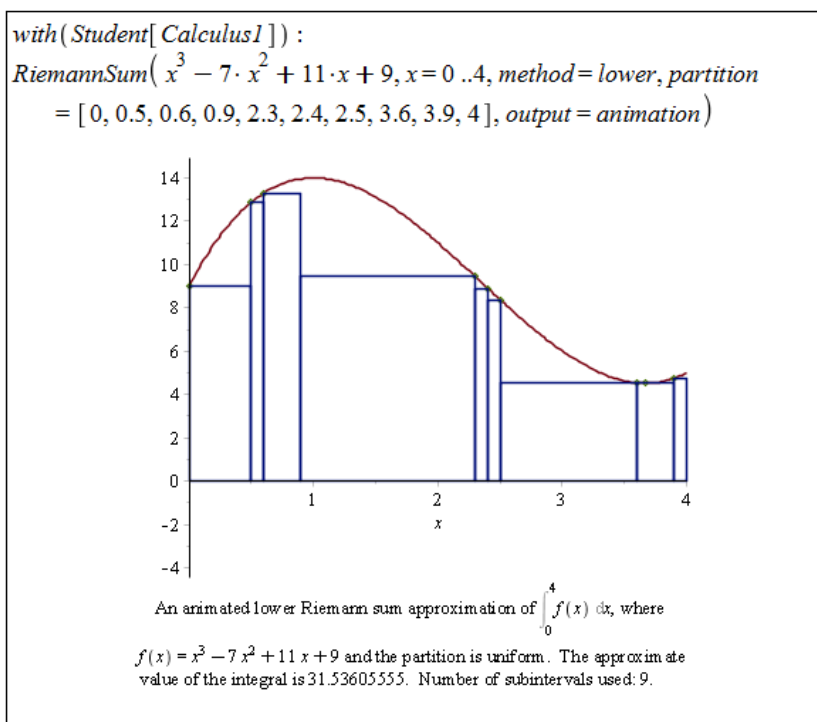
Pro geometrickou interpretaci určitého integrálu a názorné zobrazení dříve definovaných pojmů (dolní integrální součet, horní integrální součet, ...) poskytuje systém Maple příkaz `RiemannSum` z balíku `Student[Calculus1]`. Příkaz má dva povinné argumenty, a to funkci, již chceme integrovat, a interval, přes který chceme integrovat. Pokud zadáme jen tyto parametry, příkaz vypočítá integrální součet pro funkční hodnoty ve středech podintervalů vzniklých rozdělením původního intervalu a vypíše hodnotu tohoto součtu. K dispozici je však několik parametrů, které můžeme nastavit.



Obrázek 2.66: Geometrická interpretace určitého integrálu – vykreslení.

Prvním je parametr `method` určující, jakou metodou budou voleny funkční hodnoty

v podintervalech vzniklých z rozdělení původního intervalu. Pro dolní integrální součet použijeme nastavení `method=lower`, pro horní integrální součet nastavení `method=upper` (základní nastavení odpovídá zápisu `method=midpoint`). Dalším parametrem je `output` (výstup). Pro nás jsou zajímavé zejména možnosti `output=plot` (zobrazí funkci v grafu i s dělením původního intervalu a základními informacemi) a `output=animation` (vytvoří animaci sestávající z grafů v případě `output=plot` pro různě jemná dělení původního intervalu)<sup>12</sup>. Nakonec uvedeme ještě parametr `partition` specifikující dělení původního intervalu. Parametru je možné přiřadit číslo (v tom případě se původní interval rozdělí na zadaný počet stejně velkých intervalů) nebo seznam bodů, v nichž se má původní interval rozdělit.



Obrázek 2.67: Geometrická interpretace určitého integrálu – animace.

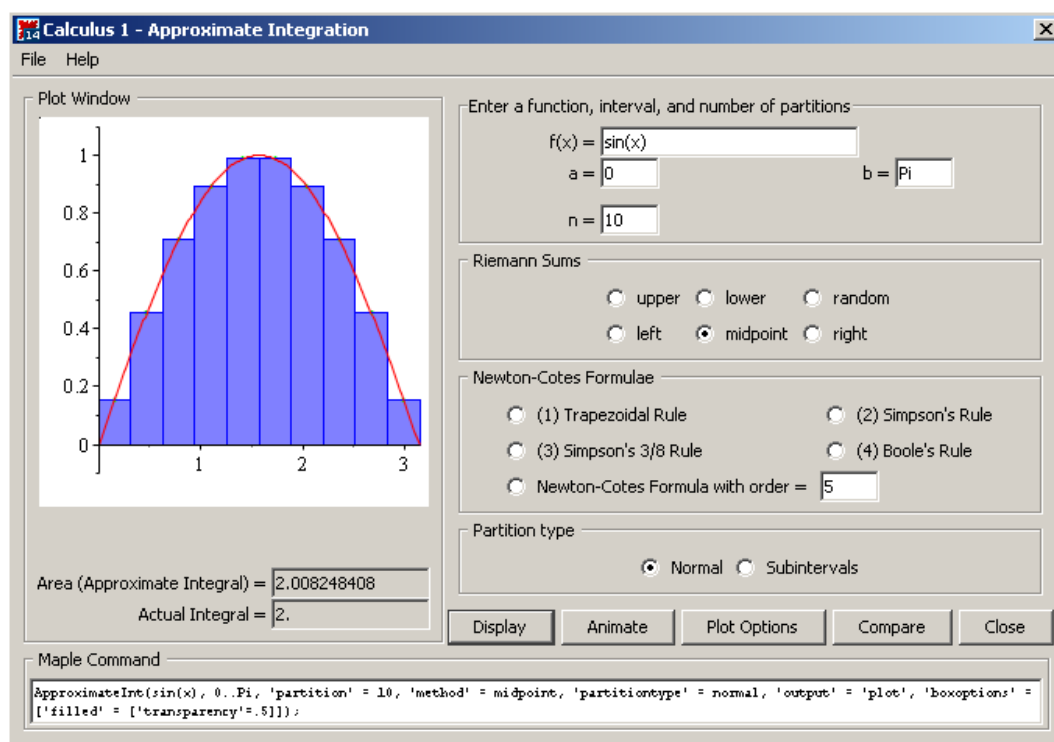
Pokud nechceme používat příkaz `RiemannSum`, je možné využít další z nástrojů systému Maple, který nalezneme v menu zvolením **Tools > Tutors > Calculus – Single Variable > Approximate Integration...** V tomto mapletu (obrázek 2.68) můžeme zadat funkci, interval, počet podintervalů tohoto intervalu a zvolit metodu, která bude použita k výpočtu určitého integrálu. Na výběr máme přitom i několik dalších metod kromě Riemannových součtů. Maplet také nabízí srovnání provedené aproximace integrálu a jeho skutečné hodnoty. Přesto tento nástroj postrádá některé možnosti, které nám poskytuje příkaz `RiemannSum`.

**Příklad 2.55:** Pomocí vhodné metody (resp. vhodného postupu) aplikované pomocí existujících příkazů určete následující integrály. Příkazem `int` následně ověřte správnost vašeho výpočtu.

(a)  $\int_0^1 \arctan(x) dx,$

(b)  $\int_1^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx,$

<sup>12</sup>V animaci tak můžeme sledovat, jak se pro různě jemná dělení původního intervalu mění hodnota aproximace integrálu.



Obrázek 2.68: Maplet pro přibližný výpočet určitého integrálu a jeho geometrická interpretace.

$$(c) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x) \cdot \cos^2(x) dx,$$

$$(e) \int_0^{2\cdot\pi} x^2 \cdot \cos(x) dx,$$

$$(d) \int_{\ln(2)}^{\ln(3)} \frac{e^x}{e^{2\cdot x}-1} dx,$$

$$(f) \int_0^{\ln(2)} \sqrt{e^x - 1} dx.$$

## 2.7.5 Aplikace určitého integrálu

### Obsah plochy

Již z geometrické interpretace určitého integrálu vidíme jednu z jeho možných aplikací pro řešení praktických úloh, a tou je výpočet obsahu plochy vymezené dvěma (případně i více) křivkami.

**Poznámka 2.23:** Nechť  $f(x)$  je na intervalu  $[a, b]$  nezáporná integrovatelná funkce. Pak pro obsah  $S$  plochy vymezené funkcí  $f(x)$ , osou  $x$  a přímkami  $x = a$ ,  $x = b$  platí:

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

Pokud je naopak funkce  $f(x)$  na tomto intervalu nekladná, pak pro obsah  $S$  plochy vymezené týmiž křivkami platí:

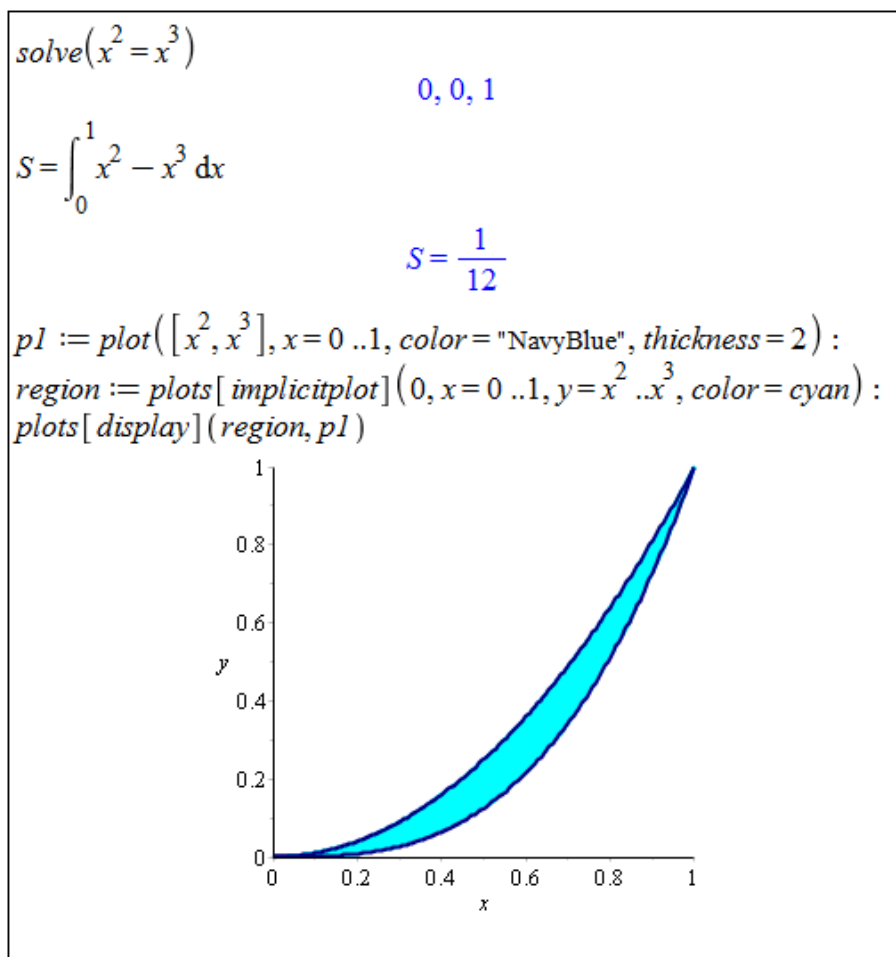
$$S = - \int_a^b f(x) dx.$$

Z předchozí poznámky můžeme odvodit i jak počítat obsah plochy v případě, kdy funkce  $f(x)$  na intervalu  $[a, b]$  protíná osu  $x$  (interval rozdělíme na podintervaly, v nichž je funkce nezáporná, a podintervaly, v nichž je nekladná). Podobně můžeme odvodit, že pro výpočet obsahu  $S$  plochy vymezené funkcemi  $f(x), g(x)$  ( $f(x) \geq g(x)$ ), a přímkami  $x = a, x = b$  platí:

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

**Příklad 2.56:** Určete obsah plochy vymezené křivkami  $x^2$  a  $x^3$ .

*Řešení:* V zadání příkladu není zmíněn interval, na kterém se plocha nachází, neboť interval určí samotné křivky  $x^2$  a  $x^3$  protínající se právě ve dvou bodech. Souřadnice průsečíků na ose  $x$  tvoří hledané body  $a$  a  $b$ . Průsečíky zadaných funkcí zjistíme např. příkazem `solve`. Poté stačí pouze „dosadit do vzorečku“<sup>13</sup>. Plochu, jejíž obsah počítáme, můžeme zobrazit též graficky. K vybarvení plochy mezi funkcemi využijeme příkaz `implicitplot` z balíku `plots` (viz obrázek 2.69).



Obrázek 2.69: Řešení příkladu 2.56.

<sup>13</sup>Ještě je třeba vědět, která ze zadaných funkcí je na získaném intervalu „větší“.

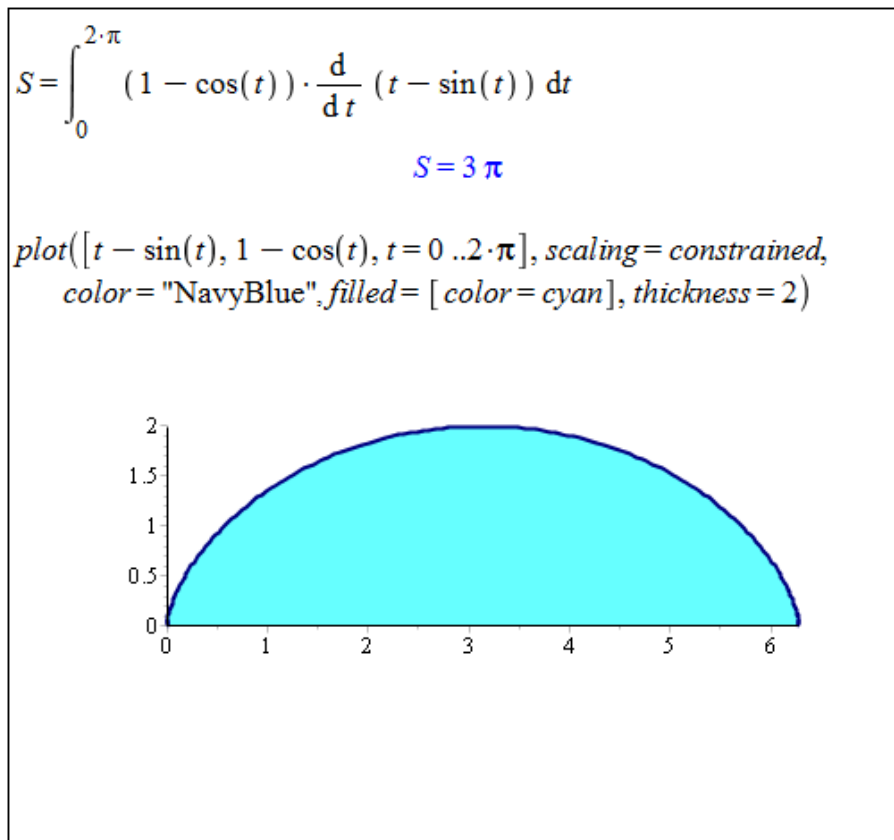
Funkce je možné zadávat též parametricky, a to například rovnicemi  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ ,  $t \in [a, b]$ .

**Poznámka 2.24:** Nechť je funkce  $f$  zadána rovnicemi  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , přičemž funkce  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$  jsou spojité pro  $t \in [\alpha, \beta]$ . Je-li  $\varphi(t)$  ryze monotonní a má spojitou derivaci na  $[a, b]$ , přičemž  $\varphi(\alpha) = a$ ,  $\varphi(\beta) = b$ , pak pro obsah  $S$  plochy vymezené funkcí  $f(x)$ , osou  $x$  a přímkami  $x = a$ ,  $x = b$  platí:

$$S = \left| \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \cdot \varphi'(t) dt \right|.$$

**Příklad 2.57:** Určete obsah plochy vymezené osou  $x$  a funkcí zadanou rovnicemi  $x = t - \sin(t)$ ,  $y = 1 - \cos(t)$ ,  $t \in [0, 2 \cdot \pi]$ .

*Řešení:* Funkce  $x = t - \sin(t)$  je na  $[0, 2 \cdot \pi]$  ryze monotonní a má spojitou derivaci, takže můžeme využít předchozí poznámku. Při vykreslování plochy využijeme atributu `filled`, jenž nastavíme na hodnotu `true`. Tím dosáhneme vykreslení plochy pod křivkou funkce až k ose  $x$ . Současně nastavíme atribut `scaling` na hodnotu `constrained`, abychom měli na obou osách stejné měřítko (a graf funkce tak nebyl zkreslený).



Obrázek 2.70: Řešení příkladu 2.57.

**Příklad 2.58:** Určete obsah plochy ohraničené křivkami:

(a)  $y = 4 - x^2, y = x^2,$

(d)  $y = \tan(x), y = 0, x = \frac{\pi}{4},$

(b)  $y = x^3, y = -x, y = 1,$

(c)  $y = x^2, x = y^2,$

(e)  $y = e^x, y = e^{-x}, y = 2.$

**Příklad 2.59:** Určete obsah plochy ohraničené:

(a) funkcí  $y = x^2 - 2 \cdot x + 2$ , její tečnou v bodě  $[3, 5]$  a souřadnými osami,

(b) funkcí  $y = x^3$  a tečnou v bodě  $x = 1$ ,

(c) parabolou  $y = x^2 - 6 \cdot x + 8$  a tečnami v bodech  $[1, 3]$  a  $[4, 0]$ .

**Příklad 2.60:** Určete obsah plochy ohraničené osou  $x$  a křivkou zadanou parametricky:

(a)  $x = 3 \cdot t^2, y = 3 \cdot t - t^3, t \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}],$

(b)  $x = 2 \cdot (t - \sin(t)), y = 2 \cdot (1 - \cos(t)), t \in [0, 2 \cdot \pi],$

(c)  $x = 3 \cdot \sin^3(t), y = 3 \cdot \cos^3(t), t \in [0, \pi].$

**Příklad 2.61:** Odvoďte vzorec pro obsah kruhu o poloměru  $r$ .

### Délka oblouku křivky

**Poznámka 2.25:** Nechť má funkce  $f(x)$  spojitou derivaci na intervalu  $[a, b]$ . Pak pro délku křivky  $l$  funkce  $f(x)$  od bodu  $a$  k bodu  $b$  platí:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

**Poznámka 2.26:** Nechť je funkce  $f$  zadána parametricky rovnicemi  $x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in [\alpha, \beta]$ , přičemž funkce  $\varphi(t), \psi(t)$  mají spojitě derivace pro  $t \in [\alpha, \beta]$ . Pak pro délku křivky  $l$  funkce  $f$  od  $\alpha$  k  $\beta$  platí:

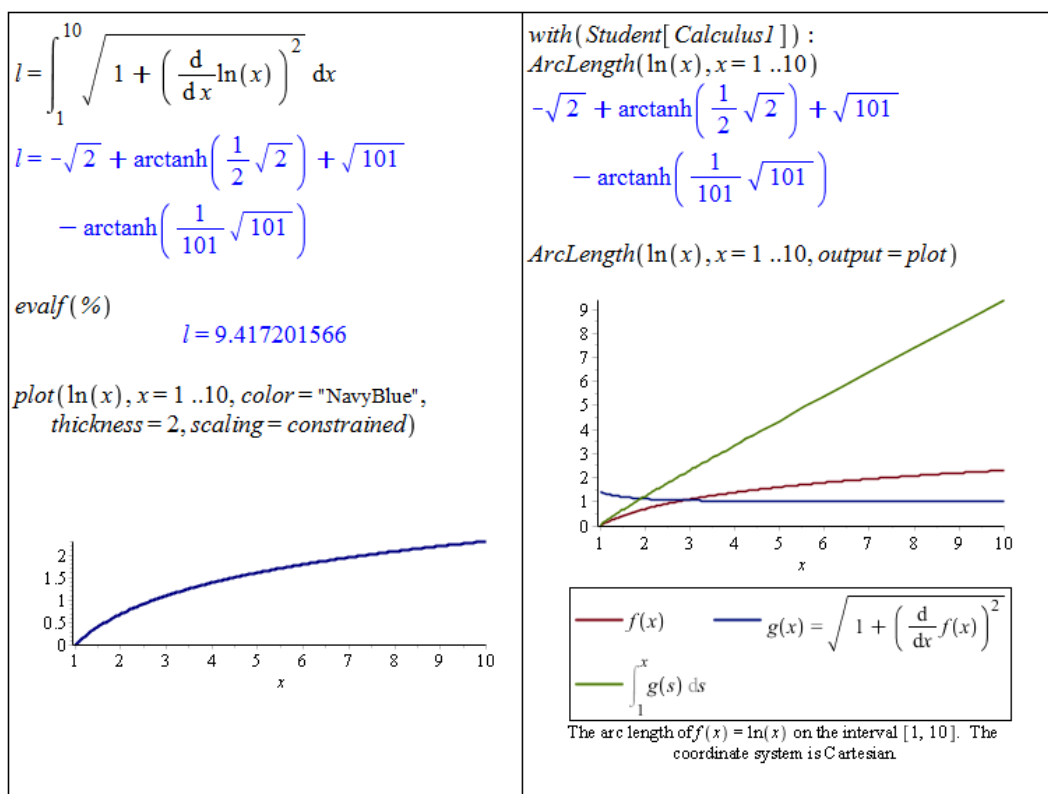
$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt.$$

**Příklad 2.62:** Určete délku křivky funkce  $y = \ln(x)$  mezi body  $x = 1$  a  $x = 10$ .

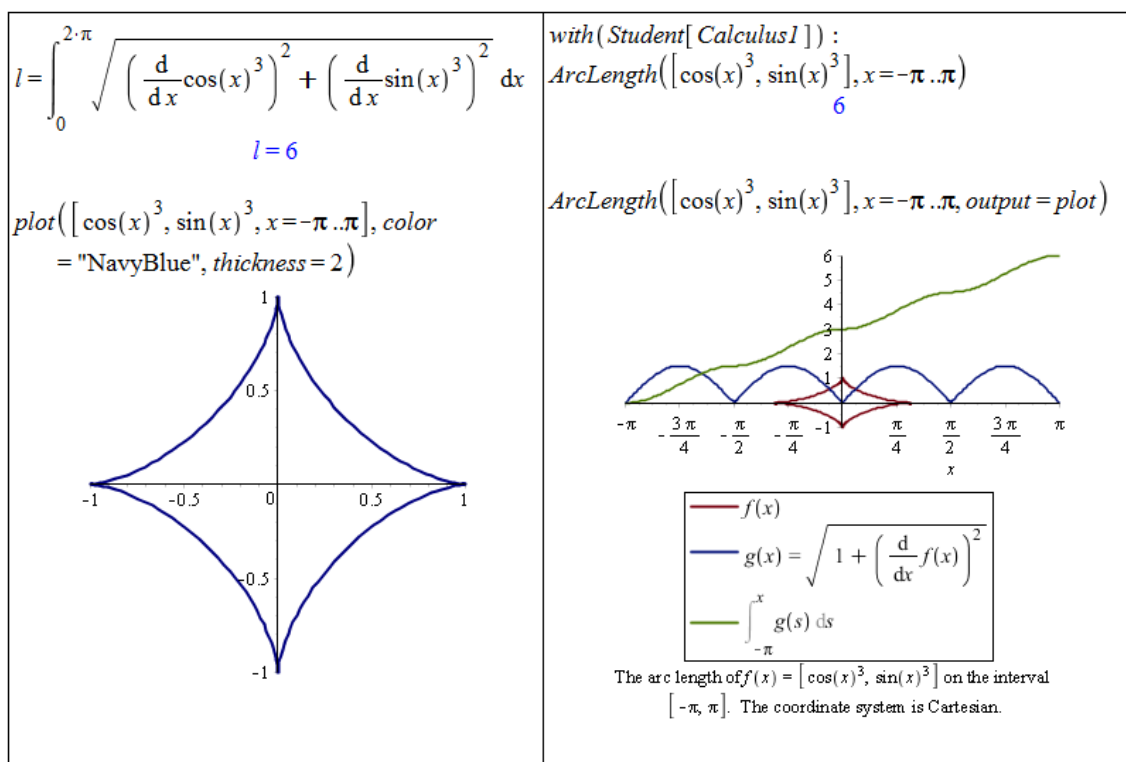
*Řešení:* Funkce  $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$  je spojitá na  $[1, 10]$ , můžeme tedy využít poznámky 2.25, případně příkazu `ArcLength` z balíku `Student[Calculus1]` (obrázek 2.71).

**Příklad 2.63:** Určete délku křivky zadané parametricky rovnicemi  $x = \cos^3(t), y = \sin^3(t), t \in [0, 2 \cdot \pi]$ .

*Řešení:* Funkce  $\cos^3(t), \sin^3(t)$  mají na intervalu  $[0, 2 \cdot \pi]$  spojitě derivace, takže můžeme využít poznámky 2.26, případně opět příkazu `ArcLength` z balíku `Student[Calculus1]` (obrázek 2.72).



Obrázek 2.71: Řešení příkladu 2.62.



Obrázek 2.72: Řešení příkladu 2.63.

**Příklad 2.64:** Určete délku křivky:



- (a)  $y^2 = x^3$  na intervalu  $[0, 1]$ ,
- (b)  $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  na intervalu  $[-1, 1]$ ,
- (c)  $y = \sin(x)$  na intervalu  $[0, \pi]$ ,
- (d)  $y = \sin^2(x)$  na intervalu  $[0, \pi]$ .

**Příklad 2.65:** Určete délku křivky zadané parametricky:

- (a)  $x = t^2, y = t - \frac{t^3}{3}, t \in [0, \sqrt{3}]$ ,
- (b)  $x = t \cdot \cos(t), y = t \cdot \sin(t), t \in [0, 4 \cdot \pi]$ ,
- (c)  $x = \cos(t) + t \cdot \sin(t), y = \sin(t) - t \cdot \cos(t), t \in [0, 2 \cdot \pi]$ .

**Příklad 2.66:** Odvoďte vzorec pro délku kružnice o poloměru  $r$ .

### Objem rotačního tělesa

**Poznámka 2.27:** Nechť je funkce  $f(x)$  spojitá a nezáporná na intervalu  $[a, b]$ . Pak rotační těleso vzniklé rotací křivočarého lichoběžníka ohraničeného shora funkcí  $f(x)$ , osou  $x$  a přímkami  $x = a, x = b$  kolem osy  $x$  má objem  $V$ :

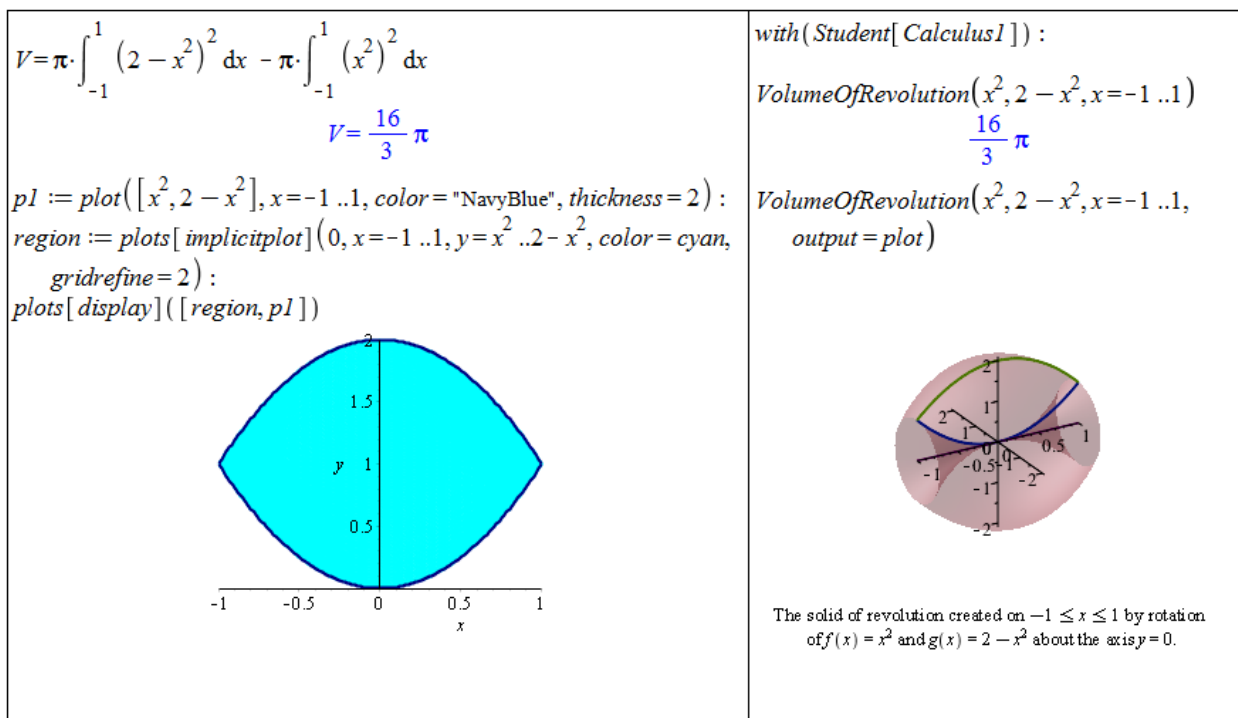
$$V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x) dx.$$

**Poznámka 2.28:** Nechť je funkce  $f$  zadána parametricky rovnicemi  $x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in [\alpha, \beta]$ , přičemž funkce  $\varphi(t)$  má spojitou derivaci pro  $t \in [\alpha, \beta]$  a funkce  $\psi(t)$  je spojitá a nezáporná pro  $t \in [\alpha, \beta]$ . Pak pro objem  $V$  rotačního tělesa vzniklého rotací oblasti  $x \in [\varphi(\alpha), \varphi(\beta)]$  a  $y \in [0, \psi(t)]$  kolem osy  $x$  platí:

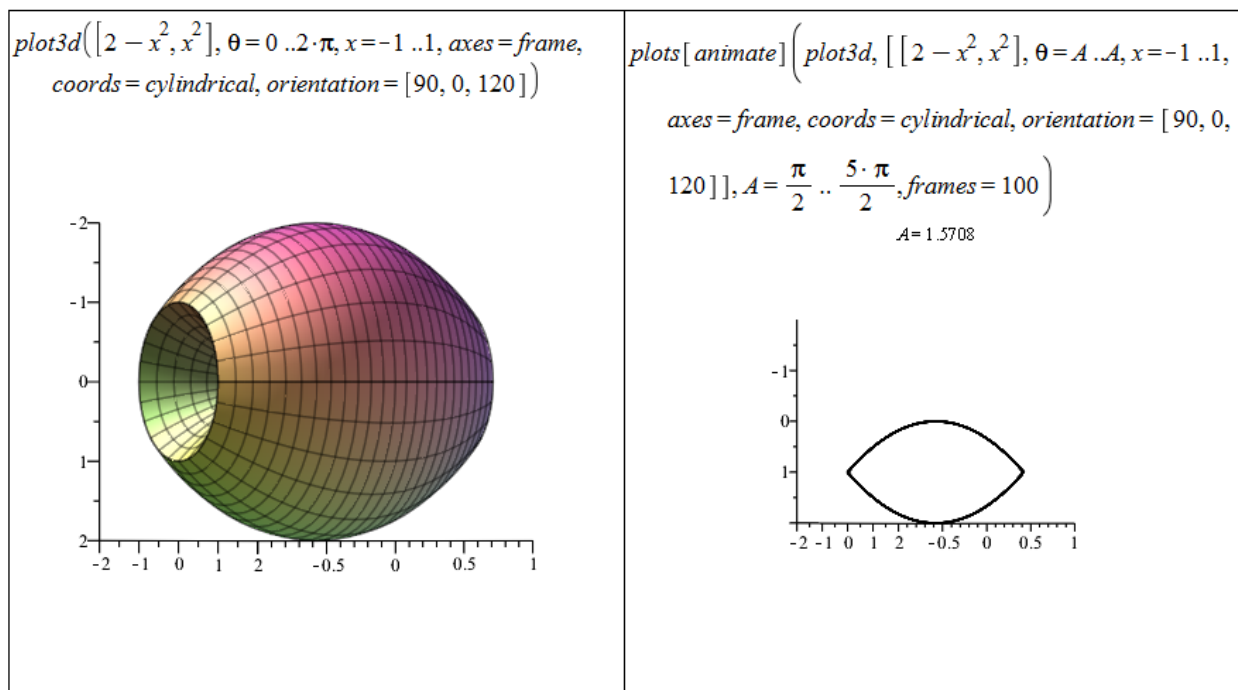
$$V = \pi \cdot \int_{\alpha}^{\beta} \psi^2(t) \cdot |\varphi'(t)| dt.$$

**Příklad 2.67:** Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací oblasti ohraničené křivkami  $y = x^2, y = 2 - x^2$  kolem osy  $x$ .

*Řešení:* Objem budeme počítat podobně, jako když počítáme obsah plochy vymezené dvěma křivkami. Přesněji řečeno: vypočteme objem rotačního tělesa, které vznikne rotací funkce  $y = 2 - x^2$  kolem osy  $x$ , a od něj odečteme objem tělesa, které vznikne rotací funkce  $y = x^2$  kolem osy  $x$ . Jelikož obě funkce splňují předpoklady poznámky 2.27, můžeme k výpočtu objemu použít uvedený vztah. V systému Maple lze jednak vykreslit zadanou oblast, která má rotovat kolem osy  $x$ , dále můžeme využít příkazu `plot3d` pro vykreslování trojrozměrných grafů, příkazu `animate` pro vytvoření animace a v neposlední řadě také příkazu `VolumeOfRevolution` z balíku `Student[Calculus1]`. Nastavením parametru `coords=cylindrical` vytvoříme rotační těleso vzniklé rotací kolem jedné z os. Dále nastavujeme parametry jako úhel, o nějž má zadaná (resp. zadané) funkce rotovat, a interval oblasti – obrázky 2.73 a 2.74.



Obrázek 2.73: Řešení příkladu 2.67.

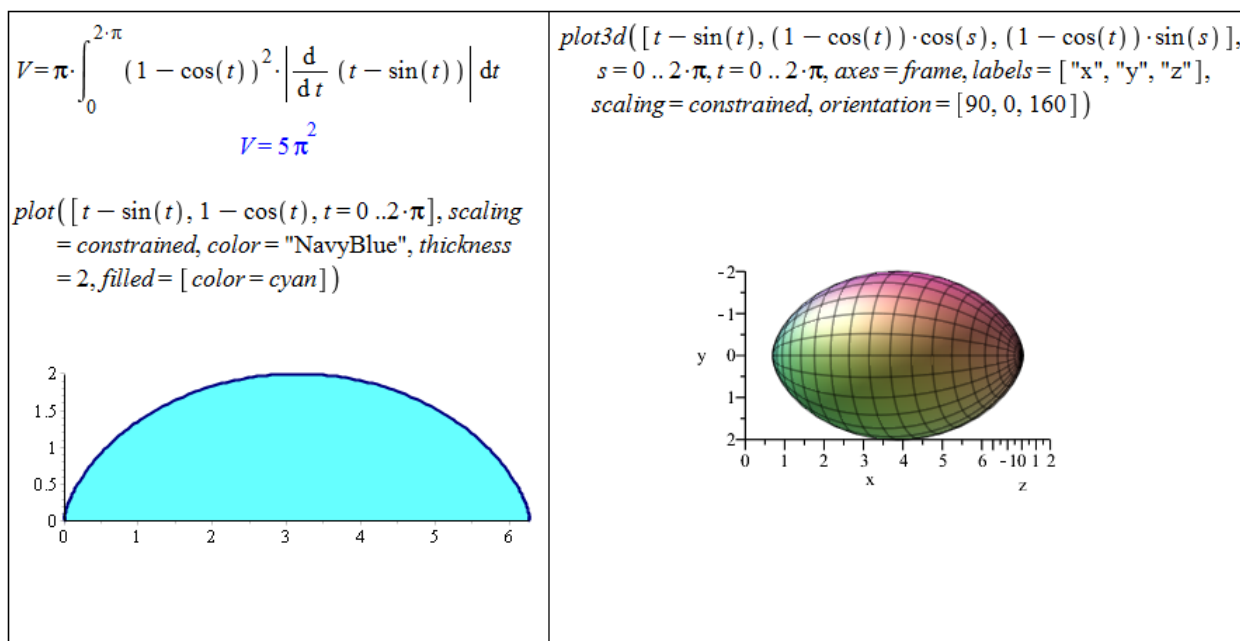


Obrázek 2.74: Řešení příkladu 2.67.

**Poznámka 2.29:** Mějme funkci zadanou parametricky rovnicemi  $x = f(t), y = g(t), z = h(t), t \in [\alpha, \beta]$ . Pak těleso vzniklé rotací této funkce kolem osy  $x$  je popsáno parametricky rovnicemi  $x = f(t), y = \sqrt{g(t)^2 + h(t)^2} \cdot \cos(s), z = \sqrt{g(t)^2 + h(t)^2} \cdot \sin(s), t \in [\alpha, \beta], s \in [0, 2 \cdot \pi]$ .

**Příklad 2.68:** Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací plochy vymezené křivkou zadanou parametricky rovnicemi  $x = t - \sin(t)$ ,  $y = 1 - \cos(t)$ ,  $t \in [0, 2 \cdot \pi]$  a osou  $x$  kolem této osy.

*Řešení:* Zadaná křivka splňuje předpoklady poznámky 2.28. Výpočet objemu tedy provedeme dosazením do příslušného vzorce. V systému Maple opět vykreslíme zadanou oblast, která má rotovat kolem osy  $x$ , a poté i získané těleso pomocí příkazu `plot3d`. Přitom využijeme poznámky 2.29 – obrázek 2.75.



Obrázek 2.75: Řešení příkladu 2.68.

**Příklad 2.69:** Určete objem tělesa vzniklého rotací plochy ohraničené zadanými křivkami kolem osy  $x$ :

- |   |   |
|---|---|
| (a) $y^2 = x$ , $y = x^2$ ,                         | (c) $y = x$ , $y = \frac{1}{x}$ , $y = 2$ , |
| (b) $y = 0$ , $x = 0$ , $y = \sin(x)$ , $x = \pi$ , | (d) $x^2 + y^2 = 4$ , $x + y = 2$ .         |

**Příklad 2.70:** Určete objem tělesa, které vznikne rotací plochy ohraničené křivkou zadanou parametricky a osou  $x$  kolem této osy:

- (a)  $x = t^2$ ,  $y = t - \frac{t^3}{3}$ ,  $t \in [0, \sqrt{3}]$ ,
- (b)  $x = 3 \cdot \sin^3(t)$ ,  $y = 3 \cdot \cos^3(t)$ ,  $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ,
- (c)  $x = \sin^2(t)$ ,  $y = 1 - \cos(t)$ ,  $t \in [0, \pi]$ ,
- (d)  $x = 2 + \sin(t)$ ,  $y = 2 + \cos(t)$ ,  $t \in [0, 2 \cdot \pi]$ .

**Příklad 2.71:** Odvoďte vzorec pro objem koule o poloměru  $r$ .

**Příklad 2.72:** Odvoďte vzorec pro objem válce o poloměru podstavy  $r$  a výšce válce  $v$ .

**Příklad 2.73:** Odvoďte vzorec pro objem kužele o poloměru podstavy  $r$  a výšce kužele  $v$ .

### Obsah pláště rotačního tělesa

**Poznámka 2.30:** Nechť je funkce  $f(x)$  spojitá a nezáporná na intervalu  $[a, b]$  a má zde spojitou derivaci. Pak pro obsah  $S$  rotační plochy vzniklé rotací křivky  $y = f(x)$  kolem osy  $x$  platí:

$$S = 2 \cdot \pi \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

**Poznámka 2.31:** Nechť je funkce  $f$  zadána parametricky rovnicemi  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$ , přičemž funkce  $\varphi(t)$  a  $\psi(t)$  mají spojitě derivace pro  $t \in [\alpha, \beta]$  a funkce  $\psi(t)$  je nezáporná pro  $t \in [\alpha, \beta]$ . Pak pro obsah  $S$  rotační plochy vzniklé rotací grafu funkce  $f$  kolem osy  $x$  platí:

$$S = 2 \cdot \pi \cdot \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \cdot \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt.$$

**Příklad 2.74:** Vypočtete obsah pláště rotačního kužele, který vznikne rotací funkce  $y = x$  pro  $x \in [0, 3]$  kolem osy  $x$ .

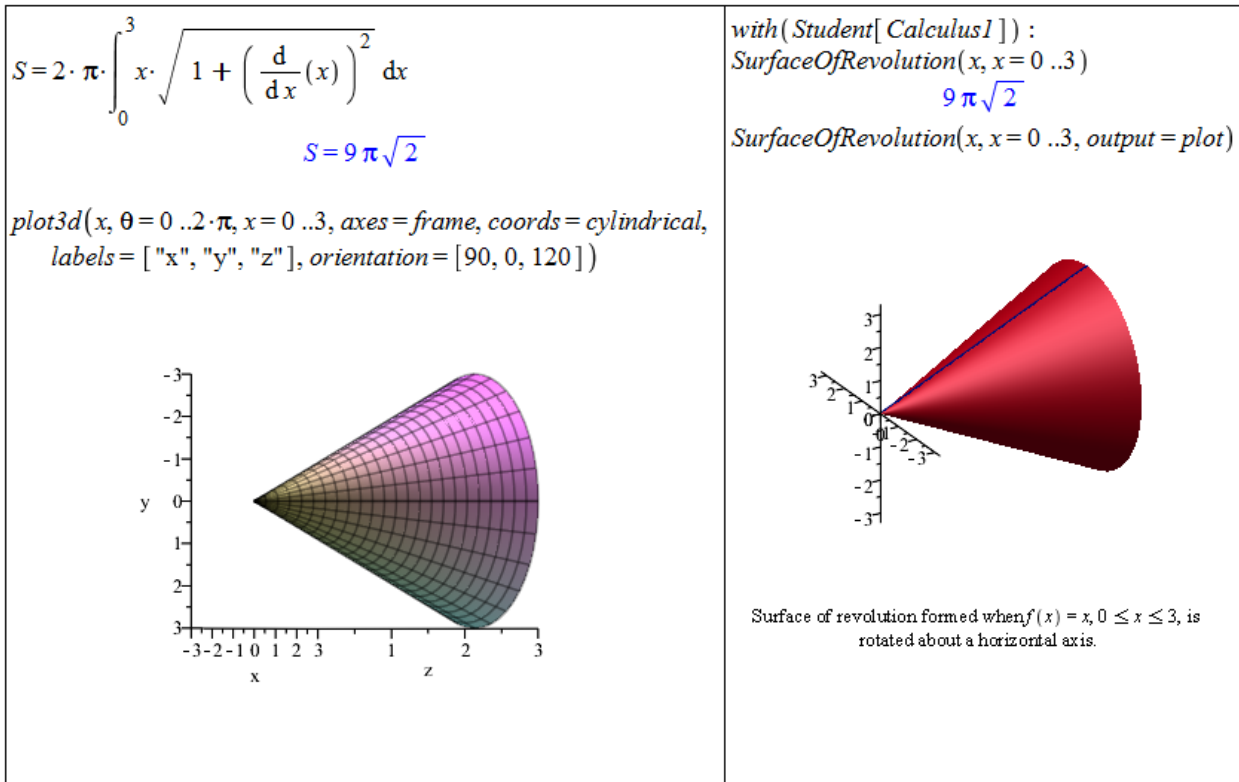
*Řešení:* Jelikož platí všechny předpoklady poznámky 2.30, stačí dosadit do uvedeného vzorce. K dispozici máme také příkaz `SurfaceOfRevolution` z balíku `Student[Calculus1]` (obrázek 2.76).

**Příklad 2.75:** Vypočtete obsah pláště tělesa, které vznikne rotací křivky zadanou parametricky rovnicemi  $x = \cos^3(t)$ ,  $y = \sin^3(t)$ ,  $t \in [0, \pi]$  kolem osy  $x$ .

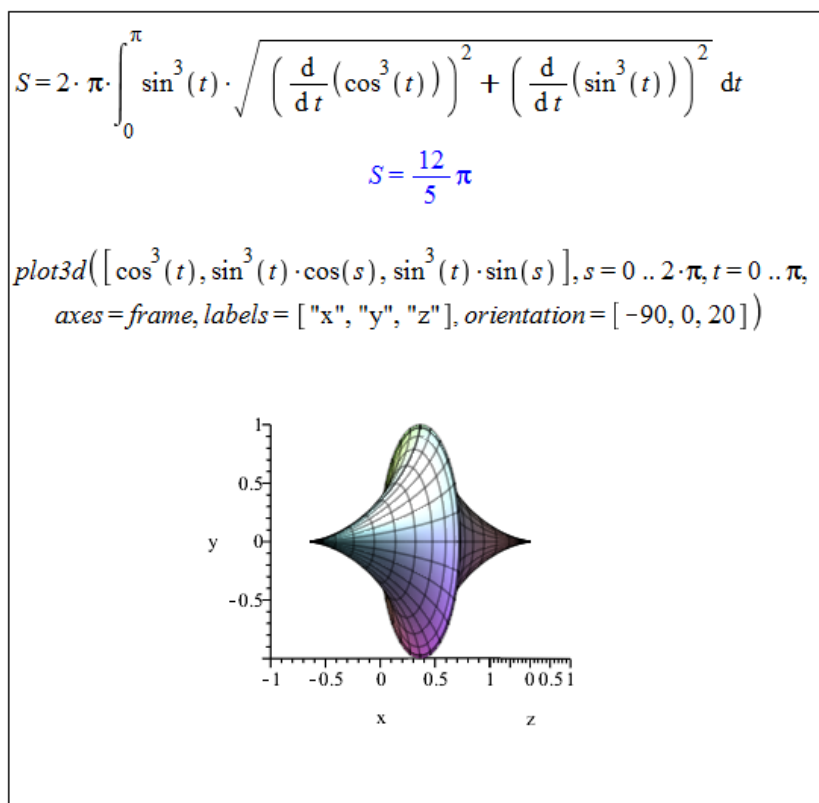
*Řešení:* Zadaná křivka splňuje všechny předpoklady poznámky 2.31. Použijeme proto příslušný vztah pro výpočet obsahu pláště (obrázek 2.77).

**Příklad 2.76:** Určete obsah pláště tělesa vzniklého rotací plochy ohraničené zadanými křivkami kolem osy  $x$ :

- (a)  $y^2 = x$ ,  $y = x^2$ ,
- (b)  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $y = \sin(x)$ ,  $x = \pi$ ,
- (c)  $y = x$ ,  $y = \frac{1}{x}$ ,  $y = 2$ ,
- (d)  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $x + y = 2$ .



Obrázek 2.76: Řešení příkladu 2.74.



Obrázek 2.77: Řešení příkladu 2.75.

**Příklad 2.77:** Určete obsah pláště tělesa, které vznikne rotací plochy ohraničené křivkou zadanou parametricky a osou  $x$  kolem této osy:

- (a)  $x = t^2, y = t - \frac{t^3}{3}, t \in [0, \sqrt{3}]$ ,
- (b)  $x = 3 \cdot \sin^3(t), y = 3 \cdot \cos^3(t), t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ,
- (c)  $x = \sin^2(t), y = 1 - \cos(t), t \in [0, \pi]$ ,
- (d)  $x = 2 + \sin(t), y = 2 + \cos(t), t \in [0, 2 \cdot \pi]$ .

**Příklad 2.78:** Odvoďte vzorec pro povrch koule o poloměru  $r$ .

**Příklad 2.79:** Odvoďte vzorec pro povrch válce o poloměru podstavy  $r$  a výšce válce  $v$ .

Dříve uvedené příkazy balíku `Student [Calculus1]`, tedy příkazy `ArcLength`, `VolumeOfRevolution` a `SurfaceOfRevolution`, jsou k dispozici i ve formě mapletů, jež najdeme v hlavním menu (**Tools > Tutors > Calculus – Single Variable**).

## 2.7.6 Nevlastní integrál

**Definice 2.24:** Nechť je funkce  $f(x)$  integrovatelná v každém intervalu  $[a, t]$ , kde  $a < t < b$ , a nechť je  $f(x)$  neohraničená v levém okolí bodu  $b$ . Existuje-li vlastní limita  $\lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$ , pak řekneme, že integrál  $\int_a^b f(x) dx$  konverguje, a klademe

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx.$$

Pokud zmíněná limita neexistuje nebo je nevlastní, říkáme, že integrál  $\int_a^b f(x) dx$  diverguje.

**Poznámka 2.32:** V případě neohraničenosti funkce  $f(x)$  na intervalu  $[a, b]$  v pravém okolí bodu  $a$  definujeme integrál  $\int_a^b f(x) dx$  analogicky.

**Příklad 2.80:** Určete  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ .

*Řešení:* V systému Maple obdržíme řešení automaticky pouhým zadáním integrálu a provedením příkazu. Musíme si však uvědomit, že zadaná funkce  $\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$  není v bodě 1 spojitá a na intervalu  $[0, 1]$  ohraničená! Správně bychom se tedy měli o získaném výsledku přesvědčit určením limity z definice 2.24.

**Příklad 2.81:** Určete  $\int_0^1 x \cdot \ln(x) dx$ .

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2} \pi$$

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(b)$$

$$\arcsin(1) = \frac{1}{2} \pi$$

Obrázek 2.78: Řešení příkladu 2.80.

**Poznámka 2.33:** Pokud je funkce  $f(x)$  neohraničená na intervalu  $[a, b]$  v pravém okolí bodu  $a$  i v levém okolí bodu  $b$ , rozdělíme interval  $[a, b]$  libovolným bodem  $c \in (a, b)$ , čímž přejdeme k případům popsáným v definici 2.24 a poznámce 2.32.

**Definice 2.25:** Necht' je funkce  $f(x)$  integrovatelná v každém intervalu  $[a, b]$ , kde  $a < b$ . Existuje-li vlastní limita  $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$ , pak řekneme, že integrál  $\int_a^\infty f(x) dx$  konverguje, a klademe

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Neexistuje-li zmíněná vlastní limita, říkáme, že integrál  $\int_a^\infty f(x) dx$  diverguje.

**Poznámka 2.34:** Analogicky definujeme nevlastní integrál  $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ . Je-li funkce  $f$  integrovatelná na každém omezeném intervalu, pak řekneme že integrál  $\int_{-\infty}^b f(x) dx$  konverguje, jestliže pro nějaké  $a \in \mathbb{R}$  konvergují oba nevlastní integrály  $\int_{-\infty}^a f(x) dx$ ,  $\int_a^\infty f(x) dx$  a klademe

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^\infty f(x) dx.$$

**Příklad 2.82:** Určete  $\int_2^\infty \frac{1}{x^2} dx$ .

*Řešení:* V systému Maple obdržíme řešení opět automaticky pouhým zadáním integrálu a provedením příkazu. Jako v předchozím případě bychom si však měli uvědomit, zda existuje vlastní limita  $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{1}{x^2} dx$ . Při výpočtu limity Maple zahlásí, že neumí určit, jestli  $b < 0$ . Je možné mu „pomoci“ zavedením předpokladu, že  $b > 0$ , pomocí příkazu `assume` (obrázek 2.79).

```

∫2∞ 1/x2 dx
                                1/2

limb→∞ ∫2b 1/x2 dx
Warning, unable to determine if 0
is between 2 and b; try to use
assumptions or use the
AllSolutions option
                                1/2

assume(b > 0)

limb→∞ (∫2b 1/x2 dx)
                                1/2

```

Obrázek 2.79: Řešení příkladu 2.82.

**Příklad 2.83:** Určete následující integrály:

(a)  $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx,$

(c)  $\int_1^{\infty} \sin(x^2) dx,$

(b)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx,$

(d)  $\int_0^{\infty} \frac{x^2+1}{x^3+1} dx.$

Doposud jsme se setkali pouze s příklady, kdy Maple umí nalézt symbolické řešení (při použití „standardních“ funkcí). Jsou však případy, kdy Maple zavádí funkce nové či symbolické řešení nenalezne. Pokud Maple zahrne do výsledku novou funkci, najdeme její předpis v nápovědě. Například na obrázku 2.80 je v řešení zahrnuta tzv. chybová funkce  $\text{erf}(x)$  s předpisem

$$\text{erf}(x) = \frac{2 \cdot \left( \int_0^x e^{-t^2} dt \right)}{\sqrt{\pi}}.$$

Jestliže Maple nenalezne symbolické řešení, vypíše námi zadaný příkaz jako výsledek. V případě určitého integrálu můžeme hledat numerické řešení, a to buď přidáním nepovinného parametru `numeric` příkazu `int`, nebo použitím příkazu `evalf` na integrál zadaný příkazem `Int`<sup>14</sup>. Numerických metod pro výpočet určitého integrálu nabízí Maple několik. Mezi nimi je možné volit specifikací parametru `method` (více v nápovědě systému).

<sup>14</sup>Upozorníme na rozdíl v zadání `evalf(Int(...))` a `evalf(int(...))`. První možnost vede na numerické řešení zadaného integrálu, v druhém případě je nejprve vyhodnocen integrál symbolicky příkazem `int` a následně výsledek převeden na numerickou hodnotu příkazem `evalf`.



$\int e^{-x^2} dx$	$\frac{1}{2} \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(x)$	<code>int(e<sup>-x<sup>2</sup></sup>, x=0 ..1, numeric)</code> <code>0.7468241328</code>
$\int e^{-x^2} \ln(x) dx$	$\int e^{-x^2} \ln(x) dx$	<code>evalf(Int(e<sup>-x<sup>2</sup></sup>, x=0 ..1))</code> <code>0.7468241328</code>
$\int_0^1 e^{-x^2} dx$	$\frac{1}{2} \operatorname{erf}(1) \sqrt{\pi}$	<code>int(e<sup>-x<sup>2</sup></sup>·ln(x), x=0 ..1, numeric, method=_Dexp)</code> <code>-0.9059404763</code>
$\int_0^1 e^{-x^2} \cdot \ln(x) dx$	$\int_0^1 e^{-x^2} \ln(x) dx$	<code>evalf(Int(e<sup>-x<sup>2</sup></sup>·ln(x), x=0 ..1, method=_Gquad))</code> <code>-0.9059404763</code>

Obrázek 2.80: Symbolická a numerická integrace.

## 3 Matematická analýza s Maple v $\mathbb{R}^n$

Ačkoli v sobě název kapitoly obsahuje prostor  $\mathbb{R}^n$ , často se budeme omezovat na funkce dvou proměnných, tedy prostor  $\mathbb{R}^2$ , pro nějž máme v systému Maple grafickou podporu.

### 3.1 Funkce více proměnných

#### 3.1.1 Definice funkce více proměnných

Funkci více proměnných definujeme v systému Maple zcela analogicky k funkci jedné proměnné (viz 2.2.1). V prostředí *Standard Worksheet* používáme tytéž postupy, pouze „přidáváme“ proměnné - obrázky a .

$f(x, y) := x^2 + y$	$f(0, 1)$	1
$(x, y) \rightarrow x^2 + y$	$g(0, 1)$	1
$g := (x, y) \rightarrow x^2 + y$	$h(0, 1)$	<i>undefined</i>
$(x, y) \rightarrow x^2 + y$	$h(-1, 1)$	1
$h := (x, y) \rightarrow \text{piecewise}(x < 0, -x, x \cdot y < 0, -y, \text{undefined})$	$h(1, -1)$	1
$(x, y) \rightarrow \text{piecewise}(x < 0, -x, x \cdot y < 0, -y, \text{undefined})$		

Obrázek 3.1: Definice funkce dvou proměnných.

#### 3.1.2 Vykreslení funkce dvou proměnných

V závěru předchozí kapitoly jsme se již setkali s příkazem `plot3d` pro vykreslování trojrozměrných grafů. V systému Maple máme tedy možnost vykreslovat funkce dvou proměnných, a to opět podobnými postupy jako v případě funkce jedné proměnné. První způsob nabízí kliknutí pravým tlačítkem na funkci (resp. výraz) dvou proměnných v dokumentu a zvolení **Plots > 3-D Plot** se specifikací proměnných. Další možnost poskytuje pomocník zvaný **PlotBuilder** a nakonec máme k dispozici již zmíněný příkaz `plot3d`.

Narozdíl od vykreslování funkcí jedné proměnné Maple nyní v grafu standardně nezobrazuje souřadnicové osy. Pokud je chceme zobrazit (a na výběr máme z několika typů: **normal**, **boxed**, **framed**), je třeba při tvorbě grafu specifikovat parametr `axes`. Graf je možné upravit i po jeho vytvoření kliknutím pravého tlačítka myši a volením požadovaných parametrů grafu z kontextové nabídky. Kliknutím na graf a přidržení levého tlačítka myši můžeme

$f := (x, y, z) \rightarrow x^2 + y^2 + z^2$	$(x, y, z) \rightarrow x^2 + y^2 + z^2$
$f(1, 2, 3)$	14
$f := (x, y, z) \rightarrow \text{piecewise}(x < 0 \wedge y < 0 \wedge z < 0, x^2, x \cdot y \cdot z)$	$(x, y, z) \rightarrow \text{piecewise}(x < 0 \text{ and } y < 0 \text{ and } z < 0, x^2, xyz)$
$f(1, 2, 3)$	6
$f(-1, -2, -3)$	1
$f := (x, y, z, u, v) \rightarrow x^2 + y^2 + z \cdot u - v$	$(x, y, z, u, v) \rightarrow x^2 + y^2 + z u - v$
$f(1, 2, 3, 4, 5)$	12

Obrázek 3.2: Definice funkce více proměnných.

s grafem funkce otáčet podle pohybů myši, případně provádět další úpravy, které si předem vybereme v kontextové liště, resp. kontextovém menu.

Rozdíl mezi příkazy `plot` a `plot3d` je také v povinnosti specifikovat rozsah nezávisle proměnných. Zatímco u příkazu `plot` se použije standardní interval  $[-10, 10]$  při nezadání rozsahu, příkaz `plot3d` zadání rozsahu vyžaduje pro obě nezávisle proměnné, jinak se neprovede a vypíše chybové hlášení.

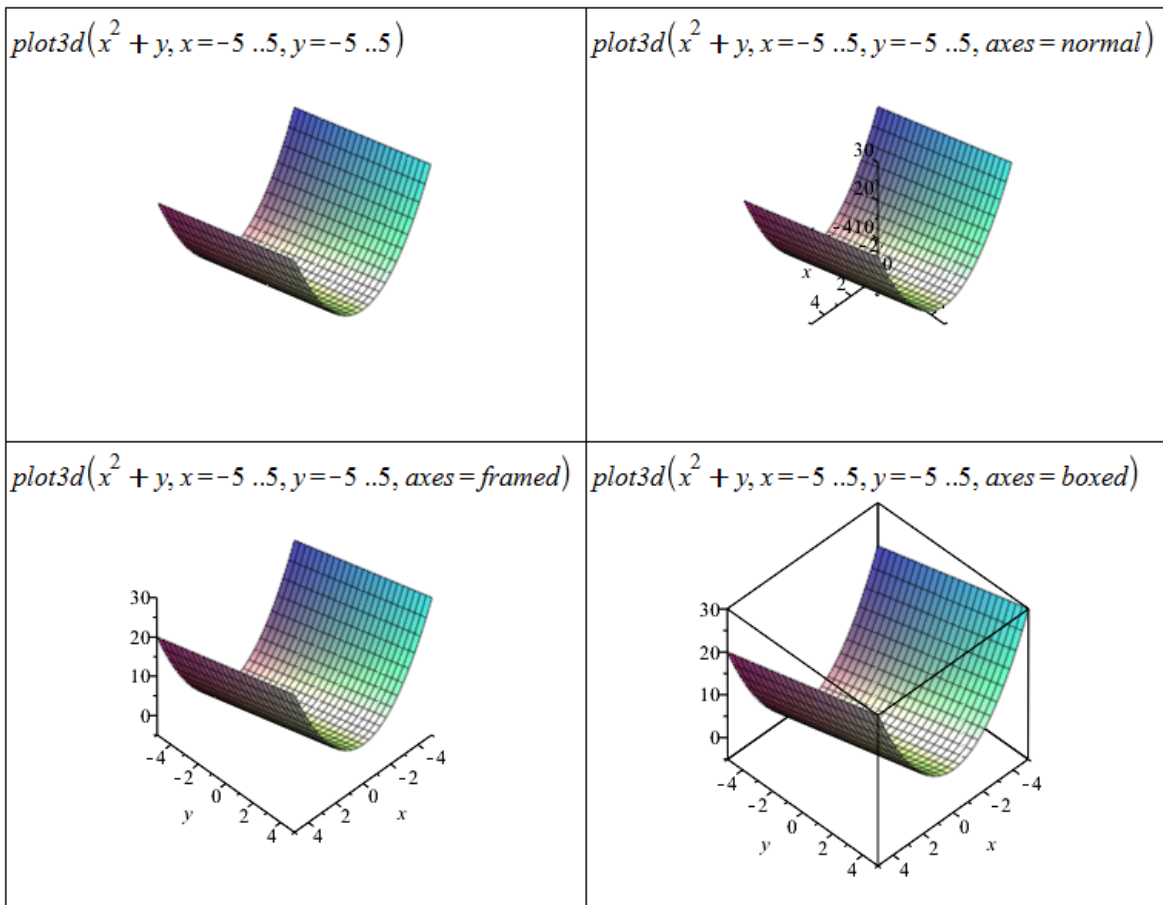
Stejně jako v případě funkce jedné proměnné musíme i zde myslet na to, jak má graf funkce vypadat a případně vyzkoušet různá nastavení parametrů (tj. např. rozsahů nezávisle proměnných), abychom dostali názorný graf. Některá zobrazení mohou velmi zkreslovat (resp. zobrazovat graf funkce chybně).

Systém Maple kvůli efektivitě (rychlosti) vykreslování počítá funkční hodnoty<sup>1</sup> jen v několika bodech. Graf bývá zpravidla rozdělen na čtvercovou síť bodů, v nichž je spočítána odpovídající (funkční) hodnota. Parametry sítě se pro různé typy grafů liší, například v Maple 16 je pro příkaz `plot3d` standardně použita síť 25x25 bodů, pro příkaz `implicitplot` síť 26x26 bodů atp. Zbylé body grafu jsou získané lineární (rovinnou) interpolací.

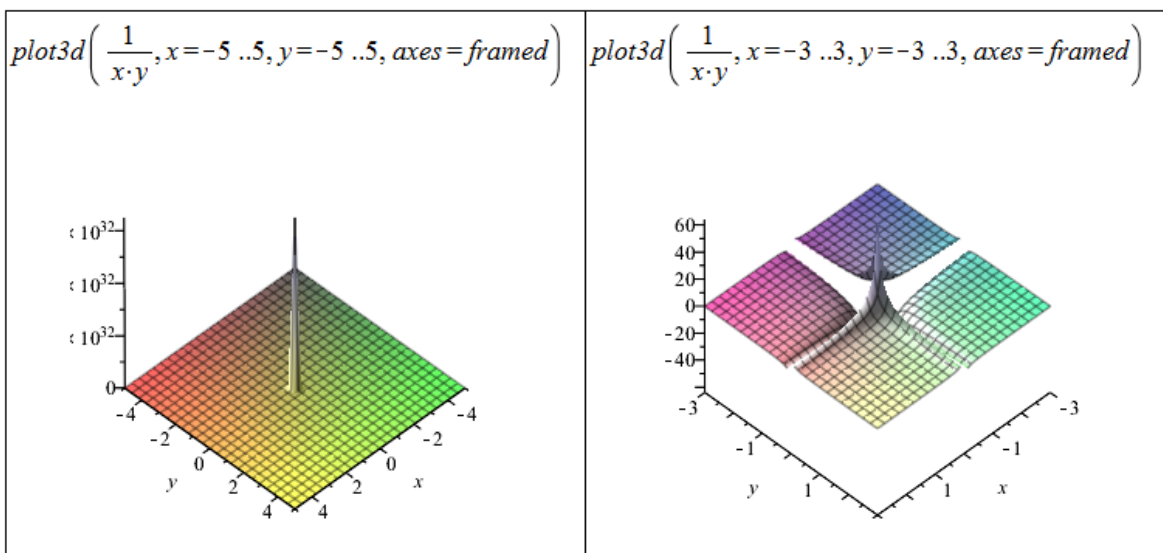
Pokud chceme po systému přesnější zobrazení, máme několik možností. První je omezení rozsahů nezávisle proměnných (viz obrázek 3.4). Můžeme také nastavit parametr `numpoints` určující, v kolika bodech bude vypočítána (funkční) hodnota. Další možností je nastavit explicitně síť počítaných bodů pomocí parametru `grid`. Ten specifikujeme dvojicí v hranatých závorkách: [počet bodů na ose  $x$ , počet bodů na ose  $y$ ]<sup>2</sup>.

<sup>1</sup>Ve skutečnosti nemusí jít jen o funkční hodnoty, vykreslovat můžeme například i hodnoty vyhovující nějaké rovnosti (nerovnosti).

<sup>2</sup>Příkazu `implicitplot` je možné navíc nastavit parametr `gridrefine`, který „zjemňuje“ síť počítaných bodů. Standardní nastavení je 0. Nastavení na hodnotu 1 (zjednodušeně) znamená, že místo jedné (funkční) hodnoty v daném místě sítě budou určeny dvě funkční hodnoty. Při dalším zvyšování hodnoty parametru `gridrefine` se vždy rekurzivně počítají dvě nové (funkční) hodnoty místo jedné předcházející. Více informací nalezneme v nápovědě k příkazu `implicitplot`.



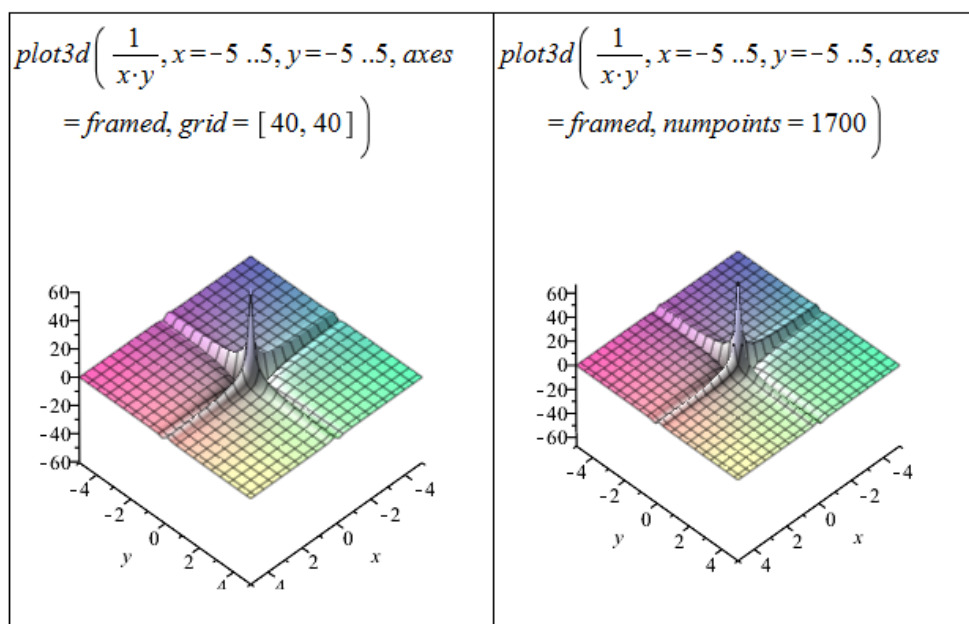
Obrázek 3.3: Vykreslení funkce dvou proměnných pomocí příkazu `plot3d`.



Obrázek 3.4: Ukázka různých nastavení příkazu `plot3d`.

### 3.1.3 Definiční obor funkce dvou proměnných

Systém Maple nám dává možnosti, jak zakreslit do grafu dvourozměrnou (případně i třírozměrnou) oblast. K zakreslení dvourozměrné oblasti zadané implicitně (rovností či nerovností) slouží



Obrázek 3.5: Ukázka dalších nastavení příkazu `plot3d` pro přesnější vykreslení.

příkaz `implicitplot` z balíku `plots`. Pokud chceme zadanou oblast vyplnit, nastavíme parametr `filled` na hodnotu `true`.

Pro vykreslení oblastí vymezených více nerovnostmi (resp. rovnostmi) je někdy nutné použít jiný postup. Pokud je oblast vymezená lineárními nerovnostmi, je možné použít příkaz `inequal` z balíku `plots`.

**Příklad 3.1:** Nakreslete oblast  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ .

*Řešení:* Použijeme příkaz `implicitplot`, kterému navíc specifikujeme i parametr `view` pro rozsah souřadných os<sup>3</sup> (obrázek 3.6).

**Příklad 3.2:** Nakreslete oblast  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$ .

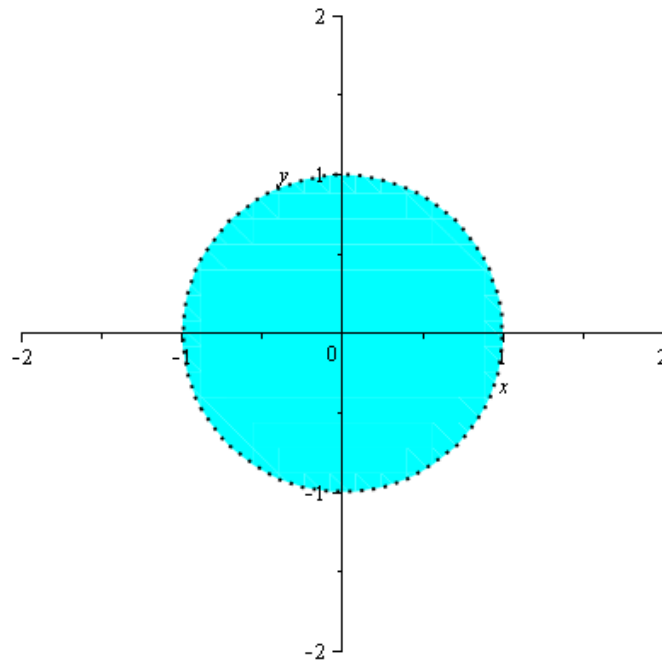
*Řešení:* Právě v tomto případě se projeví nedostatečný počet generovaných bodů pro vykreslení zadané oblasti. Využijeme proto parametru `gridrefine`, který poskytuje příkaz `implicitplot` (obrázek 3.7).

**Příklad 3.3:** Nakreslete oblast  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y < 1\}$ .

*Řešení:* Požadovaná oblast je zadána třemi nerovnostmi, přičemž všechny jsou lineární. Využijeme proto příkazu `inequal`. Příkaz má několik nepovinných parametrů, v nichž můžeme například specifikovat barvu, kterou budou vykreslovány body patřící (resp. nepatřící) do zadané množiny (oblasti) nebo hraniční body (obrázek 3.8).

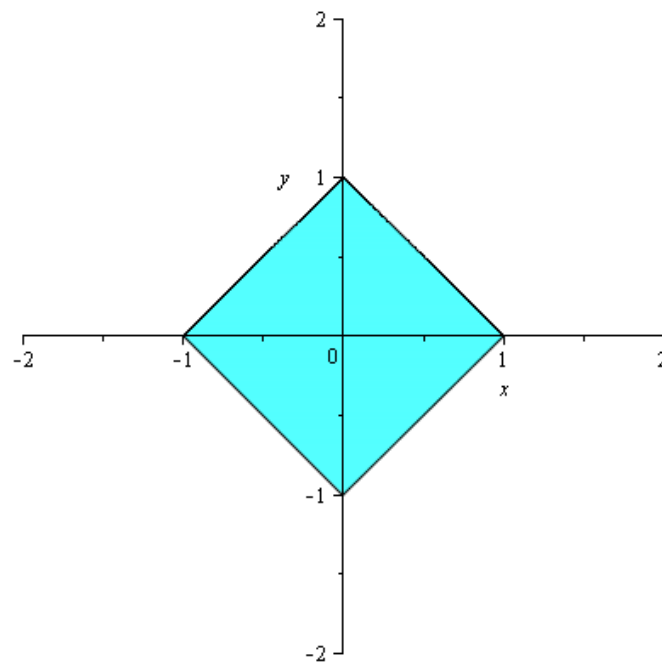
<sup>3</sup>Neplést s nastavením rozsahu nezávisle proměnných!

```
plots[implicitplot](x2 + y2 < 1, x=-2 ..2, y=-2 ..2, view = [-2 ..2, -2 ..2],  
coloring = [cyan, white], filled = true, thickness = 2)
```

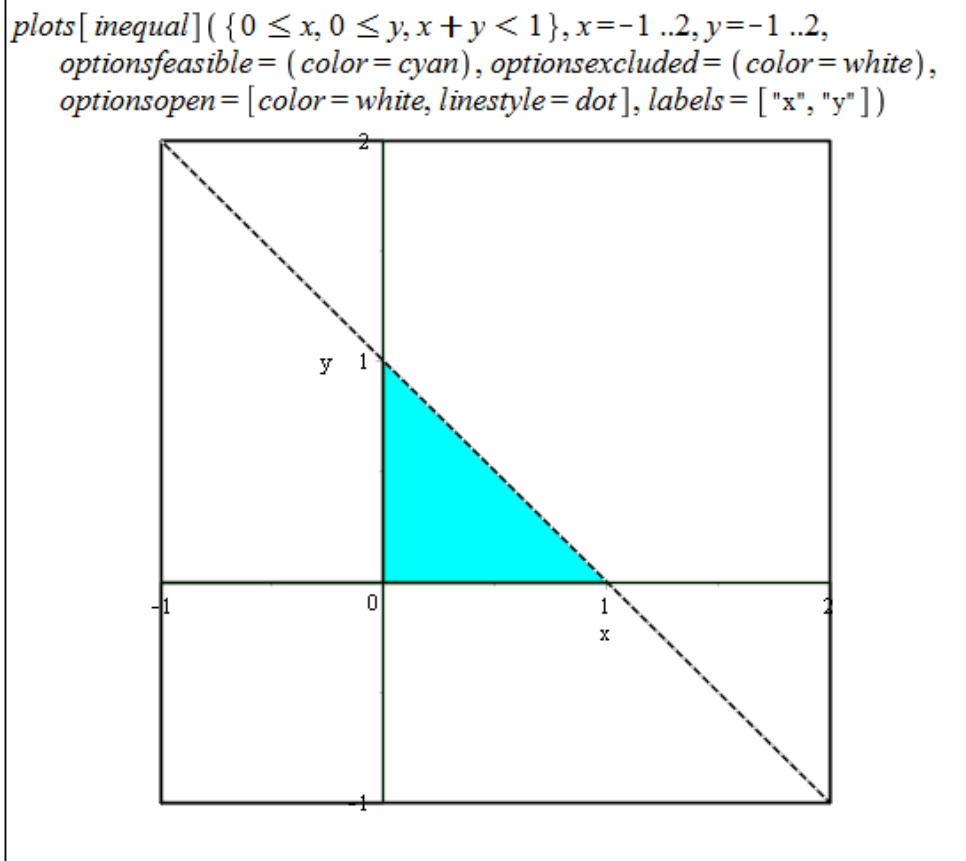


Obrázek 3.6: Řešení příkladu 3.1.

```
plots[implicitplot](|x| + |y| ≤ 1, x=-2 ..2, y=-2 ..2, view = [-2 ..2, -2 ..2],  
coloring = [cyan, white], filled = true, thickness = 1, gridrefine = 6)
```



Obrázek 3.7: Řešení příkladu 3.2.



Obrázek 3.8: Řešení příkladu 3.3.

**Příklad 3.4:** Nakreslete oblast:

- (a)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x \cdot y| \leq 1\}$ ,
- (b)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y \leq 1\}$ ,
- (c)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 2)^2 + y^2 \geq 1\}$ ,
- (d)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq |x| + |y| < 2\}$ ,
- (e)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

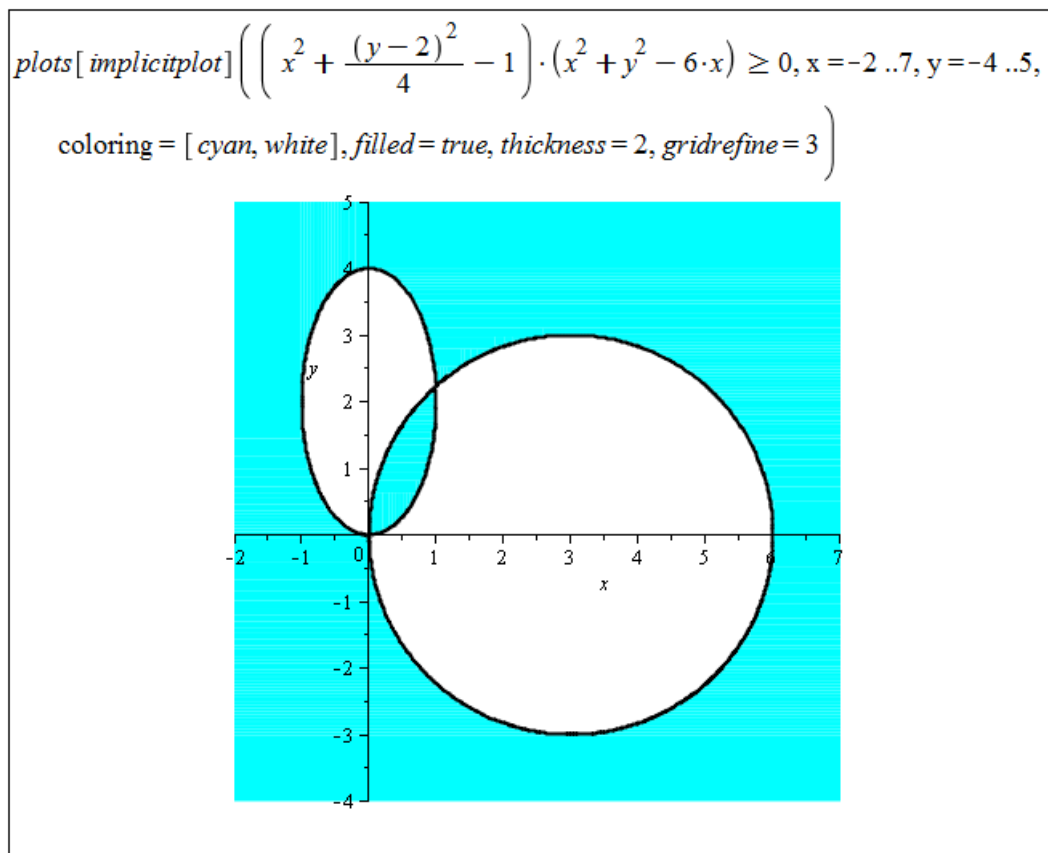
Vykreslování dvourozměrných oblastí využijeme při určování definičního oboru funkce dvou proměnných. Systém Maple nemá žádný nástroj pro nalezení definičního oboru funkce, nic nám však nebrání využít jej při podúlohách vedoucích k hledanému řešení.

**Příklad 3.5:** Určete definiční obor funkce  $f(x, y) = \sqrt{\left(x^2 + \frac{(y-2)^2}{4} - 1\right) \cdot (x^2 + y^2 - 6 \cdot x)}$  a zakreslete jej v rovině.

*Řešení:* Výraz pod odmocninou musí být nezáporný, tj.

$$\left(x^2 + \frac{(y-2)^2}{4} - 1\right) \cdot (x^2 + y^2 - 6 \cdot x) \geq 0.$$

Předchozí nerovnost se nám rozpadne na 2 případy, které bychom dále upravovali. V tuto chvíli však již můžeme využít příkazu `implicitplot` a příslušnou oblast – definiční obor funkce  $f(x, y)$  – rovnou vykreslit. Opět je nutné specifikovat některý z parametrů „kvality“ zobrazení, použijeme proto například znovu parametr `gridrefine` (obrázek 3.9).



Obrázek 3.9: Řešení příkladu 3.5.

**Příklad 3.6:** U následujících funkcí určete jejich definiční obor a zobrazte jej v rovině:

(a)  $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - 4 \cdot y^2}$ ,

(d)  $f(x, y) = \arccos\left(\frac{x}{x+y}\right)$ ,

(b)  $f(x, y) = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}$ ,

(e)  $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$ ,

(c)  $f(x, y) = \ln(x + y)$ ,

(f)  $f(x, y) = \ln(x \cdot \ln(y - x))$ .

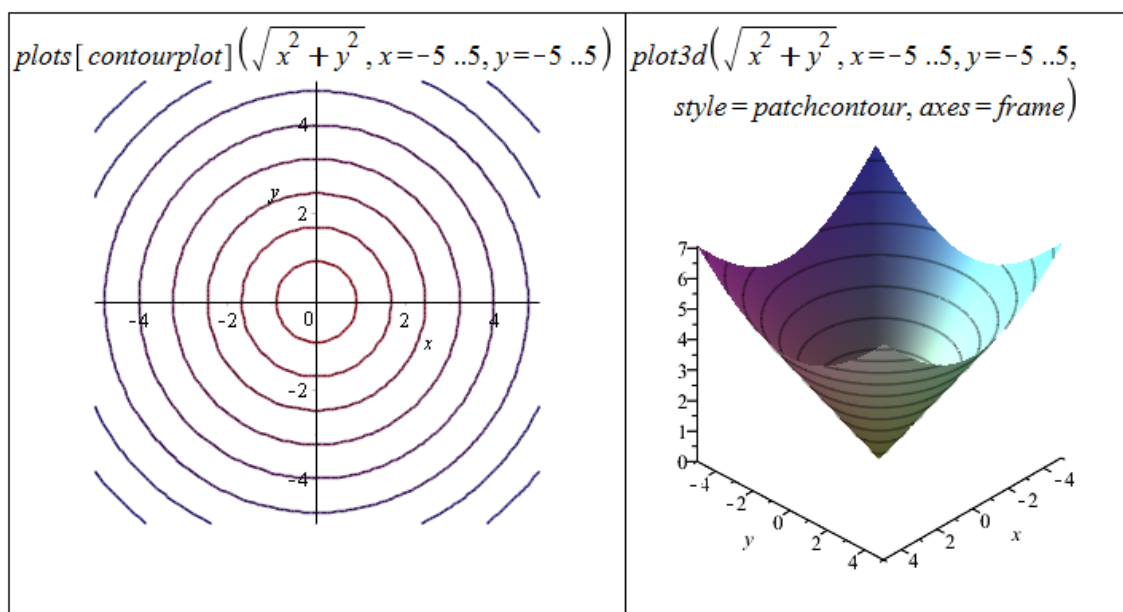
V systému Maple je možné vykreslovat též vrstevnice funkcí dvou proměnných, tj. množiny bodů se stejnou funkční hodnotou. Slouží k tomu příkaz `contourplot`, případně je možné vrstevnice zakreslit do grafu funkce nastavením parametru `style` příkazu `plot3d` na hodnotu `patchcontour` (lze nastavit i dodatečně v kontextové liště či kontextovém menu).

Příkazům `contourplot` a `plot3d` můžeme dále zadat parametr `contours` určující, kolik vrstevnic se zobrazí<sup>4</sup>, případně jaké vrstevnice (tj. vrstevnice jakých funkčních hodnot)<sup>5</sup> - obrázek 3.10.

<sup>4</sup>zadáme přirozené číslo

<sup>5</sup>zadáme seznam funkčních hodnot





Obrázek 3.10: Zobrazení vrstevnic funkce dvou proměnných.

**Příklad 3.7:** Zobrazte vrstevnice následujících funkcí:

(a)  $f(x, y) = x^2 - y^2$ ,

(c)  $f(x, y) = \frac{x}{y}$ ,

(b)  $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$ ,

(d)  $f(x, y) = x \cdot y$ .

## 3.2 Limita a spojitost funkce více proměnných

### 3.2.1 Limita funkce

**Definice 3.1:** Řekneme, že funkce  $f(x, y)$  má v bodě  $[x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$  limitu  $L \in \mathbb{R}$ , jestliže ke každému  $\varepsilon > 0$  existuje  $\delta > 0$  tak, že pro všechny  $[x, y]$  splňující  $|x - x_0| < \delta$ ,  $|y - y_0| < \delta$  a  $[x, y] \neq [x_0, y_0]$  platí  $|f(x, y) - L| < \varepsilon$ , a píšeme

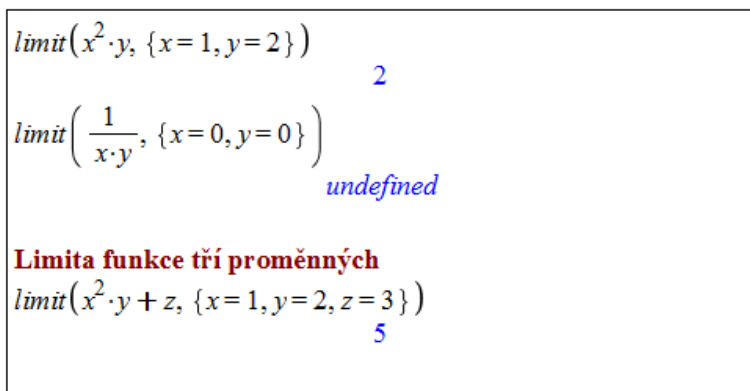
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L.$$

**Poznámka 3.1:** Analogicky k vlastním a nevlastním bodům a limitám definujeme tyto body i v prostoru  $\mathbb{R}^2$ . Limita se nazývá nevlastní, jestliže je rovna  $\infty$  nebo  $-\infty$ . V opačném případě se nazývá vlastní. Nevlastní bod je bod s alespoň jednou souřadnicí rovnou  $\infty$  nebo  $-\infty$ , tj. bod typu  $[a, \pm\infty]$  nebo  $[\pm\infty, a]$ , kde  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ .

**Poznámka 3.2:** Taktéž analogicky definujeme příslušné pojmy v prostoru dimenze větší než 2.

**Poznámka 3.3:** Zásadní rozdíl mezi limitou funkce jedné proměnné a limitou funkce dvou proměnných spočívá v okolí limitního bodu a tedy směru přibližování k limitnímu bodu. U funkce jedné proměnné se blížíme pouze po jedné přímce (a to zleva nebo zprava). Naproti tomu u funkce dvou (a více) proměnných se k limitnímu bodu blížíme po různých přímkách, parabolách či jiných množinách. Pokud v daném bodě limita existuje, nesmí záležet na cestě, po jaké se k tomuto bodu přibližujeme.

V systému Maple máme možnost počítat limity funkcí dvou (i více) proměnných. Nemáme k tomu však již symbol v paletě **Expression**, a tak musíme použít příkaz `limit`. Příkaz používáme jediný, limitní bod zapíšeme do složených závorek. Pokud bychom použili příkaz dvakrát za sebou vždy pro jednu proměnnou, tj. např. `limit(limit(f(x,y),x=a),y=b)`, nepočítali bychom dříve definovanou limitu. K limitnímu bodu bychom se totiž v tomto případě blížili pouze ve dvou směrech (nejprve po ose  $x$  a následně po ose  $y$ ).



Obrázek 3.11: Výpočet limity funkce více proměnných.

Systém Maple limitu v mnohých případech neumí určit, i když limita existuje. Často je proto vhodnější použít „klasický“ způsob určení limity a Maple použít jako pomocníka při dílčích výpočtech a pro vykreslení funkce (výrazu) v blízkosti limitního bodu (pro vyslovení hypotézy o existenci limity a její hodnotě). Pokud je možné do výrazu, jehož limitu počítáme, dosadit, řešení je triviální. Pokud při dosazení dostáváme neurčitý výraz typu „ $\frac{0}{0}$ “ nebo „ $\frac{\infty}{\infty}$ “, upravujeme původní výraz, abychom do něj mohli „dosadit“. Nejběžnějšími úpravami jsou rozšíření zlomků, použití (součtových) vzorců či substituce.

Klíčová je otázka, zda limita vůbec existuje. Pokud očekáváme, že zadaný výraz nemá limitu, je možné využít přibližování k limitnímu bodu z různých směrů (tj. např. po různých přímkách, po přímkách a po parabolách, ...). Pokud dostaneme různé výsledky (limity), limita neexistuje. Často je využívána transformace do polárních souřadnic a následné přibližování se k limitnímu bodu po kružnicích. V tomto případě je nutné mít na paměti, že výsledná limita nesmí záviset na úhlu ( $\varphi$ ) a že přibližování se po kružnici je opět pouze jeden z možných způsobů přibližování se k limitnímu bodu! Nicméně existuje tvrzení, které nám za jistých předpokladů dovolí určit limitu funkce (výrazu) použitím jen této metody.

**Poznámka 3.4:** Platí-li pro funkci  $f(x, y)$  po transformaci do polárních souřadnic

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = \lim_{r \rightarrow 0^+} h(r) \cdot g(\varphi),$$

přičemž

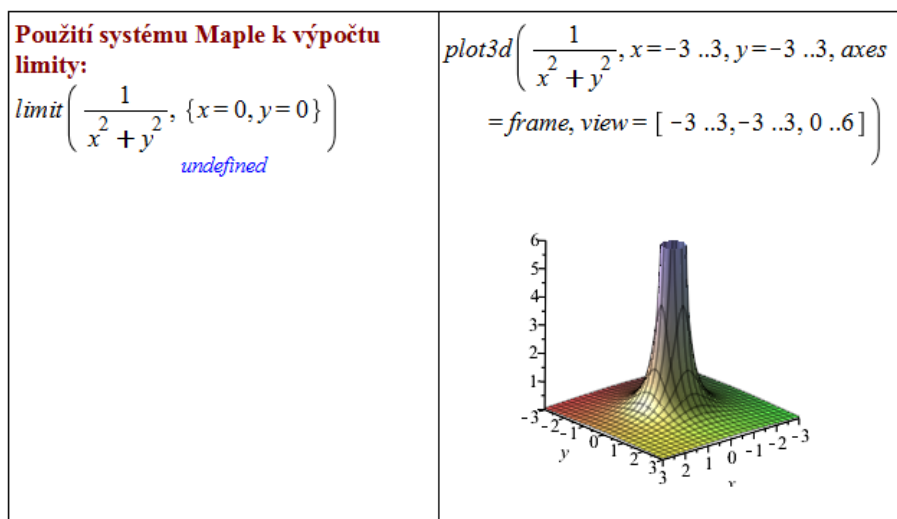
$$\lim_{r \rightarrow 0^+} h(r) = 0 \quad \text{a} \quad g(\varphi) \text{ je ohraničená pro } \varphi \in [0, 2 \cdot \pi),$$

pak

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = 0.$$

**Příklad 3.8:** Určete  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{x^2+y^2}$ .

*Řešení:* Právě v tomto případě od systému Maple obdržíme chybné řešení.



Obrázek 3.12: Pokus o získání řešení příkladu 3.8 v Maple.

Již první pohled nám napovídá, že by limita měla existovat a měla být rovna  $\infty$ . K určení limity musíme vyjít z definice nevlastní limity. Potřebujeme ukázat, že pro libovolně velké  $M \in \mathbb{R}$  existuje  $\delta > 0$  tak, že pro všechna  $[x, y]$  splňující  $|x| < \delta$ ,  $|y| < \delta$  a  $[x, y] \neq [0, 0]$  platí  $f(x, y) > M$ .

Mějme proto libovolné, ale pevné  $M \in \mathbb{R}$ . Položme  $\delta = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot |M|}}$ . Pro  $[x, y]$  splňující  $|x| < \delta$ ,  $|y| < \delta$  a  $[x, y] \neq [0, 0]$  nyní platí:  $x^2 + y^2 < 2 \cdot \delta^2 = \frac{1}{|M|}$ . Z toho už vidíme, že skutečně  $f(x, y) > M$  pro tato  $[x, y]$ , a tedy

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{x^2+y^2} = \infty.$$

**Příklad 3.9:** Určete  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 \cdot y^2}{x^2+y^2}$ .

*Řešení:* Od systému Maple nezískáme řešení. Nejprve musíme „odhadnout“, zda limita existuje a pokud ano, čemu je rovna. Z toho vyvodíme postup, jakým vyslovenou hypotézu dokázat. Díky tvaru zadání nemusíme uvažovat nad změnami znamének, funkční hodnoty jsou vždy nezáporné. Když se budou  $x$  a  $y$  blížit k nule, budou „velmi malá“. Přitom pro  $|x| < 1$  a  $|y| < 1$  platí  $x^2 + y^2 > x^2 \cdot y^2$  a podíl čitatele a jmenovatele bude tím menší, čím menší (v absolutní hodnotě) budou  $x$  a  $y$ . To nás přivádí na myšlenku, že limita existuje a je rovná nule.

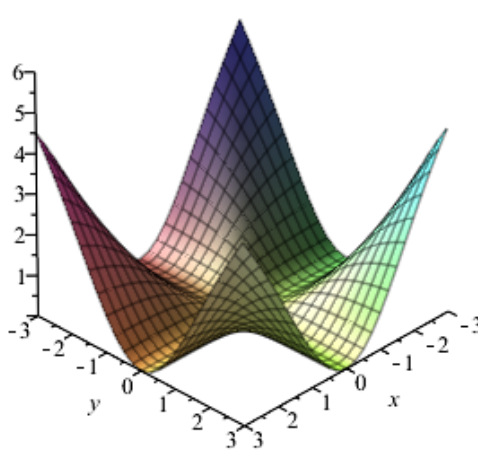
Nyní bychom mohli opět postupovat podle definice. Vzali bychom libovolné, ale pevné  $\varepsilon$  a k němu bychom „vytvořili“  $\delta$  tak, abychom splnili předpoklady definice 3.1 pro  $L = 0$ .

Zkusme však k výpočtu limity použít transformaci do polárních souřadnic, tzn. provést substituci:  $[x, y] = [r \cdot \cos(\varphi), r \cdot \sin(\varphi)]$ .

Získali jsme (viz obrázek 3.13) výsledek tvaru  $r^2 \cdot \cos^2(\varphi) \cdot \sin^2(\varphi)$ . Aplikací poznámky 3.4 dostáváme  $h(r) = r^2$  a  $g(\varphi) = \cos^2(\varphi) \cdot \sin^2(\varphi)$ . Platí, že  $\lim_{r \rightarrow 0^+} h(r) = 0$  a  $g(\varphi)$  je ohraničená pro  $\varphi \in [0, 2 \cdot \pi)$ . Tedy

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 \cdot y^2}{x^2 + y^2} = 0.$$

**Příklad 3.10:** Určete  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 \cdot y^2}{x^2 + y^2}$  přímo z definice limity.

<p><b>Použití systému Maple k výpočtu limity:</b></p> $\text{limit} \left( \frac{x^2 \cdot y^2}{x^2 + y^2}, \{x=0, y=0\} \right)$ $\text{limit} \left( \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, \{x=0, y=0\} \right)$ <p><b>Transformace do polárních souřadnic:</b></p> $\text{subs} \left( \{x=r \cdot \cos(\varphi), y=r \cdot \sin(\varphi)\}, \frac{x^2 \cdot y^2}{x^2 + y^2} \right)$ $\frac{r^4 \cos(\varphi)^2 \sin(\varphi)^2}{r^2 \cos(\varphi)^2 + r^2 \sin(\varphi)^2}$ <p><b>Zjednodušení:</b></p> $\text{simplify}(\%)$ $r^2 \cos(\varphi)^2 \sin(\varphi)^2$	$\text{plot3d} \left( \frac{x^2 \cdot y^2}{x^2 + y^2}, x=-3 \dots 3, y=-3 \dots 3, \text{axes} \right)$ $= \text{frame, view} = [-3 \dots 3, -3 \dots 3, 0 \dots 6]$ 
---	--

Obrázek 3.13: Řešení příkladu 3.9.

**Příklad 3.11:** Určete:

(a)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x-2y}{3x+y}$ ,

(e)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \cdot y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ,

(b)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 \cdot y}{x^4 + y^4}$ ,

(f)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{\sin(x \cdot y)}{x}$ ,

(c)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2}$ ,

(g)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2}$ .

(d)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x \cdot y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ,

### 3.2.2 Spojitost funkce

**Definice 3.2:** Řekneme, že funkce  $f(x, y)$  je spojitá v bodě  $[x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$ , jestliže má v tomto bodě vlastní limitu a platí

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

V systému Maple máme pro hledání bodů nespojitosti funkce jedné proměnné příkaz `discont`. Ten však „funguje“ jen pro funkce jedné proměnné. Pro funkce více proměnných můžeme využít příkazu `singular` hledajícího tzv. singularity. Jeho použitím pak můžeme odhalit některé body nespojitosti. Příkaz `singular` má však několik „nedostatků“ (resp. „omezení“), takže je vhodnější hledat nespojitosti „klasicky“ a Maple využívat k dílčím úkolům.

**Příklad 3.12:** Je funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 \cdot y}{x^4 + y^4} & \dots [x, y] \neq [0, 0] \\ 0 & \dots [x, y] = [0, 0] \end{cases}$$

spojitá na celém  $\mathbb{R}^2$ ?

*Řešení:* V příkladu 3.11.(b) pilný čtenář zjistil, že funkce  $f(x, y)$  nemá v bodě  $[0, 0]$  limitu. Podle definice 3.2 proto  $f(x, y)$  není v tomto bodě spojitá.

**Příklad 3.13:** Určete body nespojitosti u následujících funkcí:

(a)  $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ,

(b)  $f(x, y) = \sin\left(\frac{1}{x \cdot y}\right)$ ,

(c)  $f(x, y) = \arccos\left(\frac{x}{y}\right)$ ,

(d)  $f(x, y) = \ln|1 - x^2 - y^2|$ ,

(e)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 \cdot y^2}{x^2 + y^2} & \dots [x, y] \neq [0, 0] \\ 0 & \dots [x, y] = [0, 0] \end{cases}$ .

**Příklad 3.14:** Určete  $C \in \mathbb{R}$  tak, aby byla následující funkce spojitá v bodě  $[0, 0]$ :

(a)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2} & \dots [x, y] \neq [0, 0] \\ C & \dots [x, y] = [0, 0] \end{cases}$ ,

(b)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2} & \dots [x, y] \neq [0, 0] \\ C & \dots [x, y] = [0, 0] \end{cases}$ .

### 3.3 Parciální derivace funkce více proměnných

**Definice 3.3:** Nechť je funkce  $f(x, y)$  definována v bodě  $[x_0, y_0]$  a nějakém jeho okolí. Položme  $\varphi(x) = f(x, y_0)$ . Existuje-li derivace funkce  $\varphi(x)$  v bodě  $x_0$ , nazýváme tuto derivaci parciální derivací funkce  $f(x, y)$  podle proměnné  $x$  v bodě  $[x_0, y_0]$  a značíme  $f'_x(x_0, y_0)$  (resp.  $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$ ).

**Poznámka 3.5:** Předchozí definici můžeme zapsat následovně:

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

**Poznámka 3.6:** Analogicky definujeme  $f'_y(x_0, y_0)$  (resp.  $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$ ) či parciální derivace funkcí více proměnných.

V systému Maple máme několik možností, jak určovat parciální derivace funkcí (výrazů). Jednak máme v paletě **Expression** již předdefinované symboly pro derivaci ( $\frac{d}{dx}f$ ,  $\frac{\partial}{\partial x}f$ ), využít můžeme též příkaz `diff` fungující pro výrazy libovolného počtu proměnných. Můžeme též zapsat výraz (funkci) do dokumentu, kliknout pravým tlačítkem myši a z kontextové nabídky zvolit **Differentiate** a proměnnou, podle níž chceme derivovat. Oproti derivaci funkce jedné proměnné není možné nyní používat apostrof jako symbol pro derivaci. Respektive to možné je, ale apostrof má význam parciální derivace podle proměnné  $x$ , takže můžeme tímto způsobem derivovat pouze podle této proměnné.

Stále musíme mít na paměti rozdíl mezi funkcí a výrazem (jak to „vnímá“ Maple, který většinou pracuje s výrazem). Pro derivování funkcí z pohledu systému Maple (tj. funkčních operátorů) máme příkaz `D` (s nímž jsme se setkali již v případě funkcí jedné proměnné, viz sekce 2.5). Na obrázku 3.14 vidíme, že výsledek použití příkazu `D` může být poněkud matoucí (viz výsledek příkazu `D[2](g)`, kde by bylo vhodnější obdržet  $(x, y) \rightarrow 1$ ). Příkaz `D` totiž vždy vrací opět funkci (funkční operátor).

**Poznámka 3.7:** Podobně jako v případě derivace funkce jedné proměnné má svůj geometrický význam i parciální derivace funkce dvou proměnných. Také parciální derivace funkce  $f(x, y)$  v bodě  $[x_0, y_0]$  je směrnici tečny k funkci  $f(x, y)$ , a to v bodě  $[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$ . Takových tečen je však nekonečně mnoho. Konkrétně parciální derivace funkce  $f(x, y)$  podle proměnné  $x$  je směrnici tečny ke křivce vzniklé jako průsečík grafu funkce  $f(x, y)$  a roviny  $y = y_0$ . Podobně parciální derivace funkce  $f(x, y)$  podle proměnné  $y$  je směrnici tečny ke křivce vzniklé jako průsečík grafu funkce  $f(x, y)$  a roviny  $x = x_0$ .

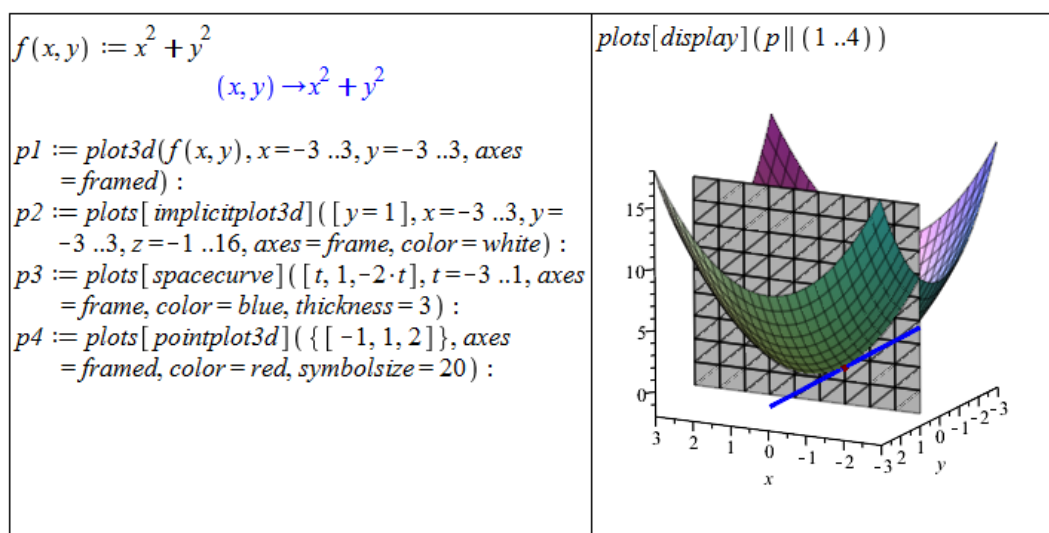
Tvrzení poznámky 3.7 nyní zobrazíme graficky. Na pomoc si vezmeme funkci  $f(x, y) = x^2 + y^2$  a budeme počítat její parciální derivaci v bodě  $[-1, 1]$  podle proměnné  $x$ . Podle zmíněné poznámky je tato parciální derivace směrnici tečny v bodě  $[-1, 1, 2]$  ke křivce vzniklé jako průsečík funkce  $f(x, y)$  a roviny  $y = 1$ . Pro vykreslení funkce  $f(x, y)$  použijeme již známý příkaz `plot3d`. Pro vykreslení roviny  $y = 1$  použijeme příkaz `implicitplot3d` k vykreslování objektů v třírozměrném prostoru zadaných implicitně. Následně vykreslíme tečnu k funkci  $f(x, y)$  (jejíž směrnici určuje parciální derivace) příkazem `spacecurve` pro vykreslování prostorových křivek zadaných parametricky.

Rovnice tečny je dána rovnicí  $z = k \cdot x + q$ , přičemž hodnota  $k$  je právě parciální derivace funkce  $f(x, y)$  v bodě  $[-1, 1]$  a je tedy rovna  $-2$ . Bod  $q$  již dopočítáme dosazením bodu

$g := (x, y) \rightarrow x^2 + y$	$D[1](g)$
$(x, y) \rightarrow x^2 + y$	$(x, y) \rightarrow 2x$
$\frac{\partial}{\partial x} g(x, y)$	$D[2](g)$
$2x$	$1$
$\frac{d}{dx} g(x, y)$	$g \xrightarrow{\text{differentiate w.r.t. 1}} (x, y) \rightarrow 2x$
$2x$	$g \xrightarrow{\text{differentiate w.r.t. 2}} 1$
$\text{diff}(g(x, y), x)$	$D[1](g)(3)$
$2x$	$6$
$g(x, y) \xrightarrow{\text{differentiate w.r.t. x}} 2x$	$D[2](g)(3)$
$\frac{\partial}{\partial y} g(x, y)$	$1$
$1$	
$\frac{d}{dy} g(x, y)$	
$1$	
$\text{diff}(g(x, y), y)$	
$1$	
$g(x, y) \xrightarrow{\text{differentiate w.r.t. y}} 1$	

Obrázek 3.14: Výpočet parciální derivace v Maple.

dotyku  $([-1, 1, 2])$  tečny k funkci  $f(x, y)$ . Nakonec do grafu ještě pro názornost zaneseme bod dotyku pomocí příkazu `pointplot3d`. Vše vykreslíme najednou příkazem `display` a získáme obrázek 3.15<sup>6</sup>.



Obrázek 3.15: Geometrický význam parciální derivace.

<sup>6</sup>Všechny použité příkazy kromě příkazu `plot3d` náleží balíku `plots`, který je potřeba načíst před jejich použitím (případně používat spolu s voláním příslušného balíku).

**Definice 3.4:** Nechť bod  $[x_0, y_0]$  patří do definičního oboru parciální derivace funkce  $f(x, y)$ . Existuje-li parciální derivace funkce  $f'_x(x_0, y_0)$  podle proměnné  $x$  v bodě  $[x_0, y_0]$ , nazýváme tuto derivaci parciální derivací 2. řádu funkce  $f(x, y)$  v bodě  $[x_0, y_0]$  podle proměnné  $x$  a značíme

$$f''_{xx}(x_0, y_0) \left( \text{resp. } \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \right).$$

Existuje-li parciální derivace funkce  $f'_x(x_0, y_0)$  podle proměnné  $y$  v bodě  $[x_0, y_0]$ , nazýváme tuto derivaci smíšenou parciální derivací 2. řádu funkce  $f(x, y)$  v bodě  $[x_0, y_0]$  a značíme

$$f''_{xy}(x_0, y_0) \left( \text{resp. } \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \right).$$

**Poznámka 3.8:** Analogicky definujeme „zbylé“ parciální derivace 2. řádu a parciální derivace vyšších řádů.

V systému Maple postupujeme při zadávání parciálních derivací vyšších řádů podobně, jak tomu bylo u derivací vyšších řádů v případě funkce jedné proměnné.

$f := (x, y, z) \rightarrow \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ $(x, y, z) \rightarrow \ln(x^2 + y^2 + z^2)$	$D[1](f) \# = \text{diff}(f(x,y,z),x)$ $(x, y, z) \rightarrow \frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2}$
$\text{diff}(f(x, y, z), x)$ $\frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2}$	$D[1,1](f) \# = \text{diff}(f(x,y,z),x,x)$ $(x, y, z) \rightarrow \frac{2}{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{4x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$
$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y, z)$ $\frac{2}{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{4x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$	$D[1,2](f) \# = \text{diff}(f(x,y,z),x,y)$ $(x, y, z) \rightarrow -\frac{4yx}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$
$\text{diff}(f(x, y, z), x, x)$ $\frac{2}{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{4x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$	$D[2,1](f) \# = \text{diff}(f(x,y,z),y,x)$ $(x, y, z) \rightarrow -\frac{4yx}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$
$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y, z)$ $-\frac{4xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$	$D[2,2](f) \# = \text{diff}(f(x,y,z),y,y)$ $(x, y, z) \rightarrow \frac{2}{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{4y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$
$\text{diff}(f(x, y, z), x, y)$ $-\frac{4xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$	

Obrázek 3.16: Parciální derivace vyšších řádů funkcí více proměnných.

**Poznámka 3.9:** (Schwarzova věta) Nechť má funkce  $f(x, y)$  spojitě smíšené parciální derivace  $f''_{xy}$  a  $f''_{yx}$  v bodě  $[x_0, y_0]$ . Pak platí:

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$



**Příklad 3.15:** Určete všechny parciální derivace 1. a 2. řádu u následujících funkcí:

- (a)  $f(x, y) = x^2 \cdot y + \ln\left(\frac{x}{y}\right)$ , (c)  $f(x, y) = x^y$ ,  
 (b)  $f(x, y) = (x^2 \cdot y + y)^4$ , (d)  $f(x, y) = x \cdot y \cdot \ln(x + y)$ .

**Příklad 3.16:** Určete všechny parciální derivace 1. řádu funkce  $f(x, y)$  v bodě  $A$ :

- (a)  $f(x, y) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$ ,  $A = [1, 2]$ ,  
 (b)  $f(x, y) = (1 + \log_y(x))^3$ ,  $A = [e, e]$ ,  
 (c)  $f(x, y) = \ln\left(x + \frac{y}{2x}\right)$ ,  $A = [1, 2]$ .

### 3.3.1 Směrové derivace

**Definice 3.5:** Nechť  $f$  je funkce  $n$  proměnných,  $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$  vnitřní bod  $D(f)$  a  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  vektor. Nechť  $\varphi(t) = f(X + t \cdot \mathbf{u})$ . Má-li funkce  $\varphi(t)$  derivaci v bodě  $t = 0$ , nazýváme ji derivací funkce  $f$  v bodě  $X$  ve směru vektoru  $\mathbf{u}$  nebo také *směrovou derivací* funkce  $f$  a označujeme ji  $f'_{\mathbf{u}}(X)$ . Tedy:

$$f'_{\mathbf{u}}(X) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(X + t \cdot \mathbf{u}) - f(X)}{t}.$$

Směrové derivace můžeme počítat buď rovnou z definice nebo využijeme příkaz balíku Student [MultivariateCalculus] s názvem DirectionalDerivative.

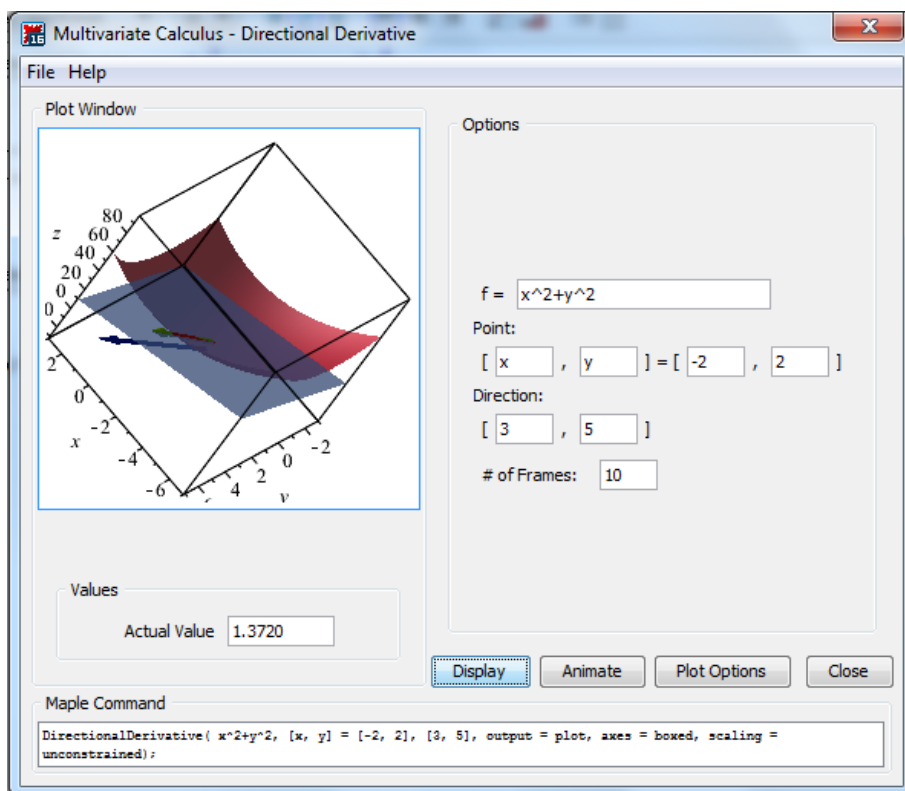
**Příklad 3.17:** Vypočítejte směrovou derivaci funkce  $f(x, y) = x^2 + y^2$  v bodě  $[-2, 2]$  ve směru vektoru  $\mathbf{u} = (3, 5)$ .

*Řešení:* Využijeme příkazu DirectionalDerivative, který má 3 povinné parametry – výraz, bod, v němž hledáme směrovou derivaci, a příslušný směr (obrázek 3.17).

```
with(Student[MultivariateCalculus]) :
DirectionalDerivative(x^2 + y^2, [x, y] = [-2, 2], [3, 5])
4
17  $\sqrt{34}$ 
```

Obrázek 3.17: Řešení příkladu 3.17.

System Maple nabízí dále maplet s názvem **Directional Derivative**, který můžeme spustit z hlavní nabídky: **Tools > Tutors > Calculus - Multi-Variable > Directional Derivatives....** Maplet pro zadanou funkci, bod a směr vypočítá směrovou derivaci a zobrazí ji graficky spolu s funkcí a tečnou rovinou v daném bodě. V mapletu je dále možné zobrazit animaci sestávající ze směrových derivací v různých směrech ve stejném bodě (ukázkou poskytuje obrázek 3.18).



Obrázek 3.18: Maplet zobrazující směrové derivace.

**Příklad 3.18:** Určete směrovou derivaci funkce

- (a)  $f(x, y) = \arctan(x \cdot y)$  v bodě  $[1, 1]$  ve směru vektoru  $\mathbf{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ,
- (b)  $f(x, y) = \ln(e^x + e^y)$  v bodě  $[0, 0]$  ve směru vektoru  $\mathbf{u} = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ .

### 3.3.2 Diferenciál

**Definice 3.6:** Řekneme, že funkce  $f(x, y)$  je *diferencovatelná* v bodě  $[x_0, y_0]$ , jestliže existují reálná čísla  $A, B$  tak, že

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - (A \cdot h + B \cdot k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

Lineární funkce  $A \cdot h + B \cdot k$  proměnných  $h, k$  se nazývá (*totální*) *diferenciál funkce* v bodě  $[x_0, y_0]$  a značí se  $df(x_0, y_0)(h, k)$ , resp.  $df(x_0, y_0)$ .

**Poznámka 3.10:** Je-li funkce  $f(x, y)$  diferencovatelná v bodě  $[x_0, y_0]$ , pak má v tomto bodě parciální derivace a platí  $A = f'_x(x_0, y_0)$ ,  $B = f'_y(x_0, y_0)$ , tj.

$$df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0) \cdot h + f'_y(x_0, y_0) \cdot k.$$

**Poznámka 3.11:** Tečná rovina k funkci  $f(x, y)$  v bodě  $T = [x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$  má tvar

$$z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0).$$

Podobně jako v případě funkce jedné proměnné využíváme diferenciál k výpočtům odhadů funkčních hodnot v okolí bodu, v němž funkční hodnotu známe. I tady pochopitelně platí, že samotný systém Maple určí funkční hodnotu přesněji. Přesto jej můžeme využít k dílčím výpočtům a kontrole přesnosti získaných aproximací.

**Příklad 3.19:** Určete přibližně:  $\sqrt{1.02^3 + 1.97^3}$ .

*Řešení:* Budeme uvažovat funkci  $f(x, y) = \sqrt{x^3 + y^3}$ . Aproximaci získáme podle vztahu:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) \approx f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0) = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0).$$

V našem případě:  $[x_0, y_0] = [1, 2]$ ,  $[x, y] = [1.02, 1.97]$ . Systém Maple využijeme k výpočtu parciálních derivací v příslušných bodech a celkovému součtu vypočtených hodnot (obrázek 3.19).

$f := (x, y) \rightarrow \sqrt{x^3 + y^3}$   
 $(x, y) \rightarrow \sqrt{x^3 + y^3}$

$der\_x := \frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$   
 $\frac{3}{2} \frac{x^2}{\sqrt{x^3 + y^3}}$

$der\_y := \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$   
 $\frac{3}{2} \frac{y^2}{\sqrt{x^3 + y^3}}$

**S přesností na 10 míst:**  $\sqrt{1.02^3 + 1.97^3} = 2.950691614$

**Přibližně pomocí diferenciálu:**  $\sqrt{1.02^3 + 1.97^3} \approx$   
 $evalf(\sqrt{1^3 + 2^3} + eval(der\_x, \{x=1, y=2\}) \cdot (1.02 - 1)$   
 $+ eval(der\_y, \{x=1, y=2\}) \cdot (1.97 - 2))$   
 $2.950000000$

Obrázek 3.19: Řešení příkladu 3.19.

**Příklad 3.20:** Určete přibližně:

(a)  $3.05^{0.99}$ ,

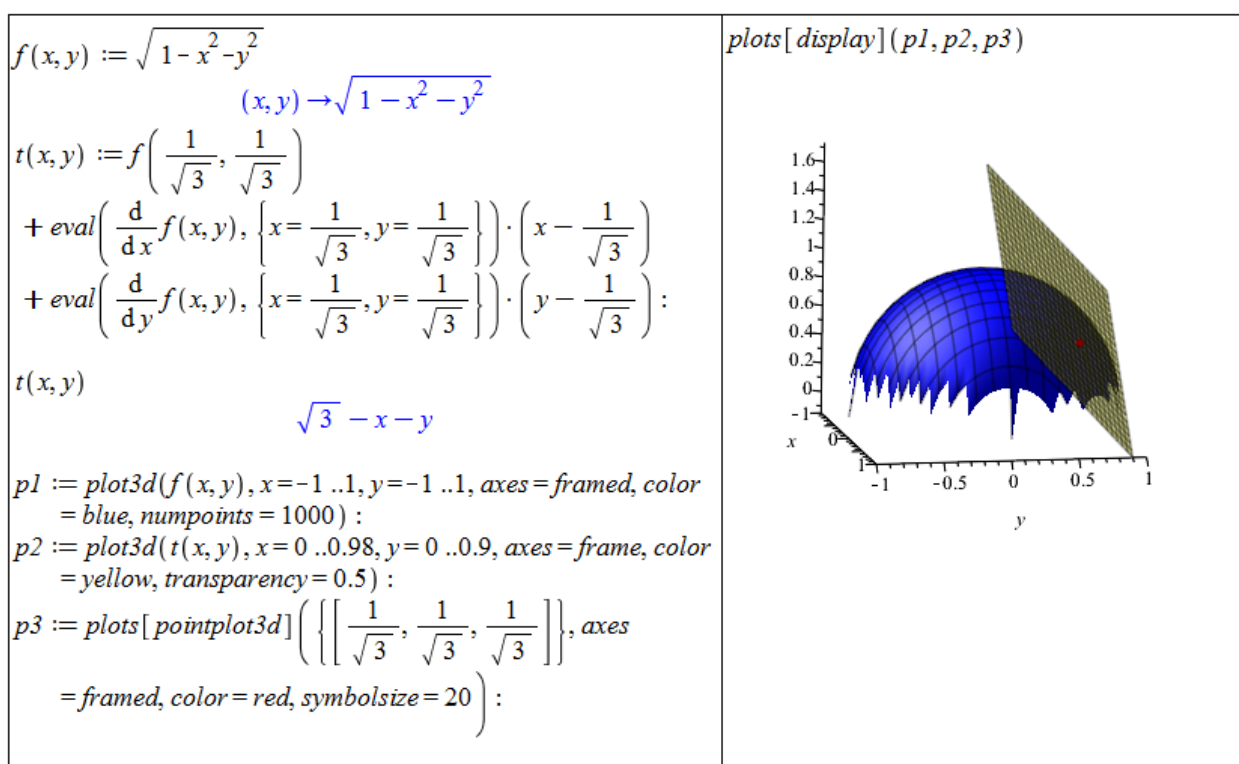
(c)  $\arctan\left(\frac{1.02}{0.95}\right)$ ,

(b)  $\sqrt{3.05} \cdot \cos(62^\circ)$ ,

(d)  $\log_4(4.01 \cdot 0.97^2)$ .

**Příklad 3.21:** Určete rovnici tečné roviny k funkci  $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$  v bodě  $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$  a rovinu i s funkcí vykreslete.

*Řešení:* Vyjdeme z poznámky 3.11. V Maple vykreslíme funkci  $f(x, y)$  i tečnou rovinu pomocí příkazu `plot3d` (v němž nastavíme parametr průhlednosti – `transparency` – pro větší přehlednost), navíc doplníme i bod dotyku (červeně) tečné roviny příkazem `pointplot3d` z balíku `plots` (obrázek 3.20).



Obrázek 3.20: Řešení příkladu 3.21.

**Příklad 3.22:** Určete rovnici tečné roviny a rovinu i s funkcí vykreslete pro:

(a) funkci  $f(x, y) = x^2 + y^2$  v bodě  $[2, -1, 5]$ ,

(b) funkci  $f(x, y) = x^4 + 2 \cdot x^2 \cdot y - x \cdot y + x$  v bodě  $[1, 0, 2]$ ,

(c) funkci  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$  v bodě  $[2, 1, \ln(5)]$ ,

(d) funkci  $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$  v bodě  $[0, 0, 1]$ .

### 3.3.3 Taylorův polynom

**Definice 3.7:** Necht'  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  a  $f(x, y)$  funkce mající v bodě  $[x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$  a nějakém jeho okolí spojitě parciální derivace až do řádu  $n$ . Polynom

$$\begin{aligned} T_n^f(x, y) &= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) \\ &+ \frac{1}{2!} \cdot \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) \cdot (y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)^2 \right) \\ &+ \dots + \frac{1}{n!} \cdot \sum_{j=0}^n \binom{n}{r} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-j} \partial y^j}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)^{n-j} \cdot (y - y_0)^j \end{aligned}$$

se nazývá *Taylorův polynom* stupně  $n$  funkce  $f(x, y)$  v bodě  $[x_0, y_0]$ . Funkci

$$R_n^f(x, y) = T_n^f(x, y) - f(x, y)$$

říkáme *Taylorův zbytek* a celý výraz

$$T_n^f(x, y) + R_n^f(x, y)$$

nazýváme *Taylorovým vzorcem*.

Podobně jako v jednorozměrném případě existuje i nyní „předpis“ pro  $R_n^f(x, y)$ , který nám řekne, „jak dobrou“ aproximací dané funkce  $f(x, y)$  je polynom  $T_n^f(x, y)$ . My jej potřebovat nebudeme, a proto čtenáře pouze odkážeme na další literaturu (např. [2]).

V systému Maple slouží k získání Taylorova polynomu funkce více proměnných příkaz `mtaylor`. Příkaz má 2 povinné parametry, a to výraz (funkční předpis) a seznam proměnných s případnou specifikací bodu, v němž má být polynom rozvinut. Pokud bod nespecifikujeme, bude použit nulový bod. Můžeme si dále všimnout, že narozdíl od příkazu `taylor` v jednorozměrném případě nyní získáme „pouze“ Taylorův polynom (bez chybového členu). Stejně jako dříve využíváme k nastavení řádu chybového členu systémovou proměnnou `Order`, případně třetí (nepovinný) parametr příkazu `mtaylor` (viz obrázek 3.21).

**Příklad 3.23:** Určete Taylorův polynom pro

- (a) funkci  $f(x, y) = \frac{x}{y}$  v bodě  $[1, 1]$ ,
- (b) funkci  $f(x, y) = \frac{\cos(x)}{\sin(y)}$  v bodě  $[0, \frac{\pi}{2}]$ ,
- (c) funkci  $f(x, y) = \sin(x + y)$  v bodě  $[0, 0]$  tak, aby byl chybový člen řádu 9,
- (d) funkci  $f(x, y, z) = (\cos(x + y)) \cdot z$  v bodě  $[0, 0, 0]$ .

**Příklad 3.24:** Pomocí Taylorova polynomu určete přibližně:

- (a)  $\sqrt{1.02^3 + 1.97^3}$ ,
- (b)  $\sqrt{3.05} \cdot \cos(62^\circ)$ ,
- (c)  $\arctan(\frac{1.02}{0.95})$ ,
- (d)  $\log_4(4.01 \cdot 0.97^2)$ .

$$\begin{aligned}
& \text{mtaylor}\left(e^{x^2+y^2}, [x=1, y=1]\right) \\
& e^2 + 2e^2(x-1) + 2e^2(y-1) + 3e^2(x-1)^2 + 4e^2(y-1)(x-1) + 3e^2(y-1)^2 + \frac{10}{3}e^2(x-1)^3 + 6e^2(y-1)(x-1)^2 \\
& + 6e^2(y-1)^2(x-1) + \frac{10}{3}e^2(y-1)^3 + \frac{19}{6}e^2(x-1)^4 + \frac{20}{3}e^2(y-1)(x-1)^3 + 9e^2(y-1)^2(x-1)^2 \\
& + \frac{20}{3}e^2(y-1)^3(x-1) + \frac{19}{6}e^2(y-1)^4 + \frac{13}{5}e^2(x-1)^5 + \frac{19}{3}e^2(y-1)(x-1)^4 \\
& + 10e^2(y-1)^2(x-1)^3 + 10e^2(y-1)^3(x-1)^2 + \frac{19}{3}e^2(y-1)^4(x-1) + \frac{13}{5}e^2(y-1)^5 \\
& \text{mtaylor}\left(e^{x^2+y^2}, [x, y]\right) \\
& 1 + x^2 + y^2 + \frac{1}{2}x^4 + y^2x^2 + \frac{1}{2}y^4 \\
& \text{mtaylor}\left(e^{x^2+y^2}, [x, y], 10\right) \\
& 1 + x^2 + y^2 + \frac{1}{2}x^4 + y^2x^2 + \frac{1}{2}y^4 + \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{2}y^2x^4 + \frac{1}{2}y^4x^2 + \frac{1}{6}y^6 + \frac{1}{24}x^8 + \frac{1}{6}y^2x^6 + \frac{1}{4}y^4x^4 + \frac{1}{6}y^6x^2 + \frac{1}{24}y^8
\end{aligned}$$

Obrázek 3.21: Výpis Taylorova polynomu funkce dvou proměnných.

## 3.4 Extrémy funkce více proměnných

### 3.4.1 Lokální extrémy

**Definice 3.8:** Necht'  $\rho : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  je funkce, pro niž pro libovolná  $X, Y, Z \in \mathbb{R}^n$  platí:

- (a)  $\rho(X, Y) \geq 0$ ,
- (b)  $\rho(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X = Y$ ,
- (c)  $\rho(X, Y) = \rho(Y, X)$ ,
- (d)  $\rho(X, Z) \leq \rho(X, Y) + \rho(Y, Z)$ .

Takovou funkci nazýváme *metrikou* (resp. *vzdáleností*) v  $\mathbb{R}^n$ . Pomocí metriky definujeme  $\varepsilon$ -okolí bodu  $X \in \mathbb{R}^n$  jako množinu  $O_\varepsilon(X) = \{Y \in \mathbb{R}^n \mid \rho(X, Y) < \varepsilon\}$ . V případě, že hodnota  $\varepsilon$  není podstatná, mluvíme pouze o *okolí* bodu  $X$ .

**Definice 3.9:** Řekneme, že funkce  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  nabývá v bodě  $X^* \in \mathbb{R}^n$  *lokálního maxima*, jestliže existuje okolí bodu  $X^*$  takové, že pro všechna  $X$  z tohoto okolí platí:  $f(X) \leq f(X^*)$ . Je-li uvedená nerovnost ostrá, mluvíme o *ostrém lokálním maximu*.

**Poznámka 3.12:** Zcela analogicky definujeme (*ostré*) *lokální minimum*. Minima a maxima souhrnně nazýváme *extrémy*.

**Příklad 3.25:** Napište definici lokálního minima.

**Definice 3.10:** Mějme funkci  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Bod  $X^* \in \mathbb{R}^n$  nazveme *stacionárním bodem* funkce  $f$ , jestliže v bodě  $X^*$  existují všechny parciální derivace funkce  $f$  a platí:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(X^*) = 0 \quad \text{pro } i = 1, \dots, n.$$

**Poznámka 3.13:** Funkce  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  může mít lokální extrém pouze ve svém stacionárním bodě nebo v bodě, kde alespoň jedna z parciálních derivací neexistuje [2].

**Poznámka 3.14:** Nyní se omezíme pouze na funkce dvou proměnných. Nechť má funkce  $f(x, y)$  v okolí bodu  $[x_0, y_0]$  spojitě parciální derivace druhého řádu. Označme

$$H_1 = f''_{xx}(x_0, y_0), \quad H_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix}.$$

Pak:

- Když  $H_2 > 0$ , má funkce  $f(x, y)$  v bodě  $[x_0, y_0]$  ostrý lokální extrém.
  - (a) Pokud navíc  $H_1 > 0$ , pak je v bodě  $[x_0, y_0]$  lokální minimum.
  - (b) Pokud navíc  $H_1 < 0$ , pak je v bodě  $[x_0, y_0]$  lokální maximum.
- Když  $H_2 < 0$ , nemá funkce  $f(x, y)$  v bodě  $[x_0, y_0]$  lokální extrém.
- Když  $H_2 = 0$ , neumíme o existenci extrému tímto způsobem rozhodnout.

Matici druhých derivací funkce  $f(x, y)$ , jejíž determinant jsme označili  $H_2$ , nazýváme *Hessovou maticí*, její determinant,  $H_2$ , označujeme jako *hessián*.

V systému Maple je opět několik cest, po nichž můžeme dospět k lokálním extrémům zadané funkce. K dispozici máme několik příkazů, které nám mohou pomoci při dílčím výpočtu, případně i nalezení některého z extrémů, žádný příkaz však obecně nedokáže najít všechny lokální extrémy. Nejuniverzálnější cesta je projít výše popsany postup, který známe z přednášky. Systém Maple přitom můžeme využít k vykreslení zadané funkce, výpočtu parciálních derivací (případně rovnou k výpočtu stacionárních bodů pomocí příkazu `extrema`), výpočtu Hessovy matice či jejího determinantu. K výpočtu Hessovy matice slouží příkaz `Hessian` z balíku `VectorCalculus`. Pro výpočet determinantu je určen příkaz `Determinant` z balíku `LinearAlgebra`.

**Příklad 3.26:** Najděte lokální extrémy funkce  $f(x, y) = (x - 2)^2 + (y - 3)^2 + 5$ .

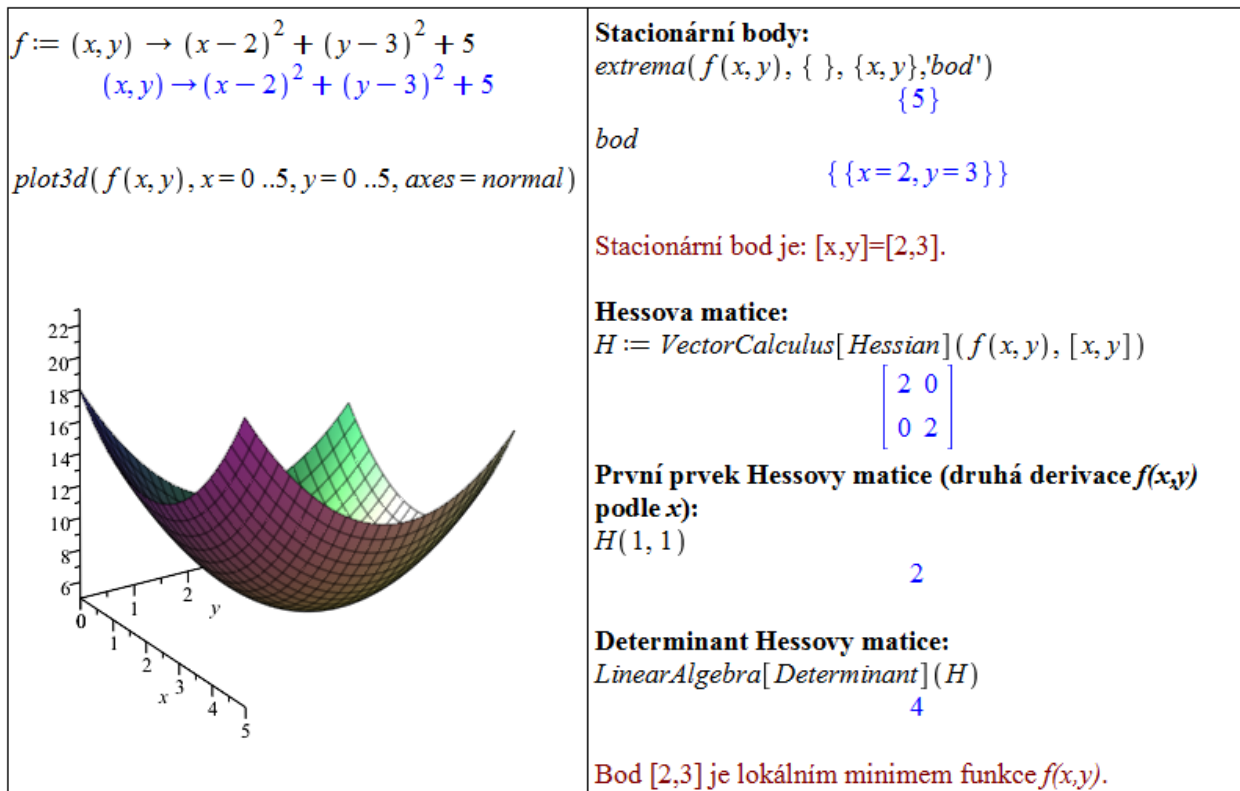
*Řešení:* Využijeme příkaz `extrema` k nalezení stacionárních bodů. Následně vypočítáme Hessovu matici příkazem `Hessian` a její determinant příkazem `Determinant`. Na základě poznámky 3.14 pak rozhodneme o lokálních extrémech (obrázek 3.22).

**Příklad 3.27:** Najděte lokální extrémy funkce  $f(x, y) = (y - 3)^2 - (x - 2)^2 + 5$ .

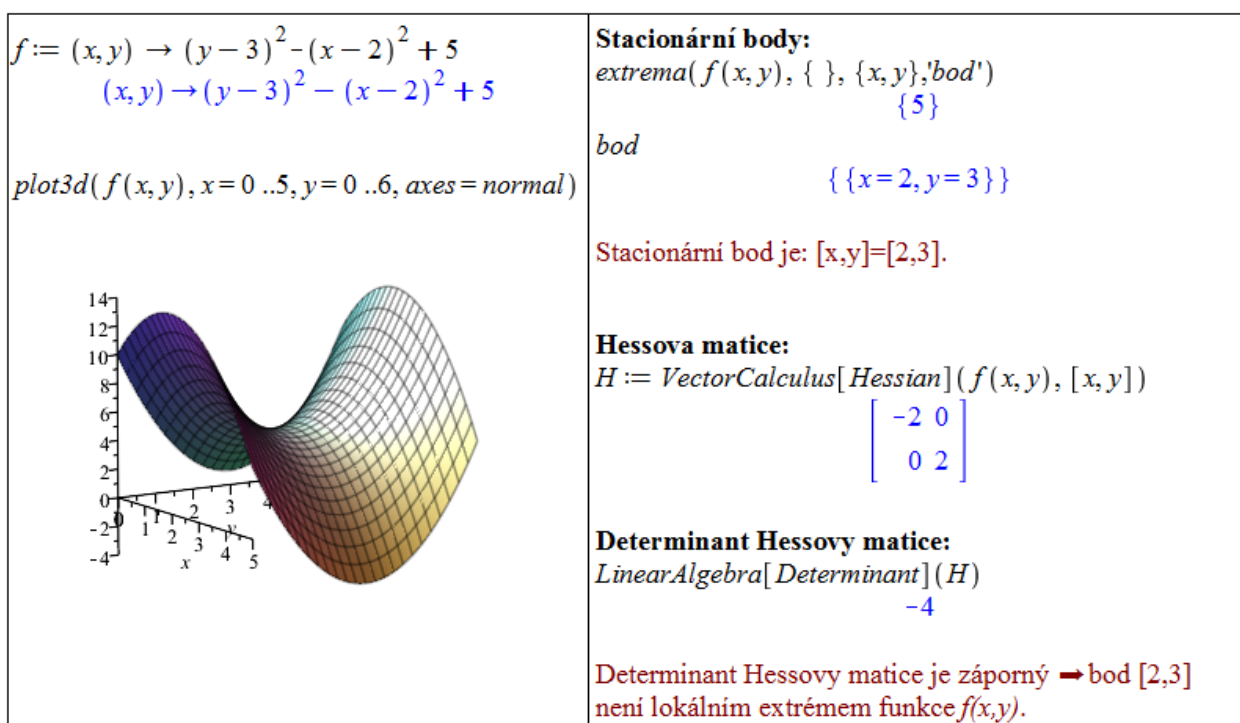
*Řešení:* Postupujeme zcela analogicky k předchozímu příkladu. Využijeme opět příkaz `extrema` k nalezení stacionárních bodů, příkaz `Hessian` k výpočtu Hessovy matice a příkaz `Determinant` k určení jejího determinantu. Na základě poznámky 3.14 pak rozhodneme o lokálních extrémech (obrázek 3.23).

**Příklad 3.28:** Najděte lokální extrémy funkce  $f(x, y) = x \cdot y \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ .

*Řešení:* Postupujeme opět stejně. Nyní získáváme víc stacionárních bodů, pro něž musíme vyhodnotit Hessovu matici a její determinant. Při tom si „pomůžeme“ příkazem `eval` a rozdíl od předchozích příkladů načteme příkazem `with` potřebné balíky pro příkazy `Hessian` a `Determinant` (obrázek 3.24).

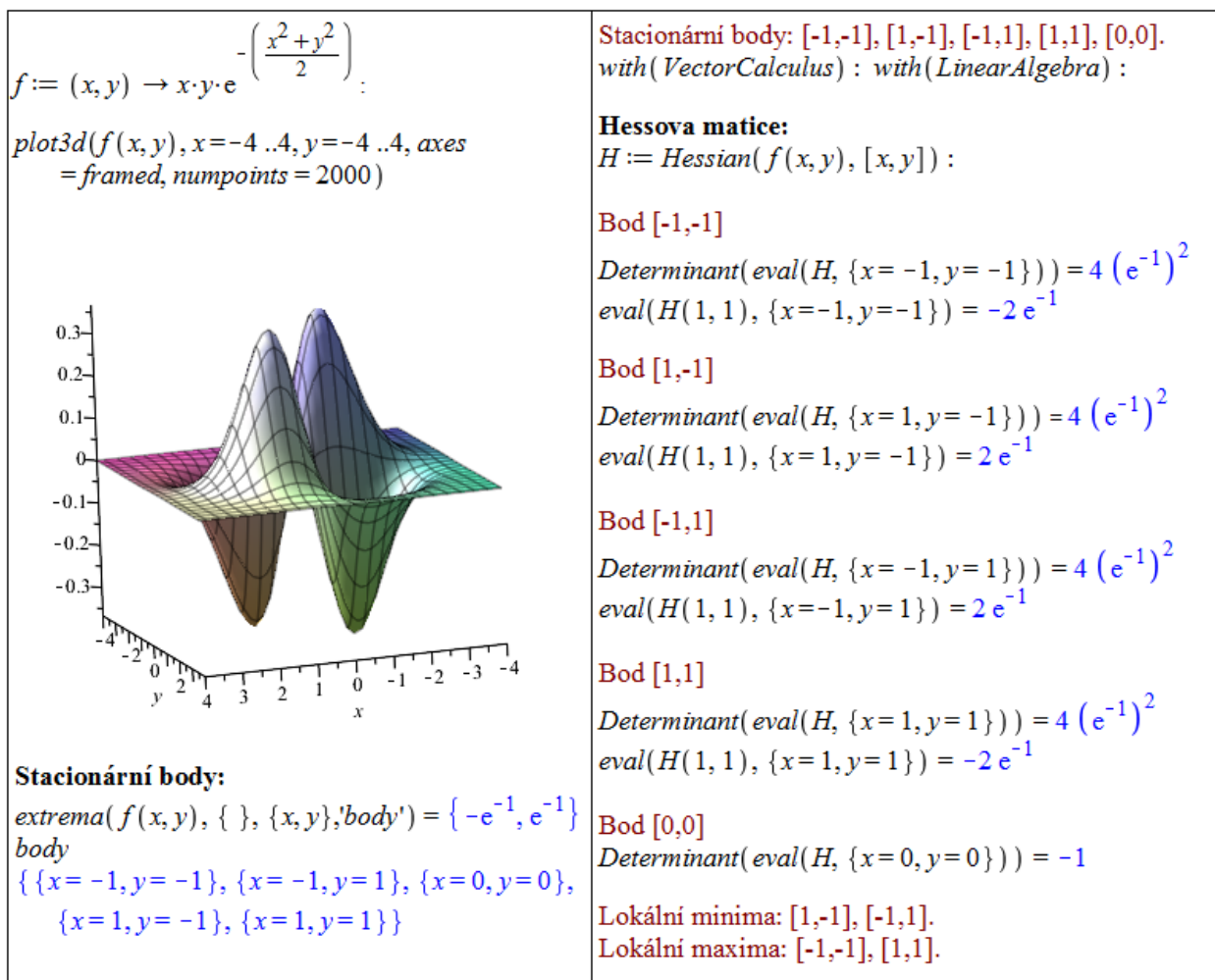


Obrázek 3.22: Řešení příkladu 3.26.



Obrázek 3.23: Řešení příkladu 3.27.



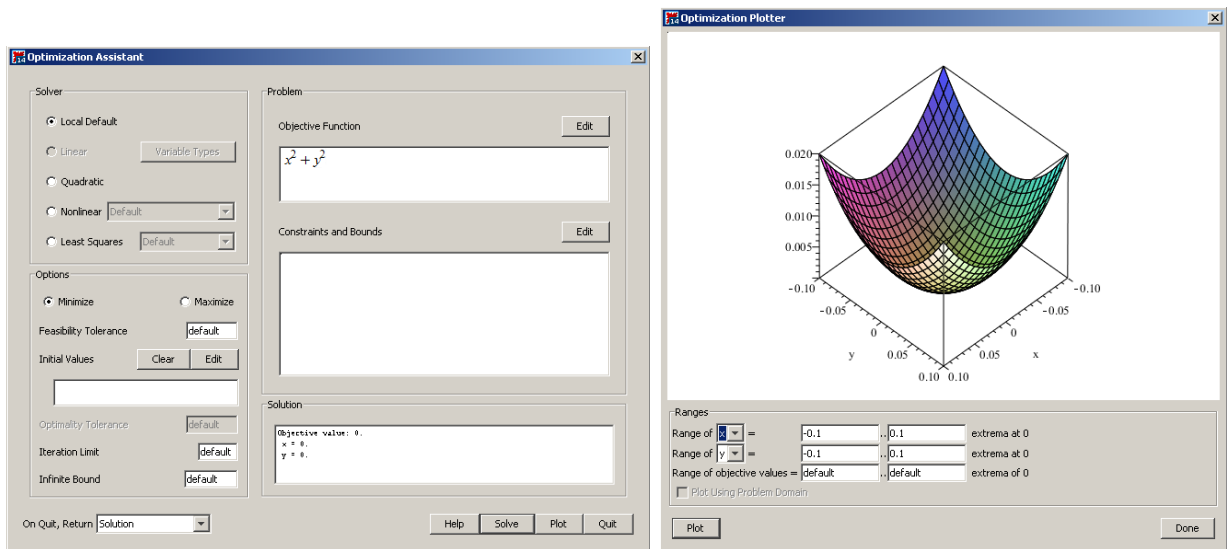


Obrázek 3.24: Řešení příkladu 3.28.

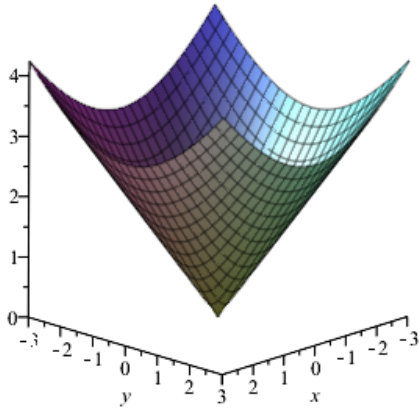
Jak jsme zmínili dříve, v systému Maple jsou i některé příkazy hledající extrémů funkcí. Jedná se především o příkazy `minimize` a `maximize` pro nalezení globálního minima či maxima (symbolicky). Stejně příkazy, ovšem s velkými počátečními písmeny, tj. `Minimize` a `Maximize` z balíku `Optimization`, hledají globální extrémů numericky. Všem zmíněným příkazům je možné nastavit omezující podmínky, a hledat tak absolutní extrémů na dané množině (více v další části kapitoly). Můžeme také využít `mapletu` s názvem `Optimization`, který vyvoláme například z hlavního menu zvolením **Tools > Assistants > Optimization...** Na výběr máme několik metod, kterými je extrém hledán, tlačítkem **Solve** vypíšeme řešení, tlačítkem **Plot** jej zobrazíme graficky. Jeho ukázkou s nalezením globálního minima funkce  $f(x, y) = x^2 + y^2$  poskytuje obrázek 3.25.

**Příklad 3.29:** Najděte lokální extrémů funkce  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

*Řešení:* Postupujeme stále stejně. V tomto případě však nenalezneme žádné stacionární body. Již z grafu funkce je na první pohled vidět, že funkce má lokální minimum v bodě  $[0, 0]$ , v němž neexistuje parciální derivace. Existenci minima můžeme ověřit vyšetřením lokálního chování funkce v okolí tohoto bodu nebo využitím příkazu `minimize`. Příkaz volaný s jedním parametrem vypíše pouze hodnotu minima. Abychom získali i jeho polohu, přidáme druhý nepovinný parametr `location` (obrázek 3.26).



Obrázek 3.25: Optimization maplet.

<p> <math>f := (x, y) \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2}</math>  <math>(x, y) \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2}</math>  <code>plot3d(f(x, y), x = -3 .. 3, y = -3 .. 3, axes = frame)</code> </p> 	<p><b>Stacionární body:</b>  <code>extrema(f(x, y), { }, {x, y}, 'bod')</code>  <i>bod</i>  <i>bod</i></p> <p><b>Stacionární body nejsou.</b></p> <p>V bodě [0,0] však neexistuje parciální derivace:  <math>\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}</math>  <code>eval( (∂/∂x) f(x, y), {x=0, y=0} )</code>  <u>Error, numeric exception: division by zero</u></p> <p><b>Použití příkazu <i>minimize</i>:</b>  <code>minimize(f(x, y), location)</code>  <code>0, { [ {x=0, y=0}, 0 ] }</code></p> <p>V bodě [0,0] je globální (a tedy i lokální) minimum funkce <math>f(x, y)</math>.</p>
--	--

Obrázek 3.26: Řešení příkladu 3.29.

**Příklad 3.30:** Najděte lokální extrémy funkce:

- |   |   |
|---|---|
| (a) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3 \cdot x \cdot y$ ,                               | (d) $f(x, y) = (x^2 + y^2) \cdot e^{-x^2 - y^2}$ ,                            |
| (b) $f(x, y) = x^4 - 3 \cdot x^2 \cdot y + 3 \cdot y - y^3$ ,                 | (e) $f(x, y) = 3 \cdot x^2 - 2 \cdot x \cdot \sqrt{y} + y - 8 \cdot x + 12$ , |
| (c) $f(x, y) = x \cdot y \cdot \ln(x^2 + y^2)$ ,                              | (f) $f(x, y) = y \cdot \sqrt{1 + x} + x \cdot \sqrt{y + 1}$ ,                 |
| (g) $f(x, y) = 3 - \sqrt{x^2 + y^2} + 2 \cdot \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 3)^2}$ . |   |

### 3.4.2 Absolutní extrém

**Definice 3.11:** Mějme funkci  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  a množinu  $M \subset D(f)$ . Řekneme, že bod  $X^* \in M$  je bodem *absolutního maxima* funkce  $f$  na množině  $M$ , jestliže pro všechna  $X$  z množiny  $M$  platí:  $f(X) \leq f(X^*)$ . Je-li uvedená nerovnost ostrá pro všechna  $X \neq X^*$ , mluvíme o *ostrém absolutním maximum*.

**Poznámka 3.15:** Zcela analogicky definujeme (*ostré*) *absolutní minimum*. Místo pojmu *absolutní minimum (maximum, extrém)* používáme někdy termín *globální minimum (maximum, extrém)*.

**Příklad 3.31:** Napište definici absolutního minima.

**Definice 3.12:** Bod  $X \in \mathbb{R}^n$  nazveme *bodem uzávěru* množiny  $M \subseteq \mathbb{R}^n$ , jestliže pro libovolné  $\varepsilon$  platí:  $O_\varepsilon(X) \cap M \neq \emptyset$ . Množina všech bodů uzávěru množiny  $M$  se nazývá *uzávěr* množiny  $M$  a značí se  $\overline{M}$ . Množinu  $M$  nazveme *uzavřenou*, jestliže  $M = \overline{M}$ .

**Poznámka 3.16:** Necht' je množina  $M$  uzavřená a ohraničená a funkce  $f$  na množině  $M$  spojitá. Pak  $f$  nabývá absolutních extrémů na množině  $M$  buď v bodech lokálních extrémů patřících do množiny  $M$  nebo v některém hraničním bodě množiny  $M$ .

Při hledání absolutních extrémů můžeme v systému Maple využívat tytéž příkazy jako při hledání extrémů lokálních, přičemž specifikujeme navíc i množinu, na níž extrémů hledáme. Má to však svá omezení. Příkazu `extrema` můžeme zadat omezující podmínky pouze ve tvaru rovností. Příkazům `minimize` a `maximize` je možné zadat omezení ve tvaru rozsahů (intervalů) jednotlivých proměnných. Více možností nám nabízí příkazy `Minimize` a `Maximize` z balíku `Optimization` hledající extrémů numericky a maplet `Optimization` (viz obrázek 3.25), u nichž můžeme zadávat omezení i ve tvaru neostrých nerovností.

**Příklad 3.32:** Najděte absolutní extrémů funkce  $f(x, y) = x^2 - y^2 + 4$  na množině  $M: x^2 + y^2 \leq 1$ .

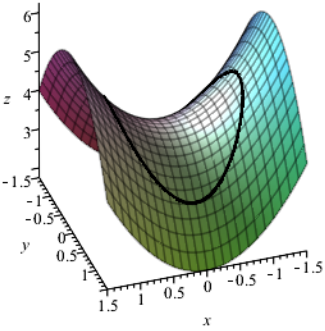
*Řešení:* Nejprve vykreslíme zadanou funkci i s vyznačením hranice množiny  $M$ , které provedeme příkazem `spacecurve`. Následně prověříme lokální extrémů příkazem `extrema` s následným vyhodnocením determinantu Hessianovy matice. Týmž příkazem najdeme extrémů funkce na hranici množiny  $M$  (obrázek 3.27).

**Příklad 3.33:** Najděte absolutní extrémů funkce  $f(x, y) = x^2 + y^2 + 4$  na množině  $M: x^2 + y^2 \leq 1$ .

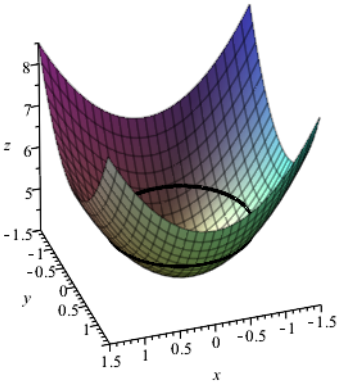
*Řešení:* Postupujeme stejným způsobem jako v předchozím příkladu. Zadaná funkce má jeden lokální extrém, který je současně i jejím globálním minimum na množině  $M$ . Absolutních maxim je nekonečně mnoho a jsou tvořeny hranicí množiny  $M$  (obrázek 3.28).

**Příklad 3.34:** Najděte absolutní extrémů funkce  $f(x, y) = x^2 + 2 \cdot x \cdot y - 4 \cdot x - 8 \cdot y$  na množině  $M$  určené přímkami  $x = 0, x = 1, y = 0, y = 2$ .

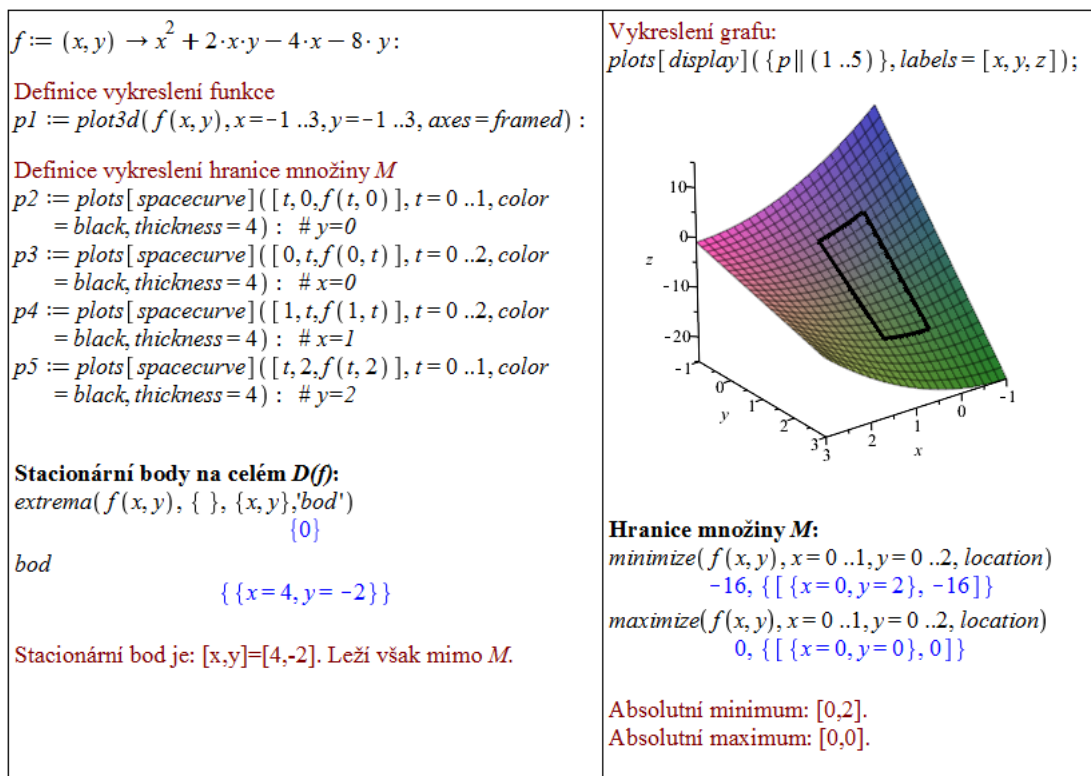
*Řešení:* K zakreslení hranice množiny  $M$  do zadané funkce potřebujeme nyní použít  $4 \times$  příkaz `spacecurve` (pro každou přímku – resp. úsečku, zvlášť). Následně nalezneme stacionární bod funkce příkazem `extrema`. Tento stacionární bod leží mimo množinu  $M$ , zadaná funkce je v každém bodě diferencovatelná, absolutní extrémů tedy leží na hranici množiny  $M$ . Díky tvaru  $M$  (jedná se o obdélník) ji můžeme jednoduše vyjádřit pomocí dvou

<p><math>f := (x, y) \rightarrow x^2 - y^2 + 4 :</math></p> <p><b>Definice vykreslení funkce</b>  <math>p1 := \text{plot3d}(f(x, y), x = -1.5 .. 1.5, y = -1.5 .. 1.5, \text{axes} = \text{framed}, \text{orientation} = [71, 56]) :</math></p> <p><b>Definice vykreslení hranice množiny M</b>  <math>p2 := \text{plots}[\text{spacecurve}]([\cos(t), \sin(t), f(\cos(t), \sin(t))], t = 0 .. 2 \cdot \pi, \text{color} = \text{black}, \text{thickness} = 3) :</math></p> <p><b>Vykreslení předchozího do jednoho grafu</b>  <math>\text{plots}[\text{display}](\{p1, p2\}, \text{labels} = [x, y, z]) :</math></p> 	<p><b>Stacionární body na celém D(f):</b>  <math>\text{extrema}(f(x, y), \{ \}, \{x, y\}, 'bod') = \{4\}</math>  <math>\text{bod} \quad \quad \quad \{ \{x=0, y=0\} \}</math></p> <p>Stacionární bod je: <math>[x, y] = [0, 0]</math>.</p> <p><b>Hessova matice:</b>  <math>H := \text{VectorCalculus}[\text{Hessian}](f(x, y), [x, y])</math>  <math display="block">\begin{bmatrix} 2 &amp; 0 \\ 0 &amp; -2 \end{bmatrix}</math></p> <p><b>Determinant Hessovy matice:</b>  <math>\text{LinearAlgebra}[\text{Determinant}](H) = -4</math></p> <p>Bod <math>[0, 0]</math> není lokálním extrémem funkce <math>f(x, y)</math>.</p> <p><b>Stacionární body na hranici množiny M:</b>  <math>\text{extrema}(f(x, y), \{x^2 + y^2 = 1\}, \{x, y\}, 'body') = \{3, 5\}</math>  <math>\text{body} \quad \quad \quad \{ \{x = -1, y = 0\}, \{x = 0, y = -1\}, \{x = 0, y = 1\}, \{x = 1, y = 0\} \}</math></p> <p><math>f(-1, 0) = 5 \quad f(0, -1) = 3 \quad f(0, 1) = 3 \quad f(1, 0) = 5</math></p> <p>Absolutní minima: <math>[0, -1], [0, 1]</math>.  Absolutní maxima: <math>[-1, 0], [1, 0]</math>.</p>
---	--

Obrázek 3.27: Řešení příkladu 3.32.

<p><math>f := (x, y) \rightarrow x^2 + y^2 + 4 :</math></p> <p><b>Definice vykreslení funkce</b>  <math>p1 := \text{plot3d}(f(x, y), x = -1.5 .. 1.5, y = -1.5 .. 1.5, \text{axes} = \text{framed}, \text{orientation} = [71, 56]) :</math></p> <p><b>Definice vykreslení hranice množiny M</b>  <math>p2 := \text{plots}[\text{spacecurve}]([\cos(t), \sin(t), f(\cos(t), \sin(t))], t = 0 .. 2 \cdot \pi, \text{color} = \text{black}, \text{thickness} = 3) :</math></p> <p><b>Vykreslení předchozího do jednoho grafu</b>  <math>\text{plots}[\text{display}](\{p1, p2\}, \text{labels} = [x, y, z]) :</math></p> 	<p><b>Stacionární body na celém D(f):</b>  <math>\text{extrema}(f(x, y), \{ \}, \{x, y\}, 'bod') = \{4\}</math>  <math>\text{bod} \quad \quad \quad \{ \{x=0, y=0\} \}</math></p> <p>Stacionární bod je: <math>[x, y] = [0, 0]</math>.</p> <p><b>Hessova matice:</b>  <math>H := \text{VectorCalculus}[\text{Hessian}](f(x, y), [x, y])</math>  <math display="block">\begin{bmatrix} 2 &amp; 0 \\ 0 &amp; 2 \end{bmatrix}</math></p> <p><b>Determinant Hessovy matice:</b>  <math>\text{LinearAlgebra}[\text{Determinant}](H) = 4</math></p> <p><b>První prvek Hessovy matice (druhá derivace f(x,y) podle x):</b>  <math>H(1, 1) = 2</math></p> <p>Bod <math>[0, 0]</math> je lokálním minimem funkce <math>f(x, y)</math>.</p> <p><b>Stacionární body na hranici množiny M:</b>  <math>\text{extrema}(f(x, y), \{x^2 + y^2 = 1\}, \{x, y\}, 'body') = \{5\}</math>  <math>\text{body} \quad \quad \quad \{ \{x = -1, y = 0\}, \{x = 1, y = 0\}, \{x = \sqrt{1 - y^2}, y = y\}, \{x = -\sqrt{1 - y^2}, y = y\} \}</math></p> <p>Absolutní minimum: <math>[0, 0]</math>.  Absolutní maxima: body na kružnici <math>x^2 + y^2 = 1</math>.</p>
---	---

Obrázek 3.28: Řešení příkladu 3.33.



Obrázek 3.29: Řešení příkladu 3.34.

intervalů (rozsahů pro proměnné  $x$  a  $y$ ). Přesně toto omezení je možné zadávat příkazům `minimize` a `maximize`, takže je využijeme<sup>7</sup> (obrázek 3.29).

**Příklad 3.35:** Určete absolutní extrémy funkce  $f(x, y)$  na množině  $M$ :

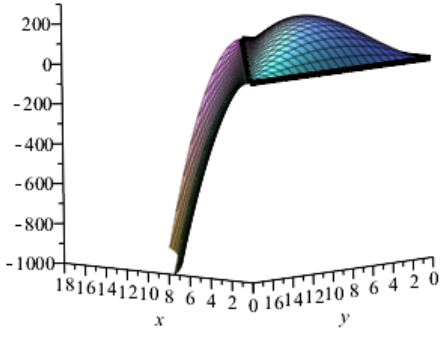
- (a)  $f(x, y) = x^2 + y^2, M: x^2 + y^2 \leq 1,$
- (b)  $f(x, y) = x + y, M: |x| \leq 1, |y| \leq 1,$
- (c)  $f(x, y) = |x| + |y|, M: x^2 + y^2 \leq 1,$
- (d)  $f(x, y) = x \cdot y - x^2 - y^2 + x + y, M$  je ohraničená přímkami  $x = 0, y = 0, y = 4 - x,$
- (e)  $f(x, y) = x^2 + 2 \cdot x \cdot y + 2 \cdot y^2 - 3 \cdot x - 5 \cdot y, M$  je trojúhelníková oblast s vrcholy v bodech  $A = [0, 2], B = [3, 0], C = [0, -1],$
- (f)  $f(x, y) = \sin(x) \cdot \sin(y) \cdot \sin(x + y), M: x > 0, y \leq \pi.$

**Příklad 3.36:** Najděte kladná čísla  $x, y, z$  taková, že  $x + y + z = 18$  a  $x \cdot y \cdot z$  je maximální.

*Řešení:* Chceme maximalizovat funkci  $f(x, y, z) = x \cdot y \cdot z$ . Přitom má platit, že  $x + y + z = 18$ . Tuto rovnost můžeme zahrnout rovnou do předpisu funkce, a získat tak funkci pouze dvou proměnných:  $x \cdot y \cdot (18 - y - x)$ . Nově vzniklou funkci přitom maximalizujeme pro  $x \in (0, 18), y \in (0, 18), x + y < 18$ . Tímto zápisem jsme zadanou úlohu převedli na klasické

<sup>7</sup>Příkazy `minimize` a `maximize` v tomto případě neprochází jen hranici množiny  $M$ , ale celou množinu (což nám ale nevadí). Pro jiný tvar množiny  $M$ , např. trojúhelník, často musíme procházet jednotlivé části její hranice, tj. např. jednotlivé úsečky (a hledat na nich extrém).

hledání absolutního maxima funkce, jak jsme jej řešili v předchozích příkladech. Tentokrát dokonce nemusíme ani vyšetřovat funkční hodnoty na hranici „omezující“ množiny, neboť omezující podmínky jsou ostré nerovnosti. Celkem získáváme, že požadovaná kladná čísla jsou:  $x = y = z = 6$  (obrázek 3.30).

<p><math>f := (x, y) \rightarrow x \cdot y \cdot (18 - x - y) :</math></p> <p><b>Definice vykreslení funkce</b>  <math>p1 := \text{plot3d}(f(x, y), x=0..18, y=0..18, \text{view}=[0..18, 0..18, -1000..300], \text{axes}=\text{framed}) :</math></p> <p><b>Definice vykreslení hranice množiny <math>M</math></b>  <math>p2 := \text{plots}[\text{spacecurve}]([t, 0, f(t, 0)], t=0..18, \text{color}=\text{black}, \text{thickness}=4) : \# x=0..18</math>  <math>p3 := \text{plots}[\text{spacecurve}]([0, t, f(0, t)], t=0..18, \text{color}=\text{black}, \text{thickness}=4) : \# y=0..18</math>  <math>p4 := \text{plots}[\text{spacecurve}]([t, 18-t, f(t, 18-t)], t=0..18, \text{color}=\text{black}, \text{thickness}=4) : \# x+y=18</math></p> <p><b>Stacionární body na celém <math>D(f)</math>:</b>  <math>\text{extrema}(f(x, y), \{ \}, \{x, y\}, 'body') = \{0, 216\}</math>  <math>\text{body}</math>  <math>\{ \{x=0, y=0\}, \{x=0, y=18\}, \{x=6, y=6\}, \{x=18, y=0\} \}</math></p> <p><b>Stacionární bod uvnitř množiny <math>M</math>:</b> <math>[6,6]</math>.</p> <p><b>Hessova matice:</b>  <math>H := \text{VectorCalculus}[\text{Hessian}](f(x, y), [x, y])</math></p> $\begin{bmatrix} -2y & 18-2x-2y \\ 18-2x-2y & -2x \end{bmatrix}$	<p><b>Vykreslení grafu:</b>  <math>\text{plots}[\text{display}](\{p\} \parallel (1..4))</math></p>  <p><b>Determinant Hessovy matice:</b>  <math>\text{LinearAlgebra}[\text{Determinant}](\text{eval}(H, \{x=6, y=6\}))</math>  <b>108</b></p> <p><b>První prvek Hessovy matice (druhá derivace <math>f(x, y)</math> podle <math>x</math>):</b>  <math>\text{eval}(H(1, 1), \{x=6, y=6\})</math>  <b>-12</b></p> <p><b>Bod <math>[6,6]</math> je lokálním maximem ležícím uvnitř <math>M</math>, a tedy i absolutním maximem.</b></p>
---	---

Obrázek 3.30: Řešení příkladu 3.36.

**Příklad 3.37:** Najděte kladná čísla  $x, y, z$  taková, že  $x \cdot y \cdot z = 64$  a  $x + y + z$  je minimální.

**Příklad 3.38:** Jakého nejmenšího čísla může nabýt součet tří kladných čísel  $x, y, z$ , jestliže pro ně platí:  $x \cdot y \cdot z^2 = 2500$ ?

**Příklad 3.39:** Najděte bod plochy  $z = x \cdot y - 1$ , který je nejbližší bodu  $[0, 0, 0]$ .

**Příklad 3.40:** Určete rovnici přímky, pro niž platí, že má od bodů  $[0, 2]$ ,  $[1, 3]$  a  $[2, 5]$  nejmenší součet čtverců (druhých mocnin) jejich vertikálních vzdáleností (tj. ve směru osy  $y$ ) – tzv. *metoda nejmenších čtverců*.

## 3.5 Vícerozměrný integrál

**Poznámka 3.17:** Mějme spojitou funkci  $f(x, y)$  na obdélníku  $[a, b] \times [c, d]$ . Pak jsou spojitě i funkce  $\varphi(x)$  a  $\psi(y)$  dané integrály:

$$\varphi(x) = \int_c^d f(x, y) dy \quad a \quad \psi(y) = \int_a^b f(x, y) dx.$$

Funkce  $\varphi(x)$  a  $\psi(y)$  tak můžeme integrovat znovu a získat:

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx,$$

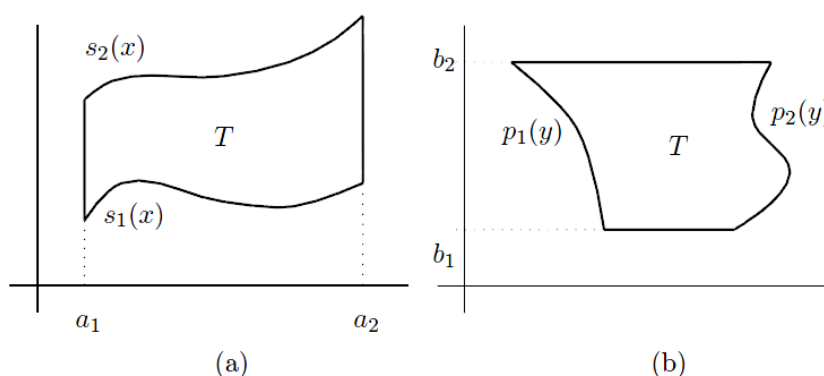
$$\int_c^d \psi(y) dy = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy.$$

Předešlé integrály nazýváme *dvojnásobnými integrály*.

**Definice 3.13:** Necht'  $T = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$  a necht' je funkce  $f(x, y)$  spojitá na  $T$ . *Dvojným integrálem* funkce  $f(x, y)$  přes množinu  $T$  pak rozumíme:

$$\iint_T f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy.$$

**Definice 3.14:** Uvažujme nyní oblast, jíž budeme říkat oblast *základní*, definovanou jako  $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a_1, a_2], y \in [s_1(x), s_2(x)]\}$ , resp.  $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [b_1, b_2], x \in [p_1(y), p_2(y)]\}$ , přičemž funkce  $s_1(x), s_2(x), p_1(y), p_2(y)$  jsou spojitě na intervalech  $[a_1, a_2]$ , resp.  $[b_1, b_2]$ . Základní oblast ilustruje pro lepší představu obrázek 3.31.



Obrázek 3.31: Zobrazení základní oblasti (převzato z [4]).

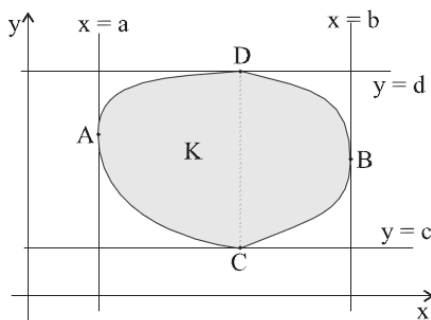
Analogicky jako v předchozí definici nyní definujeme *dvojný integrál* funkce  $f(x, y)$  přes množinu  $T$  jako:



$$\iint_T f(x, y) dx dy = \int_{a_1}^{a_2} \int_{s_1(x)}^{s_2(x)} f(x, y) dy dx,$$

resp. 
$$\iint_T f(x, y) dx dy = \int_{b_1}^{b_2} \int_{p_1(y)}^{p_2(y)} f(x, y) dx dy.$$

**Poznámka 3.18:** Sjedením konečně mnoha základních oblastí můžeme získat tzv. elementární oblast (množinu)  $K$  (viz obrázek 3.32).



Obrázek 3.32: Zobrazení elementární oblasti (převzato z [8]).

**Poznámka 3.19:** Častým krokem při výpočtu integrálů je prohození pořadí integrace. Musíme mít na paměti, že vnější integrál musí být vždy ten, který neobsahuje proměnnou ve svých mezích.

**Definice 3.15:** Uvažujme nyní základní oblast  $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a_1, a_2], y \in [s_1(x), s_2(x)]\}$ , přičemž funkce  $s_1(x), s_2(x)$  jsou spojité na intervalu  $[a_1, a_2]$ . Definujme *základní těleso*  $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in T, z \in [h_1(x, y), h_2(x, y)]\}$ .

*Trojným integrálem* funkce  $f(x, y, z)$  přes množinu  $P$  nazýváme:

$$\iiint_P f(x, y, z) dx dy dz = \iint_T \left( \int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right) = \int_{a_1}^{a_2} \int_{s_1(x)}^{s_2(x)} \int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x, y, z) dz dy dx.$$

V systému Maple zadáváme vícenásobné integrály opakovaným použitím integračního symbolu z palety **Expression**, příkazu `int` či vyvoláním kontextové nabídky dokumentu (po kliknutí pravým tlačítkem myši na předpis funkce) a zvolením položky **Integrate** spolu se specifikací integrační proměnné (pouze pro neurčitý integrál).

Pokud chceme do dokumentu zapsat vícenásobný integrál symbolicky (a nevyhodnocovat jej), použijeme příkaz `Int`. Další možnost, jak zadat (určitý) vícenásobný integrál (dvojný nebo trojný), poskytuje příkaz `MultiInt` z balíku `Student[MultivariateCalculus]`.



<p><b>Symbole z palety</b></p> $\iint (x+y) \, dx \, dy$ $\frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}y^2x$ <p><math>\int_0^1 \int_2^5 (x+y) \, dx \, dy</math></p> <p style="text-align: right;">12</p> <p><b>Textové příkazy</b></p> $\text{int}(\text{int}(x+y,x),y)$ $\frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}y^2x$ $\text{int}(\text{int}(x+y,x=2..5),y=0..1)$ <p style="text-align: right;">12</p> <p><b>Kontextová nabídka</b></p> $x+y \xrightarrow{\text{integrate w.r.t. } x} \frac{1}{2}x^2 + xy$ $\xrightarrow{\text{integrate w.r.t. } y} \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}xy^2$	<p><b>Symbole z palety</b></p> $\iiint (x+y+z) \, dx \, dy \, dz$ $\frac{1}{2}x^2yz + \frac{1}{2}y^2xz + \frac{1}{2}z^2xy$ <p><math>\int_1^3 \int_0^1 \int_2^5 (x+y+z) \, dx \, dy \, dz</math></p> <p style="text-align: right;">36</p> <p><b>Textové příkazy</b></p> $\text{int}(\text{int}(\text{int}(x+y+z,x),y),z)$ $\frac{1}{2}x^2yz + \frac{1}{2}y^2xz + \frac{1}{2}z^2xy$ $\text{int}(\text{int}(\text{int}(x+y+z,x=2..5),y=0..1),z=1..3)$ <p style="text-align: right;">36</p> <p><b>Kontextová nabídka</b></p> $x+y+z \xrightarrow{\text{integrate w.r.t. } x} \frac{1}{2}x^2 + xy + zx \xrightarrow{\text{integrate w.r.t. } y}$ $\frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}xy^2 + zxy \xrightarrow{\text{integrate w.r.t. } z} \frac{1}{2}x^2yz + \frac{1}{2}xy^2z + \frac{1}{2}z^2xy$
---	---

Obrázek 3.33: Vícenásobné integrály.

Příkaz `MultiInt` nabízí možnost výpisu integrálu jako symbolu i jako integrálu, který bude „rovnou“ vyhodnocen. Navíc je možné nechat vypsát kroky výpočtu integrálu nastavením nepovinného parametru `output` na hodnotu `steps`. Dalším nepovinným parametrem, který můžeme specifikovat, je parametr `coordinates` určující, v jakých souřadnicích je integrál uveden. Na výběr máme podle dimenze integrálu souřadnice kartézské (`cartesian[x,y]`) nebo `cartesian[x,y,z]`, polární (`polar[r,theta]`), sférické (`spherical[r,phi,theta]`) či cylindrické (`cylindrical[r,theta,z]`), viz obrázek 3.34.

K převodům mezi různými souřadnicovými systémy můžeme využít příkaz `changecoords`, který převede zadaný výraz z kartézského systému souřadnic do námi zvoleného. Pro dvojnásobné a trojnásobné integrály je k dispozici příkaz balíku `Student[MultivariateCalculus]` s názvem `ChangeOfVariables` převádějící proměnné mezi dříve vyjmenovanými souřadnicovými systémy. Příkaz má jednu „slabinu“, a to, že zpravidla nepřevádě integrální meze do nových proměnných, což musíme tedy udělat sami (obrázek 3.35).

**Příklad 3.41:** Stanovte meze dvojnásobného integrálu

$$I = \iint_{\Omega} f(x,y) \, dx \, dy.$$

Integrál následně zapište i s těmito mezemi pro integrační oblast:

- (a)  $\Omega : 0 \leq x \leq y \leq 1$ , (c)  $\Omega : 1 \leq |x| + |y| < 2$ ,  
(b)  $\Omega : x < x^2 + y^2 \leq 1$ , (d)  $\Omega$  je  $\triangle$  s vrcholy  $[1, 0]$ ,  $[1, 1]$ ,  $[0, 0]$ .

*Řešení:* Při stanovování mezí nám může velmi pomoci obrázek. Nejprve si tedy zadanou množinu  $\Omega$  vždy vykreslíme a následně odvodíme meze jednotlivých integrálů. Využijeme přitom příkazů `inequal` z balíku `plots`, `transform` z balíku `plottools` a `implicitplot`

<p><i>Student[MultivariateCalculus][MultiInt](3x<sup>2</sup> + 3y<sup>2</sup>, x = 1 ..4, y = -1 ..6, output = integral)</i></p>	<p><i>with(Student[MultivariateCalculus]) :</i></p>
$\int_{-1}^6 \int_1^4 (3x^2 + 3y^2) dx dy$	<p><i>MultiInt</i>(<i>r</i>, <i>r</i> = 1 ..4, <math>\theta</math> = 0 ..<math>\frac{\pi}{2}</math>, <i>coordinates</i> = polar[<i>r</i>, <i>theta</i>], <i>output</i> = integral)</p>
<p><i>Student[MultivariateCalculus][MultiInt](3x<sup>2</sup> + 3y<sup>2</sup>, x = 1 ..4, y = -1 ..6)</i></p> <p style="text-align: center;">1092</p>	$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_1^4 r^2 dr d\theta$
<p><i>Student[MultivariateCalculus][MultiInt](3x<sup>2</sup> + 3y<sup>2</sup>, x = 1 ..4, y = -1 ..6, output = steps)</i></p>	<p><i>MultiInt</i>(<i>r</i>, <i>r</i> = 1 ..4, <math>\theta</math> = 0 ..<math>\frac{\pi}{2}</math>, <i>coordinates</i> = polar[<i>r</i>, <i>theta</i>])</p> <p style="text-align: center;"><math>\frac{21}{2}\pi</math></p>
$\int_{-1}^6 \int_1^4 (3x^2 + 3y^2) dx dy$ $= \int_{-1}^6 \left( (x^3 + 3y^2x) \Big _{x=1}^{x=4} \right) dy$ $= \int_{-1}^6 (63 + 9y^2) dy$ $= (63y + 3y^3) \Big _{y=-1}^{y=6}$ <p style="text-align: center;">1092</p>	<p><i>MultiInt</i>(<i>r</i>, <i>r</i> = 0 ..<math>\pi</math>, <math>\theta</math> = 0 ..<math>\pi</math>, <math>\phi</math> = 0 ..<math>\pi</math>, <i>coordinates</i> = spherical[<i>r</i>, <i>phi</i>, <i>theta</i>], <i>output</i> = integral)</p> $\int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} r^3 \sin(\phi) dr d\theta d\phi$
	<p><i>MultiInt</i>(<i>r</i>, <i>r</i> = 0 ..<math>\pi</math>, <math>\theta</math> = 0 ..<math>\pi</math>, <math>\phi</math> = 0 ..<math>\pi</math>, <i>coordinates</i> = spherical[<i>r</i>, <i>phi</i>, <i>theta</i>])</p> <p style="text-align: center;"><math>\frac{1}{2}\pi^5</math></p>
	<p><i>Int</i>(<i>Int</i>(3x<sup>2</sup> + 3y<sup>2</sup>, x = 1 ..4), y = -1 ..6)</p> $\int_{-1}^6 \int_1^4 (3x^2 + 3y^2) dx dy$ <p><i>int</i>(<i>int</i>(3x<sup>2</sup> + 3y<sup>2</sup>, x = 1 ..4), y = -1 ..6)</p> <p style="text-align: center;">1092</p>

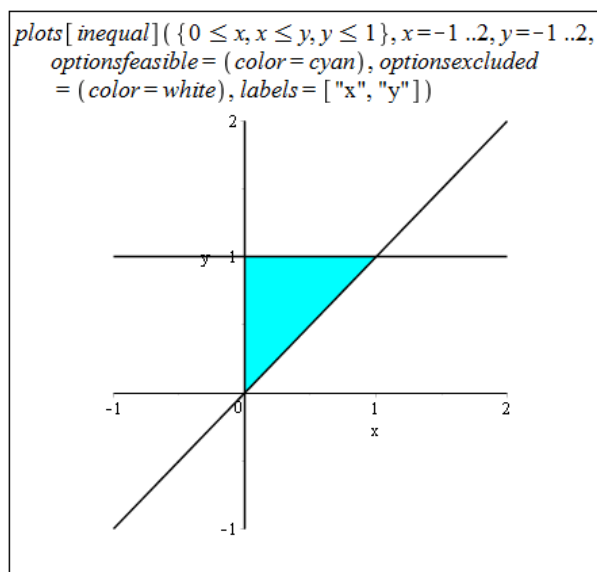
Obrázek 3.34: Vícenásobné integrály s příkazy MultiInt a Int.

<p><i>changecoords</i>(x<sup>2</sup> + y<sup>2</sup>, [x, y], polar, [r, <math>\theta</math>])</p> $r^2 \cos(\theta)^2 + r^2 \sin(\theta)^2$	<p><i>with(Student[MultivariateCalculus]) :</i></p>
<p><i>changecoords</i>(x<sup>2</sup> + y<sup>2</sup> + z<sup>2</sup>, [x, y, z], spherical, [r, <math>\phi</math>, <math>\theta</math>])</p> $r^2 \sin(\phi)^2 \cos(\theta)^2 + r^2 \sin(\phi)^2 \sin(\theta)^2 + r^2 \cos(\phi)^2$	<p><i>ChangeOfVariables</i>(<i>MultiInt</i>(x<sup>2</sup> + y<sup>2</sup>, x = 1 ..4, y = -1 ..6, <i>output</i> = integral), [cartesian<sub>x,y</sub>, polar<sub>r,θ</sub>])</p> $\int_{y=-1}^{y=6} \int_{x=1}^{x=4} r^3 dr d\theta$
<p><i>changecoords</i>(x<sup>2</sup> + y<sup>2</sup> + z<sup>2</sup>, [x, y, z], cylindrical, [r, <math>\theta</math>, z])</p> $r^2 \cos(\theta)^2 + r^2 \sin(\theta)^2 + z^2$	<p><i>ChangeOfVariables</i>(<i>MultiInt</i>(x<sup>2</sup> + y<sup>2</sup> + z<sup>2</sup>, x = 1 ..4, y = -1 ..6, z = 0 ..3, <i>output</i> = integral), [cartesian<sub>x,y,z</sub>, spherical<sub>r,θ,φ</sub>])</p> $\int_{z=0}^{z=3} \int_{y=-1}^{y=6} \int_{x=1}^{x=4} r^4  \sin(\theta)  d\phi dr d\theta$
<p><i>changecoords</i>(x - y, [x, y], logarithmic)</p> $\frac{\ln(x^2 + y^2) - 2 \arctan\left(\frac{y}{x}\right)}{\pi}$	<p><i>ChangeOfVariables</i>(<i>MultiInt</i>(x<sup>2</sup> + y<sup>2</sup> + z<sup>2</sup>, x = 1 ..4, y = -1 ..6, z = 0 ..3, <i>output</i> = integral), [cartesian<sub>x,y,z</sub>, cylindrical<sub>r,θ,z</sub>])</p> $\int_{z=0}^{z=3} \int_{y=-1}^{y=6} \int_{x=1}^{x=4} (r^2 + z^2) r dr d\theta dz$

Obrázek 3.35: Transformace mezi souřadnicovými systémy.

z balíku `plots`, s nimiž jsme se již setkali při vykreslování oblastí a definičních oborů funkcí v sekci 3.1.3.

(a)



Obrázek 3.36: Zobrazení oblasti  $\Omega$  z příkladu 3.41.(a)

Z obrázku 3.36 můžeme vyvodit 2 různé (ekvivalentní) zápisy integračních mezí:

1.  $0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y,$
2.  $0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1.$

Celkem tak získáváme:

$$I = \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^y f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_x^1 f(x, y) dy dx.$$

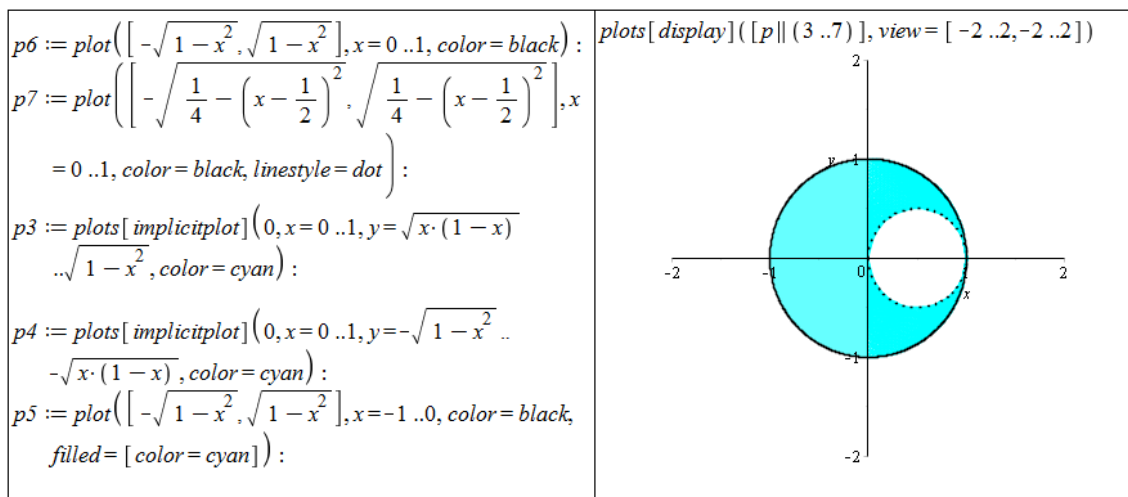
(b)

Z obrázku 3.37 můžeme vyvodit opět 2 různé (ekvivalentní) zápisy integračních mezí. Dostáváme však výrazně komplikovanější zápis než v předchozím případě, a tak zapíšeme pouze jednu možnost (která je jednodušší):

1.  $-1 \leq x \leq 0, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2},$   
 $0 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y < -\sqrt{\frac{1}{4} - (x-\frac{1}{2})^2} \cup \sqrt{\frac{1}{4} - (x-\frac{1}{2})^2} < y \leq \sqrt{1-x^2}.$

Celkem tak získáváme:

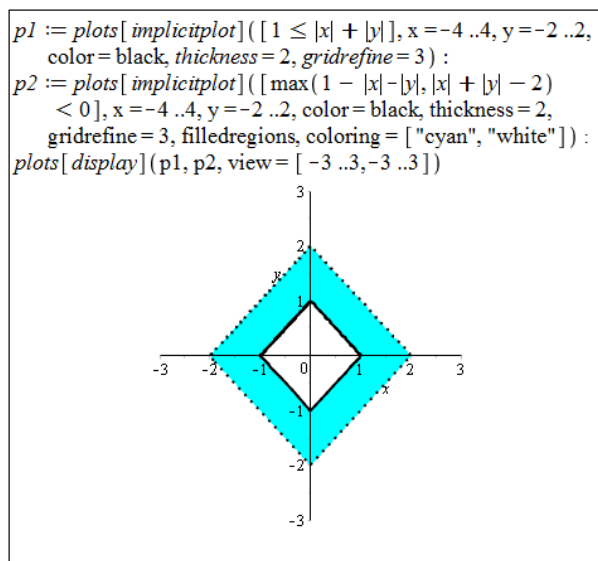
$$I = \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_{-1}^0 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy dx + \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{-\sqrt{\frac{1}{4} - (x-\frac{1}{2})^2}} f(x, y) dy dx + \int_0^1 \int_{\sqrt{\frac{1}{4} - (x-\frac{1}{2})^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy dx +$$



Obrázek 3.37: Zobrazení oblasti  $\Omega$  z příkladu 3.41.(b)

$$+ \int_0^1 \int_{\sqrt{\frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy dx.$$

(c)



Obrázek 3.38: Zobrazení oblasti  $\Omega$  z příkladu 3.41.(c)

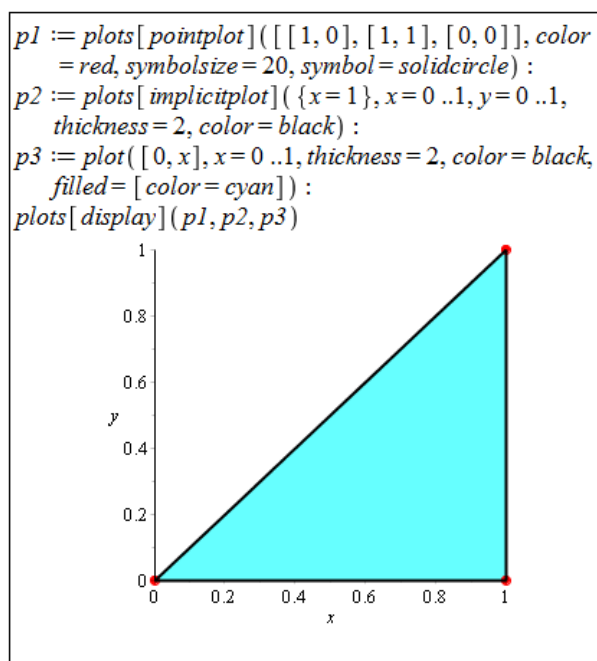
I v tomto případě máme dvě (základní) možnosti, jak zapsat integrační meze. Pro komplikovanost zápisu ukažme opět pouze jednu z možností. Doplňme, že v případech, kdy je oblast  $\Omega$  symetrická (kolem počátku či kolem některé z os) a podobně i zadaná funkce (vzhledem k ose  $z$ ), počítáme zpravidla integrál pouze pro část oblasti (tj. např. jen pro jeden kvadrant) a výsledek vynásobíme počtem odpovídajících si částí. V tomto příkladu bychom tak mohli počítat integrál pouze pro oblast náležící prvnímu kvadrantu a výsledek vynásobit čtyřmi (pokud by funkce  $f(x, y)$  byla symetrická kolem osy  $z$ ).

1.  $-2 \leq x \leq -1, -x - 2 < y < x + 2,$   
 $-1 \leq x \leq 0, -x - 2 < y \leq -x - 1 \cup x + 1 \leq y < x + 2,$   
 $0 \leq x \leq 1, x - 2 < y \leq x - 1 \cup -x + 1 \leq y < -x + 2,$   
 $1 \leq x \leq 2, x - 2 < y < -x + 2.$

Celkem tak získáváme:

$$\begin{aligned}
 I = \iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy &= \int_{-2}^{-1} \int_{-x-2}^{x+2} f(x, y) \, dy \, dx + \int_{-1}^0 \int_{-x-2}^{-x-1} f(x, y) \, dy \, dx + \\
 &+ \int_{-1}^0 \int_{x+1}^{x+2} f(x, y) \, dy \, dx + \int_0^1 \int_{x-2}^{x-1} f(x, y) \, dy \, dx + \int_0^1 \int_{-x+1}^{-x+2} f(x, y) \, dy \, dx + \\
 &+ \int_1^2 \int_{x-2}^{-x+2} f(x, y) \, dy \, dx.
 \end{aligned}$$

(d)



Obrázek 3.39: Zobrazení oblasti  $\Omega$  z příkladu 3.41.(d)

Z obrázku 3.39 vidíme, že situace je velmi podobná případu (a). Můžeme opět vyvodit 2 různé (ekvivalentní) zápisy integračních mezí:

1.  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x,$
2.  $0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 1.$

Celkem tak získáváme:

$$I = \iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^x f(x, y) \, dy \, dx = \int_0^1 \int_y^1 f(x, y) \, dx \, dy.$$

**Příklad 3.42:** Stanovte meze dvojnásobného integrálu

$$I = \iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy.$$

Integrál následně запиšte i s těmito mezemi pro integrační oblast:

- (a)  $\Omega : 0 \leq x + y \leq 1 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0$ ,      (c)  $\Omega : |x| + |y| < 3$ ,  
 (b)  $\Omega : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge x \geq 0$ ,      (d)  $\Omega$  je  $\triangle$  s vrcholy  $[2, 1], [-2, 1], [0, 0]$ .

**Příklad 3.43:** Vyjádřete zadané integrály v obráceném pořadí integrace.

- (a)  $\int_0^4 \int_{\frac{x}{2}}^2 f(x, y) \, dy \, dx$ ,      (c)  $\int_0^2 \int_0^{x^2} f(x, y) \, dy \, dx$ ,  
 (b)  $\int_0^2 \int_x^{2 \cdot x} f(x, y) \, dy \, dx$ ,      (d)  $\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} f(x, y) \, dy \, dx$ .

### 3.5.1 Geometrická aplikace dvojného integrálu

#### Obsah rovinné oblasti

**Poznámka 3.20:** Nechť  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  je rovinná oblast. Plocha  $S$  oblasti  $\Omega$  je dána vztahem

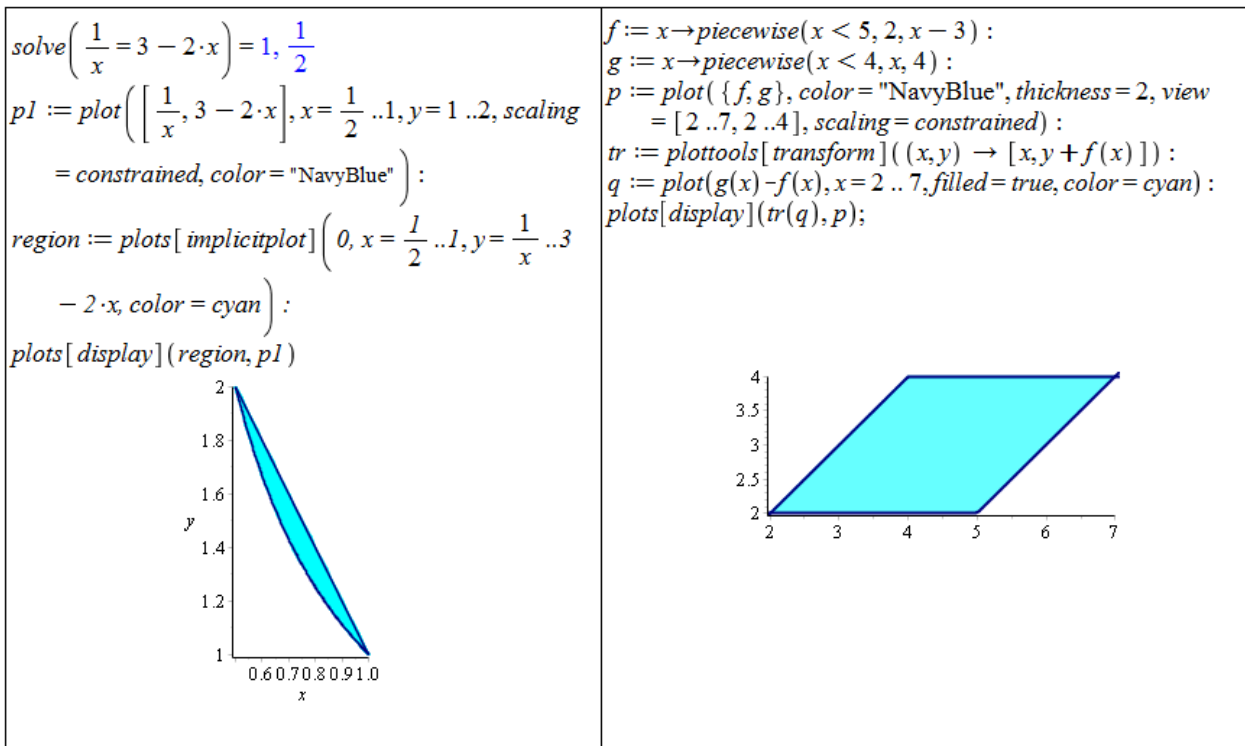
$$S = \iint_{\Omega} dx \, dy.$$

**Příklad 3.44:** Určete obsah oblasti  $\Omega$ .

- (a)  $\Omega$  je ohraničená křivkami  $y = \frac{1}{x}$  a  $y = 3 - 2 \cdot x$ ,  
 (b)  $\Omega$  je ohraničená přímkami  $y = x$ ,  $y = x - 3$ ,  $y = 2$  a  $y = 4$ .

*Řešení:*

V zadání není specifikováno, jak máme obsah zadané oblasti hledat. Mohli bychom si proto vzpomenout na aplikace určitého integrálu funkce jedné proměnné a počítat obsah oblasti tímto způsobem. U některých oblastí je navíc jednodušší i jiný způsob než počítat integrály (jednoduché či dvojnó). My si ukážeme výpočet jak pomocí jednoduchého, tak pomocí dvojného integrálu.



Obrázek 3.40: Zobrazení oblasti  $\Omega$  z příkladu 3.44. Vlevo případ (a), vpravo případ (b).

- (a) Pomocí jednoduchého integrálu zvolíme jednu proměnnou, u níž známe číselné meze, a „odečítáme od sebe“ dvě funkce vymezující zadanou oblast. U dvojnásobného integrálu zapíšeme zadanou oblast pouze v integračních mezích. Pozor na to, že při výpočtu dvojnásobného integrálu v systému Maple musíme zadat funkci, která bude integrována. V případě počítání obsahů rovinných oblastí podle poznámky 3.20 se v integrálu žádná funkce nevyskytuje, i když ve skutečnosti integrujeme konstantní funkci  $f(x, y) = 1$ , kterou také zadáme do integrálu v systému Maple.

$\int_{\frac{1}{2}}^1 \left( 3 - 2 \cdot x - \frac{1}{x} \right) dx$ $-\ln(2) + \frac{3}{4}$	$\int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{\frac{1}{x}}^{3-2x} 1 \, dy \, dx$ $-\ln(2) + \frac{3}{4}$
--	--

Obrázek 3.41: Výpočet obsahu oblasti  $\Omega$  z příkladu 3.44.(a)

- (b)

$\int_2^4 (y + 3 - y) \, dy$ $6$	$\int_2^4 \int_y^{y+3} 1 \, dx \, dy$ $6$
----------------------------------	---

Obrázek 3.42: Výpočet obsahu oblasti  $\Omega$  z příkladu 3.44.(b)

**Příklad 3.45:** Určete obsahy oblastí  $\Omega$  z příkladu 3.42 a obsahy oblastí tvořených integračními mezemi v příkladu 3.43. U příkladu 3.43 výpočtem obsahu příslušné oblasti navíc ověřte rovnost integrálů v zadání a v řešení.

**Příklad 3.46:** Pomocí dvojného integrálu určete obsah kruhu o poloměru  $r$ .

**Příklad 3.47:** Pomocí dvojného integrálu určete obsah oblasti ohraničené elipsou o délce hlavní poloosy  $a$  a délce vedlejší poloosy  $b$ .

### Objem tělesa

**Poznámka 3.21:** Nechť  $f(x, y)$  je spojitá funkce na množině  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  a nechť  $f(x, y) \geq 0$  pro všechna  $(x, y) \in \Omega$ . Objem (kolmého) tělesa  $T \subset \mathbb{R}^3$  ohraničeného zdola množinou  $\Omega$  a shora částí grafu funkce  $f(x, y)$  je dán vztahem

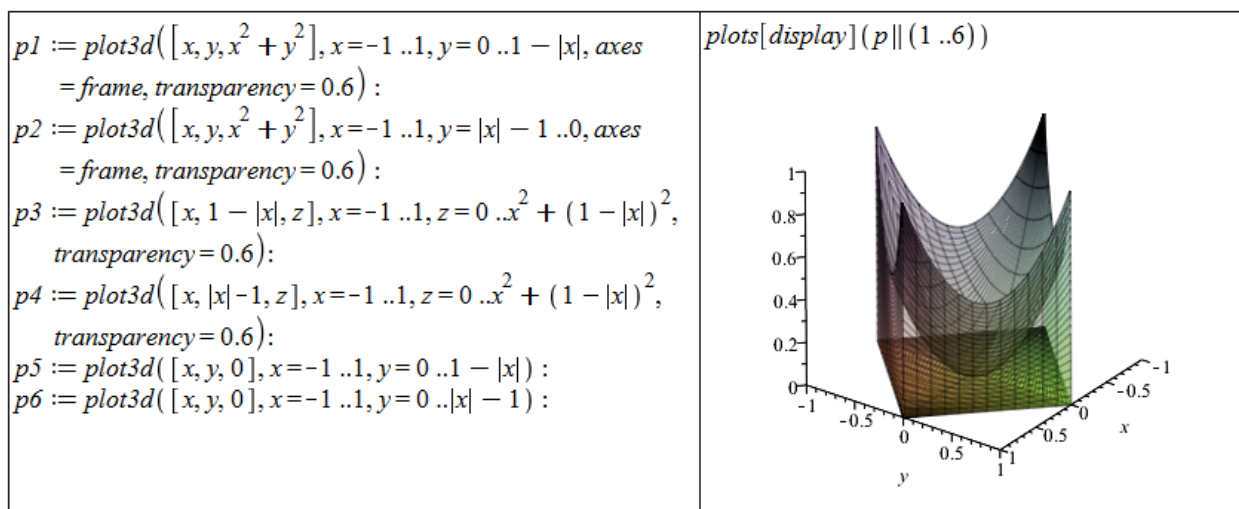
$$V = \iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy.$$

**Příklad 3.48:** Určete objem kolmého tělesa ohraničeného:

- (a) funkcí  $f(x, y) = x^2 + y^2$  a množinou  $\Omega : |x| + |y| \leq 1$ ,
- (b) funkcí  $f(x, y) = 64 - x^2$  a rovinami  $3 \cdot x + 4 \cdot y = 24, x = 0, y = 0$  a  $z = 0$ .

*Řešení:*

- (a) Nejprve v systému Maple zobrazíme těleso, jehož objem počítáme (obrázek 3.43), a jeho podstavu (množinu  $\Omega$ ), abychom získali představu a snáze odvodili meze dvojného integrálu.



Obrázek 3.43: Řešení příkladu 3.48.(a) - vykreslení tělesa.

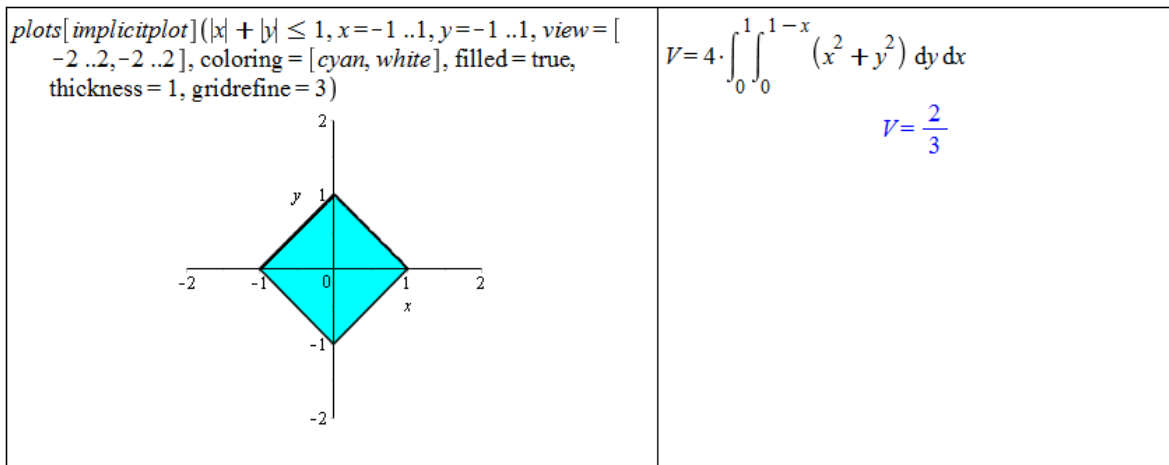
S množinou  $\Omega$  (resp. jejími variantami) jsme se už několikrát setkali, takže by nám nemělo činit problémy přepsat ji do mezí pro proměnné  $x$  a  $y$ . Když si však uvědomíme, že množina  $\Omega$  je středově souměrná podle počátku souřadné soustavy (bodů  $[0, 0, 0]$ )



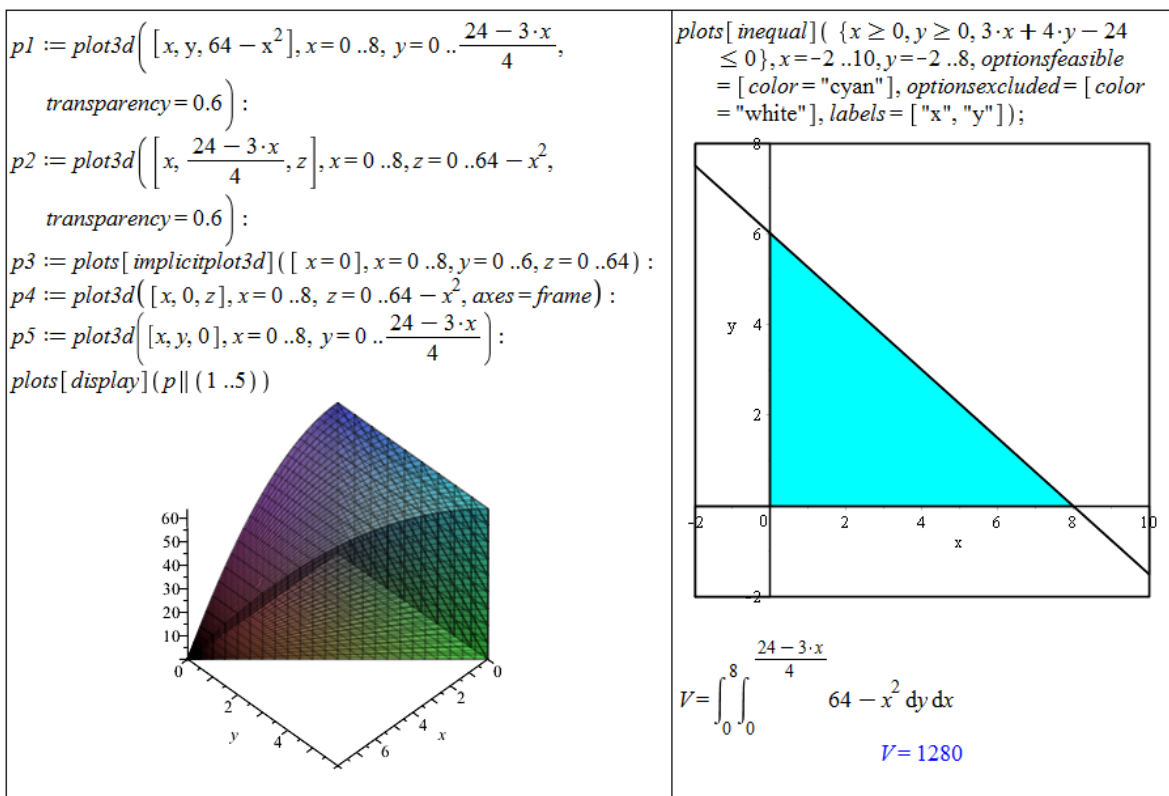
a že zadaná funkce  $f(x, y)$  je symetrická podle osy  $z$ , můžeme počítat objem pouze části tělesa vyskytující se v prvním oktantu (tj. pro  $x, y, z \geq 0$ ) a výsledek vynásobit čtyřmi (abychom získali objem celého tělesa rozprostírajícího se přes čtyři oktanty, pro něž  $z \geq 0$ ).

Pro meze odpovídající prvnímu oktantu platí:

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 - x.$$



Obrázek 3.44: Řešení příkladu 3.48.(a)



Obrázek 3.45: Řešení příkladu 3.48.(b)

- (b) Postupujeme zcela analogicky k předchozímu příkladu. Pro meze integrálu platí:
- $$0 \leq x \leq 8, \quad 0 \leq y \leq \frac{24-3 \cdot x}{4}.$$

**Příklad 3.49:** Určete objem kolmého tělesa ohraničeného:

- (a) funkcí  $f(x, y) = 6 - 2 \cdot x - 3 \cdot y$  a rovinami  $x = 0, y = 0$  a  $z = 0$ ,
- (b) funkcí  $f(x, y) = x + 2 \cdot y$  a podstavou vymezenou grafy funkcí  $y = 2 - x^2$  a  $y = |x|$ ,
- (c) funkcí  $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$  a kruhovou podstavou popsanou nerovnicí  $x^2 + y^2 \leq 4$ ,
- (d) funkcí  $f(x, y) = 5 \cdot x^2 - 2 \cdot x \cdot y$  a trojúhelníkovou podstavou vymezenou body  $[2, 0], [0, 1]$  a  $[0, 0]$ .
- (e) funkcí  $f(x, y) = \left(\frac{x}{y}\right)^2$  a podstavou vymezenou grafy funkcí  $y = x, y = \frac{1}{x}$  a přímkou  $x = 2$ .

**Příklad 3.50:** Pomocí dvojného integrálu určete objem kvádrů o rozměrech  $a, b, c$ .

**Příklad 3.51:** Pomocí dvojného integrálu určete objem koule o poloměru  $r$ .

**Příklad 3.52:** Pomocí dvojného integrálu určete objem válce o poloměru podstavy  $r$  a výšce  $v$ .

### Obsah plochy

**Poznámka 3.22:** Necht' jsou funkce  $f(x, y), f'_x(x, y), f'_y(x, y)$  spojité na množině  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Obsah plochy tvořené grafem funkce  $f(x, y)$  nad množinou  $\Omega$  je dán vztahem

$$S = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2} dx dy.$$

**Příklad 3.53:** Určete obsah plochy tvořené grafem funkce  $f(x, y)$  nad množinou  $\Omega$  z příkladu 3.48 v případě (a) i (b).

*Řešení:*

V obou případech využijeme poznámky 3.22, již dříve vypočítaných integračních mezí a předpisu ohraničující funkce, viz obrázek 3.46.

**Příklad 3.54:** Určete obsah plochy tvořené grafem funkce  $f(x, y)$  nad podstavou tělesa z příkladu 3.49.

**Příklad 3.55:** Určete obsah povrchu koule o poloměru  $r$ .

**Příklad 3.56:** Určete obsah části plochy koule o rovnici  $x^2 + y^2 + z^2 = 25$  vymezené rovinami  $z = 2$  a  $z = 4$ .

$f(x, y) := x^2 + y^2$ $(x, y) \rightarrow x^2 + y^2$ $S = 4 \cdot \int_0^1 \int_0^{1-x} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)\right)^2} dy dx$ $S = 4 \left( \int_0^1 \left( -\frac{1}{8} \ln(1 + 4x^2) - \frac{1}{2} \ln(1 + 4x^2) x^2 + \frac{1}{2} \sqrt{5 + 8x^2 - 8x} - \frac{1}{2} \sqrt{5 + 8x^2 - 8x} x + \frac{1}{4} \ln(2 - 2x + \sqrt{5 + 8x^2 - 8x}) + \ln(2 - 2x + \sqrt{5 + 8x^2 - 8x}) x^2 \right) dx \right)$ $evalf(\%)$ $S = 3.004625434$	$f(x, y) := 64 - x^2$ $(x, y) \rightarrow 64 - x^2$ $S = \int_0^8 \int_0^{\frac{24-3 \cdot x}{4}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)\right)^2} dy dx$ $S = \frac{15}{2} \ln(2) + \frac{127}{16} \sqrt{257} + \frac{3}{2} \ln\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{32} \sqrt{257}\right) + \frac{1}{16}$ $evalf(\%)$ $S = 132.5103717$
--	---

Obrázek 3.46: Řešení příkladu 3.53.(a) vlevo, řešení příkladu 3.53.(b) vpravo.

## Integrální součet

Jak již víme, geometrickým významem dvojného integrálu z funkce  $f(x, y)$  přes množinu  $\Omega$  je objem tělesa ohraničeného množinou  $\Omega$ , funkcí  $f(x, y)$  a „svislými plochami“. Tento objem můžeme počítat přibližně pomocí dolních (resp. horních, ...) integrálních součtů podobně, jako tomu bylo v případě jedné proměnné v sekci 2.7.4. Tentokrát přitom aproximujeme objem součtem objemů kvádrů se „zjemňující se“ čtvercovou základnou a výškou spočtenou např. z funkční hodnoty ve středu čtverce – základny nebo v jednom z vrcholů. K tomu nám poslouží příkaz `ApproximateInt` z balíku `Student[MultivariateCalculus]`. Použití příkazu `ApproximateInt` je takřka totožné s příkazem `RiemannSum`, s nímž jsme se dříve setkali. Příkazu opět povinně zadáváme předpis funkce, již chceme integrovat, a meze integrace. I v tomto případě můžeme zadávat nepovinné parametry specifikující typ integrálního součtu, typ výstupu, rozdělení integračních intervalů a další. Ukázkou použití můžeme vidět na obrázku 3.47.

Tak jako v případě funkcí jedné proměnné, kde můžeme místo příkazu `RiemannSum` využít nástroje `Approximate Integration` spouštěném například z hlavního menu, máme k dispozici analogický nástroj i nyní. Opět má název `Approximate Integration` a tentokrát jej spustíme například zvolením **Tools > Tutors > Calculus – Multi-Variable > Approximate Integration...** v hlavním menu (obrázek 3.48).

## 3.5.2 Geometrická aplikace trojného integrálu

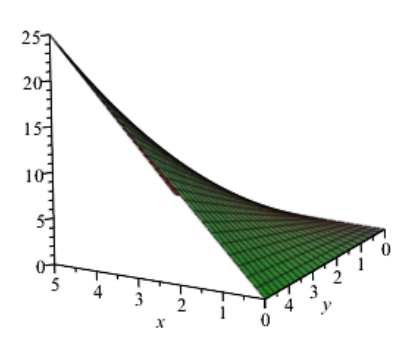
### Objem tělesa

**Poznámka 3.23:** Nechtě  $P$  je množina z definice 3.15 (obecně stačí tzv. *měřitelná* množina). Pro objem  $V$  této množiny platí vztah

$$V = \iiint_P dx dy dz.$$

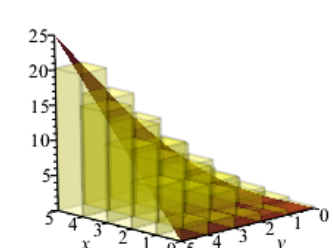
with(Student[MultivariateCalculus]) :  
 $f := (x, y) \rightarrow x \cdot y$   
 $(x, y) \rightarrow x \cdot y$

plot3d(f(x, y), x = 0 .. 5, y = 0 .. 5, axes = frame)



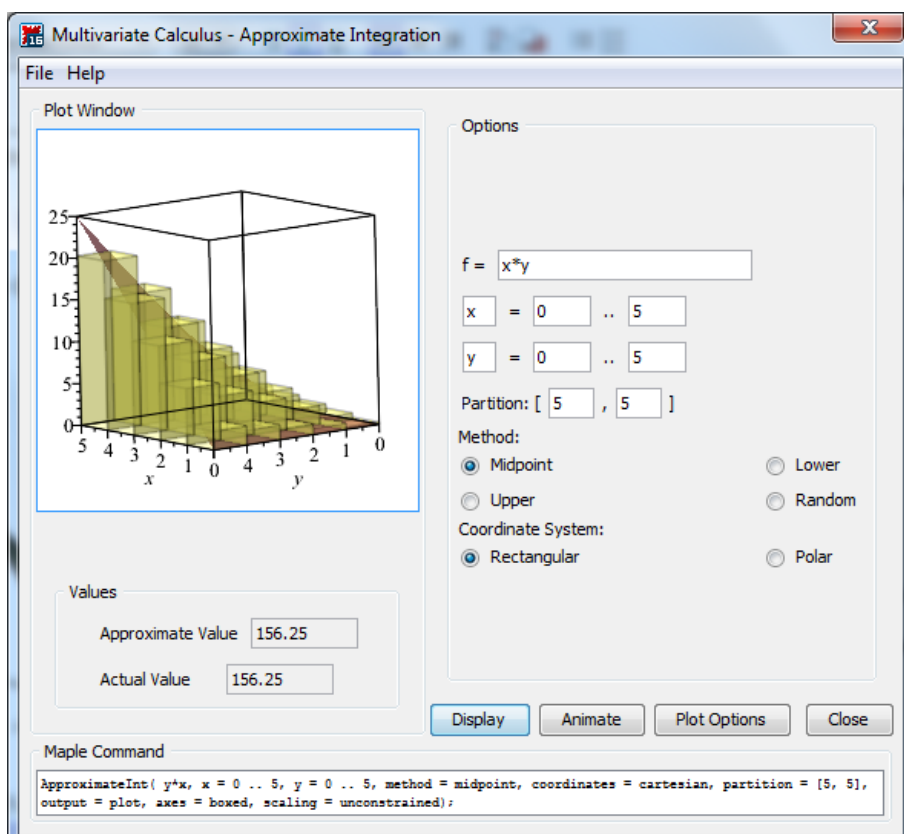
ApproximateInt(x\*y, x = 0 .. 5, y = 0 .. 5)  
156.2500000

ApproximateInt(x\*y, x = 0 .. 5, y = 0 .. 5, output = plot,  
prismoptions = [color = yellow], axes = frame)



Using a midpoint Riemann sum, an approximation of  $\int_0^5 \int_0^5 f(x, y) \, dy \, dx$ ,  
where  $f(x, y) = xy$ . Actual value: 156.25. Approximate value: 156.25.  
Grid:  $5 \times 5$

Obrázek 3.47: Aproximace dvojného integrálu pomocí integrálních součtů.

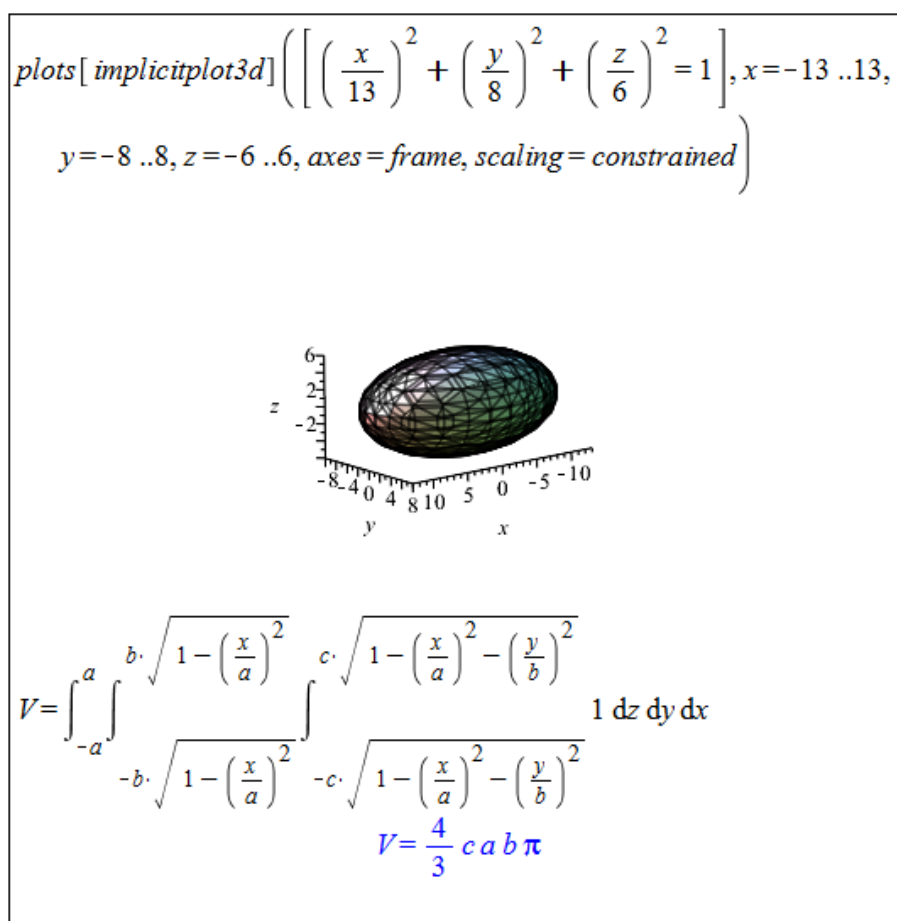


Obrázek 3.48: Aproximace dvojného integrálu – maple.

**Příklad 3.57:** Určete objem trojosého elipsoidu daného rovnicí

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1.$$

*Řešení:* Nejprve si elipsoid vykreslíme pro nějaké konkrétní hodnoty  $a, b, c$ . Na obrázku 3.49 jsou použity hodnoty  $a = 13, b = 8, c = 6$ . Následně musíme odvodit jednotlivé meze v trojném integrálu. Za „počáteční“ proměnnou vezměme  $x$ , pro niž tak platí:  $x \in [-a, a]$ . Proměnnou  $y$  vyjádříme pomocí proměnné  $x$  jako:  $y \in \left[-\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}, \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}\right]$  a nakonec proměnnou  $z$  pomocí zbylých proměnných jako:  $z \in \left[-\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}, \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}\right]$ .



Obrázek 3.49: Řešení příkladu 3.57.

**Příklad 3.58:** Pomocí trojného integrálu určete objem tělesa z příkladu 3.48.

**Příklad 3.59:** Pomocí trojného integrálu určete objem kvádrů o rozměrech  $a, b, c$ .

**Příklad 3.60:** Pomocí trojného integrálu určete objem koule o poloměru  $r$ .

**Příklad 3.61:** Pomocí trojného integrálu určete objem válce o poloměru podstavy  $r$  a výšce  $v$ .

### 3.5.3 Transformace souřadnic ve dvojném a trojném integrálu

U skupiny integrálů, kde pracujeme s kruhovými, kulovými či válcovými plochami, bývá výhodná transformace do polárních, sférických či cylindrických souřadnic.

**Poznámka 3.24:** (Transformace do polárních souřadnic) Uvažujme dvojný integrál

$$\iint_{\Omega_1} f(x, y) dx dy.$$

Pro transformaci tohoto integrálu do polárních souřadnic daných vztahy

$$x = r \cdot \cos(\theta), \quad y = r \cdot \sin(\theta)$$

platí:

$$\iint_{\Omega_1} f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega_2} f(r \cdot \cos(\theta), r \cdot \sin(\theta)) \cdot r dr d\theta,$$

kde  $r \in [0, \infty)$ ,  $\theta \in [0, 2 \cdot \pi]$ .

**Poznámka 3.25:** (Transformace do sférických souřadnic) Uvažujme trojný integrál

$$\iiint_{\Omega_1} f(x, y, z) dx dy dz.$$

Pro transformaci tohoto integrálu do sférických souřadnic daných vztahy

$$x = r \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(\theta), \quad y = r \cdot \sin(\phi) \cdot \sin(\theta), \quad z = r \cdot \cos(\theta)$$

platí:

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega_1} f(x, y, z) dx dy dz = \\ & = \iiint_{\Omega_2} f(r \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(\theta), r \cdot \sin(\phi) \cdot \sin(\theta), r \cdot \cos(\theta)) \cdot \sin(\theta) \cdot r^2 dr d\phi d\theta, \end{aligned}$$

kde  $r \in [0, \infty)$ ,  $\phi \in [0, 2 \cdot \pi]$ ,  $\theta \in [0, 2 \cdot \pi]$ .

**Poznámka 3.26:** (Transformace do cylindrických souřadnic) Uvažujme trojný integrál

$$\iiint_{\Omega_1} f(x, y, z) dx dy dz.$$

Pro transformaci tohoto integrálu do cylindrických souřadnic daných vztahy

$$x = r \cdot \cos(\theta), \quad y = r \cdot \sin(\theta), \quad z = z$$

platí:

$$\iiint_{\Omega_1} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega_2} f(r \cdot \cos(\theta), r \cdot \sin(\theta), z) \cdot r dr d\theta dz,$$

kde  $r \in [0, \infty)$ ,  $\theta \in [0, 2 \cdot \pi]$ ,  $z \in \mathbb{R}$ .

**Příklad 3.62:** Použitím transformace do polárních souřadnic určete objem kolmého tělesa ohraničeného funkcí  $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$  a kruhovou podstavou popsanou nerovnicí  $x^2 + y^2 \leq 4$ .

*Řešení:* Můžeme využít poznámky 3.24 nebo zapsat dvojný integrál pro kartézské souřadnice, který jsme již vytvořili v příkladu 3.49.(c), a pro transformaci do souřadnic polárních využít příkaz `ChangeOfVariables` (či příkaz `changecoords`). Využijme zmíněný příkaz.

Integrační meze Maple nepřevede, musíme je tak vytvořit sami. Podstavou tělesa je kruh o poloměru  $r = 2$ , což vede na následující meze:  $r \in [0, 2], \theta \in [0, 2 \cdot \pi]$ .

```
with(Student[MultivariateCalculus]):
ChangeOfVariables(MultiInt(e^{x^2+y^2}, y=-sqrt(4-x^2)..sqrt(4-x^2), x=-2..2, output=integral),
[cartesian_{x,y}, polar_{r,theta}])
      \int_{x=-2}^{x=2} \int_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{y=\sqrt{4-x^2}} e^{r^2} r dr d\theta
V=Int(Int(e^{r^2} \cdot r, r=0..2), theta=0..2 \cdot \pi)
      V = \int_0^{2\pi} \int_0^2 e^{r^2} r dr d\theta
value(%)
      V = -\pi + e^4 \pi
evalf(%)
      V = 168.3835544
```

Obrázek 3.50: Řešení příkladu 3.62.

**Příklad 3.63:** Použitím transformace do polárních souřadnic určete objem kolmého tělesa ohraničeného funkcí  $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$  a kruhovou podstavou popsanou nerovnicí  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

**Příklad 3.64:** Vraťte se k příkladům 3.46, 3.51, 3.52, 3.60 a 3.61. Příslušné výpočty nyní proveďte i v jiném systému souřadnic (tj. např. polárních, sférických, ...) a výsledky porovnejte s původně získanými.

## 3.6 Nekonečné řady

**Definice 3.16:** Mějme funkci  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Jestliže  $D(f) = \mathbb{N}$ , nazýváme tuto funkci *posloupností reálných čísel* a značíme  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ .

**Definice 3.17:** Necht'  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  je posloupnost reálných čísel. Symbol

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{nebo} \quad a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

nazýváme *nekonečnou (číselnou) řadou*. Posloupnost  $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$  definovanou předpisem

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad \dots \quad s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \quad \dots$$

nazýváme *posloupností částečných součtů* této řady.

**Definice 3.18:** Existuje-li vlastní limita  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ , řekneme, že řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  *konverguje* a má součet  $s$ .

Neexistuje-li vlastní limita  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ , řekneme, že řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  *diverguje*.

**Poznámka 3.27:** Divergenci řady můžeme ještě rozlišit na tři případy:

- je-li  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$ , říkáme, že řada diverguje k  $\infty$ ,
- je-li  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = -\infty$ , říkáme, že řada diverguje k  $-\infty$ ,
- pokud  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  neexistuje, říkáme, že řada *osciluje*.

V systému Maple zadáváme posloupnosti pomocí příkazu `seq` nebo pomocí kontextové nabídky dokumentu. Příkaz `seq` je možné použít několika různými způsoby s ohledem na to, jaké mu zadáváme parametry. S výjimkou jediného případu mu vždy zadáváme jako první parametr  $n$ -tý člen posloupnosti a dalším parametrem (dalšími parametry) specifikujeme, které členy posloupnosti chceme vypsat (což můžeme učinit zadáním intervalu, zápisem jediné hodnoty – pro jediný člen nebo výpisem členů posloupnosti v seznamu).

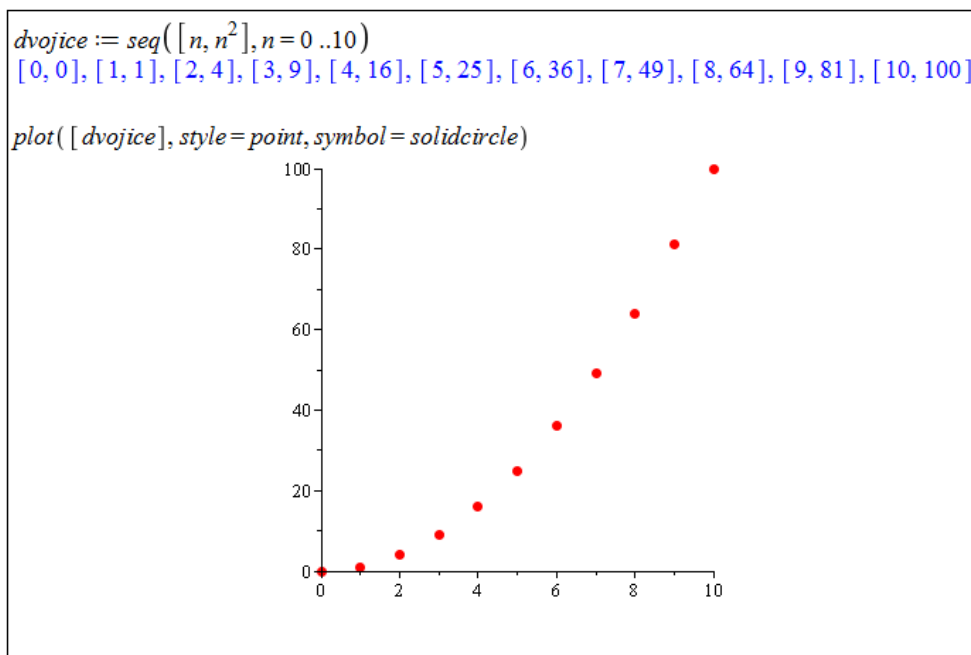
V případě použití kontextové nabídky zadáme do dokumentu  $n$ -tý člen posloupnosti, klikneme na něj pravým tlačítkem a zvolíme položku **Sequence** spolu s iterační proměnnou. V následně zobrazeném okénku navolíme, které členy posloupnosti chceme vypsat do dokumentu. Použití kontextové nabídky má však oproti příkazu `seq` mnohá omezení.

```
seq(n^2, n = 0 .. 10)           0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100
seq(n^2, n = k)                k^2
seq(n^2, n = 8)                64
seq(n^2, n in [1, 3, 5, 7])    1, 9, 25, 49
n^2 -- sequence w.r.t. n --> 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100
n^2 -- sequence w.r.t. n --> 64
```

Obrázek 3.51: Různé možnosti vypsání členů posloupnosti.

Posloupnosti  $\{a_n\}$  můžeme též vykreslovat do grafů. Potřebujeme k tomu vytvořit dvojice  $[n, a_n]$ , které následně zobrazíme jako body příkazem `plot`. Pro vytvoření dvojic  $[n, a_n]$  můžeme pochopitelně použít příkaz `seq`, vykreslení bodů je třeba specifikovat parametrem `style` nastaveným na hodnotu `point` (v příkazu `plot`).





Obrázek 3.52: Vykreslení členů posloupnosti.

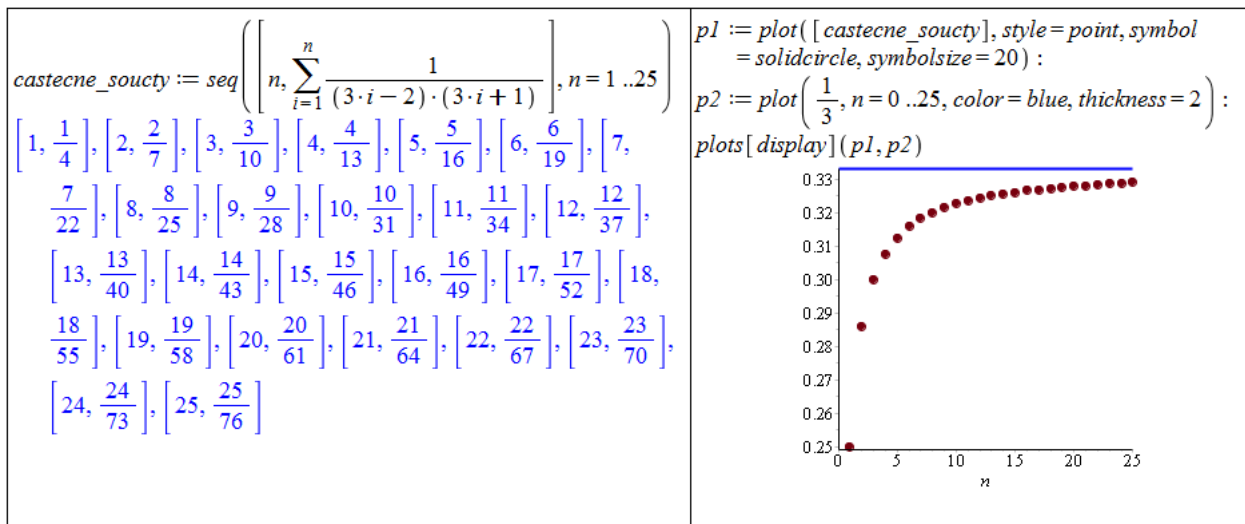
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3 \cdot n - 2) \cdot (3 \cdot n + 1)}$ $\frac{1}{3}$ $\text{sum}\left(\frac{1}{(3 \cdot n - 2) \cdot (3 \cdot n + 1)}, n = 1 .. \infty\right)$ $\frac{1}{3}$ <p>Částečný součet řady:</p> $\sum_{n=1}^k \frac{1}{(3 \cdot n - 2) \cdot (3 \cdot n + 1)}$ $-\frac{1}{9\left(k + \frac{1}{3}\right)} + \frac{1}{3}$ $\text{sum}\left(\frac{1}{(3 \cdot n - 2) \cdot (3 \cdot n + 1)}, n = 1 .. k\right)$ $-\frac{1}{9\left(k + \frac{1}{3}\right)} + \frac{1}{3}$	$\sum_{n=1}^5 \frac{1}{(3 \cdot n - 2) \cdot (3 \cdot n + 1)}$ $\frac{5}{16}$ $\text{sum}\left(\frac{1}{(3 \cdot n - 2) \cdot (3 \cdot n + 1)}, n = 1 .. 5\right)$ $\frac{5}{16}$ <p>Matematický zápis řady:</p> $\frac{1}{(3 \cdot n - 2) \cdot (3 \cdot n + 1)} \xrightarrow{\text{sum w.r.t. } n} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n - 2)(3n + 1)} = \frac{1}{3}$ $\text{Sum}\left(\frac{1}{(3 \cdot n - 2) \cdot (3 \cdot n + 1)}, n = 1 .. \infty\right) : \% = \text{value}(\%)$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n - 2)(3n + 1)} = \frac{1}{3}$
--	---

Obrázek 3.53: Různé možnosti zápisu nekonečných (i konečných) řad.

Nekonečné řady (i konečné součty) zadáváme v Maple několika způsoby. Jednak paleta **Expression** nabízí předdefinovaný symbol velkého řeckého písmene sigma, k dispozici je také příkaz **sum** a využít můžeme opět i kontextové nabídky dokumentu (i když trochu „komplikovaně“). Příkaz **sum** má dva parametry ( $n$ -tý člen řady a „součtové“ meze). Po provedení příkaz vypíše součet řady (pokud jej umí určit). Systém Maple nabízí též příkaz **Sum** s velkým počátečním písmenem, jenž slouží pro matematický zápis řady s použitím řeckého písmene sigma. A právě takový zápis je možné získat i pomocí kontextové nabídky,

když do dokumentu zapíšeme  $n$ -tý člen řady, klikneme na něj pravým tlačítkem myši a zvolíme položku **Constructions** > **Sum** > **n**. Dalším kliknutím pravého tlačítka myši (tentokrát na matematický zápis řady) a zvolením **Evaluate (from inert)** získáme součet řady (pokud jej Maple umí určit) – obrázek 3.53.

S tím, co již známe, nám nic nebrání ve vypsání posloupnosti částečných součtů. Tuto posloupnost navíc můžeme vykreslit, například společně se součtem řady – viz obrázek 3.54.



Obrázek 3.54: Vykreslení posloupnosti částečných součtů a součtu řady.

Existují nekonečné řady, jejichž součet Maple neumí určit. V takových případech ani nevypíše, zda řada součet má (tj. zda konverguje) či zda řada diverguje. V těchto situacích musíme konvergenci řady vyšetřit „sami“ jinými postupy, přičemž si samozřejmě můžeme „pomáhat systémem Maple“ při dílčích krocích.

**Příklad 3.65:** Určete součty následujících řad:

(a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)}$ ,      (b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ,      (c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ .

**Příklad 3.66:** Určete součty následujících řad:

(a)  $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2 \cdot \sqrt{n+1} + \sqrt{n})$ ,      (b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{2 \cdot n^2}\right)$ .

*Řešení:*

- (a) Systém Maple zadanou řadu sečíst neumí. Určíme tedy částečný součet řady  $s_k$  pro libovolné (pevné)  $k$  a následně prověříme existenci limitu tohoto částečného součtu pro  $k \rightarrow \infty$ . Částečný součet  $s_k$  přitom odvodíme na základě několika částečných součtů pro různé konkrétní numerické hodnoty. Zcela správně bychom měli (například matematickou indukcí) dokázat, že pravidlo, které vypočítáme z některých (nejlépe několika prvních) částečných součtů platí skutečně pro libovolné  $k$ .

Naznačme proto takový důkaz aspoň nyní. Díky Maple víme, že

$$\sum_{n=1}^{10} \left( \sqrt{n+2} - 2 \cdot \sqrt{n+1} + \sqrt{n} \right) = 1 - \sqrt{2} - \sqrt{11} + \sqrt{12},$$

$$\sum_{n=1}^{11} \left( \sqrt{n+2} - 2 \cdot \sqrt{n+1} + \sqrt{n} \right) = 1 - \sqrt{2} - \sqrt{12} + \sqrt{13},$$

$$\sum_{n=1}^{12} \left( \sqrt{n+2} - 2 \cdot \sqrt{n+1} + \sqrt{n} \right) = 1 - \sqrt{2} - \sqrt{13} + \sqrt{14}.$$

Předpokládejme nyní, že pro libovolné  $k \geq 10$  platí:

$$\sum_{n=1}^k \left( \sqrt{n+2} - 2 \cdot \sqrt{n+1} + \sqrt{n} \right) = 1 - \sqrt{2} - \sqrt{k+1} + \sqrt{k+2}.$$

Pak platí:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{k+3} \left( \sqrt{n+2} - 2 \cdot \sqrt{n+1} + \sqrt{n} \right) &= 1 - \sqrt{2} - \sqrt{k+1} + \sqrt{k+2} \\ &+ \left( \sqrt{k+3} - 2 \cdot \sqrt{k+2} + \sqrt{k+1} \right) \\ &+ \left( \sqrt{k+4} - 2 \cdot \sqrt{k+3} + \sqrt{k+2} \right) \\ &+ \left( \sqrt{k+5} - 2 \cdot \sqrt{k+4} + \sqrt{k+3} \right) \\ &= 1 - \sqrt{2} - \sqrt{k+4} + \sqrt{k+5}. \end{aligned}$$

Zjistili jsme tedy, že pokud naše hypotéza platí pro libovolné  $k \geq 10$ , platí i pro  $k+3$ . Jelikož víme, že vypočítaný vztah platí pro  $k \in \{10, 11, 12\}$ , pak musí nutně platit pro zcela libovolné  $k \geq 10$ .

- (b) Systém Maple zadanou řadu sečíst opět neumí. Postupujeme totožným způsobem jako v předchozím příkladu. Opět je třeba dokázat, že vypočítaný vztah skutečně platí pro libovolné  $k$ . V tomto případě to necháváme na čtenáři (obrázek 3.55).

Pokud nedokážeme určit součet řady ani my, zpravidla bychom chtěli alespoň odpověď na otázku, zda řada konverguje či diverguje. Zabývat se nyní budeme řadami s nezápornými členy, u nichž platí, že buď konvergují (k nějaké konečné reálné hodnotě) nebo divergují k nekonečnu. Pro zjištění, zda řada konverguje či diverguje, máme několik rozhodovacích kritérií.

**Poznámka 3.28: (Srovnávací kritérium)** Mějme řady  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  s nezápornými členy a necht'  $a_n \leq b_n$  pro všechna  $n \in \mathbb{N}$ . Pak platí:

- konverguje-li řada  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ , konverguje i řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,
- diverguje-li řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , diverguje i řada  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ .

$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$ $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$ $\sum_{n=1}^{10} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$ $1 - \sqrt{2} - \sqrt{11} + \sqrt{12}$ $\sum_{n=1}^{11} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$ $1 - \sqrt{2} - \sqrt{12} + \sqrt{13}$ $\sum_{n=1}^{12} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$ $1 - \sqrt{2} - \sqrt{13} + \sqrt{14}$ $\sum_{n=1}^{88} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$ $1 - \sqrt{2} - \sqrt{89} + \sqrt{90}$ <p><b>Je zřejmé, že:</b></p> $\sum_{n=1}^k (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = 1 - \sqrt{2}$ $- \sqrt{k+1} + \sqrt{k+2}$ <p><b>A tedy:</b></p> $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) =$ $\lim_{k \rightarrow \infty} (1 - \sqrt{2} - \sqrt{k+1} + \sqrt{k+2}) = 1 - \sqrt{2}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{2 \cdot n^2}\right)$ $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{2n^2}\right)$ $\text{simplify} \left( \sum_{n=1}^{10} \arctan\left(\frac{1}{2 \cdot n^2}\right) \right)$ $\arctan\left(\frac{10}{11}\right)$ $\text{simplify} \left( \sum_{n=1}^{11} \arctan\left(\frac{1}{2 \cdot n^2}\right) \right)$ $\arctan\left(\frac{11}{12}\right)$ $\text{simplify} \left( \sum_{n=1}^{12} \arctan\left(\frac{1}{2 \cdot n^2}\right) \right)$ $\arctan\left(\frac{12}{13}\right)$ $\text{simplify} \left( \sum_{n=1}^{88} \arctan\left(\frac{1}{2 \cdot n^2}\right) \right)$ $\arctan\left(\frac{88}{89}\right)$ <p><b>Je zřejmé, že:</b></p> $\sum_{n=1}^k \arctan\left(\frac{1}{2 \cdot n^2}\right) = \arctan\left(\frac{k}{k+1}\right)$ <p><b>A tedy:</b></p> $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{2 \cdot n^2}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \arctan\left(\frac{k}{k+1}\right) = \frac{1}{4} \pi$
--	--

Obrázek 3.55: Řešení příkladu 3.66. Část (a) vlevo, část (b) vpravo.

**Poznámka 3.29: (Limitní srovnávací kritérium)** Mějme řady  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  s nezápornými členy a necht' existuje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L.$$

Pak platí:

- je-li  $L < \infty$  a konverguje-li řada  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ , konverguje i řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,
- je-li  $L > 0$  a diverguje-li řada  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ , diverguje i řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

**Poznámka 3.30: (Odmocninové kritérium)** Necht'  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  je řada s nezápornými členy.

- Platí-li pro všechna  $n \in \mathbb{N}$ :  $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$ , pak řada konverguje,

- existuje-li

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q, \quad \text{kde } q \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\},$$

pak pro  $q < 1$  řada konverguje, pro  $q > 1$  řada diverguje.

**Poznámka 3.31: (Podílové kritérium)** Necht'  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  je řada s nezápornými členy.

- Platí-li pro všechna  $n \in \mathbb{N}$ :  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$ , pak řada konverguje, platí-li pro všechna  $n \in \mathbb{N}$ :  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ , pak řada diverguje,

- existuje-li

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \quad \text{kde } q \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\},$$

pak pro  $q < 1$  řada konverguje, pro  $q > 1$  řada diverguje.

**Poznámka 3.32: (Limitní Raabeovo kritérium)** Necht'  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  je řada s nezápornými členy a necht' existuje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = q, \quad \text{kde } q \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\},$$

pak pro  $q > 1$  řada konverguje, pro  $q < 1$  řada diverguje.

**Poznámka 3.33: (Integrální kritérium)** Necht' je funkce  $f$  definovaná na intervalu  $[1, \infty)$ , která je na tomto intervalu nezáporná a nerostoucí. Necht'  $f(n) = a_n$  pro  $n \in \mathbb{N}$ . Pak řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konverguje právě tehdy, když konverguje nevládní integrál

$$\int_1^{\infty} f(x) dx.$$

**Příklad 3.67:** Rozhodněte o konvergenci následujících řad:

(a)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)},$

(d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!},$

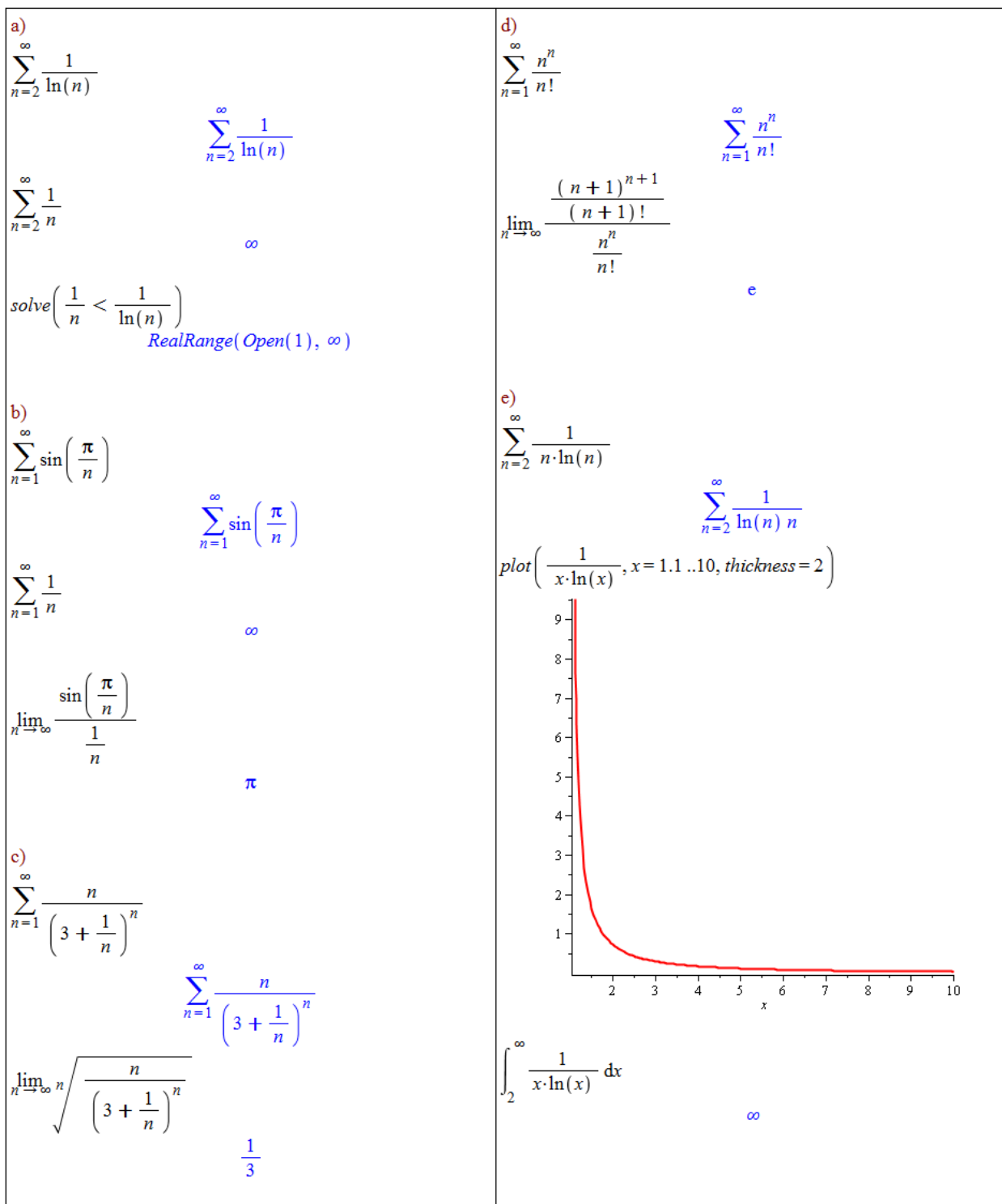
(b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right),$

(e)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln(n)}.$

(c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\left(3 + \frac{1}{n}\right)^n},$

*Řešení:*

- (a) Využijeme srovnávacího kritéria a toho, že řada  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$  diverguje. Jelikož pro všechna  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$  platí:  $\frac{1}{n} < \frac{1}{\ln(n)}$ , podle srovnávacího kritéria řada  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$  diverguje.



Obrázek 3.56: Pomocné výpočty k řešení příkladu 3.67.

(b) Nyní využijeme limitního srovnávacího kritéria a znovu řady  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ , která diverguje.

Jelikož  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \pi$ , řada  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$  diverguje.

(c) Opět budeme počítat limitu, tentokrát v odmocninovém kritériu.

Jelikož  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{\left(3 + \frac{1}{n}\right)^n}} = \frac{1}{3}$ , zadaná řada konverguje.

(d) V tomto případě využijeme podílového kritéria, resp. opět jeho limitní varianty.

Jelikož  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}}{\frac{(n+1)!}{n!}} = e$ , zadaná řada diverguje.

(e) V posledním případě použijeme integrální kritérium. Funkce  $f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(x)}$  je na intervalu  $[2, \infty)$  nezáporná a klesající (předpoklady integrálního kritéria). Jelikož

$$\int_2^{\infty} f(x) dx = \infty,$$

řada  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln(n)}$  diverguje. Pomocné výpočty v Maple k tomuto příkladu ilustruje obrázek 3.56.

**Příklad 3.68:** Rozhodněte o konvergenci následujících řad:

- |  |   |  |
|--|---|--|
| (a) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$ ,        | (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ , | (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n}$ ,          |
| (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2 \cdot n}}$ , | (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$ ,  | (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$ , |
| (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^4+1}}$ ,  | (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^4}$ ,                   | (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ .            |

### 3.6.1 Absolutní konvergence řad

**Definice 3.19:** Nekonečná řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  se nazývá *alternující*, jestliže pro všechna  $n \in \mathbb{N}$  platí:  $\text{signum}(a_{n+1}) = -\text{signum}(a_n)$ .

**Poznámka 3.34: (Leibnizovo kritérium)** Necht'  $a_n$  je nerostoucí posloupnost kladných čísel. Pak alternující řada  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot a_n$  konverguje právě tehdy, když platí  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

Alternující řady zadáváme systému stejným způsobem jako veškeré nekonečné řady. Jak uvidíme, systém Maple umí počítat součty alternujících řad. V případech, kdy součet řady určit nedokáže, nám velmi pomůže výše zmíněné Leibnizovo kritérium konvergence.

**Příklad 3.69:** Rozhodněte o konvergenci následujících řad:

- |  |  |
|--|--|
| (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot (-1)^{n-1}$ , | (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \cdot (-1)^{n-1}$ . |
|--|--|

*Řešení:*

- (a) Systém Maple určí součet zadané řady.
- (b) V tomto případě Maple součet neurčí. Využijeme proto Leibnizova kritéria, díky němuž zjistíme, že zadaná řada diverguje.

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right) \cdot (-1)^{n-1}$ <p style="text-align: center; color: blue;"><math>\ln(2)</math></p>	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right) \cdot (-1)^{n-1}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\frac{1}{n^n}}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ <p style="text-align: center; color: blue;">1</p>
---	--

Obrázek 3.57: Pomocné výpočty k řešení příkladu 3.69.

**Definice 3.20:** Řekneme, že nekonečná řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  *konverguje absolutně*, jestliže konverguje řada  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ . Jestliže řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konverguje a řada  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  diverguje, říkáme, že řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  *konverguje neabsolutně*.

**Poznámka 3.35:** Konverguje-li řada  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ , konverguje i řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . Diverguje-li řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , pak diverguje také řada  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ .

**Příklad 3.70:** Rozhodněte o konvergenci a absolutní konvergenci následujících řad:

(a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot (-1)^{n-1}$ ,                      (b)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln(n)} \cdot (-1)^n$ .

*Řešení:*

- (a) Systém Maple součet zadané řady neurčí. Využijeme proto Leibnizova kritéria, díky němuž zjistíme, že zadaná řada konverguje. K posouzení absolutní konvergence již můžeme využít systému Maple. Závěr tedy je, že zadaná řada konverguje neabsolutně.
- (b) Systém Maple neurčí součet ani jedné z řad. Pro posouzení konvergence zadané řady využijeme Leibnizova kritéria, díky němuž zjistíme, že zadaná řada konverguje. Konvergenci (resp. divergenci) řady absolutních hodnot můžeme ověřit např. integrálním kritériem, což jsme prováděli již v příkladu 3.67.(e), kde jsme zjistili, že tato řada diverguje. Závěr tedy je, že zadaná řada konverguje neabsolutně.



$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot (-1)^{n-1}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) (-1)^{n-1}$	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln(n)} \cdot (-1)^n$ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln(n)}$
$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \cdot \ln(n)}$
0	0
$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln(n)}$ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n)}$
$\infty$	

Obrázek 3.58: Pomocné výpočty k řešení příkladu 3.70.

**Příklad 3.71:** Rozhodněte o konvergenci a absolutní konvergenci následujících řad:

- |  |  |
|--|--|
| (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2 \cdot n + 1)!} \cdot (-1)^{n-1},$ | (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n - \ln(n))} \cdot (-1)^n,$                       |
| (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3 \cdot n - 1} \cdot (-1)^{n-1},$    | (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n))^n} \cdot (-1)^n,$                         |
| (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} \cdot (-1)^{n-1},$         | (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\left(3 + \frac{1}{n}\right)^n} \cdot (-1)^{n-1}.$ |

## 4 Lineární algebra s Maple v $\mathbb{C}^n$ .

Oproti kapitolám věnovaným matematické analýze nyní přejdeme od prostoru reálných čísel  $\mathbb{R}$  k obecnějšímu prostoru čísel komplexních  $\mathbb{C}$ .

### 4.1 Vektorové prostory

#### 4.1.1 Vektory

**Definice 4.1:** Nechť  $n \in \mathbb{N}$ . *Vektorem* v prostoru  $\mathbb{C}^n$  rozumíme uspořádanou  $n$ -tici komplexních čísel. Sčítání vektorů definujeme po složkách, při násobení vektoru skalárem (tj. komplexním číslem) vynásobíme skalárem každou složku vektoru.

**Poznámka 4.1:** Vektorem zpravidla přesněji rozumíme uspořádanou  $n$ -tici zapsanou jako sloupec hodnot.

V systému Maple můžeme vektor vytvořit dvěma hlavními způsoby<sup>1</sup>. Prvním je zapsat složky vektoru do lomených závorek, druhý způsob představuje použití příkazu `Vector`. Příkaz nemá žádný povinný parametr, nicméně jeho provedení bez parametru vytvoří 0-dimenzionální vektor. V nepovinných parametrech můžeme příkazu především říct, jakou má mít výsledný vektor dimenzi a z jakých hodnot se má skládat.

$u := \langle 1, 2 \rangle$	$u := \text{Vector}([1, 2])$
$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$
$v := \langle 0, 1, -1 \rangle$	$v := \text{Vector}([0, 1, -1])$
$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$
$w := \langle I, 0, 0, 2 - I, 3 + I \rangle$	$w := \text{Vector}([I, 0, 0, 2 - I, 3 + I])$
$\begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 2 - I \\ 3 + I \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 2 - I \\ 3 + I \end{bmatrix}$

Obrázek 4.1: Definice vektoru v Maple.

<sup>1</sup>V sekci 4.1.2 si ukážeme ještě jeden významný způsob vytvoření vektoru pomocí palet.

<pre>restart u := Vector(3, symbol = u) Error, recursive assignment  vektor_u := Vector(3, symbol = u)       <math display="block">\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}</math> vektor_v := Vector(3, symbol = v)       <math display="block">\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}</math> k·vektor_u + l·vektor_v       <math display="block">\begin{bmatrix} ku_1 + lv_1 \\ ku_2 + lv_2 \\ ku_3 + lv_3 \end{bmatrix}</math></pre>	<pre>Vector(2)       <math display="block">\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}</math> Vector(1..3, 5)       <math display="block">\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}</math> f := i → x<sup>i-1</sup>: Vector(3, f)       <math display="block">\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{bmatrix}</math> Vector(3, shape = unit[3])       <math display="block">\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}</math></pre>
---	---

Obrázek 4.2: Možnosti při definování vektoru.

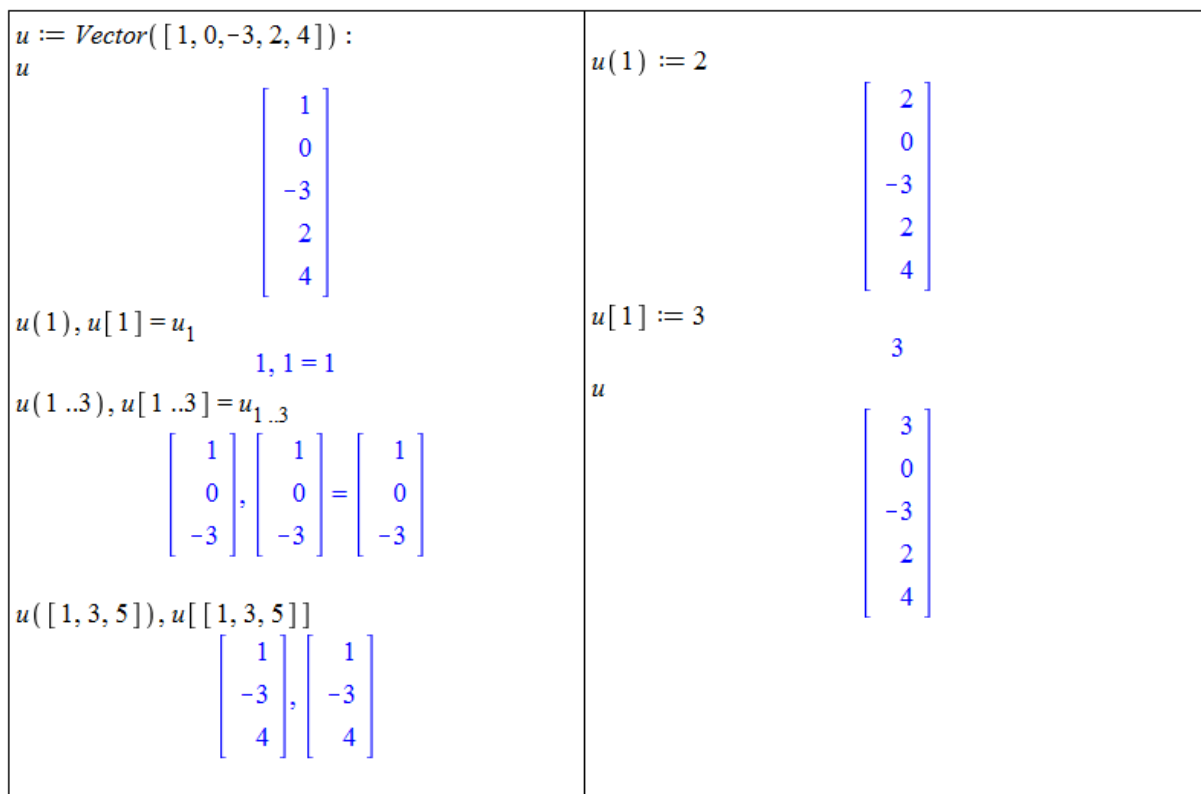
Maple standardně vytvoří vektor jako sloupec hodnot. Pokud chceme mít řádek hodnot, použijeme příkaz ve tvaru `Vector[row]`. Více je patrné z obrázků 4.1 a 4.2. Na obrázku 4.2 Maple při prvním pokusu o vytvoření vektoru vypíše chybovou zprávu **Error, recursive assignment**. Tato zpráva se objevuje vždy, když se snažíme definovat proměnnou pomocí sebe sama. Musíme mít na paměti, že v Maple není možné použít značení, na něž jsme zvyklí z přednášek, tj. např.  $u = (u_1, u_2, u_3)$ .

K jednotlivým složkám vektoru můžeme přistupovat přes indexy. Ty je možné zapisovat do kulatých nebo hranatých závorek, přičemž hranaté závorky jsou ekvivalentní dolnímu indexu, tj.  $u[i] = u_i$ . Funkcionalita kulatých a hranatých závorek v indexování vektorů sice není naprosto totožná, ale pro naše potřeby prakticky bude, a je tak možné používat obojí značení<sup>2</sup>. Indexem může být jediné číslo ( $i$ ), seznam hodnot ( $[i_1, i_2, \dots, i_n]$ ) nebo interval ( $i_1..i_2$ ). Použití ilustruje obrázek 4.3.

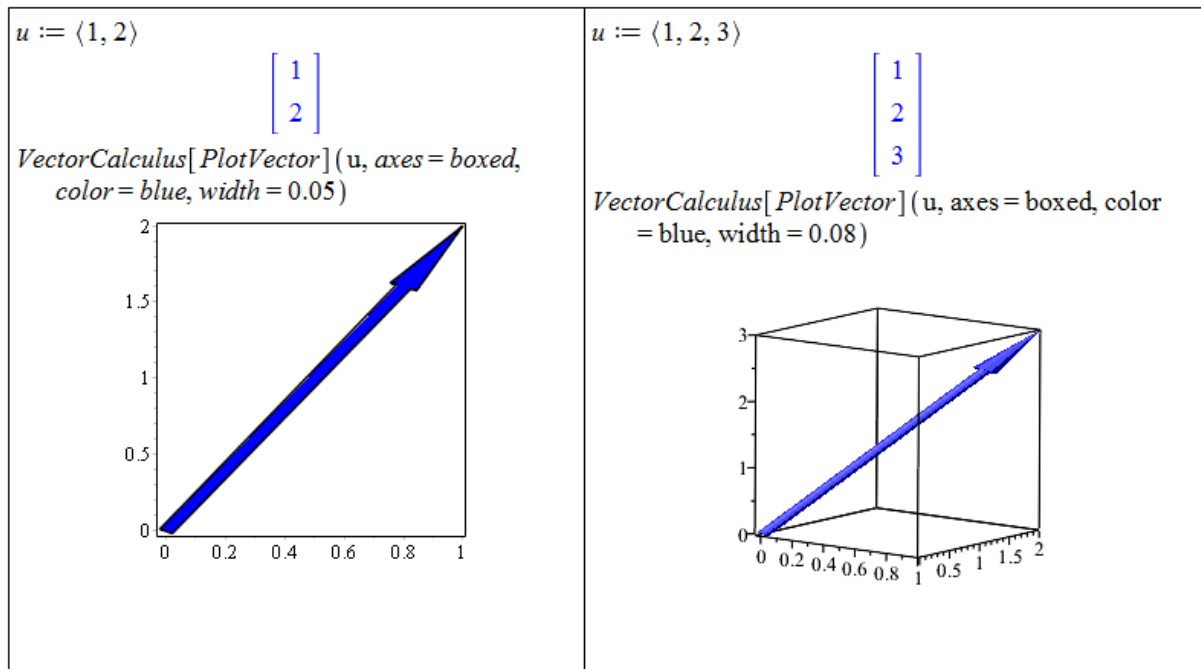
**Poznámka 4.2:** Vektory v prostorech  $\mathbb{R}^2$  a  $\mathbb{R}^3$  si představujeme jako orientované úsečky, tj. úsečky, jejichž jeden krajní bod považujeme za počáteční a druhý za koncový – ten je označený šipkou. Přitom dvě stejně dlouhé, rovnoběžné a souhlasně orientované úsečky představují tentýž vektor. Říkáme, že takové úsečky jsou různými umístěními téhož vektoru.

Poznámku 4.2 můžeme ilustrovat pomocí příkazu `PlotVector` z balíku `VectorCalculus` – obrázek 4.4.

<sup>2</sup>Více o indexování vektorů, matic a obecných polí najdeme např. v nápovědě: [http://www.maplesoft.com/support/help/Maple/view.aspx?path=rtable\\_indexing](http://www.maplesoft.com/support/help/Maple/view.aspx?path=rtable_indexing)



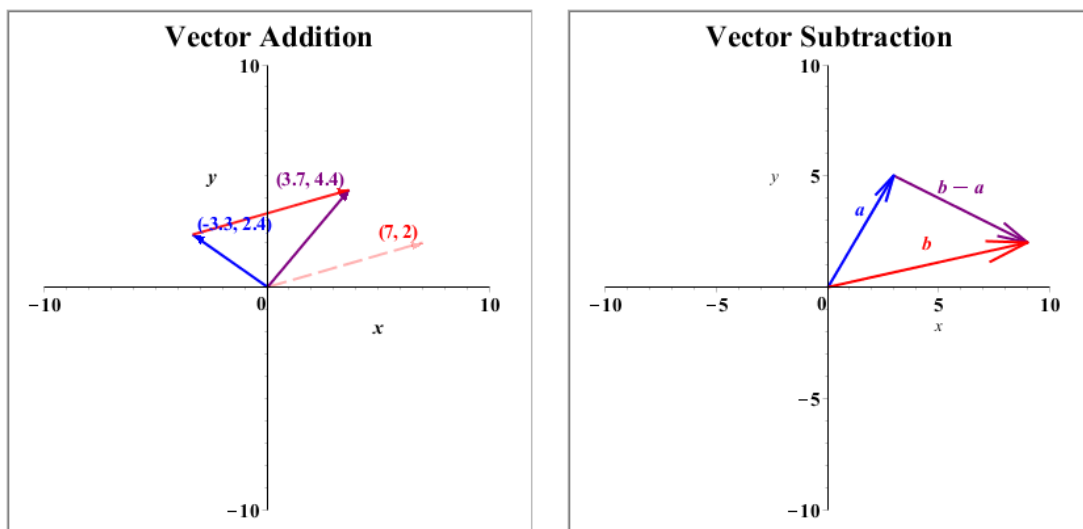
Obrázek 4.3: Indexování vektoru.



Obrázek 4.4: Vykreslení vektoru.

Sčítání vektorů můžeme v Maple znázornit například pomocí matematické aplikace dostupné od verze Maple 16. Spuštěním **Tools > Math Apps** a zvolením **Vector Addition** z části **Vectors** umístíme do dokumentu interaktivní graf s dvěma vektory a jejich součtem. Vektory je přitom možné pomocí myši libovolně měnit. Podobu interaktivního grafu posky-

tuje obrázek 4.5 vlevo. Kromě aplikace znázorňující sčítání vektorů nabízí Maple též aplikaci pro odčítání vektorů (**Vector Subtraction**) – obrázek 4.5 vpravo.



Obrázek 4.5: Interaktivní graf znázorňující sčítání vektorů (vlevo) a odčítání vektorů (vpravo).

**Definice 4.2:** Nechť  $n \in \mathbb{N}$ . Řekneme, že  $V \subseteq \mathbb{C}^n$  spolu s výše definovanými operacemi sčítání vektorů a násobení vektoru skalárem je *vektorový* (resp. *lineární*) *prostor* nad polem  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ , jestliže

1. nulový vektor, tj.  $(0, 0, \dots, 0)$ , patří do  $V$ ,
2.  $\forall u, v \in V, \forall k, l \in \mathbb{K} : k \cdot u + l \cdot v \in V$ .

**Poznámka 4.3:** Vektorový prostor nad obecným polem skalárů spolu s operacemi sčítání vektorů a násobení vektoru skalárem (ne nutně definovanými stejně jako v tomto textu) bývá standardně definován pomocí osmi axiomů. Ty zajišťují např. komutativitu a asociativitu sčítání vektorů, existenci nulového a jednotkového prvku a další. Ponecháváme na čtenáři, aby ověřil, že výše definovaný vektorový prostor vyhovuje i standardní definici.

**Poznámka 4.4:** Standardní definici vektorového prostoru odpovídá daleko více množin s operacemi sčítání vektorů a násobení vektoru skalárem. My jsme se pro jednoduchost omezili pouze na ty vektorové prostory, s nimiž budeme dále v textu pracovat.

**Definice 4.3:** Nechť  $n \in \mathbb{N}$ ,  $V$  je vektorový prostor nad  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ . Výraz

$$\sum_{i=1}^n k_i \cdot u_i$$

pro  $u_1, u_2, \dots, u_n \in V, k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{K}$  nazýváme *lineární kombinací* vektorů  $u_1, u_2, \dots, u_n$  s koeficienty  $k_1, k_2, \dots, k_n$ . Vektory  $u_1, u_2, \dots, u_n$  nazveme *lineárně závislými*, jestliže existují čísla  $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{K}$  tak, že alespoň jedno z nich je nenulové, a platí

$$\sum_{i=1}^n k_i \cdot u_i = 0.$$

Pokud taková netriviální lineární kombinace neexistuje, nazýváme vektory  $u_1, u_2, \dots, u_n$  *lineárně nezávislými*.

**Definice 4.4:** Nechť  $V$  je vektorový prostor nad  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ . Řekneme, že neprázdná množina  $U \subseteq V$  je *vektorový podprostor* prostoru  $V$  nad  $\mathbb{K}$ , jestliže vyhovuje definici 4.2. Mějme dále množinu  $M \subset V$ . Průnik všech vektorových podprostorů prostoru  $V$ , které obsahují množinu  $M$ , se nazývá *lineárním obalem* množiny  $M$ . *Bází* vektorového prostoru  $V$  nad  $\mathbb{K}$  je množina lineárně nezávislých vektorů, jejichž lineární obal je roven celému prostoru  $V$ . Koeficienty lineární kombinace vyjadřující vektor  $u \in V$  ve zvolené bázi  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  se nazývají *souřadnice vektoru  $u$*  v této bázi.

<pre>with(LinearAlgebra) : v1 := &lt;1, 2, 3&gt; : v2 := &lt;1, 1, 1&gt; : v3 := &lt;2, 3, 4&gt; : v4 := &lt;0, 0, 1&gt; : v5 := &lt;0, 0, 3&gt; : Basis([v (3..5)])       [[ 2 ], [ 0 ]        [ 3 ], [ 0 ]        [ 4 ], [ 1 ]]</pre>	<pre>Basis([v (1..3)])       [[ 1 ], [ 1 ]        [ 2 ], [ 1 ]        [ 3 ], [ 1 ]]</pre> <pre>Basis([v (1..4)])       [[ 1 ], [ 1 ], [ 0 ]        [ 2 ], [ 1 ], [ 0 ]        [ 3 ], [ 1 ], [ 1 ]]</pre>
---	--

Obrázek 4.6: Určení báze vektorového prostoru v Maple.

Pro nalezení báze vektorového prostoru poskytuje Maple příkaz **Basis** z balíku **LinearAlgebra**. Jeho parametrem je seznam (nebo množina) vektorů, z nichž chceme určit bázi prostoru, který generují.

**Definice 4.5:** Bázi  $\varepsilon_n = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  vektorového prostoru  $V = \mathbb{K}^n$  nad  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ , kde

$$e_i(j) = 1 \text{ pro } i = j, \quad e_i(j) = 0 \text{ pro } i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

nazýváme *kanonickou* (resp. *standardní*) *bází* tohoto prostoru.

**Poznámka 4.5:** Pokud nebude uvedeno jinak, budou v dalším textu souřadnice vektorů udávány vždy ve standardní bázi. Podobně vektorový prostor  $V = \mathbb{K}^n$ ,  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  bude vždy nad příslušným polem  $\mathbb{K}$ .

**Příklad 4.1:** Nechť  $V = \mathbb{C}^3$  se standardní bázi. Určete souřadnice vektoru  $u = (3, 5, -2)$  ve standardní bázi.

*Řešení:* Odpověď je triviální. Příklad slouží k zamyslení se nad výše definovanými pojmy. Souřadnice vektoru  $u$  ve standardní bázi jsou právě  $(3, 5, -2)$ , neboť

$$3 \cdot e_1 + 5 \cdot e_2 - 2 \cdot e_3 = 3 \cdot (1, 0, 0) + 5 \cdot (0, 1, 0) - 2 \cdot (0, 0, 1) = (3, 5, -2).$$

**Příklad 4.2:** Nechť  $V = \mathbb{C}^3$ . Uvažujme bázi  $\alpha = \{(3, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 1)\}$ . Určete souřadnice vektorů standardní báze v bázi  $\alpha$ .

**Příklad 4.3:** Jsou vektory  $u_1 = (1, -2, 3)$ ,  $u_2 = (2, -1, 0)$ ,  $u_3 = (1, 1, -3)$  lineárně nezávislé?

**Příklad 4.4:** Generují vektory  $u_1 = (1, -2, 3)$ ,  $u_2 = (2, -1, 0)$ ,  $u_3 = (1, 1, -3)$ ,  $u_4 = (1, 0, -1)$  vektorový prostor  $\mathbb{R}^3$ ?

## 4.1.2 Matice

**Definice 4.6:** Necht'  $m, n \in \mathbb{N}$ . *Maticí* typu  $m \times n$  nad množinou komplexních čísel  $\mathbb{C}$  rozumíme obdélníkové schéma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

kde  $a_{ij} \in \mathbb{C}$  pro všechna  $i \in \{1, 2, \dots, m\}, j \in \{1, 2, \dots, n\}$  se nazývají prvky matice. Jestliže  $m = n$ , mluvíme o *čtvercové matici řádu  $n$* .

**Poznámka 4.6:** Jelikož vektorem můžeme chápat matici typu  $m \times 1$ , lze vektory v Maple zadávat stejným způsobem jako matice.

Matice v Maple vytváříme především následujícími třemi způsoby:

- použitím lomených závorek se svislou čarou oddělující jednotlivé sloupce matice,
- použitím příkazu `Matrix`
- nebo použitím palety `Matrix`.

Konkrétní příklady jsou uvedeny na obrázcích 4.7 a 4.8.

$A := \langle 1, 2   3, 4 \rangle$ $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$	$A := \text{Matrix}([\langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle])$ $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$	$A := \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$
$B := \langle 0, 1, -1   I, 0, 0   0, 2 - I, 3 + I \rangle$ $\begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ 1 & 0 & 2 - I \\ -1 & 0 & 3 + I \end{bmatrix}$	$B := \text{Matrix}([\langle 0, I, 0 \rangle, \langle 1, 0, 2 - I \rangle, \langle -1, 0, 3 + I \rangle])$ $\begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ 1 & 0 & 2 - I \\ -1 & 0 & 3 + I \end{bmatrix}$	$B := \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ 1 & 0 & 2 - I \\ -1 & 0 & 3 + I \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ 1 & 0 & 2 - I \\ -1 & 0 & 3 + I \end{bmatrix}$

Obrázek 4.7: Příklady vytvoření matice v Maple.

Zcela analogicky, jako jsme přistupovali k jednotlivým prvkům vektoru, specifikujeme též prvky matice. Opět využíváme zápisu indexů do kulatých nebo hranatých závorek. Ovšem pozor, v případě matic již narazíme na některé odlišnosti těchto dvou zápisů. Při použití jediného indexu (resp. indexu pro jednu dimenzi), který vyjadřuje označení řádku matice, je u kulatých závorek automaticky brán pouze první sloupec, u hranatých závorek celý řádek matice. Více je patrné z příkladů na obrázku 4.9.

$M := \text{Matrix}(3, \text{symbol} = m)$ $\begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{bmatrix}$	$\text{Matrix}(1..2, 1..3, 5)$ $\begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$
$N := \text{Matrix}(2, 3, \text{symbol} = n)$ $\begin{bmatrix} n_{1,1} & n_{1,2} & n_{1,3} \\ n_{2,1} & n_{2,2} & n_{2,3} \end{bmatrix}$	$f := (i, j) \rightarrow x^{i+j-1};$ $\text{Matrix}(3, f)$ $\begin{bmatrix} x & x^2 & x^3 \\ x^2 & x^3 & x^4 \\ x^3 & x^4 & x^5 \end{bmatrix}$
$\text{Matrix}(2, 3)$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\text{Matrix}(3, \text{shape} = \text{identity})$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Obrázek 4.8: Další možnosti při vytváření matice v Maple.

$B := \text{Matrix}([ [0, I, 0], [1, 0, 2 - I], [-1, 0, 3 + I] ])$ $\begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ 1 & 0 & 2 - I \\ -1 & 0 & 3 + I \end{bmatrix}$	$B(2..3, 1..2), B[2..3, 1..2]$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
$B(2, 1), B[2, 1] = B_{2,1}$ $1, 1 = 1$	$B(1) := 14$ $\begin{bmatrix} 14 & I & 0 \\ 1 & 0 & 2 - I \\ -1 & 0 & 3 + I \end{bmatrix}$
$B(2)$ $1$	$B[1] := 16$ $16$
$B[2]$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 - I \end{bmatrix}$	$B$ $\begin{bmatrix} 16 & 16 & 16 \\ 1 & 0 & 2 - I \\ -1 & 0 & 3 + I \end{bmatrix}$
$B(1..3)$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$	$B[1, 1] := 19$ $19$
$B[1..3]$ $\begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ 1 & 0 & 2 - I \\ -1 & 0 & 3 + I \end{bmatrix}$	$B$ $\begin{bmatrix} 19 & 16 & 16 \\ 1 & 0 & 2 - I \\ -1 & 0 & 3 + I \end{bmatrix}$

Obrázek 4.9: Indexování matice.

**Poznámka 4.7:** Matice značíme velkými písmeny, jejich prvky písmeny malými. To znamená, že např. prvky matice  $A$  budeme v textu značit  $a_{ij}$  (pro vhodná  $i, j$ ). Systém Maple rozlišuje velikosti písmen, takže v něm se musíme držet zavedeného označení (tj. používat stále stejné písmeno včetně jeho velikosti). Písmenem  $E$  budeme značit jednotkovou čtvercovou matici řádu  $n \in \mathbb{N}$ , tj. matici, pro niž platí:  $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} : e_{ij} = 1$  pro  $i = j$ ,  $e_{ij} = 0$  jinak.



**Definice 4.7:** Nad maticemi definujeme následující operace:

- *součet matic:*  $A + B = C$ , jestliže  $A, B, C$  jsou matice typu  $m \times n$  ( $m, n \in \mathbb{N}$ ) a platí:  $\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}, j \in \{1, 2, \dots, n\} : c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ,
- *násobení matice skalárem:*  $k \cdot A = B$ , jestliže  $A, B$  jsou matice typu  $m \times n$  ( $m, n \in \mathbb{N}$ ),  $k \in \mathbb{C}$  a platí:  $\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}, j \in \{1, 2, \dots, n\} : b_{ij} = k \cdot a_{ij}$ ,
- *násobení matic:*  $A \cdot B = C$ , jestliže  $A$  je matice typu  $m \times n$ ,  $B$  je matice typu  $n \times q$ ,  $C$  je matice typu  $m \times q$  ( $m, n, q \in \mathbb{N}$ ) a platí:

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}, k \in \{1, 2, \dots, q\} : c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk}.$$

**Definice 4.8:** Necht'  $A$  je matice typu  $m \times n$  ( $m, n \in \mathbb{N}$ ). Matici  $A^T$  typu  $n \times m$  nazveme *transponovanou maticí* matice  $A$ , jestliže pro její prvky platí:  $a_{ij}^T = a_{ji}$  pro všechna  $i \in \{1, 2, \dots, m\}, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Čtvercovou matici  $A$  řádu  $n \in \mathbb{N}$  nazýváme *symetrickou*, jestliže platí  $A^T = A$ .

**Definice 4.9:** Necht'  $A, B$  jsou čtvercové matice řádu  $n \in \mathbb{N}$  splňující  $A \cdot B = B \cdot A = E$ . Pak se matice  $B$  nazývá *inverzní maticí* k matici  $A$  a značí se  $A^{-1}$ . Matici, k níž existuje matice inverzní, nazýváme *invertibilní maticí*.

$A := \text{Matrix}([ [1, 2, 3], [4, 5, 6], [7, 8, 9] ])$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$	$A^{ \%T }$ $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$
$B := \text{Matrix}([ [3, 2, 1], [6, 5, 4], [9, 8, 7] ])$ $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}$	$A^{-1}$ <p style="color: magenta;">Error, (in rtable/Power) singular matrix</p>
$A + B =$ $\begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 10 & 10 & 10 \\ 16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$	$C := \text{Matrix}([ [1, 2, 3], [1, 0, 1], [7, 0, 0] ])$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
$5 \cdot A =$ $\begin{bmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 20 & 25 & 30 \\ 35 & 40 & 45 \end{bmatrix}$	$C^{-1}$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} \end{bmatrix}$
$AB =$ $\begin{bmatrix} 42 & 36 & 30 \\ 96 & 81 & 66 \\ 150 & 126 & 102 \end{bmatrix}$	

Obrázek 4.10: Maticové operace v Maple.

Obrázek 4.10 ilustruje pojmy předcházejících definic v Maple. Sčítání matic a násobení matice skalárem je stejné jak v psaném textu. Totéž platí pro zápis inverzní matice. Pro násobení matic je určena tečka (tj. tatáž tečka na spodním okraji řádku, kterou například ukončujeme větou). Zápis transponované matice se liší od klasického matematického zápisu přidáním symbolu % do exponentu matice. Pro výpočet inverzní a transponované matice poskytuje navíc Maple příkazy `MatrixInverse` a `Transpose`, které však oba náležejí do balíku `LinearAlgebra`, jenž je proto potřeba před jejich použitím načíst. Pokud se pokusíme vypočítat inverzi k neinvertibilní (tj. *singulární*) matici, vypíše systém Maple chybovou zprávu **Error, (in rtable/Power) singular matrix**.

Matici můžeme systému Maple zadávat i blokově. Na obrázku 4.11 vidíme, jak k tomu použít příkaz `Matrix`.

$A := \text{Matrix}([ [1, 2, 3], [4, 5, 6], [7, 8, 9] ])$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$	$C := \text{Matrix}(2, 3)$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
$B := \text{Matrix}([ [3, 2, 1], [6, 5, 4], [9, 8, 7] ])$ $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}$	$F := \text{Matrix}([ [1, 1, 1] ])$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
$E := \text{Matrix}(3, \text{shape} = \text{identity})$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$N := \text{Matrix}([ [A, E], [B[1..2], C], [B[3], F] ])$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 8 & 7 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Obrázek 4.11: Maticové operace v Maple.

**Příklad 4.5:** Nechtě

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Určete  $A^2, A^3, \dots$

*Řešení:* V Maple získáme příslušné matice jednoduše, a to pouhým přepisem maticových výrazů. Nicméně obdržený výsledek není v nejjednodušším tvaru, což napravíme použitím příkazu `combine` (viz část 2.1.1). Při provedení indukčního kroku (k důkazu správnosti předpokladu o obecném tvaru  $A^k$ ) je možné pro „lepší“ vzhled použít příkaz `factor`, jenž je třeba aplikovat na každý prvek matice. K takové aplikaci slouží příkaz `map`. Řešení v systému Maple znázorňuje obrázek 4.12.

**Příklad 4.6:** Nechtě

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = (-1 \ 0 \ 2), \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

$A := \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$ $A^2$ $\begin{bmatrix} \cos(\alpha)^2 - \sin(\alpha)^2 & -2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) \\ 2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) & \cos(\alpha)^2 - \sin(\alpha)^2 \end{bmatrix}$ $\text{combine}(\%)$ $\begin{bmatrix} \cos(2\alpha) & -\sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & \cos(2\alpha) \end{bmatrix}$ $\text{combine}(A^3)$ $\begin{bmatrix} \cos(3\alpha) & -\sin(3\alpha) \\ \sin(3\alpha) & \cos(3\alpha) \end{bmatrix}$	$A^k$ $\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}^k$ $K := \begin{bmatrix} \cos(k\alpha) & -\sin(k\alpha) \\ \sin(k\alpha) & \cos(k\alpha) \end{bmatrix}$ $\text{combine}(K.A) \# = A^{k+1}$ $\begin{bmatrix} \cos(k\alpha + \alpha) & -\sin(k\alpha + \alpha) \\ \sin(k\alpha + \alpha) & \cos(k\alpha + \alpha) \end{bmatrix}$ $\text{map}(x \rightarrow \text{factor}(x), \%)$ $\begin{bmatrix} \cos(\alpha(1+k)) & -\sin(\alpha(1+k)) \\ \sin(\alpha(1+k)) & \cos(\alpha(1+k)) \end{bmatrix}$
---	--

Obrázek 4.12: Maticové operace v Maple.

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Určete  $G^2 - 3 \cdot F$ ,  $A - F$ ,  $A - G \cdot F \cdot A$ ,  $B \cdot A \cdot C \cdot H - B \cdot F \cdot B^T$ .

**Příklad 4.7:** K maticím

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1+I & 1-I \\ 2 & I \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

určete matice inverzní.

**Příklad 4.8:** Vytvořte matici  $A$  typu  $4 \times 4$  tak, aby:

a)  $a_{ij} = i + j$ ,

b)  $a_{ij} = i^{j-1}$ ,

c)  $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \dots \text{pokud } |i - j| > 1 \\ -1 & \dots \text{pokud } |i - j| \leq 1. \end{cases}$

pro  $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ .

**Příklad 4.9:** Nechť  $0$  je nulová matice typu  $2 \times 2$ . Existuje nenulová matice  $A$  typu  $2 \times 2$  tak, že:

a)  $A \cdot A = 0$  ?

b)  $A \cdot A = A$  ?

**Příklad 4.10:** Ukažte, že matice

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

reprezentuje otočení v rovině o úhel  $\alpha$ . Tj. jestliže maticí  $A$  vynásobíme (sloupcový) vektor, získáme vektor pootočený o úhel  $\alpha$ . Ilustrujte graficky.

### 4.1.3 Soustavy lineárních rovnic

**Poznámka 4.8:** Soustavy lineárních rovnic můžeme přehledně zapisovat pomocí matic. Uvažujme systém

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n &= y_1, \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n &= y_2, \\ &\vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \cdots + a_{mn} \cdot x_n &= y_m. \end{aligned}$$

Jestliže označíme  $A = (a_{ij})$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)^T$ , můžeme uvedený systém přepsat do tvaru

$$A \cdot x = y.$$

Balík `LinearAlgebra` nabízí pro řešení soustav lineárních rovnic příkaz `LinearSolve`. Příkaz má dva základní parametry, a to matici  $A$  a vektor  $y$ , který není nutné uvádět v případě, že je nulový. Dále máme k dispozici ještě několik nepovinných parametrů, z nichž uveďme parametr `free`, v němž můžeme specifikovat symbol pro volnou proměnou (tj. parametr použitý při zápisu výsledku s nekonečně mnoha řešeními). Ukázkou použití nabízí obrázek 4.13.

Mezi pomocnými nástroji zvanými **Tutors** (spustitelnými například z položky **Tools** hlavního menu) najdeme pro lineární algebru mj. nástroj ilustrující soustavu lineárních rovnic graficky – **Linear System Plot**. Tento maplet je možné použít v oborech  $\mathbb{R}^2$  a  $\mathbb{R}^3$ , v nichž dané rovnice představují přímky nebo roviny. Názorně tak můžeme vidět, zda má zadaná soustava rovnic řešení a kolik jich je. Maplet je možné spustit přímo z dokumentu příkazem `LinearSystemPlotTutor` z balíku `Student [LinearAlgebra]`. Jeho podobu znázorňuje obrázek 4.14.

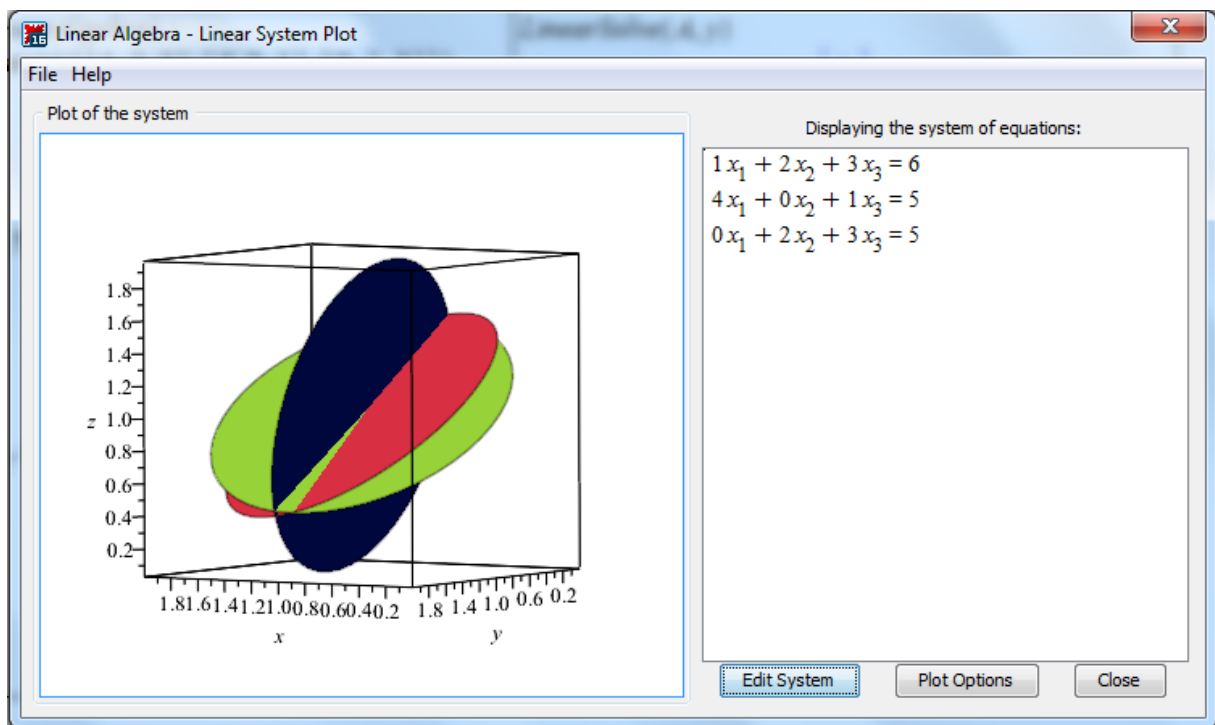
Pomocí příkazu `LinearSolve` můžeme též jednoduše zjistit souřadnice vektoru v zadané bázi – viz příklad 4.11.

**Příklad 4.11:** Uvažujme bázi  $\alpha = \{u_1, u_2, u_3\}$  vektorového prostoru  $V$ , kde  $u_1 = (2, -1, 0)^T$ ,  $u_2 = (-4, 1, 2)^T$ ,  $u_3 = (3, 0, -1)^T$ . Určete souřadnice vektoru  $z = (-2, -1, 2)^T$  v bázi  $\alpha$ .

*Řešení:* Souřadnice  $zn$  v bázi  $\alpha$  jsou řešením rovnice  $A \cdot zn = z$ , kde matice  $A$  je tvořena právě bází  $\alpha$ . Postup výpočtu ilustruje obrázek 4.15.

<pre>with(LinearAlgebra) : A := Matrix([[1, 2, 3], [4, 0, 1], [0, 2, 3]])</pre> $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ <pre>y := &lt;6, 5, 5&gt;</pre> $\begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$ <pre>A.&lt;x1, x2, x3&gt; = y</pre> $\begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ 4x_1 + x_3 \\ 2x_2 + 3x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$	<pre>LinearSolve(A, y)</pre> $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ <pre>B := Matrix([[1, 2, 3], [4, 5, 6], [7, 8, 9]]) : z := &lt;6, 15, 24&gt; : LinearSolve(B, z, free='t')</pre> $\begin{bmatrix} t_3 \\ 3 - 2t_3 \\ t_3 \end{bmatrix}$
--	--

Obrázek 4.13: Řešení soustav lineárních rovnic příkazem LinearSolve.



Obrázek 4.14: Grafické zobrazení soustavy lineárních rovnic.

**Příklad 4.12:** Uvažujme soustavu lineárních rovnic s neznámými  $x, y, z$  a parametry  $c, d \in \mathbb{C}$ :

$$\begin{aligned} x + c \cdot y - c \cdot z &= -3, \\ x + (c - 1) \cdot y - (c + 3) \cdot z &= -5, \\ x + (c + 1) \cdot y + 2 \cdot z &= d - 1. \end{aligned}$$

Určete, pro která  $c, d$  má soustava žádné, jedno, resp. nekonečně mnoho řešení.

<pre>with(LinearAlgebra) : u<sub>1</sub> := ⟨2, -1, 0⟩ : u<sub>2</sub> := ⟨-4, 1, 2⟩ : u<sub>3</sub> := ⟨3, 0, -1⟩ : A := Matrix([u<sub>1</sub>, u<sub>2</sub>, u<sub>3</sub>])</pre> $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ <pre>z := ⟨-2, -1, 2⟩ : zn := LinearSolve(A, z)</pre> $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$	<pre>seq(zn[i]·u[i], i=1..3)</pre> $\begin{bmatrix} 3 \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ <pre>zn[1]·u[1] + zn[2]·u[2] + zn[3]·u[3]</pre> $\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$
---	---

Obrázek 4.15: Řešení příkladu 4.11.

*Řešení:* Zapišeme zadanou soustavu maticově a využijeme přírazu `LinearSolve`. Získáme řešení vyjádřené pomocí parametrů  $c, d$ . Počet řešení soustavy je závislý především na hodnotě jmenovatele. Pokud je nenulový ( $c \neq 1$ ), soustava má jediné řešení. Pokud je jmenovatel nulový ( $c = 1$ ), je nutné rozlišit případy, kdy je nulový i čítec ( $d = 0$ , nekonečně mnoho řešení) a kdy je čítec různý od nuly ( $d \neq 0$ , tj. kdy zlomek nemá smysl, a tedy ani soustava řešení). Postup výpočtu je uveden na obrázku 4.16. Při řešení bylo využito (nově) příkazů `numer` pro získání čítele zlomku a `op` k získání operandů ze zadaného výrazu (v tomto případě ze seznamu).

<pre>with(LinearAlgebra) : A := Matrix([[1, c, -c], [1, c-1, -c-3], [1, c+1, 2]])</pre> $\begin{bmatrix} 1 & c & -c \\ 1 & c-1 & -c-3 \\ 1 & c+1 & 2 \end{bmatrix}$ <pre>y := ⟨-3, -5, d-1⟩</pre> $\begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ d-1 \end{bmatrix}$ <pre>R := LinearSolve(A, y)</pre> $\begin{bmatrix} -\frac{2c^2 + c - 4dc - 3}{c-1} \\ \frac{2c - 2 - 3d}{c-1} \\ \frac{d}{c-1} \end{bmatrix}$	<pre>eval(map(x→numer(x), R), {c=1})</pre> $\begin{bmatrix} 4d \\ -3d \\ d \end{bmatrix}$ <pre>solve({seq(%[i]=0, i=1..3)})</pre> $\{d=0\}$ <pre>A2, y2 := op(eval([A, y], {c=1, d=0}))</pre> $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix}$ <pre>LinearSolve(A2, y2, free=t)</pre> $\begin{bmatrix} -5 + 4t_3 \\ 2 - 3t_3 \\ t_3 \end{bmatrix}$
---	---

Obrázek 4.16: Řešení příkladu 4.12.

**Příklad 4.13:** Uvažujme bázi  $\alpha = \{u_1, u_2, u_3\}$  vektorového prostoru  $V$ , kde  $u_1 = (1, 1, 0)^T$ ,  $u_2 = (1, 0, 1)^T$ ,  $u_3 = (0, 1, 1)^T$ . Určete souřadnice vektoru  $v = (1, 2, 3)^T$  v bázi  $\alpha$ .

**Příklad 4.14:** Který z vektorů  $u_1, u_2, u_3, u_4$  doplňuje množinu  $\alpha$  na bázi prostoru  $\mathbb{R}^4$ ?:

a)  $\alpha = \{(1, -2, 1, -1)^T, (1, 0, -1, -1)^T, (1, 1, -2, 0)^T\}$ ,  
 $u_1 = (-1, 2, -1, 1)^T, u_2 = (3, -1, -2, -1)^T, u_3 = (2, 1, 0, -2)^T, u_4 = (2, 1, -3, -2)^T$ .

b)  $\alpha = \{(1, 3, 0, -1)^T, (1, 0, 0, -1)^T, (0, 2, 1, 0)^T\}$ ,  
 $u_1 = (-1, 1, -1, 1)^T, u_2 = (3, -1, 0, -3)^T, u_3 = (2, 1, 0, -2)^T, u_4 = (1, -2, 0, -1)^T$ .

**Příklad 4.15:** Prostory  $\mathbb{R}_n[x]$  a  $\mathbb{C}_n[x]$  všech polynomů s reálnými, resp. komplexními, koeficienty spolu se standardně definovaným součtem polynomů a skalárním násobkem polynomu tvoří také vektorový prostor (*pozn. dokažte*). Zjistěte, zda jsou následující polynomy v uvedených prostorech lineárně závislé nebo ne:

a)  $\mathbb{R}_3[x] : 1 - x, x - x^2, x^2 - x^3, x^3 - 1,$

b)  $\mathbb{R}_3[x] : 1 + x, x + x^2, x^2 + x^3, x^3 + 1,$

c)  $\mathbb{R}_2[x] : 2 - x + 4 \cdot x^2, 3 + 6 \cdot x + 2 \cdot x^2, 2 + 10 \cdot x - 4 \cdot x^2,$

d)  $\mathbb{R}_2[x] : 1 + 3 \cdot x + 3 \cdot x^2, x + x^2, 5 + 6 \cdot x + 3 \cdot x^2, 7 + 2 \cdot x - x^2.$

**Příklad 4.16:** Uvažujme soustavu lineárních rovnic s neznámými  $x, y, z$  a parametry  $a, b \in \mathbb{R}$ :

a)

$$\begin{aligned} a \cdot x + y - 2 \cdot z &= 1, \\ x - y + z &= 0, \\ (1 + a) \cdot y - z &= b. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x - a \cdot y - 2 \cdot z &= b, \\ x + (1 - a) \cdot y &= b - 3, \\ x + (1 + a) \cdot y + a \cdot z &= 2 \cdot b - 1. \end{aligned}$$

Určete, pro která  $a, b$  má soustava žádné, jedno, resp. nekonečně mnoho řešení.

**Příklad 4.17:** Uvažujme soustavu lineárních rovnic s neznámými  $x_1, x_2, x_3$  a parametry  $a, b, c \in \mathbb{C}$ :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3, \\ x_1 + a \cdot x_2 + x_3 &= 2, \\ b \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 &= c. \end{aligned}$$

Určete, pro která  $a, b, c$  má soustava žádné, jedno, resp. nekonečně mnoho řešení.

#### 4.1.4 Gaussova eliminace

**Poznámka 4.9:** (Gaussova eliminace) Nenulovou matici  $A$  typu  $m \times n$  nad  $\mathbb{C}$  lze konečně mnoha elementárními řádkovými operacemi převést na tzv. (řádkově) schodovitý tvar. Tento tvar můžeme zapsat následujícími podmínkami:

- je-li  $\forall i : 1 \leq i \leq k < m, j \in \{1, 2, \dots, n\} : a_{ij} = 0$ , pak také  $\forall i > k : a_{ij} = 0$ ,
- je-li pro  $1 \leq i < m, j \in \{1, 2, \dots, n\} : a_{ij}$  první nenulový prvek na  $i$ -tém řádku, pak  $a_{(i+1)j} = 0$ .

Elementární řádkovou operací přitom rozumíme jednu z následujících transformací:

1. výměnu dvou řádků matice  $A$ ,
2. vynásobení některého řádku matice  $A$  nenulovým komplexním číslem,
3. přičtení skalárního násobku některého řádku matice  $A$  k jinému jejímu řádku.

Pro převod matice na schodovitý tvar poskytuje Maple příkaz `GaussianElimination`, opět z balíku `LinearAlgebra`. Jeho jediným povinným parametrem je matice, již chceme na schodovitý tvar převést. Jedním z volitelných parametrů je parametr `method`, který při nastavení na `FractionFree` upraví matici na schodovitý tvar tak, aby všechna čísla matice byla celá – obrázek 4.17.

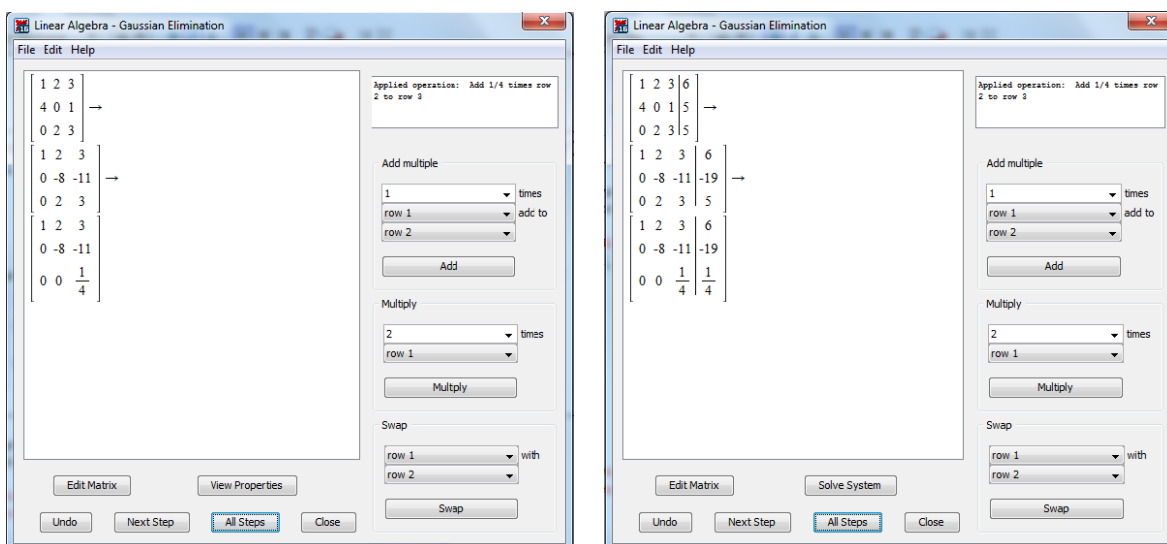
<pre>with(LinearAlgebra) : A := Matrix([[1, 2, 3], [4, 0, 1], [0, 2, 3]])</pre> $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ <pre>GaussianElimination(A)</pre> $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -11 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$	<pre>GaussianElimination(A,method='FractionFree')</pre> $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -11 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ <pre>B := Matrix([[1, 2, 3], [4, 5, 6], [7, 8, 9]]) : GaussianElimination(B)</pre> $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
--	--

Obrázek 4.17: Gaussova eliminace v Maple.

Příkazem `GaussianElimination` získáme rovnou výsledek. Pokud nás zajímá postup výpočtu, můžeme využít pomocníka `GaussianEliminationTutor` z balíku `Student[LinearAlgebra]` dostupného též z hlavního menu (**Tools > Tutors > LinearAlgebra > Gaussian Elimination...**). Podobně jako u jiných pomocných mapletů můžeme sami provádět zvolené úpravy se zadanou maticí nebo nechat systém Maple, aby nám sám ukázal následující krok výpočtu, případně celé odvození až k výsledku. Grafická podoba mapletu je uvedena na obrázku 4.18 vlevo.

Pomocí Gaussovy eliminace můžeme řešit systémy lineárních rovnic. K tomu Maple nabízí dalšího pomocníka – příkaz `LinearSolveTutor` z balíku `Student[LinearAlgebra]`, taktéž dostupného z hlavního menu (**Tools > Tutors > LinearAlgebra > Linear System Solving...**). Podoba tohoto pomocníka (obrázek 4.18 vpravo) je takřka shodná s mapletem pro





Obrázek 4.18: Pomocník při výpočtu Gaussovy eliminace.

Gaussovu eliminaci. V tomto případě však můžeme postupovat dále k výpočtu řešení (pomocí tlačítka **Solve System**). Při spuštění pomocníka jsme dotázáni, jestli chceme použít Gaussovu eliminaci nebo Gaussovu-Jordanovu eliminaci, která upraví matici až do jednotkového tvaru.

Jelikož pro invertibilní čtvercovou matici  $A$  platí:  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ , kde  $E$  je jednotková matice, je možné využít Gaussovy eliminace i při výpočtu inverzní matice. Pro tento postup nabízí Maple dalšího pomocníka podobného dvěma předchozím: příkaz<sup>3</sup> **InverseTutor** z balíku `Student[LinearAlgebra]`, i v tomto případě dostupného z hlavního menu (**Tools** > **Tutors** > **LinearAlgebra** > **Matrix Inverse...**).

**Příklad 4.18:** Řešte soustavu lineárních rovnic v  $\mathbb{R}$  užitím Gaussovy eliminace:

$$\begin{aligned}
 2 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 + 17 \cdot x_3 - 29 \cdot x_4 - 36 \cdot x_5 &= 22, \\
 2 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 + 18 \cdot x_3 - 27 \cdot x_4 + 33 \cdot x_5 &= 21, \\
 12 \cdot x_1 - 18 \cdot x_2 + 102 \cdot x_3 - 174 \cdot x_4 - 216 \cdot x_5 &= 132, \\
 2 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 + 21 \cdot x_3 - 24 \cdot x_4 - 30 \cdot x_5 &= 20, \\
 2 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 + 24 \cdot x_3 - 21 \cdot x_4 - 27 \cdot x_5 &= 19.
 \end{aligned}$$

*Řešení:* Zadanou soustavu je možné řešit pomocníkem **LinearSolveTutor**. Lze však použít i příkaz **GaussianElimination**, což provedeme i my. Soustavu zapíšeme maticově ve tvaru  $A \cdot x = y$ , příkaz **GaussianElimination** použijeme na matici  $A$  doplněnou o sloupec  $y$ . V tomto případě nemáme k dispozici svislou čáru oddělující matici  $A$  od vektoru  $y$ , což musíme mít na paměti.

Po aplikaci Gaussovy eliminace získáme matici ve schodovitém tvaru, z níž na první pohled poznáme, že soustava má nekonečně mnoho řešení závislých na parametru, který přiřadíme buď k neznámé  $x_1$  nebo  $x_2$ . Poté zbývá už pouze dopočítat hodnoty zbylých neznámých, k čemuž použijeme příkaz **solve**. Jeho prvním parametrem je množina rovnic vyplývající ze získané matice ve schodovitém tvaru. Proměnná *res* obsahuje vektor řešení, tj.  $(x_1, x_2, \dots, x_5)^T$ .

<sup>3</sup>Pozor! Neplést se stejnojmenným příkazem z balíku `Student[Calculus1]` pro vykreslení inverzní funkce.

<pre>with(LinearAlgebra) : A := Matrix([[2,-3,17,-29,-36],[2,-3,18,-27,33], [12,-18,102,-174,-216],[2,-3,21,-24,-30], [2,-3,24,-21,-27]]) </pre> $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 17 & -29 & -36 \\ 2 & -3 & 18 & -27 & 33 \\ 12 & -18 & 102 & -174 & -216 \\ 2 & -3 & 21 & -24 & -30 \\ 2 & -3 & 24 & -21 & -27 \end{bmatrix}$ <pre>y := &lt;22, 21, 132, 20, 19&gt; </pre> $\begin{bmatrix} 22 \\ 21 \\ 132 \\ 20 \\ 19 \end{bmatrix}$ <pre>R := GaussianElimination(Matrix([A,y])) </pre> $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 17 & -29 & -36 & 22 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 69 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -270 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 66 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	<pre>res := Matrix([seq([x_i], i=1..5)]): x_2 := s: solve({seq((R[i,1..5].res)[1]=R[i,6], i=1..4)}, {x_1,x_3,x_4,x_5}) </pre> $\left\{ x_1 = \frac{3}{2}s - \frac{3}{2}, x_3 = \frac{1}{3}, x_4 = -\frac{2}{3}, x_5 = 0 \right\}$ <pre>assign(%) res </pre> $\begin{bmatrix} \frac{3}{2}s - \frac{3}{2} \\ s \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$
---	---

Obrázek 4.19: Řešení příkladu 4.18.

**Příklad 4.19:** Řešte soustavu lineárních rovnic v  $\mathbb{C}$  užitím Gaussovy eliminace:

a)

$$\begin{aligned} x + 2 \cdot I \cdot y &= 5 + 4 \cdot I, \\ (3 - I) \cdot y + (6 - 2 \cdot I) \cdot z &= 10, \\ 2 \cdot x - z &= 5 + 3 \cdot I, \\ x + y - z &= 5 + 2 \cdot I, \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} (1 + I) \cdot x + 3 \cdot I \cdot y &= -I, \\ (1 + 2 \cdot I) \cdot x + (1 - I) \cdot y &= 6 + I, \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} (1 + I) \cdot x + (1 - I) \cdot y &= 6 + 4 \cdot I, \\ I \cdot x + (1 + 2 \cdot I) \cdot y &= -3 + 5 \cdot I. \end{aligned}$$

**Příklad 4.20:** Řešte soustavu lineárních rovnic v  $\mathbb{R}$  užitím Gaussovy eliminace:

$$\begin{aligned}x_1 + 3 \cdot x_2 - 2 \cdot x_3 + 2 \cdot x_5 &= 0, \\2 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 - 5 \cdot x_3 - 2 \cdot x_4 + 4 \cdot x_5 - 3 \cdot x_6 &= -1, \\5 \cdot x_3 + 10 \cdot x_4 + 15 \cdot x_6 &= 5, \\2 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 8 \cdot x_4 + 4 \cdot x_5 + 18 \cdot x_6 &= 6.\end{aligned}$$

**Příklad 4.21:** Určete hodnoty parametrů  $a, b, c \in \mathbb{C}$  tak, aby měl následující systém právě jedno řešení:

$$\begin{aligned}a \cdot x + b \cdot y &= c, \\c \cdot x + a \cdot z &= b, \\c \cdot y + b \cdot z &= a.\end{aligned}$$

**Příklad 4.22:** K matici:

$$A = \begin{pmatrix} I & -2 \\ 1 & I \end{pmatrix}$$

naleznete matici inverzní a ověřte, že  $A \cdot A^{-1} = E$ , kde  $E$  je jednotková matice.

*Řešení:* Jednak můžeme využít pomocníka pro hledání inverzní matice, jednak můžeme použít příbuzný příkaz k příkazu `GaussianElimination`, a to `ReducedRowEchelonForm` provádějící Gaussovu-Jordanovu eliminaci, jelikož potřebujeme zadanou matici upravovat až na jednotkovou. Postup výpočtu je uveden na obrázku 4.20.

<pre>with (LinearAlgebra) : A := Matrix( [ [I, -2], [1, I] ] )       <math>\begin{bmatrix} I &amp; -2 \\ 1 &amp; I \end{bmatrix}</math> E := Matrix(2, shape = identity)       <math>\begin{bmatrix} 1 &amp; 0 \\ 0 &amp; 1 \end{bmatrix}</math> Matrix( [A, E] )       <math>\begin{bmatrix} I &amp; -2 &amp; 1 &amp; 0 \\ 1 &amp; I &amp; 0 &amp; 1 \end{bmatrix}</math></pre>	<pre>R := ReducedRowEchelonForm(Matrix([A, E]))       <math>\begin{bmatrix} 1 &amp; 0 &amp; I &amp; 2 \\ 0 &amp; 1 &amp; -1 &amp; I \end{bmatrix}</math> A_inv := R[1..2, 3..4]       <math>\begin{bmatrix} I &amp; 2 \\ -1 &amp; I \end{bmatrix}</math> A.A_inv       <math>\begin{bmatrix} 1 &amp; 0 \\ 0 &amp; 1 \end{bmatrix}</math></pre>
--	--

Obrázek 4.20: Řešení příkladu 4.22.

**Příklad 4.23:** Pomocí Gaussovy eliminace najděte inverzní matice k následujícím maticím:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 11 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 0 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

U nalezených matic ověřte, že součinem matice a její inverze vznikne jednotková matice.

**Příklad 4.24:** Pomocí Gaussovy eliminace najděte inverzní matice k následujícím maticím:

$$A = \begin{pmatrix} 1+I & 1-I \\ 2 & I \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & I \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -I & 1+I \\ -I & 1 & 0 \\ 1-I & 0 & I \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} 2+I & 1+I & 1+2 \cdot I \\ 1-I & 3-2 \cdot I & 1-I \\ 2-3 \cdot I & 1+I & 1+2 \cdot I \end{pmatrix}.$$

U nalezených matic ověřte, že součinem matice a její inverze vznikne jednotková matice.

### 4.1.5 Determinant

**Definice 4.10:** *Permutací množiny*  $X$  nazveme bijektivní zobrazení  $\sigma : X \rightarrow X$ . Permutaci  $\sigma(X)$  nazýváme *transpozicí*, jestliže existují různá  $x, y \in X$  tak, že  $\sigma(x) = y \wedge \sigma(y) = x$ , a přitom  $\forall z \in X \setminus \{x, y\} : \sigma(z) = z$ . Dvojice prvků  $a, b \in X = \{1, 2, \dots, n\}, n \in \mathbb{N}$  tvoří *inverzi v permutaci*  $\sigma$ , je-li  $a < b \wedge \sigma(a) > \sigma(b)$ . *Paritu permutace*  $\sigma$  definujeme vztahem  $(-1)^{\text{počet inverzí}}$  a značíme  $\text{sgn}(\sigma)$ .

**Definice 4.11:** Nechť  $A$  s prvky  $a_{ij}$  je čtvercová matice řádu  $n \in \mathbb{N}$ . Determinant matice  $A$  definujeme vztahem

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)},$$

kde  $S_n$  je množina všech permutací na množině  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

**Poznámka 4.10:** Vyjádřením determinantu z předchozí definice pro  $n = 3$  získáme tzv. *Saarusovo pravidlo*:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = +a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} \\ - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23}.$$

V systému Maple slouží k výpočtu determinantu matice příkaz **Determinant** z balíku **LinearAlgebra**. Místo něj je možné použít svislých závorek (jak jsme zvyklí z psaného textu), případně i kontextového menu po kliknutí pravým tlačítkem myši na matici. Obě tyto možnosti nevyžadují načtení zmíněného balíku. Ukázkou výpočtu poskytuje obrázek 4.21.

**Příklad 4.25:** Uvažujme matice z příkladů 4.23 a 4.24. Ověřte, že pro  $X \in \{A, B, C, F\}$  platí:

$$\text{a) } |X| = |X^T|, \quad \text{b) } |X^{-1}| = \frac{1}{|X|}.$$

**Příklad 4.26:** Uvažujme matice z příkladu 4.24. Ověřte, že platí:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|, \quad |C \cdot F| = |C| \cdot |F|.$$

$A := \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} :$	$C := \begin{bmatrix} 1 & -I & 1 + I \\ -I & 1 & 0 \\ 1 - I & 0 & I \end{bmatrix} :$
$ A $ <p style="text-align: right; color: blue;">-4</p>	$ C $ <p style="text-align: right; color: blue;">-2 + 2I</p>
$LinearAlgebra[Determinant](A)$ <p style="text-align: right; color: blue;">-4</p>	$LinearAlgebra[Determinant](C)$ <p style="text-align: right; color: blue;">-2 + 2I</p>
$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{determinant}} -4$	$C = \begin{bmatrix} 1 & -I & 1 + I \\ -I & 1 & 0 \\ 1 - I & 0 & I \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{determinant}} -2 + 2I$

Obrázek 4.21: Výpočet determinantu v Maple.

## Laplaceův rozvoj determinantu

**Poznámka 4.11:** K výpočtu determinantu matic větších rozměrů než  $3 \times 3$  (bez počítače) se obvykle používá Gaussova eliminační metoda a *Laplaceův rozvoj determinantu*. Laplaceův rozvoj determinantu nám říká, že pro čtvercovou matici  $A$  řádu  $n$  s prvky  $a_{ij}$  a přirozená čísla  $k, l$  taková, že  $1 \leq k, l \leq n$  platí:

$$|A| = \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} \cdot a_{kj} \cdot |A_{kj}| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+l} \cdot a_{il} \cdot |A_{il}|,$$

kde  $A_{kj}$  je matice  $A$  bez svého  $k$ -tého řádku a  $j$ -tého sloupce, tzv. *submatice* matice  $A$ .

System Maple nenabízí nástroj, který by uměl názorně provést Laplaceův rozvoj. Nic nám však nebrání v jeho vytvoření. Zavedeme proto příkaz `laplace` jako proceduru se třemi povinnými parametry – čtvercovou maticí, přirozeným číslem od 1 do  $n$  udávající, podle kolikátého řádku či sloupce má být rozvoj proveden, a písmenem  $r$  nebo  $s$  v uvozovkách značícím, jestli se rozvoj povede podle řádku či sloupce.

Smyslem textu není naučit programovat v Maple, a proto uveďme jen několik poznámek ke zdrojovému kódu umístěném níže v rámečku. Procedura má tři parametry (čtvercovou matici, přirozené číslo a znak). Pokud nevedeme parametry v tomto pořadí a zmíněných typů, vypíše Maple chybovou zprávu **Error, invalid input**.

```

laplace := proc (A::(Matrix(square)), i::posint, c::character)
local k, n;
uses LinearAlgebra;
n := RowDimension(A);
if n < i then printf("Druhy parametr musi byt cele cislo
od 1 do %d.", n); return; end if;

if c = "r" then
add((-1)^(i+k)*A[i, k]*det(DeleteRow(DeleteColumn(A, k), i)), k=1..n)
elif c = "s" then
add((-1)^(i+k)*A[k, i]*det(DeleteRow(DeleteColumn(A, i), k)), k=1..n)
else printf("Treti parametr musi byt pismeno r nebo pismeno s."); return;
end if;

end proc;

```

V proceduře je použito několik příkazů z balíku `LinearAlgebra`, který je na začátku „načten“ (pouze pro potřeby procedury!). Těmito příkazy jsou `RowDimension` pro zjištění

počtu řádků (dimenze) zadané matice, `DeleteRow` a `DeleteColumn` pro odstranění řádku, resp. sloupce, zadané matice. Dalšími použitými příkazy (tentokrát již z hlavní knihovny `Maple`) jsou `add` pro součet prvků (zejména numerické) posloupnosti a `printf` pro formátovaný výpis.

Aby nedošlo k úplnému vyhodnocení a byl vidět Laplaceův rozvoj, je pro determinant použit neexistující „příkaz“ `det`. Vyhodnotit získaný výsledek a získat tak konečnou hodnotu determinantu lze např. posloupností příkazů `eval` pro vyhodnocení a `subs`, jímž nahradíme řetězec `det` příkazem pro výpočet determinantu, tj. např. použít:

```
eval(subs(det = LinearAlgebra[Determinant], %));
```

následně po získaném rozvoji determinantu. Název balíku `LinearAlgebra` je pochopitelně možné vynechat, pokud jsme balík dříve načítali (příkazem `with`). Ukázkou použití příkazu `laplace` nabízí obrázek 4.22.

$A := \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix};$ <p><b>Rozvoj podle prvního řádku</b>  <code>laplace(A, 1, "r")</code></p> $2 \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + 4 \det \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + 3 \det \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ <pre>eval(subs(det = LinearAlgebra[Determinant], %)) -4</pre>	<p><b>Rozvoj podle třetího sloupce</b>  <code>laplace(A, 3, "s")</code></p> $3 \det \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ <pre>eval(subs(det = LinearAlgebra[Determinant], %)) -4 LinearAlgebra[Determinant](A) -4</pre>
--	---

Obrázek 4.22: Laplaceův rozvoj determinantu v Maple.

**Poznámka 4.12:** Při „ručním“ výpočtu determinantu matice je třeba znát následující pravidla:

- determinant trojúhelníkové matice se rovná součinu jejích diagonálních prvků,
- výměnou pořadí dvou řádků nebo sloupců matice se změní znaménko determinantu na opačné,
- vynásobením nějakého řádku nebo sloupce matice nenulovým skalárem  $k \in \mathbb{C}$ , se její determinant změní na  $k$ -násobek původní hodnoty,
- připočtením skalárního násobku nějakého řádku matice k jejímu jinému řádku, resp. násobku nějakého jejího sloupce k jinému sloupci se hodnota jejího determinantu nezmění.

**Příklad 4.27:** Určete hodnotu determinantu matice  $A$  pomocí Laplaceova rozvoje, kde

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 & 2 \\ 6 & 6 & 6 & 7 \\ 8 & 10 & 9 & 10 \\ 5 & 7 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

*Řešení:* Ukážeme dva různé postupy.

<pre> A := <math>\begin{bmatrix} 7 &amp; 2 &amp; 3 &amp; 2 \\ 6 &amp; 6 &amp; 6 &amp; 7 \\ 8 &amp; 10 &amp; 9 &amp; 10 \\ 5 &amp; 7 &amp; 3 &amp; 3 \end{bmatrix}</math> : B := copy(A) : B[2] := A[2] - 2·A[1] : B[3] := A[3] - 3·A[1] : B[4] := A[4] - A[1] : B <math>\begin{bmatrix} 7 &amp; 2 &amp; 3 &amp; 2 \\ -8 &amp; 2 &amp; 0 &amp; 3 \\ -13 &amp; 4 &amp; 0 &amp; 4 \\ -2 &amp; 5 &amp; 0 &amp; 1 \end{bmatrix}</math>  d := laplace(B, 3, "s") 3 det <math>\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} -8 &amp; 2 &amp; 3 \\ -13 &amp; 4 &amp; 4 \\ -2 &amp; 5 &amp; 1 \end{bmatrix} \end{pmatrix}</math>  C := op(op(d)[2]) <math>\begin{bmatrix} -8 &amp; 2 &amp; 3 \\ -13 &amp; 4 &amp; 4 \\ -2 &amp; 5 &amp; 1 \end{bmatrix}</math> </pre>	<pre> F := copy(C) : F[1] := C[1] - 3·C[3] :   F[2] := C[2] - 4·C[3] : F <math>\begin{bmatrix} -2 &amp; -13 &amp; 0 \\ -5 &amp; -16 &amp; 0 \\ -2 &amp; 5 &amp; 1 \end{bmatrix}</math>  'd' = eval(subs(op(op(d)[2]) = F, d)) d = 3 det <math>\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} -2 &amp; -13 &amp; 0 \\ -5 &amp; -16 &amp; 0 \\ -2 &amp; 5 &amp; 1 \end{bmatrix} \end{pmatrix}</math>  laplace(F, 3, "s") det <math>\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} -2 &amp; -13 \\ -5 &amp; -16 \end{bmatrix} \end{pmatrix}</math>  'd' = eval(subs(op(d)[2] = %, d)) d = 3 det <math>\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} -2 &amp; -13 \\ -5 &amp; -16 \end{bmatrix} \end{pmatrix}</math>  eval(subs(det = LinearAlgebra[Determinant], rhs(%))) -99 </pre>
--	---

Obrázek 4.23: První řešení příkladu 4.27.

<pre> A := <math>\begin{bmatrix} 7 &amp; 2 &amp; 3 &amp; 2 \\ 6 &amp; 6 &amp; 6 &amp; 7 \\ 8 &amp; 10 &amp; 9 &amp; 10 \\ 5 &amp; 7 &amp; 3 &amp; 3 \end{bmatrix}</math> : </pre> <p><b>Rozvoj podle prvního řádku</b></p> <pre> d := laplace(A, 1, "r") 7 det <math>\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 6 &amp; 6 &amp; 7 \\ 10 &amp; 9 &amp; 10 \\ 7 &amp; 3 &amp; 3 \end{bmatrix} \end{pmatrix}</math> - 2 det <math>\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 6 &amp; 6 &amp; 7 \\ 8 &amp; 9 &amp; 10 \\ 5 &amp; 3 &amp; 3 \end{bmatrix} \end{pmatrix}</math> + 3 det <math>\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 6 &amp; 6 &amp; 7 \\ 8 &amp; 10 &amp; 10 \\ 5 &amp; 7 &amp; 3 \end{bmatrix} \end{pmatrix}</math> - 2 det <math>\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 6 &amp; 6 &amp; 6 \\ 8 &amp; 10 &amp; 9 \\ 5 &amp; 7 &amp; 3 \end{bmatrix} \end{pmatrix}</math>  eval(subs(det = LinearAlgebra[Determinant], %)) -99 </pre>
--

Obrázek 4.24: Druhé řešení příkladu 4.27.

První postup, prezentovaný na obrázku 4.23, má za cíl napodobit průběh „ručního“ výpočtu. Když se pozorně podíváme na matici  $A$ , všimneme si, že ve třetím sloupci jsou všechna čísla násobky tří. Tj. vhodnými řádkovými úpravami docílíme tří nul v tomto sloupci, aniž by se změnila hodnota determinantu matice (viz poznámka 4.12). Před úpravami si

vytvoříme kopii  $B$  matice  $A$  příkazem `copy`, abychom nepřepisovali prvky původní matice. Hledaný determinant označíme písmenem  $d$ . V Laplaceově rozvoji „zůstane“ determinant jediné matice typu  $3 \times 3$ , již označíme písmenem  $C$ . Ačkoli determinant matice řádu 3 už dokážeme spočítat přímo, je možné opakovat tentýž postup co pro původní matici  $A$ , získat upravenou matici  $F$  a jejím Laplaceovým rozvojem dospět k determinantu jediné matice řádu 2. Při řešení často využíváme příkazu `op`, abychom získali žádané operandy předchozích výrazů automaticky a nemuseli je ručně kopírovat.

V druhém případě – obrázek 4.24 – využijeme toho, že systému Maple není nutné příklad zjednodušovat „vytvářením nul“ v matici a necháme vše na něm.

**Příklad 4.28:** Určete hodnotu determinantu zadaných matic pomocí Laplaceova rozvoje:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

## Konjugovaná matice

**Definice 4.12:** Matici  $\bar{A}$  nazveme *konjugovanou maticí* (resp. *komplexně sdruženou maticí*) k matici  $A$  s prvky  $a_{ij}$ , jestliže matice  $\bar{A}$  obsahuje prvky  $\bar{a}_{ij}$  pro všechna  $i, j$ , tj. její prvky jsou komplexně sdružené k prvkům matice  $A$ .

Systém Maple nemá přímo příkaz pro výpočet konjugované matice, lze však využít příkazů `conjugate` pro získání komplexně sdruženého komplexního čísla a `map`, jímž aplikujeme příkaz `conjugate` na každý prvek matice. Zmíněné lze provést též pomocí kontextové nabídky, která se objeví po kliknutí prvním tlačítkem myši na matici – obrázek 4.25.

$A := \begin{bmatrix} 1 & -I & I & I \\ -I & 1 & 0 & \\ 1 - I & 0 & I & \end{bmatrix};$ $\text{map}(x \rightarrow \text{conjugate}(x), A)$ $\begin{bmatrix} 1 & I & I & -I \\ I & 1 & 0 & \\ 1 + I & 0 & -I & \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & -I & I & I \\ -I & 1 & 0 & \\ 1 - I & 0 & I & \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{complex conjugate}} \begin{bmatrix} 1 & I & I & -I \\ I & 1 & 0 & \\ 1 + I & 0 & -I & \end{bmatrix}$
--	--

Obrázek 4.25: Výpočet konjugované matice v Maple.

Pro komplexní matici dále zavádíme tzv. *hermitovskou transpozici*. Hermitovsky transponovaná matice je transponovaná konjugovaná matice. Pro tuto operaci poskytuje Maple příkaz `HermitianTranspose` z balíku `LinearAlgebra`. Operaci je však možné provést též pomocí kontextové nabídky po kliknutí pravým tlačítkem myši na matici, případně zápisem  $A^{\%H}$ , kde  $A$  je daná matice. Ukázkou použití a rozdílu mezi obyčejnou a hermitovskou transpozicí poskytuje obrázek 4.26. Jelikož  $(A^T)^T = A$  pro matici  $A$ , lze využít také hermitovské transpozice pro získání konjugované matice.



$A := \begin{bmatrix} 1 & -I & 1+I \\ -I & 1 & 0 \\ 1-I & 0 & I \end{bmatrix} :$	
$A^{%T}$	
$\begin{bmatrix} 1 & -I & 1-I \\ -I & 1 & 0 \\ 1+I & 0 & I \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & -I & 1+I \\ -I & 1 & 0 \\ 1-I & 0 & I \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{transpose}} \begin{bmatrix} 1 & -I & 1-I \\ -I & 1 & 0 \\ 1+I & 0 & I \end{bmatrix}$
$A^{%H}$	
$\begin{bmatrix} 1 & I & 1+I \\ I & 1 & 0 \\ 1-I & 0 & -I \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & -I & 1+I \\ -I & 1 & 0 \\ 1-I & 0 & I \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{hermitian transpose}} \begin{bmatrix} 1 & I & 1+I \\ I & 1 & 0 \\ 1-I & 0 & -I \end{bmatrix}$

Obrázek 4.26: Hermitovská transpozice matice v Maple.

**Příklad 4.29:** Uvažujme matice z příkladů 4.23 a 4.24. Ověřte, že platí pro  $X \in \{A, B, C, F\}$ :

$$|\overline{X}| = \overline{|X|}.$$

## 4.2 Lineární zobrazení

## 4.3 Afinní geometrie

# 5 Chyby

V této kapitole si ukážeme nejčastější chyby při práci se systémem Maple.

## 5.1 Chybové zprávy (Error Messages)

### 5.1.1 Math mode / Text mode

Jednou z prvních chyb, kterých se uživatelé často dopouštějí, je nevěnování dostatečné pozornosti příkazovému (matematickému) a textovému režimu. Příkazový (matematický) režim (Math mode) slouží k zápisu příkazů. Po kliknutí na klávesu **Enter** dojde k jeho vyhodnocení. Textový režim slouží k zápisu obyčejného textu. Po kliknutí na klávesu **Enter** se „pouze“ přesuneme na nový řádek. Častá a někdy těžko odhalitelná chyba je „smíchání“ těchto dvou režimů při zápisu příkazu, kdy zpravidla získáváme chybné výsledky. To, jestli je celý příkaz zapsaný v příkazovém (matematickém) režimu, můžeme poznat z fontu písma (ale nemusí tomu tak nutně být). Nejjistěji to poznáme umístěním kurzoru na příkaz, kdy se objeví (naneštěstí slabě viditelný) šedý obdélník tvořený přerušovanou čarou vymezující znaky zapsané v příkazovém (matematickém) režimu – viz obrázek 5.1. U příkazů na druhém řádku je vždy umístěn kurzor před číslicí 2. Můžeme si tedy všimnout zmíněného přerušovaného obdélníku, který v prvním případě (vlevo) zahrnuje pouze číslici 2. Příkazy na prvním řádku byly vytvořeny obdobně.

Chybně zadané příkazy (na první pohled není poznat rozdíl).	Správně.
$15 + 20$ $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos(\pi)$	$15 + 20$ $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos(\pi) + 2$
20 2	35 1

Obrázek 5.1: Chyby v použití matematického a textového režimu.

### 5.1.2 Chybné argumenty příkazů

Další velmi častou chybou (ne-li nejčastější) je špatné zadání argumentů příkazů. Každý příkaz má definované použití. Vždy mu musíme nastavit povinné argumenty, můžeme přidat volitelné (charakterizované slovíčkem *optional*). Argumenty musí být zadány vždy v takovém tvaru, jaký je předepsaný. Informace o tom, jak daný příkaz použít, jak specifikovat argumenty příkazu, které argumenty jsou povinné a které volitelné, nalezneme v nápovědě

systému Maple k příslušnému příkazu. Následuje přehled chybových zpráv, které Maple při špatném zadání argumentů vypisuje.

Chybně	Správně
<code>sin([5])</code> <u>Error, invalid input: sin expects its 1st argument, x, to be of type algebraic, but received [5]</u>	<code>sin(5)</code> $\sin(5)$
<code>LinearAlgebra[Eigenvalues](2)</code> <u>Error, (in LinearAlgebra:-Eigenvalues) invalid input: LinearAlgebra:-Eigenvalues expects its 1st argument, A, to be of type Matrix(square) but received 2</u>	<code>LinearAlgebra[Eigenvalues](((1,4) (4,1)))</code> $\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$
<code>solve(5·x - 7·y = -9, 3·x + y = 5)</code> <u>Error, invalid input: too many and/or wrong type of arguments passed to solve; first unused argument is 3*x+y = 5</u>	<code>solve({5·x - 7·y = -9, 3·x + y = 5})</code> $\{x=1, y=2\}$
<code>simplify( x·y , {x &gt; 0, y = 0})</code> <u>Error, (in unknown) invalid input: numer expects its 1st argument, x, to be of type {list, set, algebraic}, but received 0 &lt; x</u>	<code>simplify( x·y , {y = 0})</code> $0$

Obrázek 5.2: Ve všech případech si Maple stěžuje na špatný vstup. Nejprve je příkazu `sin` zadán seznam, kdežto Maple očekává algebraickou hodnotu. Argumentem příkazu `Eigenvalues` má být čtvercová matice (nikoli reálné číslo). Příkazu `solve` jsou v chybné variantě zadány dvě rovnice jako dva parametry, příkaz však očekává, že v případě více rovnic budou tyto zadány v jediném parametru jako seznam (resp. množina). Nakonec příkaz `simplify` neakceptuje nerovnosti jako dodatečná omezení.

Chybně	Správně
<code>roots(sin(x))</code> <u>Error, (in roots) argument must be a polynomial over an algebraic number field</u>	<code>roots(x)</code> $[[0, 1]]$
<code>convert(<math>\frac{x}{(x-b)^2}</math>, parfrac)</code> <u>Error, (in convert/parfrac) the variable name (for conversion to partial fractions) must be provided</u>	<code>convert(<math>\frac{x}{(x-b)^2}</math>, parfrac, x)</code> $\frac{1}{x-b} + \frac{b}{(x-b)^2}$

Obrázek 5.3: Příkaz `roots` očekává jako argument polynom nad číselným tělesem, což  $\sin(x)$  není. Příkaz `convert` vyžaduje uvedení jména proměnné, pokud upravovaný výraz obsahuje více neznámých.

Chybně	Správně
<code>simplify( x·y , x=0)</code> <u>Error, (in simplify/do) invalid simplification command</u>	<code>simplify( x·y , {x=0})</code> 0
<code>simplify( x·y , assume=x)</code> <u>Error, (in assuming) when calling 'assume'. Received: 'last object, x, has no property'</u>	<code>simplify( x·y , assume(x=0))</code> 0

Obrázek 5.4: Chybné zápisy omezujících podmínek pro příkaz `simplify` spolu s jejich správnými variantami.

### 5.1.3 Nesprávné použití závorek

V systému Maple můžeme používat všechny typy závorek, každý typ má však jiný význam a tedy jiné použití. Navíc je třeba dávat pozor na počet levých (otevírajících) a počet pravých (uzavírajících) závorek. Vždy, když se tyto počty nerovnaají, systém vypíše chybovou zprávu **Error, unable to match delimiters** (obrázek 5.5).

Chybně zadané příkazy.	Správně.
1. <code>3)^2</code> <u>Error, unable to match delimiters</u> <code>3)^2</code>	1. <code>3^2</code> 9
2. <code>2 - (3 - 1( + 4)</code> <u>Error, unable to match delimiters</u> <code>2 - (3 - 1(+ 4)</code>	2. <code>2 - (3 - 1(+ 4))</code> 3
3. <code>{sin(x·(x + 1)), cos(x·(x + 1)), tan(x·(x + 1))}</code> <u>Error, unable to match delimiters</u> <code>{sin(x·(x + 1)), cos(x·(x + 1)), tan(x·(x + 1))}</code>	3. <code>{sin(x·(x + 1)), cos(x·(x + 1)), tan(x·(x + 1))}</code> <code>{cos(x(x + 1)), sin(x(x + 1)), tan(x(x + 1))}</code>
4. <code>cos(π)</code> <u>Error, unable to match delimiters</u> <code>cos(π)</code>	4. <code>cos(π)</code> -1
5. <code>cos(π]</code> <u>Error, invalid interval</u> <code>cos(π]</code>	5. <code>cos(π)</code> -1

Obrázek 5.5: Chyby v používání závorek.

### 5.1.4 Nesprávné přiřazení

Systém Maple disponuje tzv. systémovými proměnnými a příkazy. Jejich názvy jsou chráněné, tj. do chráněných proměnných není možné přiřazovat jiný typ hodnot, než pro který jsou určeny, a názvy příkazů není možné používat jinak než jako příkazy s definovaným použitím (tj. není možné si např. vytvořit proměnnou se stejným názvem jako některý z příkazů). To, jestli je nějaký název chráněný či nikoliv, je možné zjistit příkazem `type` majícím dva argumenty: název (jméno), u nějž chceme zjistit, zda je chráněný, a argument `protected` (který už se nenastavuje na žádnou hodnotu) – viz obrázek 5.6.

Chybně zadané příkazy.	Správně.
1. $Digits := \dot{u}$ <u>Error, invalid assignment to Digits</u>	1. $Digits := 15$ 15
2. $solve := 3$ <u>Error, attempting to assign to `solve` which is protected</u>	2. $type(solve, protected)$ true
3. $int := 5$ <u>Error, attempting to assign to `int` which is protected</u>	3. $type(int, protected)$ true

Obrázek 5.6: Chyby v přiřazování hodnot do proměnných.

### 5.1.5 Dělení nulou

Když se při úpravě zadaného výrazu (příkazu) dostane Maple do situace, kdy má dělit nulou, vypíše zprávu **Error, numeric exception: division by zero**. Tato situace se může přihodit i u výrazů (příkazů), u nichž to neočekáváme (např. u funkce  $\ln$ ) – obrázek 5.7.

$\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)$ <u>Error, (in tan) numeric exception: division by zero</u>
$\ln(0)$ <u>Error, (in ln) numeric exception: division by zero</u>
$a := 1: \frac{a^2 - 1}{a - 1}$ <u>Error, numeric exception: division by zero</u>

Obrázek 5.7: Vyhodnocení výrazu, v němž se dělí nulou.

### 5.1.6 Nesprávný zápis mocnin

Některé chybové zprávy při práci s mocninami nabízí obrázek 5.8.

### 5.1.7 Nesprávné použití objektů

V systému Maple můžeme narazit také na chybovou zprávu **Error, illegal use of an object as a name**. Ta se objeví vždy, když použijeme nějaký objekt, který není jménem, na místě, kde systém jméno očekává. Význam chyby bude nejlépe patrný z obrázku 5.9.

### 5.1.8 Nesprávné definice a použití funkcí

Různých chyb se můžeme dopustit i při definici a použití funkce (obrázek 5.10).

Chybně zadané příkazy.	Správně.
<p>Chybí základ mocniny.</p> <p>1. <math>^2</math>  Error, invalid power  <math>^2</math></p>	<p>1. <math>3^2</math>  9</p>
<p>Špatně uvedený základ, který chceme umocňovat (je tam navíc čárka).</p> <p>2. <math>3,^2</math>  Error, invalid power  <math>3,^2</math></p>	<p>2. <math>3^2</math>  9</p>
<p>V exponentu není možné použít <math>\leq</math>.</p> <p>3. <math>3^{(\leq 2)}</math>  Error, invalid <math>\leq</math></p>	<p>3. <math>3^2</math>  9</p>
<p>Za písmenem <math>b</math> je mezera, chybí tak základ mocniny.</p> <p>4. <math>b ^{-x}</math>  Error, invalid base  <math>b ^{-x}</math></p>	<p>4. <math>b^{-x}</math>  <math>b^{-x}</math></p>

Obrázek 5.8: Nesprávný zápis mocnin.

Chybně zadané příkazy.	Správně.
<p>1. <math>[a, b] := [5, 6]</math>  Error, illegal use of an object as a name  <math>[a, b] := [5, 6]</math></p>	<p>1. <math>a, b := 5, 6</math>  5, 6</p>
<p>2. <math>seq(I, I=1..5)</math>  Error, illegal use of an object as a name</p>	<p>Písmeno (velké) I je vyhrazeno pro imaginární jednotku.</p> <p>2. <math>seq(i, i=1..5)</math>  1, 2, 3, 4, 5</p>
<p>3. <math>I := 2</math>  Error, illegal use of an object as a name  <math>I := 2</math></p>	<p>3. <math>J := 2</math>  2</p>

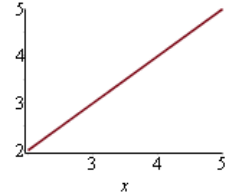
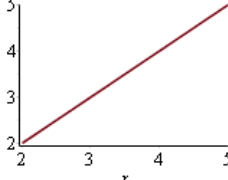
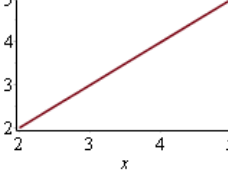
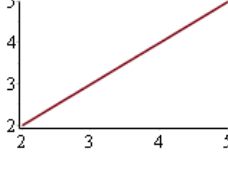
Obrázek 5.9: Nesprávné použití objektů.

Chybně zadané příkazy.	Správně.
<p>1. <math>f := x^2 \rightarrow x</math>  Error, invalid operator parameter name  <math>f := x^2 \rightarrow x</math></p>	<p>1. <math>f := x \rightarrow x^2</math>  <math>x \rightarrow x^2</math></p>
<p>2. <math>f(x) := x \rightarrow x^2</math>  <math>x \rightarrow x \rightarrow x^2</math></p>	<p>2. <math>f(x) := x^2</math>  <math>x \rightarrow x^2</math></p>
<p>3. <math>f := 3 \rightarrow x</math>  Error, invalid operator parameter name  <math>f := 3 \rightarrow x</math></p>	<p>3. <math>f := x \rightarrow 3</math>  <math>x \rightarrow 3</math></p>
<p>4. <math>g(x, y)</math>  Error, invalid function arguments  <math>g(x, y)</math></p>	<p>4. <math>g(x, y)</math>  <math>g(x, y)</math></p>

Obrázek 5.10: Nesprávné definice a použití funkcí.

### 5.1.9 Chyby při vykreslování

Následují chyby vyskytující se při vykreslování. Jako u každého příkazu musíme dbát na správně uvedené argumenty i u příkazů pro vykreslování funkcí a výrazů. Chyby uvedené na obrázku 5.11 jsou způsobeny především nesprávně uvedeným rozsahem proměnné  $x$ .

Chybně zadané příkazy.	Správně.
1. <code>plot(x, x=2.5)</code> <u>Error, (in plot) unexpected option: x = 2.5</u>	1. <code>plot(x, x=2..5)</code> 
2. <code>plot(x, x=2..a)</code> <u>Error, (in plot) expecting a real constant as range endpoint but received a</u>	2. <code>plot(x, x=2..5)</code> 
3. <code>f(x) := x: plot(f, x=2..5)</code> <u>Error, (in plot) expected a range but received x = 2 .. 5</u>	3. <code>f(x) := x: plot(f(x), x=2..5)</code> 
4. <code>f(x) := x: plot(f(x), 2..5)</code> <u>Error, (in plot) procedure expected, as range contains no plotting variable</u>	4. <code>f(x) := x: plot(f, 2..5)</code> 

Obrázek 5.11: Chyby při vykreslování.

### 5.1.10 Další chybové zprávy

Závěrem chybových zpráv ukažme ještě tři časté chybové zprávy, obrázek 5.12.

Chybně zadané příkazy.	Správně.
1. <code>collect(x<sup>2</sup> - 5·x + 2·x·y, 2)</code> <u>Error, (in collect) cannot collect 2</u>	1. <code>collect(x<sup>2</sup> - 5·x + 2·x·y, x)</code> $x^2 + (-5 + 2y)x$
2. <code>f := 2·x</code> $2x$ <code>g(x) := unapply(f, x)</code> $x \rightarrow unapply(f, x)$ <code>g(2)</code> <u>Error, (in unapply) variables must be unique and of type name</u>	2. <code>f := 2·x</code> $2x$ <code>g := unapply(f, x)</code> $x \rightarrow 2x$ <code>g(2)</code> $4$
3. <code>∫<sub>0</sub><sup>1</sup> ∫<sub>0</sub><sup>1</sup> dx dy</code> <u>Error, (in int) integration range or variable must be provided</u>	3. <code>∫<sub>0</sub><sup>1</sup> ∫<sub>0</sub><sup>1</sup> 1 dx dy</code> $1$

Obrázek 5.12: Další chybové zprávy.

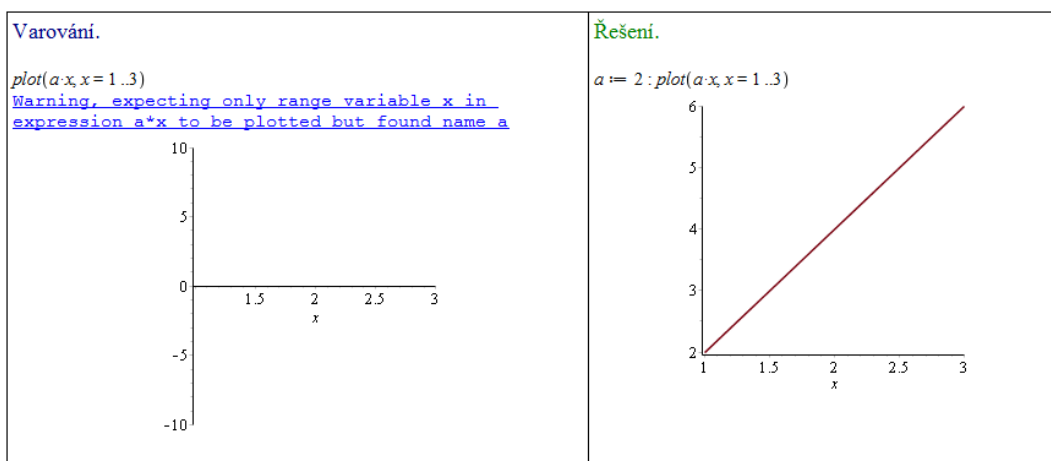
## 5.2 Varování (Warnings)

Kromě chybových zpráv vypisuje systém ještě tzv. varování. Varování může signalizovat naši chybu (v zápisu příkazu), ale zpravidla informuje o důvodech, proč nemůže systém zadaný příkaz vyhodnotit (někdy jej přesto vyhodnotí). Při výpisu varování s textem **Warning, solutions may have been lost** je nutné přeformulovat problém (zapsat příkaz jinak, neboť jej Maple nedokáže vyhodnotit). Ne vždy je toto možné. Zpravidla můžeme jinou formulací problému dosáhnout alespoň „nějakých zlepšení“.

Varování.	Řešení.
1. $V = \int_1^2 \int_{\frac{1}{x}}^x \left(\frac{x}{y}\right)^2 dy dx$ <u>Warning, unable to determine if 0 is between 1/x and x; try to use assumptions or use the AllSolutions option</u> $V = \frac{9}{4}$	1. <code>assume(x &gt; 0) : V =</code> $\int_1^2 \int_{\frac{1}{x}}^x \left(\frac{x}{y}\right)^2 dy dx$ $V = \frac{9}{4}$
2. $\int_1^b \frac{1}{x-a} dx$ <u>Warning, unable to determine if a is between 1 and b; try to use assumptions or use the AllSolutions option</u> $\int_1^b \frac{1}{x-a} dx$	2. <code>assume(a &lt; 1 &lt; b) :</code> $\int_1^b \frac{1}{x-a} dx$ $-\ln(1-a) + \ln(b-a)$
3. <code>solve(sin(x·y) &lt; 0)</code> <u>Warning, solutions may have been lost</u>	3. <code>solve(sin(z) &lt; 0)</code> $RealRange(Open(-\pi), Open(0))$

Obrázek 5.13: Varování.





Obrázek 5.14: Varování po spuštění příkazu `plot`.

## 5.3 Ostatní chyby

Podkapitola ukazuje několik častých chyb, které však nevyvolávají chybové zprávy ani varování.

### 5.3.1 Nenačtení balíku (knihovny)

Chybně	Správně
<p>1. <code>divisors(50)</code>  <code>divisors(50)</code></p>	<p>1. <code>numtheory[divisors](50)</code>  <code>{1, 2, 5, 10, 25, 50}</code>  nebo  <code>with(numtheory) :</code>  <code>divisors(50)</code>  <code>{1, 2, 5, 10, 25, 50}</code></p>
<p>2. <code>ArcLength([cos(x), sin(x)], x=0..Pi)</code>  <code>ArcLength([cos(x), sin(x)], x=0..π)</code></p>	<p>2. <code>Student[Calculus1][ArcLength]([cos(x), sin(x)], x=0..Pi)</code>  <code>π</code>  nebo  <code>with(Student[Calculus1]) :</code>  <code>ArcLength([cos(x), sin(x)], x=0..Pi)</code>  <code>π</code></p>

Obrázek 5.15: Při nenačtení potřebného balíku (knihovny) se příkaz pouze „přepíše“ na následující řádek.

### 5.3.2 Nesprávné používání některých symbolů

Maple je tzv. *case sensitive*, tj. záleží na velikosti písmen. Navíc např. pro Eulerovo číslo je vyhrazen speciální symbol různý od písmene `e` psaného na klávesnici počítače.

	Chybně		Správně
1. $\sin(\text{pi})$	$\sin(\pi)$	$\sin(\text{Pi})$	0
2. $\ln(e^2)$	$\ln(e^2)$	2. $\ln(e^2)$	2
3. $\frac{1+i}{1-i}$	$\frac{1+i}{1-i}$	3. $\frac{1+I}{1-I}$	I

Obrázek 5.16: Nesprávné používání některých symbolů.

# 6 Návody k řešení příkladů

## 6.1 Úvod do systému Maple

Příklad 1.2: Pro vložení zadaného výrazu potřebujeme: *sumační symbol* a *symbol nekonečna*. Sumační symbol nalezneme v paletě **Expression**, symbol nekonečna v paletě **Common Symbols**. Zlomek můžeme buď vzít také z palety **Expression**, nebo jej zapíšeme ručně pomocí lomítka.

Příklad 1.3: Potřebujeme vložit zlomek a mocninu (resp. exponent). Obojí najdeme v paletě **Expression**. Můžeme také použít lomítko a „stříšku“.

Příklad 1.4: Opět využijeme již dříve zmíněných palet. Pozor však na vkládání Eulerova čísla. To je nutné vzít z palety (resp. použít příkaz `exp`). Zapsané písmeno  $e$  z klávesnice Maple bere jako „obyčejné“ písmeno (proměnnou)  $e$ .

Příklad 1.6: K zadání výrazu potřebujeme příkaz `sqrt` pro vložení odmocniny a příkaz `exp` pro vložení Eulerova čísla. Příkaz má jeden parametr, kterým je exponent Eulerova čísla (tj. pro Eulerovo číslo samotné zadáváme `exp(1)`). Vložit Eulerovo číslo je možné též zapsáním písmene  $e$ , vyvoláním funkce automatického dokončování a zvolením položky **Exponential 'e'**.

Příklad 1.7: Nejrychlejší způsob je zadat do dokumentu `?sum`, případně zadat `sum`, umístit kurzor na příkaz a stisknout klávesu F2.

Příklad 1.8: Je několik způsobů, jak to zjistit. Zřejmě nejrychlejší je vyhledávat v nápovědě klíčová slova **matrix** a **vector**, případně **Linear Algebra**.

Příklad 1.10: Pozor na rozdíl mezi počtem platných cifer a počtem desetinných míst.

Příklad 1.11: Když zapíšeme nějaké číslo s desetinnou tečkou, Maple jej automaticky bude brát jako číslo v pohyblivé řádové čárce a výpočty s ním bude zaokrouhlovat na počet platných míst specifikovaný proměnnou `Digits`.

Příklad 1.13: Použijeme příkaz `isolve`.

Příklad 1.14: Použijeme příkaz `isolve`. Systém Maple vypíše řešení s použitím konstant, které jsou přirozenými čísly (bez nuly). Správně však mají být použity nezáporné celočíselné konstanty.

Příklad 1.16: Řešíme jako soustavu nerovnic příkazem `solve`.

Příklad 1.17: Použijeme příkaz `solve`. Pro  $a = 0$  bychom dostali lineární polynom.

Příklad 1.18: Řešíme opět příkazem `solve`. Pozor, daná rovnice má nekonečně mnoho řešení.

Příklad 1.19: Řešíme jako soustavu rovnic příkazem `solve`.

## 6.2 Matematická analýza s Maple v $\mathbb{R}$

Příklad 2.3: Použijeme zavedení předpokladu: `assuming`.

Příklad 2.4: Použijeme příkaz `simplify`.

Příklad 2.5: Použijeme příkaz `simplify`.

Příklad 2.6: Použijeme příkaz `factor`.

Příklad 2.7: Použijeme příkaz `simplify`.

Příklad 2.8: Využijeme příkazů `simplify`, `factor` a `convert`.

Příklad 2.12: Pro všechna  $x \in \mathbb{R}$  platí:  $\sin(x) \in [-1, 1]$ .

Příklad 2.13: Platí:  $f(x) = \frac{1}{x^2-5 \cdot x+6}$  a  $f(-x) = \frac{1}{x^2+5 \cdot x+6}$ . Z toho máme:  $f(x) \neq f(-x)$ ,  $f(x) \neq -f(-x)$  a tedy funkce není sudá, ani lichá.  $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$ ,  $H(f) = \mathbb{R} \setminus (-4, 0]$ . Obor hodnot určíme z toho, že polynom  $x^2 - 5 \cdot x + 6$  nabývá všech kladných hodnot (a proto musí i funkce  $f(x)$ ). Zmíněný polynom nabývá též záporných hodnot, a to na intervalu  $(2, 3)$ , přičemž tu nejmenší přesně uprostřed intervalu, tj. v bodě  $x = \frac{5}{2}$ . Funkce  $f(x)$  v tomto bodě naopak nabývá své nejvyšší hodnoty na intervalu  $(2, 3)$ , a to hodnoty  $-4$ .

Z předešlého plyne, že funkce není ohraničená.

Příklad 2.14:

(a)  $f(x) = 9 - x^2, f(-x) = 9 - x^2 = f(x) \Rightarrow$  sudá funkce,

(b)  $f(x) = \sqrt{x}, f(-x) = \sqrt{-x} \Rightarrow$  ani sudá, ani lichá,

(c)  $f(x) = \frac{1}{x}, f(-x) = \frac{-1}{x} = -f(x) \Rightarrow$  lichá funkce.

Příklad 2.15:

(a)  $f(x) = 2 \cdot x$ , kde  $x \in (0, 1)$ ,

(b)  $f(x) = \frac{1}{x-1}$ ,

(c)  $f(x) = \frac{1}{x} + 1$ ,

(d)  $f(x) = e^x$ ,

(e)  $f(x) = \begin{cases} x+2 & \dots & x \leq -2 \\ x-2 & \dots & x \geq 2 \end{cases}$ ,

(f)  $f(x) = \begin{cases} x-2 & \dots & x \leq 0 \\ 2 & \dots & 0 < x \leq 1, \\ x+1 & \dots & x \geq 1 \end{cases}$ ,

(g)  $f(x) = \arctan(x)$ ,

(h)  $f(x) = \begin{cases} \ln(-x) & \dots & x < 0 \\ \ln(x) & \dots & x > 0 \end{cases}$ .

Příklad 2.16:  $f(x) = x^3 - k \cdot x^2 + 2 \cdot x$ ,  $f(-x) = -(x^3 + k \cdot x^2 + 2 \cdot x)$ . Z toho dostáváme:  $k = -k = 0$ .

Příklad 2.17:

- (a) Pro  $a \neq 0$  se jedná o bijekci.
- (b) Ano, je to bijekce.
- (c) Nejedná se o bijekci, funkce není prostá.
- (d) Ano, je to bijekce.
- (e) Ano, je to bijekce.

Příklad 2.19:

- (a)  $f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \cdot (x - 1)$ ,
- (b)  $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ ,
- (c)  $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{x+1}$ ,
- (d)  $f^{-1}(x) = (1 - x)^2 \dots x \geq 0$ ,
- (e)  $f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$ ,
- (f) zadaná funkce není prostá (a nemá tak inverzi).

Příklad 2.20: Každá funkce osově symetrická vzhledem k přímce  $y = x$  je sama sobě inverzí. To znamená, že jich je dokonce nekonečně mnoho.

Příklad 2.22:  $g^{-1}(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln(x)$ . Legendu můžeme do grafu přidat nastavením parametru `legend` příkazu `plot` nebo kliknutím na graf a výběrem z kontextové nabídky.

Příklad 2.23: Použijeme příkaz `animate`. Funkce  $h(x)$  je klesající pro  $a < 0$ , rostoucí pro  $a > 0$  a konstantní pro  $a = 0$ .

Příklad 2.25: Vycházíme z definice 2.8, pouze se nyní přibližujeme k bodu  $x_0$  zprava, tj. uvažujeme interval  $(x_0, x_0 + \delta)$ .

Příklad 2.26: Vyjdeme z definic 2.9 a 2.10. Uvažujeme bod  $\infty$  (resp.  $-\infty$ ) a chceme popsat stav, kdy pro libovolně „vysokou“ (resp. „nízkou“) hodnotu  $M$  existuje hranice, nad níž (resp. pod níž) pro všechna  $x$  platí, že funkční hodnota  $f(x)$  je větší (resp. menší) než ona původně (libovolně) zvolená hodnota  $M$ .

Příklad 2.27: Maple zvládne určit všechny limity. Postupujeme tedy klasicky využitím symbolu pro počítání limit z palety, kontextové nabídky nebo příkazu `limit`.

Příklad 2.28:

- (a) Zavedeme substituci  $y = x^3$ .

- (b) Využijeme vzorce  $\cos(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \sin\left(\frac{x}{2}\right)^2$ .
- (c) Rozšíříme výrazem  $\sqrt{x^2 + 5} + 3$ .
- (d) Rozšíříme výrazem  $\frac{1}{x}$  a uvědomíme si, že pro  $x \rightarrow -\infty$  je  $x = -\sqrt{x^2}$ .
- (e) Zadaný zlomek rozložíme na součet dvou zlomků a zavedeme substituci  $u = -x$ . Dalšími drobnými úpravami umíme rozhodnout, kam se který výraz (zlomek) limitně blíží pro  $u \rightarrow \infty$ .
- (f) Využijeme vzorce  $\sin(2 \cdot t) = 2 \cdot \sin(t) \cdot \cos(t)$  a platnosti  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ .

Příklad 2.29:

- (a) Stačí dát příklad takřka jakékoli „rozumné“ funkce definované na nějakém neprázdném intervalu – viz definice 2.7.
- (b) Vycházíme z 2.10. Je třeba dát příklad funkce  $f(x)$ , jejíž hodnoty se blíží nějakému konečnému číslu pro  $x \rightarrow \infty$  (resp.  $x \rightarrow -\infty$ ). Mohla by něco takového splňovat nějaká polynomiální, mocninná, exponenciální, či goniometrická funkce?
- (c) Takřka „opačný“ případ k předešlému. Hledáme funkci  $f(x)$ , která pro nějaké konečně velké  $x$  „roste nade všechny meze“ (resp. „klesá pod všechny meze“). Mohla by něco takového splňovat nějaká polynomiální, mocninná, exponenciální, či goniometrická funkce?
- (d) Nyní chceme najít funkci  $f(x)$ , jejíž hodnoty se blíží  $\infty$  (resp.  $-\infty$ ) pro  $x \rightarrow \infty$  (resp.  $x \rightarrow -\infty$ ). Opět je na místě stejná otázka: splňuje toto nějaká polynomiální, mocninná, exponenciální, či goniometrická funkce?
- (e) Musíme spojit všechny předešlé body. Na bod (a) můžeme zapomenout. Pokud splníme všechny ostatní, bude splněna i tato podmínka. Jedno možné řešení je najít funkci splňující (b) a (d) – takovou funkci jste již možná dokonce našli – a zkombinovat ji (tj. např. vynásobit) s funkcí splňující bod (c).

Příklad 2.31:

- (a) Musíme se obejít bez systému Maple, jelikož příkaz `discont` neumí hledat nespojitosti u funkcí definovaných po částech. Podezřelé body z nepojitosti jsou body 1 a 2. Musíme ověřit, zda v nich existuje limita a zda je rovna příslušné funkční hodnotě.
- (b) V tomto případě příkaz `discont` pracuje bezchybně.
- (c) Opět se musíme obejít bez systému Maple. Postupujeme analogicky k řešení příkladu 2.30.

Příklad 2.32: Postupujeme analogicky k řešení příkladu 2.30. Hledání čísel  $c$  a  $d$  vede na soustavu dvou rovnic.

Příklad 2.33: Jsou dvě hlavní možnosti, jak postupovat. Buď vzít známou funkci, která není spojitá, ale víme, že má limitu v každém bodě (na daném intervalu), nebo vzít funkci spojitou (ta má limitu v každém bodě) a nespojitost „vytvořit“, aniž bychom porušili existenci limity.

Příklad 2.34: Systém Maple zvládne určit všechny derivace. Ke správné odpovědi je nutné porozumět výpisu systému v případě (b). Symbol `D` tu značí diferenciální operátor.

Příklad 2.35: Je třeba najít spojitou funkci  $f(x)$ , pro niž by v nějakém bodě  $x_0$  neexistovala limita z definice 2.14:  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ . K tomu, aby tato limita neexistovala, stačí, aby se nerovnalily limity zleva a zprava, tedy aby platilo:  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ . Jak musí vypadat funkce splňující předchozí nerovnost?

Když najdeme právě popsanou funkci, je již jednoduché např. definováním po částech vytvořit funkci, která bude mít na daném intervalu libovolný počet (a tedy i např. rovný dvěma) bodů, v nichž bude funkce spojitá, ale nebude v nich mít derivaci.

Příklad 2.36: Z poznámky 2.4 víme, že směrnice tečny je rovna derivaci funkce v příslušném bodě. V rovnici tečny tak zbývá určit pouze konstantní člen, jehož hodnotu zjistíme z toho, že tečna má s funkcí jeden společný bod.

Příklad 2.37: Jelikož má být tečna rovnoběžná s nějakou přímkou, musí mít stejnou směrnici. Tedy pokud  $y = k \cdot x + q$  je rovnicí tečny k funkci  $f(x)$  v bodě  $x_0$ , pak musí platit  $k = f'(x_0) = 12$  (neboť 12 je směrnice rovnoběžné přímky). Jelikož  $f'(x_0) = 3 \cdot x_0^2$ , dostáváme dva různé body  $x_0$  a tedy dvě tečny.

Příklad 2.38: Řešíme obdobně jako předchozí příklad. Směrnice zadané přímky je rovna  $-\frac{1}{3}$ . My potřebujeme nyní směrnici kolmice. K tomu využijeme lineární algebry, odkud víme, že dva vektory jsou na sebe kolmé, jestliže je jejich skalární součin roven 0. Máme-li přímky  $y = k \cdot x$  a  $y = l \cdot x$ , pak tyto jsou na sebe kolmé, jestliže  $1 + k \cdot l = 0$ . Z toho dostáváme, že směrnice hledané kolmice je rovna 3, což je tedy směrnice tečny. Tedy pokud  $y = k \cdot x + q$  je rovnicí tečny k funkci  $f(x)$  v bodě  $x_0$ , pak musí platit  $k = f'(x_0) = 3$ . Jelikož  $f'(x_0) = 3 \cdot x_0^2$ , dostáváme opět dva různé body  $x_0$  a tedy dvě tečny.

Příklad 2.40:  $f(x) = \sqrt{x}, x_0 = 49, h = 2$ .

Příklad 2.41:  $f(x) = \sqrt[3]{x}, x_0 = 125, h = -2$ .

Příklad 2.42:  $f(x) = x^4, x_0 = 3, h = -0.05$ .

Příklad 2.43: Použijeme příkaz `taylor` pro bod  $x = 0$  a získaný výsledek převedeme na polynom příkazem `convert`.

Příklad 2.44: Použijeme příkaz `taylor` pro bod  $x = 1$ . Proměnnou `Order` nastavíme na hodnotu 5 a získaný výsledek převedeme na polynom příkazem `convert`.

Příklad 2.45: Použijeme příkaz `taylor` pro bod  $x = 2$ .

Příklad 2.47: Postupujeme analogicky k příkladu 2.46.

- (a) Uvažujeme funkci  $e^x$ , kterou rozvineme do Taylorova polynomu v bodě  $x_0 = 0$ , a hledáme aproximaci v bodě  $x = -1$ . Stejným postupem jako v příkladu 2.46 dospějeme k tomu, že je pro požadovanou přesnost potřeba nastavit proměnnou `Order` na hodnotu 7.

- (b) Uvažujeme funkci  $\sqrt[5]{x}$ , kterou rozvineme do Taylorova polynomu v bodě  $x_0 = 243$ , a hledáme aproximaci v bodě  $x = 250$ . Nyní musíme k odhadu velikosti Taylorova zbytku použít poznámku 2.7, neboť  $x_0 \neq 0$ . Tvar zbytku je pak nejjednodušší vyhodnocovat postupně pro  $n = 1, 2, \dots$ , neboť Maple neumí vyřešit příslušnou nerovnici. Dostatečné  $n$  v tomto případě:  $n = 2$ .

Příklad 2.50:

- (a) Funkce  $f$  má tři stacionární body, z nichž jediný je lokální extrém, další dva jsou body inflexní. Funkce nemá žádnou asymptotu.
- (b) Funkce  $f$  má dva stacionární body, oba jsou lokálními extrémy. Funkce má dále tři inflexní body. Funkce není definována ve dvou bodech, v nichž má asymptoty bez směrnice. Asymptoty se směrnicí neexistují. Aby Maple tento příklad správně vyřešil, je potřeba načíst balík `RealDomain`.
- (c) Funkce má dva stacionární body, z nichž jeden je lokální extrém, druhý je inflexním bodem. Funkce není definována v jediném bodě, v němž má asymptotu bez směrnice. Funkce má také asymptotu se směrnicí.
- (d) Funkce má nekonečně mnoho stacionárních bodů (na zjištění tohoto v Maple je třeba použít atribut `allsolutions`), všechny jsou však inflexními body. Funkce má i další inflexní body (vždy uprostřed intervalu tvořeného stacionárními body). Funkce nemá asymptotu bez směrnice ani asymptotu se směrnicí. Opět pozor na výpočet systému Maple – při počítání limit v některých případech vypisuje interval jako hodnotu limity (limita však neexistuje).
- (e) Zásadní otázka v tomto příkladu je, zda je funkce  $f(x)$  spojitá v bodě 0. Funkce má tři stacionární body a všechny jsou jejími lokálními extrémy. Funkce má dále dva inflexní body a žádnou asymptotu (bez směrnice či se směrnicí).

Příklad 2.54:

- (a) Stačí rozložit na dva zlomky a určit přímo ze znalosti „tabulkových“ integrálů.
- (b) Výraz pod odmocninou je možné upravit tak, aby se dala odmocnina odstranit (aplikovat). Poté už se výsledek určí podobně jako v předchozím případě.
- (c) Po roznásobení je možné integrovat každý člen zvlášť.
- (d) Rozklad na parciální zlomky.
- (e) Opět rozklad na parciální zlomky. V tomto případě je však výrazně pracnější než předchozí, neboť jeden ze získaných parciálních zlomků je třeba dále upravit (rozložit), abychom integrací získali přirozený logaritmus. Tím se nám však objeví další zlomek, u nějž je třeba rozpoznat, že připomíná derivaci funkce arkus tangens ( $\arctan$ ), jen je potřeba zlomek opět upravit do vhodného tvaru.
- (f) Zavedeme substituci  $t = 5 \cdot x + 6$ .
- (g) Zavedeme substituci  $t = \ln(x)$ .
- (h) Zavedeme substituci  $t = x^2 + 1$ .



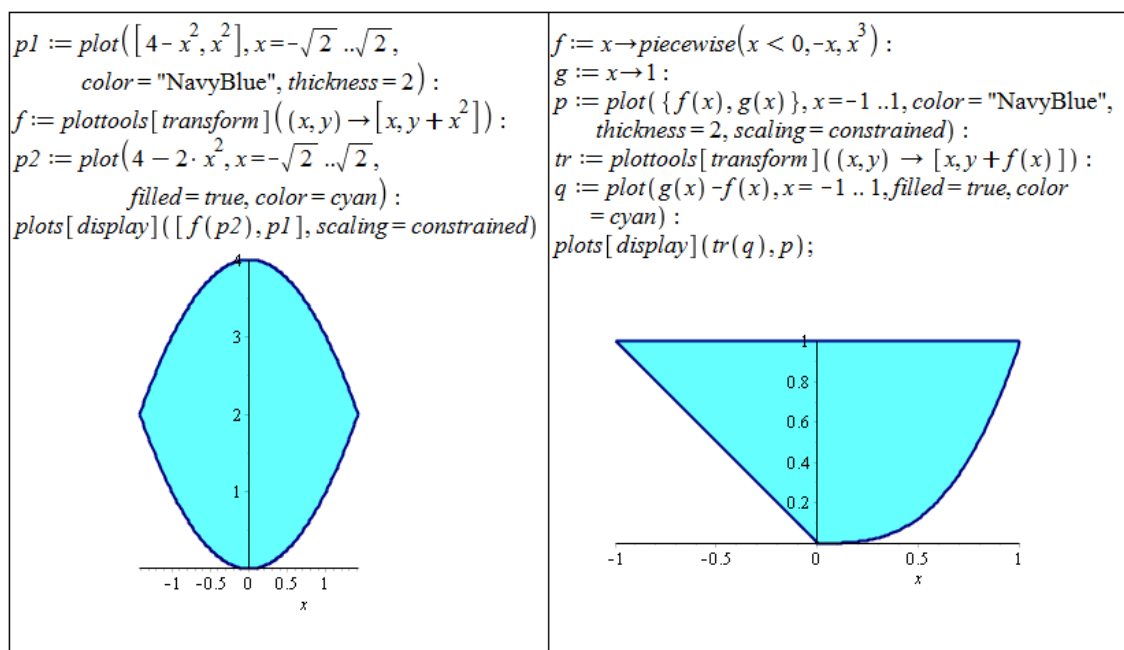
- (i) Řešíme metodou per partes, přičemž funkce, kterou budeme chtít derivovat, bude funkce  $x$ . Maple při použití příkazu `Parts` využije znalosti  $\int \cos^2(x) dx = \frac{1}{2} \cdot \cos(x) \cdot \sin(x) + \frac{1}{2} \cdot x$ , k čemuž dospějeme užitím vztahu  $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2 \cdot x)}{2}$ . Integrál získaný metodou per partes je třeba rozložit a na jeden z nich použít substituční metodu.
- (j) Řešíme metodou per partes. Funkcí, kterou budeme derivovat, je funkce  $\ln(x)$ .
- (k) Řešíme opět metodou per partes. Funkci  $\arctan(x)$  si zapíšeme jako  $\arctan(x) \cdot 1$  a právě samotná funkce  $\arctan(x)$  bude ta, kterou budeme derivovat.
- (l) Řešíme nejprve substituční metodou položením  $t = x^2$ . Následně použijeme metodu per partes, přičemž funkce, kterou budeme derivovat, bude funkce  $x$ .

Příklad 2.55: Ve všech případech využíváme Newton-Leibnizovy formule.

- (a) Řešíme metodou per partes.
- (b) Zavedeme substituci  $x = t^2$ .
- (c) Zavedeme substituci  $\cos(x) = t$ .
- (d) Zavedeme substituci  $e^x = t$ .
- (e) Řešíme metodou per partes.
- (f) Zavedeme nejprve substituci  $t = e^x$  a následně  $u^2 = t - 1$ .

Příklad 2.58:

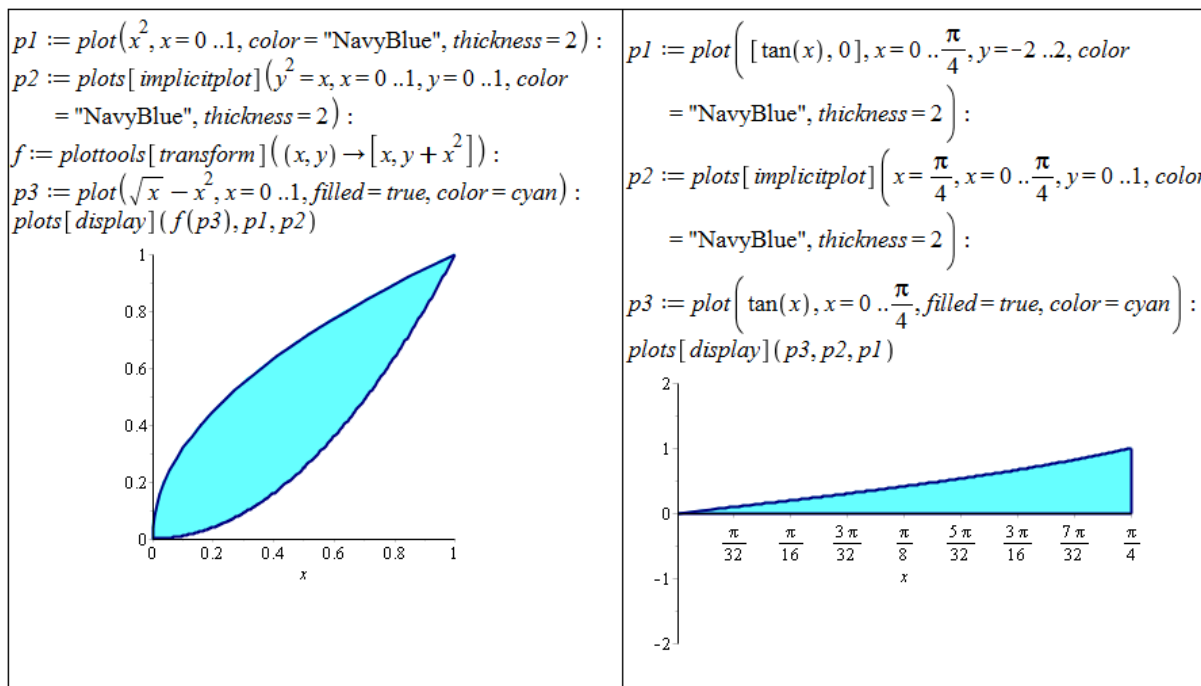
- (a) Řešíme naprosto analogicky s příkladem 2.56. Výsledek je:  $S = \frac{16 \cdot \sqrt{2}}{3}$ .



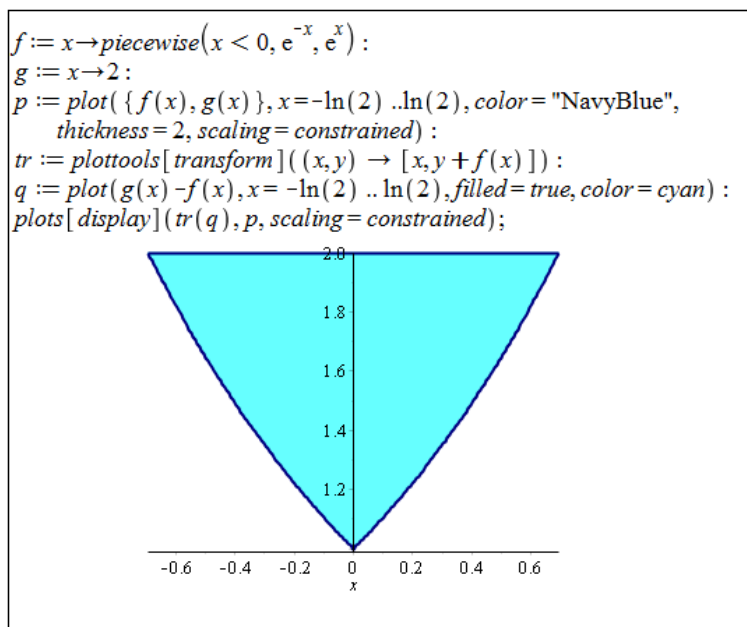
Obrázek 6.1: Zobrazení plochy z příkladu 2.58.(a) vlevo, zobrazení plochy z příkladu 2.58.(b) vpravo.

(b) Obsah zadané plochy je třeba počítat „na dvakrát“. Nejprve se spočítá obsah plochy mezi křivkami  $y = -x$  a  $y = 1$  na intervalu  $[-1, 0]$ , následně obsah plochy mezi křivkami  $y = x^3$  a  $y = 1$  na intervalu  $[-1, 0]$ . Výsledek je:  $S = \frac{5}{4}$ .

(c) Stačí si uvědomit, mezi kterými částmi křivek leží zadaná plocha. Výsledek je:  $S = \frac{1}{3}$ .



Obrázek 6.2: Zobrazení plochy z příkladu 2.58.(c) vlevo, zobrazení plochy z příkladu 2.58.(d) vpravo.



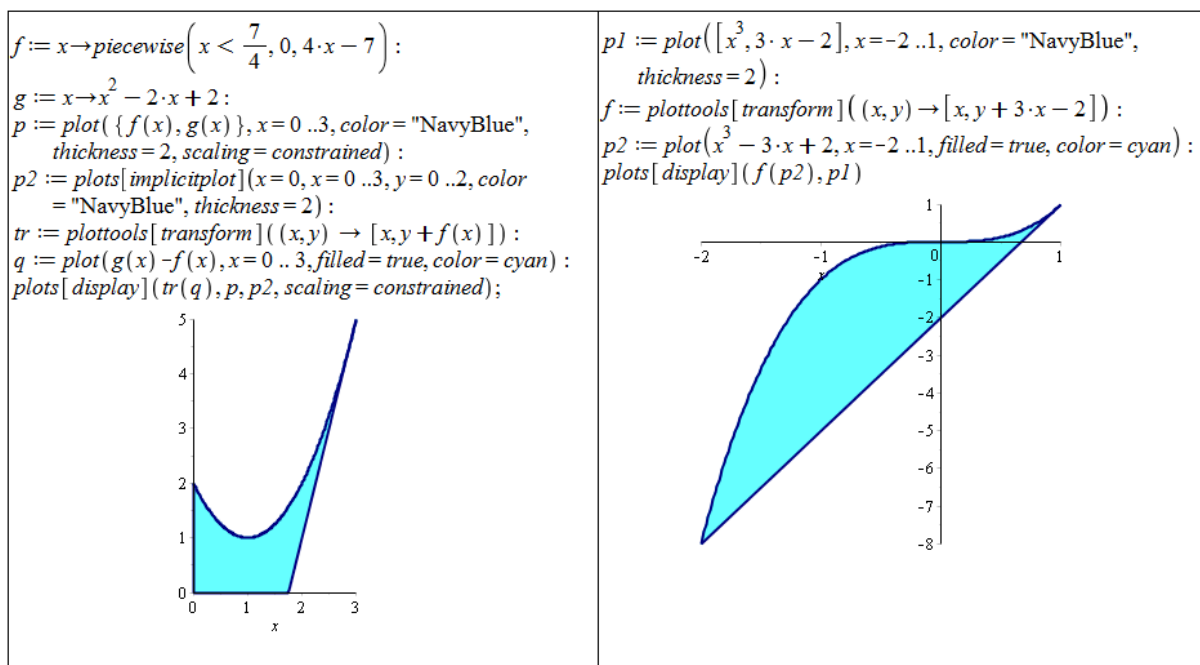
Obrázek 6.3: Zobrazení plochy z příkladu 2.58.(e).

(d) Řešíme rovnou podle poznámky 2.23. Výsledek je:  $S = \frac{\ln(2)}{2}$ .

(e) Řešíme opět rozdělením na dva určité integrály. Výsledek je:  $S = 4 \cdot \ln(2) - 2$ .

Příklad 2.59:

(a) Pomocí derivace musíme určit rovnici tečny. Dále už řešíme analogicky k předchozím příkladům. Výsledek je:  $S = \frac{23}{8}$ .



Obrázek 6.4: Zobrazení plochy z příkladu 2.59.(a) vlevo, zobrazení plochy z příkladu 2.59.(b) vpravo.

(b) Opět musíme určit rovnici tečny a také její průsečík s funkcí  $y = x^3$ . Výsledek je:  $S = \frac{27}{4}$ .

(c) Nyní je třeba určit rovnice dvou tečen a jejich průsečík. Výsledek je:  $S = \frac{9}{4}$ .

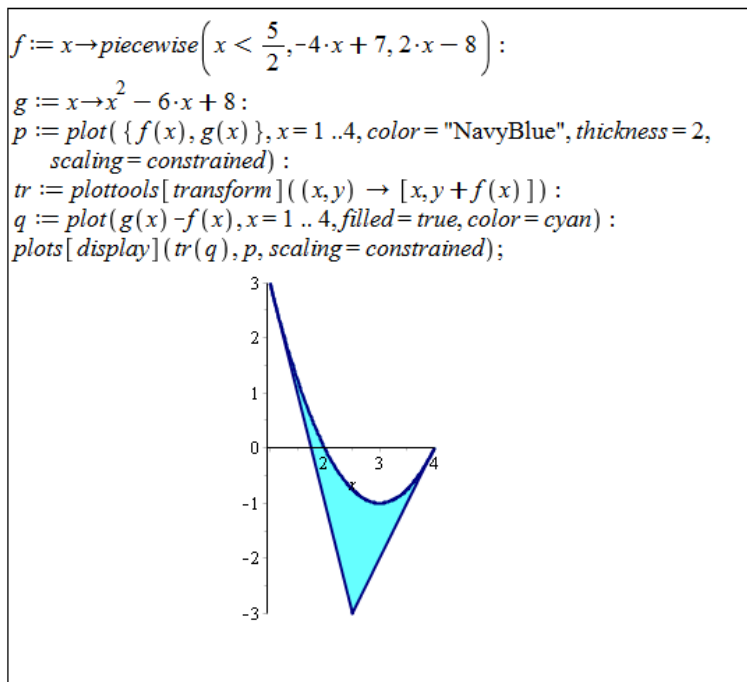
Příklad 2.60: Ve všech případech využijeme poznámky 2.24:

(a) Výsledek je:  $S = \frac{72 \cdot \sqrt{3}}{5}$ .

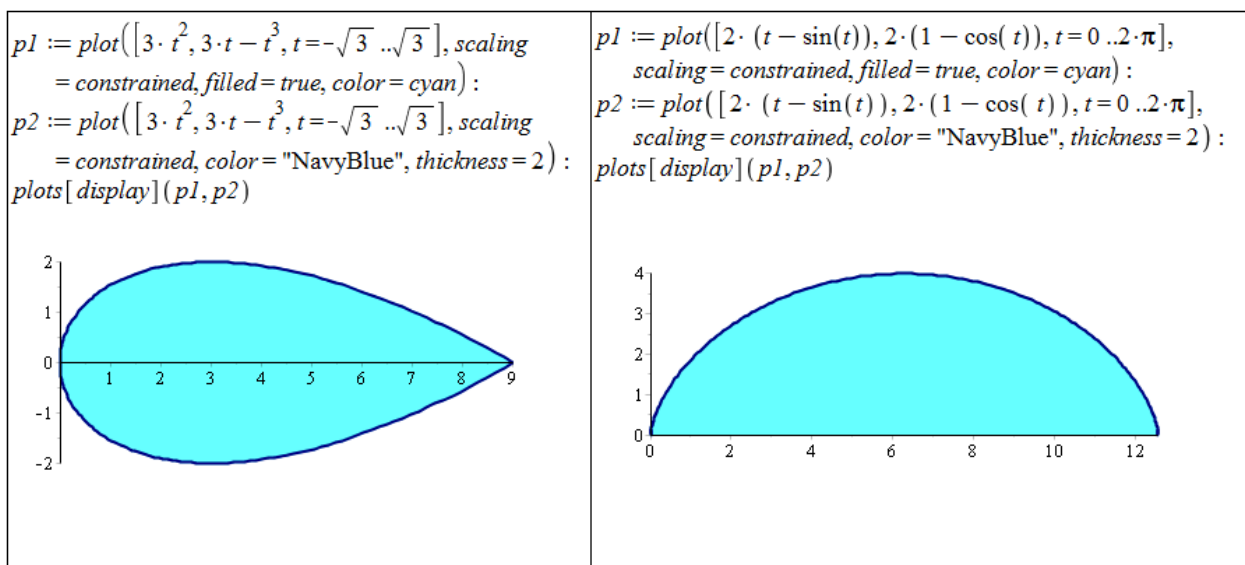
(b) Výsledek je:  $S = 12 \cdot \pi$ .

(c) Výsledek je:  $S = \frac{27 \cdot \pi}{16}$ .

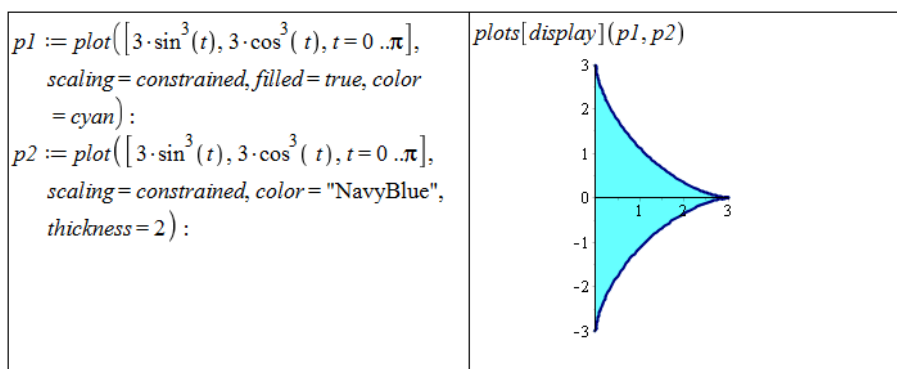
Příklad 2.61: Je třeba odvodit rovnici kružnice. Máme dvě možnosti – buď popsat „horní“ polovinu kružnice vztahem  $y = \sqrt{r^2 - x^2}$  a „spodní“ polovinu kružnice vztahem  $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ , nebo kružnici popsat parametricky předpisem  $x = r \cdot \sin(t)$ ,  $y = r \cdot \cos(t)$ ,  $t \in [0, 2 \cdot \pi]$ . Následně využijeme odpovídajícího určitého integrálu. Při použití prvního postupu je v Maple nutné přidat při výpočtu integrálu předpoklad, že  $r$  je nezáporné (reálné) číslo, abychom dospěli k požadovanému výsledku.



Obrázek 6.5: Zobrazení plochy z příkladu 2.59.(c).



Obrázek 6.6: Zobrazení plochy z příkladu 2.60.(a) vlevo, zobrazení plochy z příkladu 2.60.(b) vpravo.



Obrázek 6.7: Zobrazení plochy z příkladu 2.60.(c).

Příklad 2.64: Ve všech případech využijeme poznámky 2.25.

(a)  $l = \frac{26 \cdot \sqrt{13}}{27} - \frac{16}{27}$

(b)  $l = \frac{e^{-1} \cdot \sqrt{2 \cdot e^2 + e^4 + 1} \cdot (e^2 - 1)}{e^2 + 1} \doteq 2.35$

(c) Systém Maple vyjádří řešení za pomoci eliptického integrálu. Informace k tomuto výsledku můžeme nalézt v nápovědě. Příkazem `evalf` získáme přibližné numerické řešení.

$$l = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \text{EllipticE}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \int_0^1 \frac{\sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}}{\sqrt{1 - x^2}} dx \doteq 3.82$$

(d)  $l = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \text{EllipticE}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \int_0^1 \frac{\sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}}{\sqrt{1 - x^2}} dx \doteq 3.82$

Příklad 2.65: Ve všech případech využijeme poznámky 2.26.

(a)  $l = 2 \cdot \sqrt{3}$

(b)  $l = 2 \cdot \pi^2$

(c)  $l = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{1 + 16 \cdot \pi^2} - \frac{1}{2} \cdot \ln(-4 \cdot \pi + \sqrt{1 + 16 \cdot \pi^2})$

Příklad 2.66: Řešíme analogicky jako v příkladu 2.61, jen místo obsahu kruhu počítáme obvod kružnice.

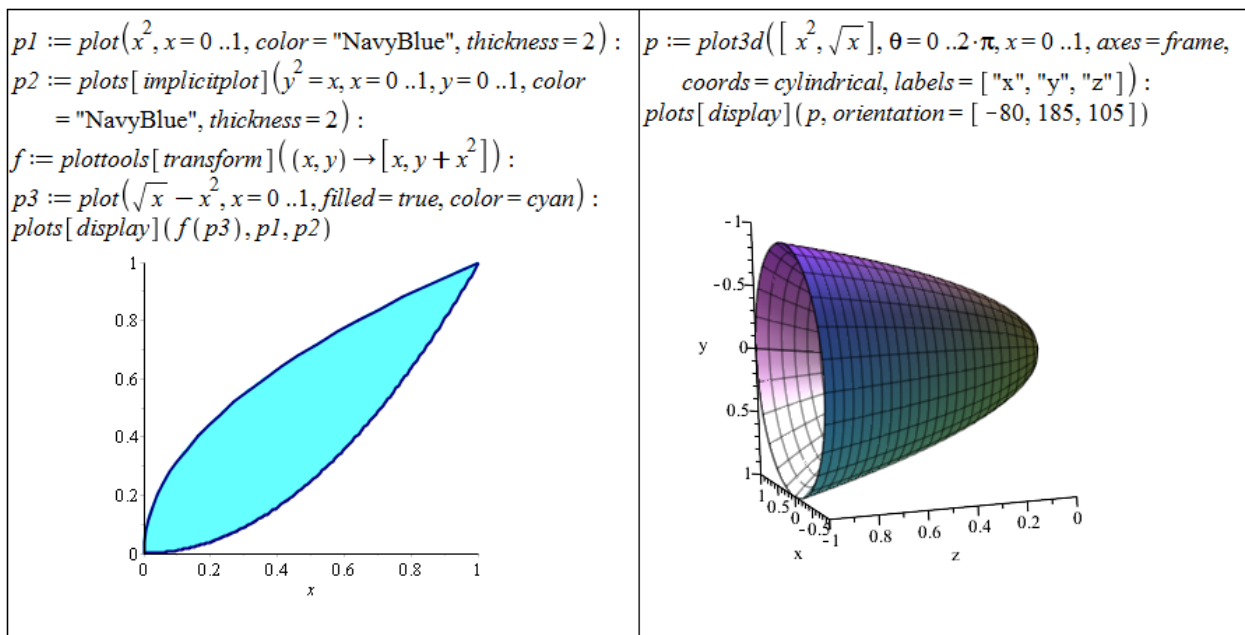
Příklad 2.69: Ve všech případech využijeme poznámky 2.27:

(a) Výsledek:  $V = \frac{3 \cdot \pi}{10}$ .

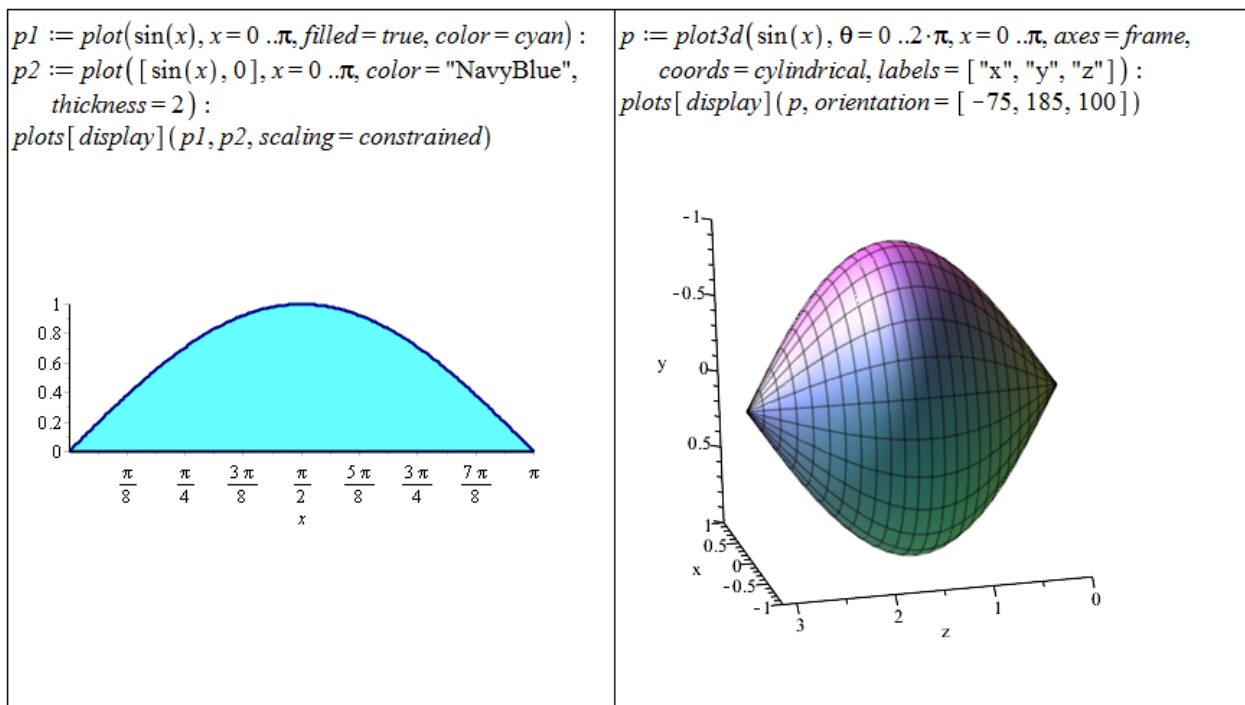
(b) Výsledek:  $V = \frac{\pi^2}{2}$ .

(c) Výsledek:  $V = \frac{8 \cdot \pi}{3}$ .

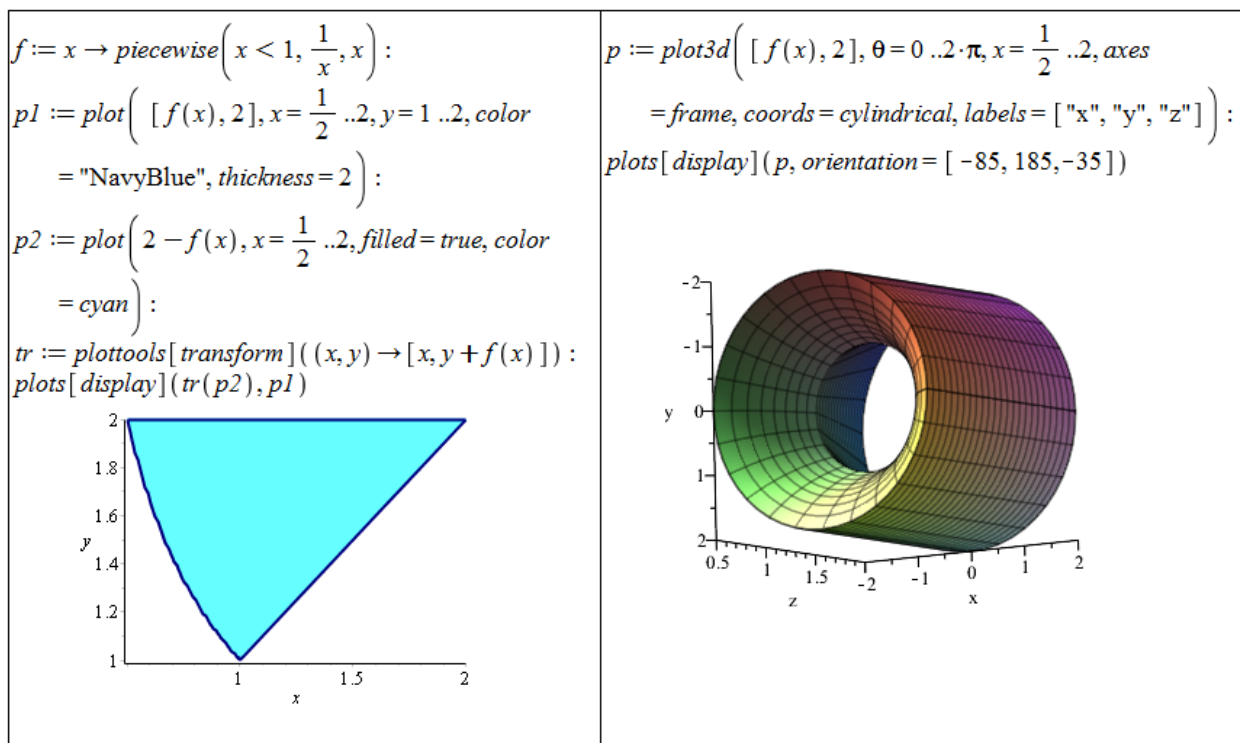
(d) Výsledek:  $V = \frac{8 \cdot \pi}{3}$ .



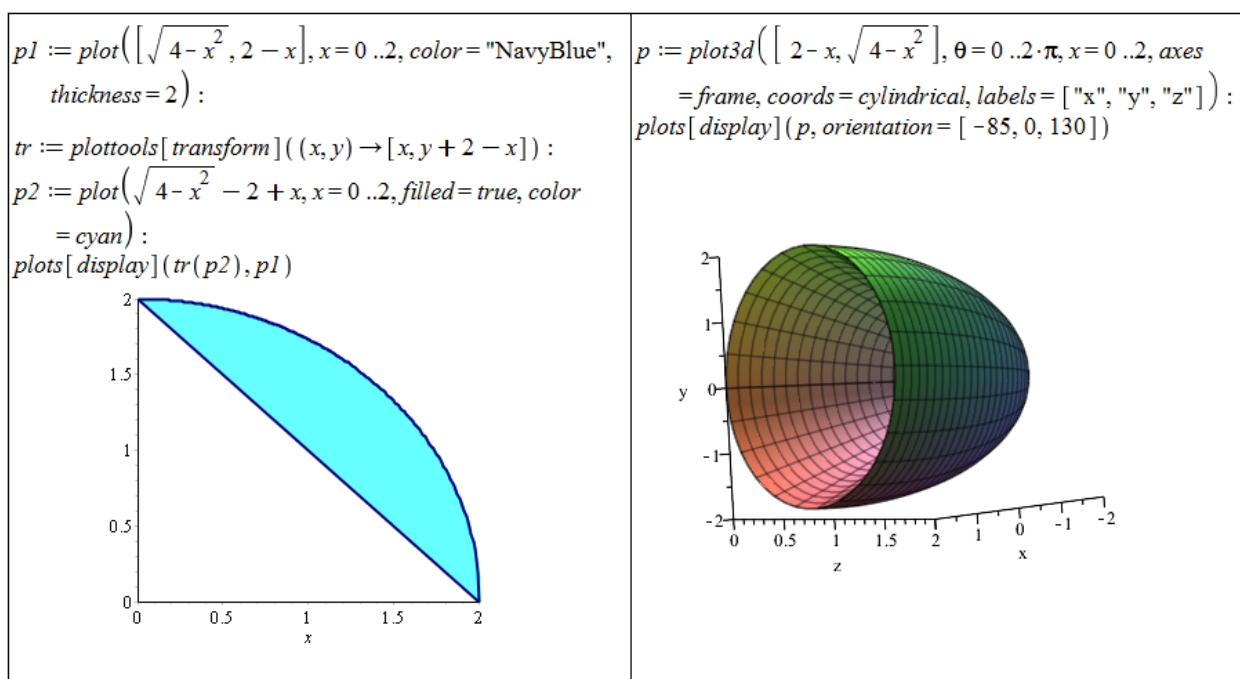
Obrázek 6.8: Zobrazení zadané plochy a získaného rotačního tělesa z příkladu 2.69.(a).



Obrázek 6.9: Zobrazení zadané plochy a získaného rotačního tělesa z příkladu 2.69.(b).



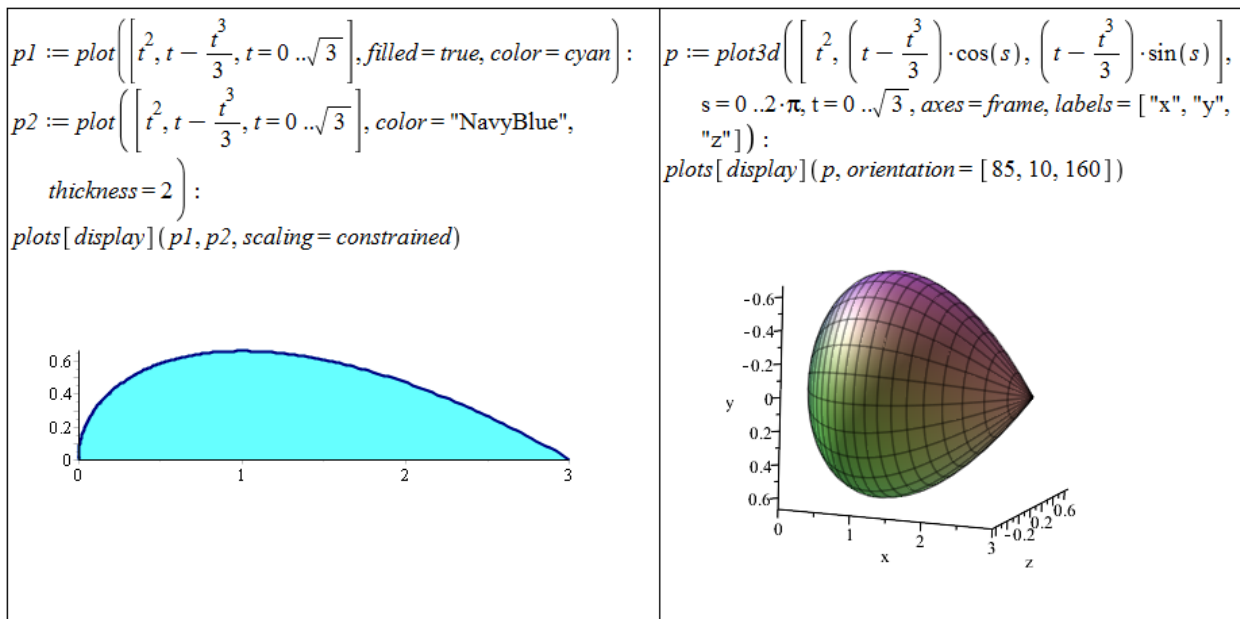
Obrázek 6.10: Zobrazení zadané plochy a získaného rotačního tělesa z příkladu 2.69.(c).



Obrázek 6.11: Zobrazení zadané plochy a získaného rotačního tělesa z příkladu 2.69.(d).

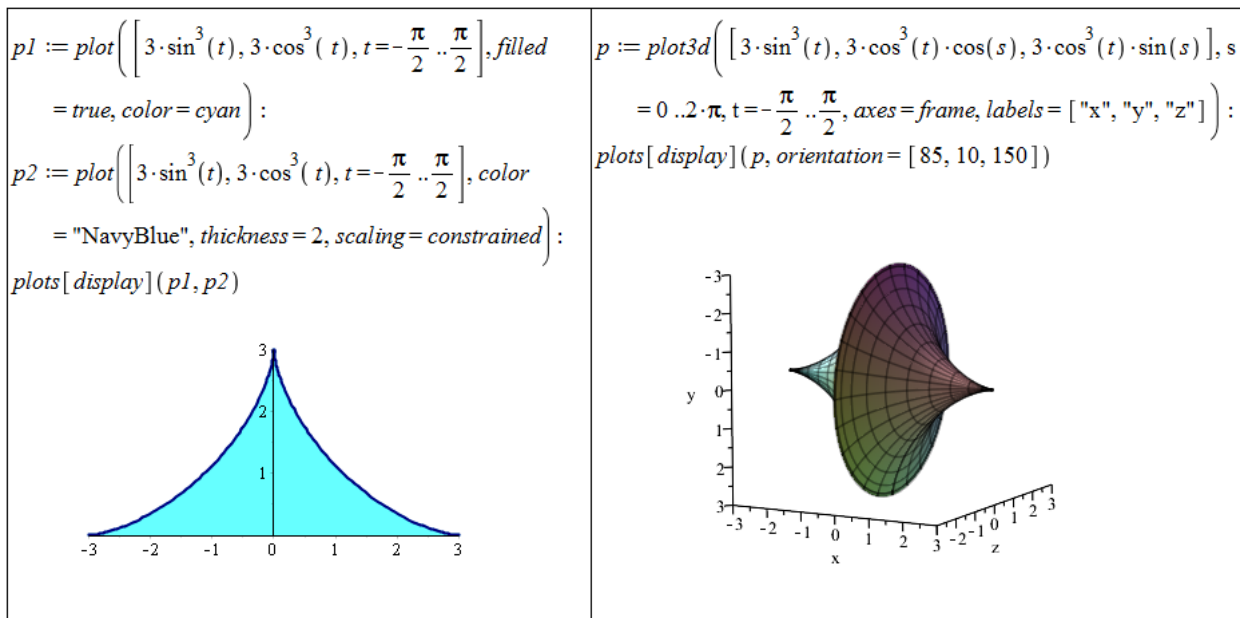
Příklad 2.70: Ve všech případech využijeme poznámky 2.28:

(a) Výsledek:  $V = \frac{3\pi}{4}$ .



Obrázek 6.12: Zobrazení zadané plochy a získaného rotačního tělesa z příkladu 2.70.(a).

(b) Výsledek:  $V = \frac{288\pi}{35}$ .

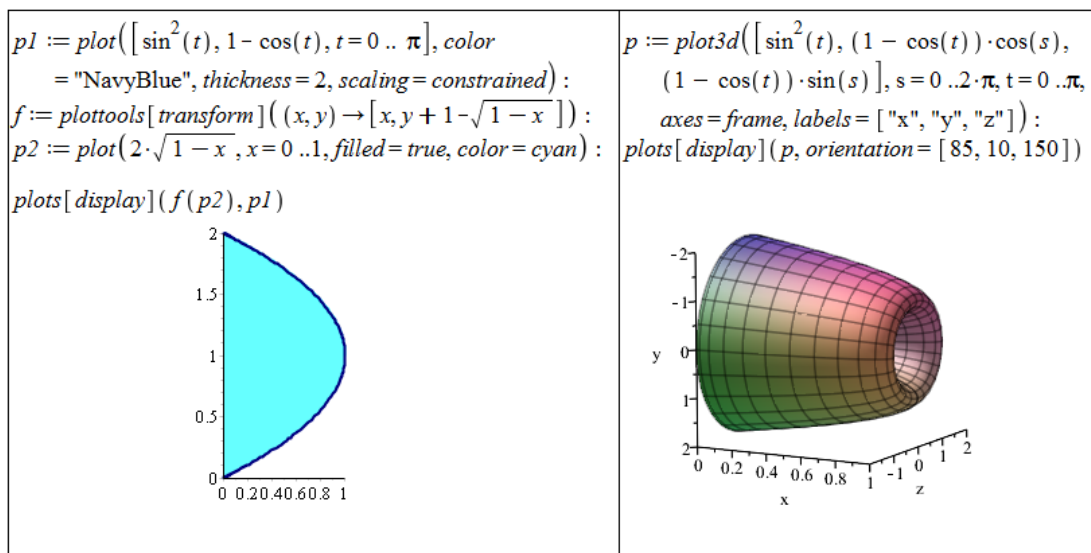


Obrázek 6.13: Zobrazení zadané plochy a získaného rotačního tělesa z příkladu 2.70.(b).

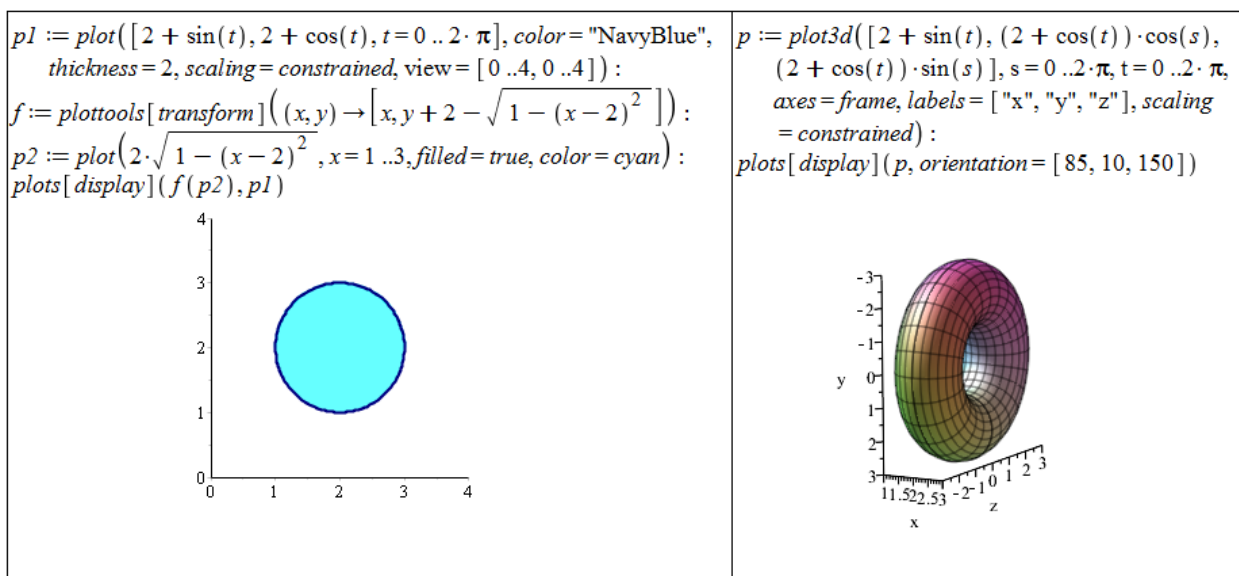
(c) Výsledek:  $V = 3 \cdot \pi$ .

(d) Výsledek:  $V = 4 \cdot \pi^2$ .





Obrázek 6.14: Zobrazení zadané plochy a získaného rotačního tělesa z příkladu 2.70.(c).



Obrázek 6.15: Zobrazení zadané plochy a získaného rotačního tělesa z příkladu 2.70.(d).

Příklad 2.71: Koule vznikne například rotací „horní“ poloviny kruhu kolem osy  $x$ . Je tedy potřeba odvodit rovnici kružnice o poloměru  $r$  a její „horní“ polovinu použít pro dosazení do vztahu pro výpočet objemu.

Příklad 2.72: Válec o poloměru podstavy  $r$  a výšce válce  $v$  vznikne rotací (kolem osy  $x$ ) obdélníka tvořeného stranou o délce  $v$  na ose  $x$ , kolmicemi v krajních bodech o délkách  $r$  a zbylou stranou o délce  $v$  (spojující kolmice „na druhé straně“).

Příklad 2.73: Kužel vznikne rotací trojúhelníka kolem osy  $x$ . Trojúhelník je tvořen úsečkou na ose  $x$  odpovídající výšce kužele a kolmicí na jednom konci úsečky o délce rovné poloměru kužele. Lineární funkce pak spojí „zbývající konce“ úsečky a kolmice (při vhodném

„rozmístění“ může být lineární funkcí funkce  $y = \frac{r}{v} \cdot x$ ).

Příklad 2.76: Ve všech případech využijeme poznámky 2.30. Obsah pláště zpravidla počítáme rozdělením na části pláště získané rotacemi jednotlivých funkcí na odpovídajících intervalech.

$$(a) S = \frac{1}{96} \cdot \pi \cdot (134 \cdot \sqrt{5} - 3 \cdot \ln(\sqrt{5} + 2) - 16) \doteq 9.14 .$$

$$(b) S = 2 \cdot \pi \cdot (\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})) \doteq 14.42.$$

$$(c) S = \pi \cdot (\sqrt{17} + 2 \cdot \ln(2) - \ln(1 + \sqrt{17}) + 2 \cdot \sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}) + 6) \doteq 42.68.$$

$$(d) S = 4 \cdot \pi \cdot (\sqrt{2} + 2) \doteq 42.90.$$

Příklad 2.77: Ve všech případech využijeme poznámky 2.31:

$$(a) S = 3 \cdot \pi.$$

$$(b) S = \frac{108 \cdot \pi}{5}.$$

$$(c) S = \pi \cdot (2 \cdot \sqrt{5} + \ln(\sqrt{5} + 2)) \doteq 18.58.$$

$$(d) S = 8 \cdot \pi^2.$$

Příklad 2.78: Řešíme zcela analogicky k příkladu 2.71.

Příklad 2.79: Řešíme analogicky k příkladu 2.72. Pozor na to, že v zadání se požaduje povrch celého válce, tj. musíme určit povrch pláště i podstavy válce.

Příklad 2.81: Postupujeme stejným způsobem jako v příkladu 2.80. Tentokrát je funkce nespojitá v bodě 0, a musíme tak určit  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 x \cdot \ln(x) dx$ .

Příklad 2.83:

$$(a) \text{ Integrál diverguje: } \lim_{x \rightarrow \infty} (2 \cdot \sqrt{x}) = \infty.$$

$$(b) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x) + \lim_{x \rightarrow \infty} \arctan(x).$$

(c) Maple ve výsledku zobrazí Fresnelův integrál definovaný jako

$$FresnelS(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot t^2\right) dt,$$

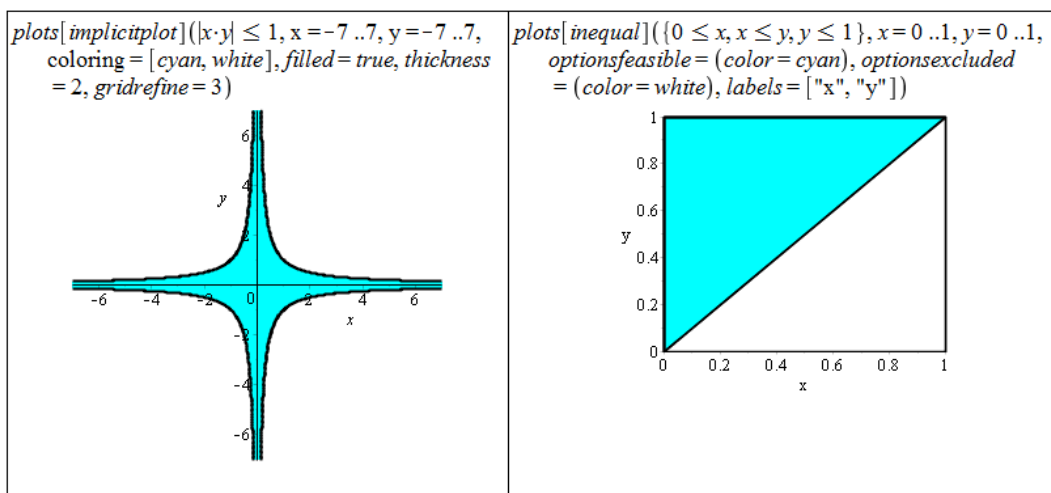
neboť neumí zapsat řešení analyticky pomocí standardních funkcí. Příkazem `evalf` zjistíme, že příslušný integrál konverguje.

$$(d) \text{ Integrál diverguje: } \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \infty.$$

## 6.3 Matematická analýza s Maple v $\mathbb{R}^n$

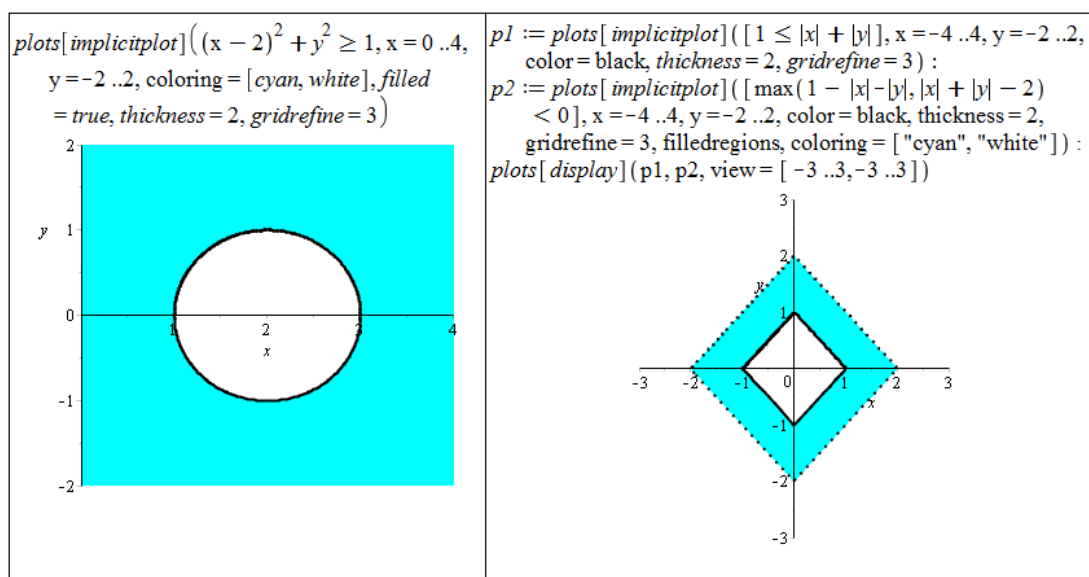
Příklad 3.4: Nakreslené oblasti jsou zobrazeny na obrázcích 6.16 – 6.18

(a),(b)



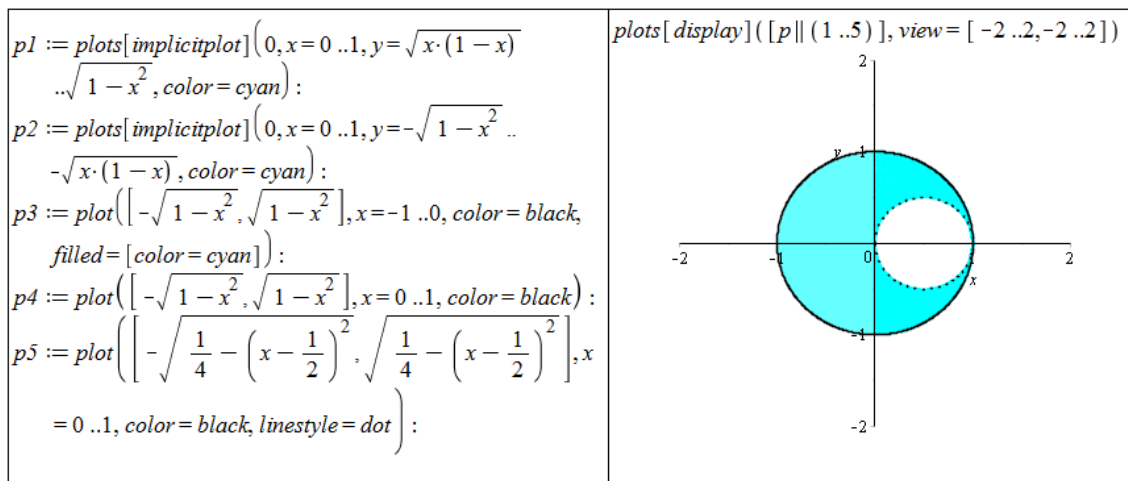
Obrázek 6.16: Zobrazení zadané oblasti z příkladu 3.4.(a) vlevo, zobrazení zadané oblasti z příkladu 3.4.(b) vpravo.

(c), (d)



Obrázek 6.17: Zobrazení zadané oblasti z příkladu 3.4.(c) vlevo, zobrazení zadané oblasti z příkladu 3.4.(d) vpravo.

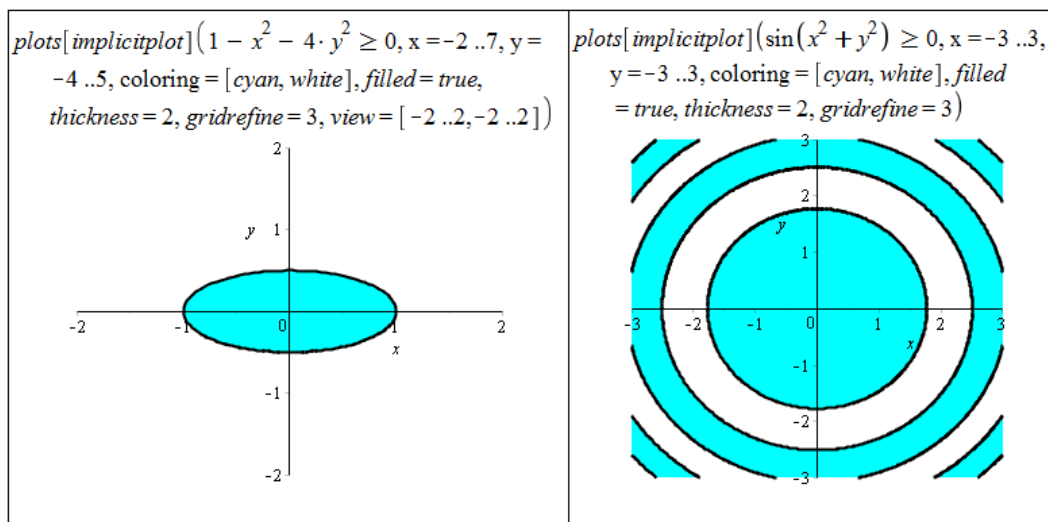
(e)



Obrázek 6.18: Zobrazení zadané oblasti z příkladu 3.4.(e).

Příklad 3.6: Příslušné definiční obory jsou zobrazeny na obrázcích 6.19 – 6.21

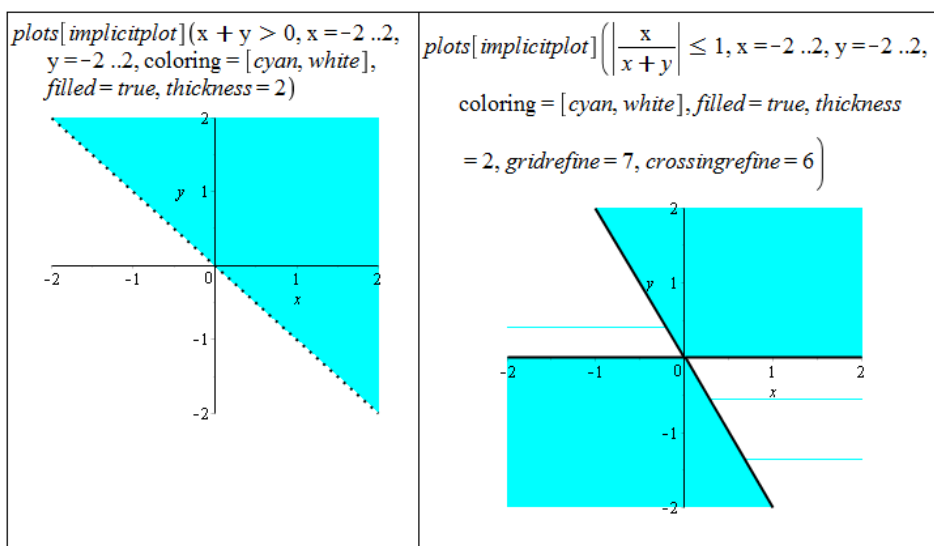
(a), (b) Výraz pod odmocninou musí být nezáporný.



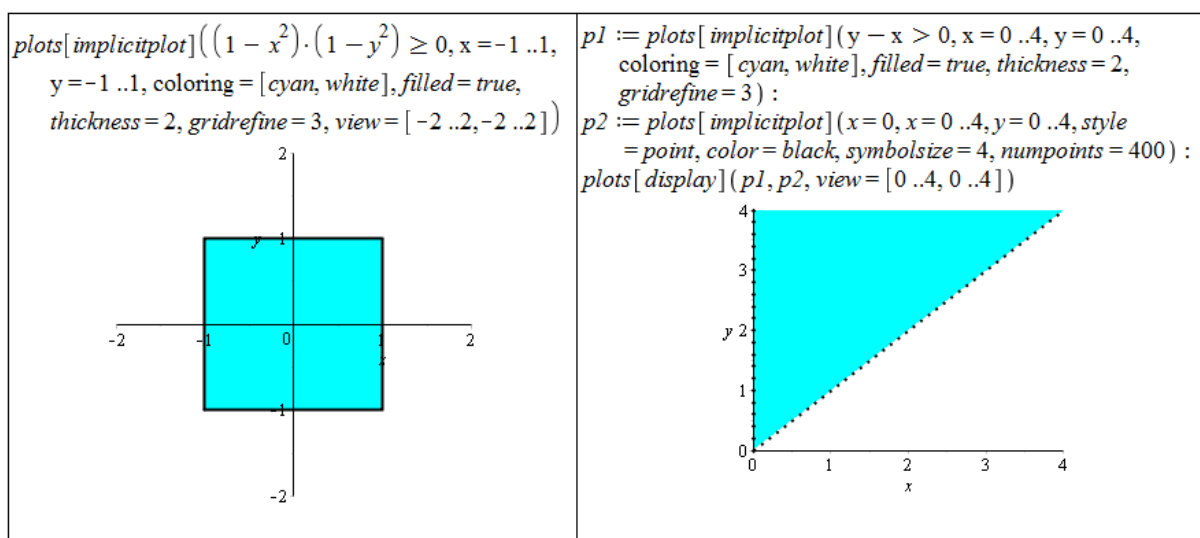
Obrázek 6.19: Zobrazení definičního oboru funkce z příkladu 3.6.(a) vlevo, zobrazení definičního oboru funkce z příkladu 3.6.(b) vpravo.

(c), (d) Argument funkce  $\ln$  musí být kladný. Argument funkce  $\arccos$  musí nabývat hodnot z intervalu  $[-1, 1]$ . Systém Maple má s vykreslením příslušné množiny případu (d) „problémy“. Při vyšších hodnotách parametrů `gridrefine` a `crossingrefine` je výsledek akceptovatelný.

(e), (f) Výrazy pod odmocninami musí být nezáporné. Díky jejich tvaru je pro ně možné vytvořit jedinou nerovnost a zbývající část podmínky „schovat“ do rozsahu proměnných, abychom mohli použít příkaz `implicitplot`. Argument funkce  $\ln$  musí být kladný, tzn.  $x > 0 \wedge y - x > 0$  pro případ (f).



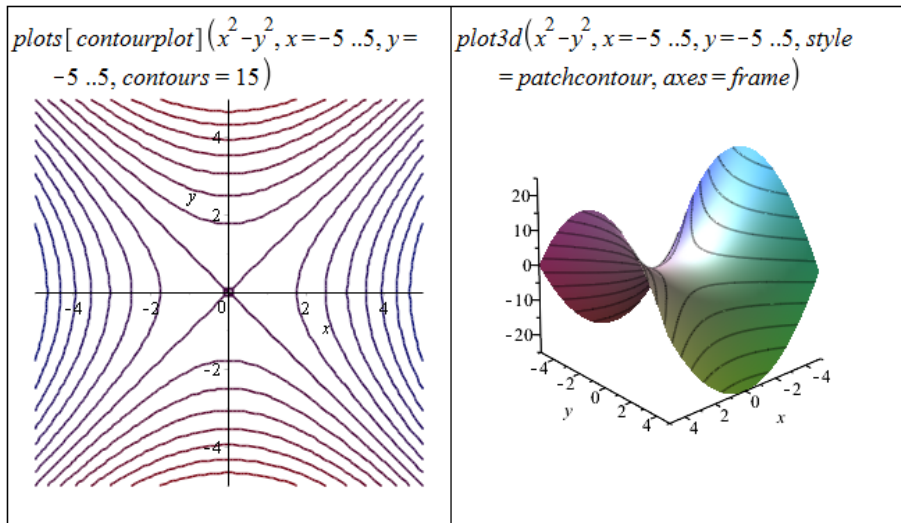
Obrázek 6.20: Zobrazení definičního oboru funkce z příkladu 3.6.(c) vlevo, zobrazení definičního oboru funkce z příkladu 3.6.(d) vpravo.



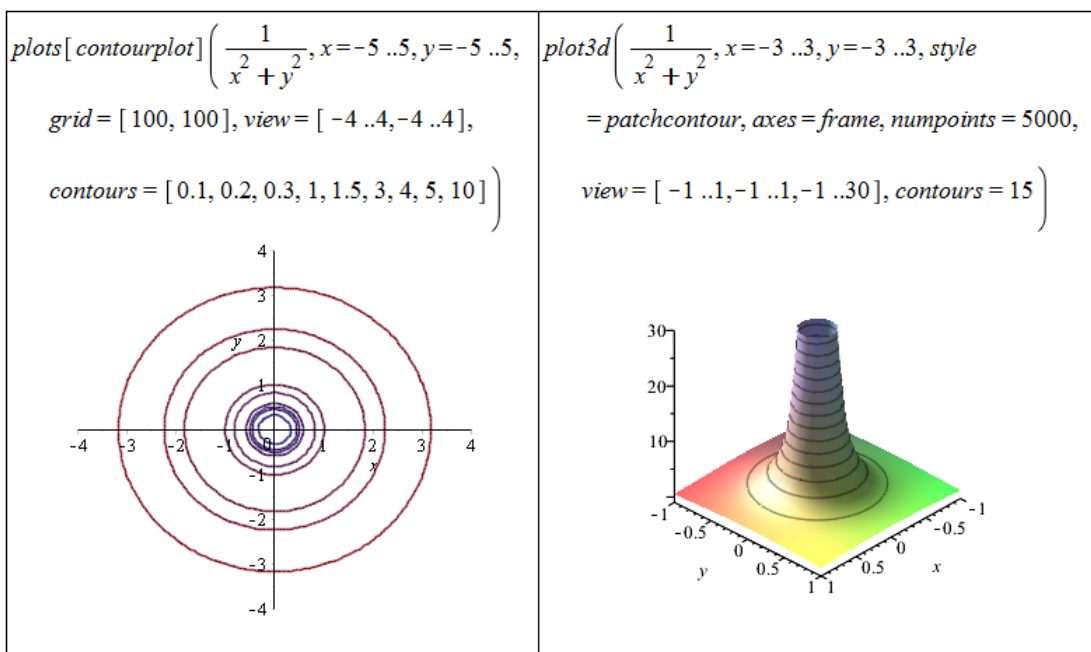
Obrázek 6.21: Zobrazení definičního oboru funkce z příkladu 3.6.(e).

Příklad 3.7:

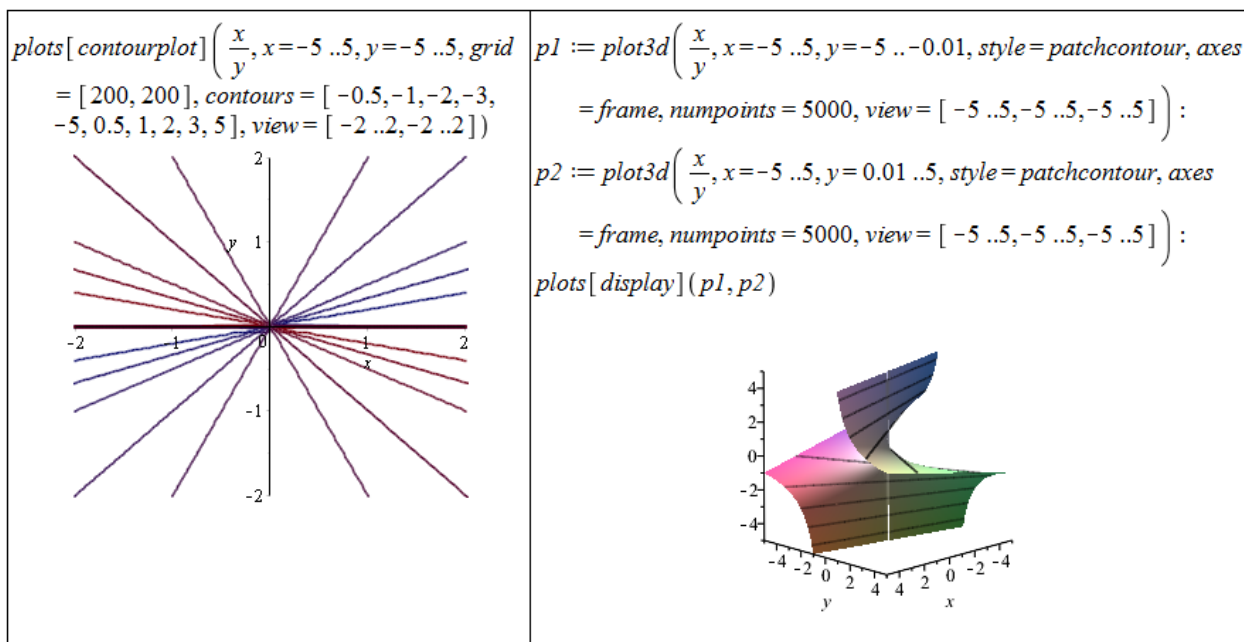
- Pro některé hodnoty parametru `contours` Maple nezobrazí vrstevnice  $y = -x$  a  $y = x$ .
- Pro rovnoměrné rozložení vrstevnic na zadané oblasti je vhodné specifikovat parametr `contours` seznamem funkčních hodnot.
- Zadaná funkce je nespojitá pro  $y = 0$ , s čímž si Maple „neumí poradit“ a vykresluje v tomto místě svislou plochu. Příkaz `plot3d` nemá k dispozici parametr `discont`, což se obchází vytvořením dvou grafů tak, abychom se nespojitosti „vyhnuli“ – vykreslíme funkci nalevo od místa nespojitosti a napravo, grafy pak spojíme v jeden příkazem `display`.



Obrázek 6.22: Zobrazení vrstevnic funkce z příkladu 3.7.(a).

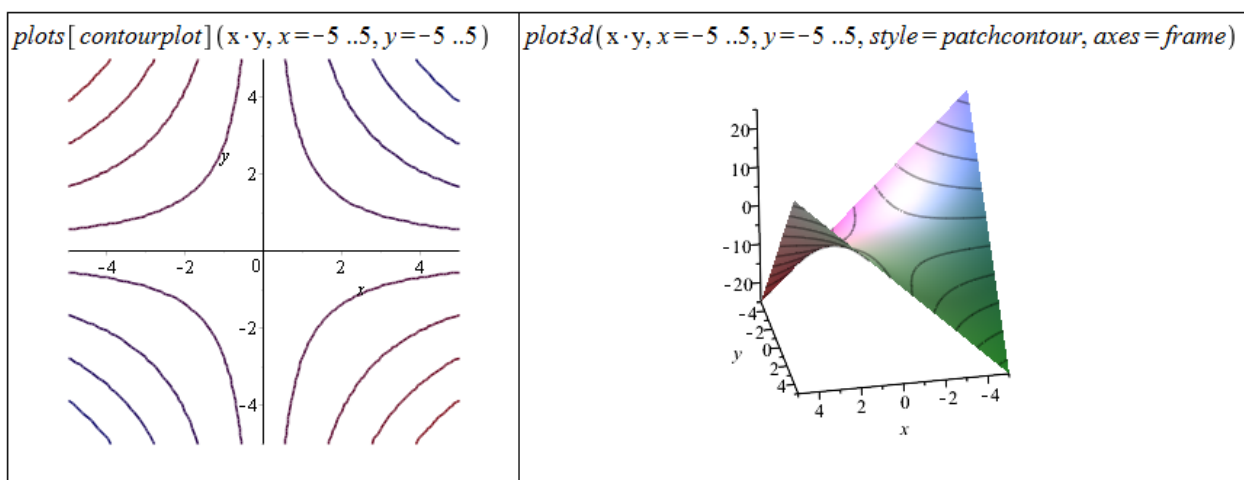


Obrázek 6.23: Zobrazení vrstevnic funkce z příkladu 3.7.(b).



Obrázek 6.24: Zobrazení vrstevnic funkce z příkladu 3.7.(c).

(d)



Obrázek 6.25: Zobrazení vrstevnic funkce z příkladu 3.7.(d).

Příklad 3.10: Položíme  $\delta = \min\{\varepsilon, 1\}$ . Následně musíme ukázat, že pro libovolná  $x, y$  splňující  $|x| < \delta, |y| < \delta, [x, y] \neq [0, 0]$  platí:

$$\frac{x^2 \cdot y^2}{x^2 + y^2} < \varepsilon.$$

Jelikož  $x, y$  splňuje  $[x, y] \neq [0, 0]$ , je aspoň jedno z nich nenulové. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že například  $y \neq 0$ . Pak pro jinak libovolná  $x, y$  platí:  $x^2 < x^2 + y^2$ . Z toho máme:

$$\frac{x^2 \cdot y^2}{x^2 + y^2} < y^2.$$

Pro  $\varepsilon > 1$  máme  $|x| < 1, |y| < 1$  a tedy

$$\frac{x^2 \cdot y^2}{x^2 + y^2} < y^2 < 1 < \varepsilon.$$

Pro  $\varepsilon \leq 1$  máme  $|x| < \varepsilon, |y| < \varepsilon$  a tedy

$$\frac{x^2 \cdot y^2}{x^2 + y^2} < y^2 < \varepsilon^2 \leq \varepsilon.$$

Příklad 3.11:

- (a) Maple určí správně, že limita neexistuje. Sami to můžeme ověřit například přibližováním se po přímkách  $y = k \cdot x$ . Výsledek je závislý na  $k$ , tj. na přímce, po níž se k limitnímu bodu blížíme.
- (b) Maple limitu neumí spočítat. Limita v tomto případě opět neexistuje, což můžeme stejně jako v předchozím případě ověřit přibližováním se k limitnímu bodu po přímkách.
- (c) Maple limitu nespočítá. Limita neexistuje, což můžeme zjistit pomocí transformace do polárních souřadnic. Získaný výsledek závisí na úhlu  $\varphi$ .
- (d) Maple limitu nespočítá ani v tomto případě, i když stačí pouze dosadit.
- (e) Maple limitu nespočítá. Limita existuje a je rovná 0. Ověřit to můžeme transformací do polárních souřadnic a aplikací poznámky 3.4.
- (f) Maple limitu nespočítá. Proměnná  $y$  tu přitom není zdrojem nespojitosti, a tak za ni můžeme dosadit a počítat zadanou limitu pouze jako limitu v proměnné  $x$ .
- (g) Maple limitu nespočítá ani tentokrát. Limita existuje a je rovná  $\frac{1}{2}$ . Výsledek získáme po rozšíření zadaného výrazu doplněním čitatele na rozdíl čtverců, následné úpravě a dosazení.

Příklad 3.13: V případech a) – d) jsou body nespojitosti tvořeny vždy body, které nejsou v definičním oboru funkce  $f(x, y)$ . Ve všech bodech definičního oboru jsou funkce totiž spojité.

- (a) Jmenovatel rovný nule, takže jediným bodem nespojitosti funkce  $f(x, y)$  je bod  $[0, 0]$ .
- (b) Jmenovatel rovný nule, tj. body  $[x, y]$  takové, že  $x = 0$  nebo  $y = 0$ .
- (c) Jmenovatel rovný nule, tj. body  $[x, y]$  takové, že  $y = 0$ .
- (d) Argument funkce  $\ln(x)$  nekladný, tj. body  $[x, y]$  takové, že  $x^2 + y^2 = 1$ .
- (e) Funkce  $f(x, y)$  nemá body nespojitosti. Jediný „podezřelý“ bod z nespojitosti je bod  $[0, 0]$ , v němž je však limita rovna funkční hodnotě (viz příklad 3.9).

Příklad 3.14:

- (a) Podle příkladu 3.11.(g):  $C = \frac{1}{2}$ .



- (b) Podle příkladu 3.11.(c) limita v bodě  $[0, 0]$  neexistuje, tj. není možné „dodefinovat“  $C$  tak, aby zadaná funkce byla v bodě  $[0, 0]$  spojitá.

Příklad 3.15:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f'_x(x, y) &= 2 \cdot x \cdot y + \frac{1}{x}, \\ f'_y(x, y) &= x^2 - \frac{1}{y}, \\ f''_{xx}(x, y) &= 2 \cdot y - \frac{1}{x^2}, \\ f''_{xy}(x, y) &= 2 \cdot x, \\ f''_{yx}(x, y) &= 2 \cdot x, \\ f''_{yy}(x, y) &= \frac{1}{y^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad f'_x(x, y) &= 8 \cdot (x^2 \cdot y + y)^3 \cdot x \cdot y, \\ f'_y(x, y) &= 4 \cdot (x^2 \cdot y + y)^3 \cdot (x^2 + 1), \\ f''_{xx}(x, y) &= 56 \cdot x^6 \cdot y^4 + 120 \cdot x^4 \cdot y^4 + 72 \cdot x^2 \cdot y^4 + 8 \cdot y^4, \\ f''_{xy}(x, y) &= 32 \cdot x^7 \cdot y^3 + 96 \cdot x^5 \cdot y^3 + 96 \cdot x^3 \cdot y^3 + 32 \cdot x \cdot y^3, \\ f''_{yx}(x, y) &= 32 \cdot x^7 \cdot y^3 + 96 \cdot x^5 \cdot y^3 + 96 \cdot x^3 \cdot y^3 + 32 \cdot x \cdot y^3, \\ f''_{yy}(x, y) &= 12 \cdot y^2 \cdot (x^2 + 1)^4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad f'_x(x, y) &= \frac{x^y \cdot y}{x}, \\ f'_y(x, y) &= x^y \cdot \ln(x), \\ f''_{xx}(x, y) &= x^{y-2} \cdot y \cdot (y-1), \\ f''_{xy}(x, y) &= x^{y-1} \cdot (y \cdot \ln(x) + 1), \\ f''_{yx}(x, y) &= x^{y-1} \cdot (y \cdot \ln(x) + 1), \\ f''_{yy}(x, y) &= x^y \cdot \ln(x)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(d)} \quad f'_x(x, y) &= y \cdot \ln(x+y) + \frac{x \cdot y}{x+y}, \\ f'_y(x, y) &= x \cdot \ln(x+y) + \frac{x \cdot y}{x+y}, \\ f''_{xx}(x, y) &= y \cdot \frac{x+2 \cdot y}{(x+y)^2}, \\ f''_{xy}(x, y) &= \ln(x+y) + \frac{y}{x+y} + \frac{x}{x+y} - \frac{x \cdot y}{(x+y)^2}, \\ f''_{yx}(x, y) &= \ln(x+y) + \frac{y}{x+y} + \frac{x}{x+y} - \frac{x \cdot y}{(x+y)^2}, \\ f''_{yy}(x, y) &= x \cdot \frac{2 \cdot x+y}{(x+y)^2}. \end{aligned}$$

Příklad 3.16:

$$\text{(a)} \quad f'_x(1, 2) = \frac{1 + \frac{1}{5} \cdot \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}}, f'_y(1, 2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}},$$

$$\text{(b)} \quad f'_x(e, e) = \frac{12}{e}, f'_y(e, e) = -\frac{12}{e},$$

$$\text{(c)} \quad f'_x(1, 2) = 0, f'_y(1, 2) = \frac{1}{4}.$$

Příklad 3.18:

$$\text{(a)} \quad f'_u(A) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

- (b) Příkaz `DirectionalDerivative` neumí pracovat s obecnými směry. Je proto potřeba vypočítat řešení jinak.  $f'_u(A) = \frac{1}{2} \cdot (\cos(\alpha) + \sin(\alpha))$ .

Příklad 3.20:

- (a)  $f(x, y) = x^y, [x_0, y_0] = [3, 1], [x, y] = [3.05, 0.99]$ ,
- (b) Nejprve převedeme stupně na radiány.  $f(x, y) = \sqrt{x} \cdot \cos(y), [x_0, y_0] = [3, \frac{\pi}{3}], [x, y] = [3.05, \frac{31\pi}{90}]$ ,
- (c)  $f(x, y) = \arctan(\frac{x}{y}), [x_0, y_0] = [1, 1], [x, y] = [1.02, 0.95]$ ,
- (d)  $f(x, y) = \log_4(x \cdot y^2), [x_0, y_0] = [4, 1], [x, y] = [4.01, 0.97]$ .

Příklad 3.22:

- (a)  $t(x, y) = 4 \cdot x - 2 \cdot y - 5$ ,
- (b)  $t(x, y) = 5 \cdot x + y - 3$ ,
- (c)  $t(x, y) = \frac{4}{5} \cdot x + \frac{2}{5} \cdot y + \ln(5) - 2$ ,
- (d)  $t(x, y) = 1$ .

Příklad 3.23: Ve všech příkladech použijeme příkaz `mtaylor`.

- (a) musíme specifikovat bod  $[x = 1, y = 1]$ ,
- (b) musíme specifikovat bod  $[x = 0, y = \frac{\pi}{2}]$ ,
- (c) musíme změnit proměnnou `Order` nebo přidat třetí parametr příkazu `mtaylor`,
- (d) musíme specifikovat všechny tři proměnné.

Příklad 3.24:

- (a)  $f(x, y) = \sqrt{x^3 + y^3}, [x_0, y_0] = [1, 2], [x, y] = [1.02, 1.97]$ ,
- (b) Nejprve převedeme stupně na radiány.  $f(x, y) = \sqrt{x} \cdot \cos(y), [x_0, y_0] = [3, \frac{\pi}{3}], [x, y] = [3.05, \frac{31\pi}{90}]$ ,
- (c)  $f(x, y) = \arctan(\frac{x}{y}), [x_0, y_0] = [1, 1], [x, y] = [1.02, 0.95]$ ,
- (d)  $f(x, y) = \log_4(x \cdot y^2), [x_0, y_0] = [4, 1], [x, y] = [4.01, 0.97]$ .

Příklad 3.25: Definice lokálního minima je naprosto stejná s definicí 3.9, jen nyní požadujeme, aby pro všechna  $X$  z nějakého okolí bodu  $X^*$  platilo:  $f(X) \geq f(X^*)$ .

Příklad 3.30:

- (a) Funkce má 2 stacionární body, z nichž jeden (bod  $[1, 1]$ ) je lokálním minimem.
- (b) Funkce má 4 stacionární body. Dva z nich jsou lokálními extrémy. Bod  $[0, -1]$  je lokálním minimem, bod  $[0, 1]$  je lokálním maximem.
- (c) Funkce má 8 stacionárních bodů. Čtyři z nich jsou lokální extrémy. Body  $[-\frac{\sqrt{2\cdot e}}{2\cdot e}, -\frac{\sqrt{2\cdot e}}{2\cdot e}]$  a  $[\frac{\sqrt{2\cdot e}}{2\cdot e}, \frac{\sqrt{2\cdot e}}{2\cdot e}]$  jsou lokální minima, body  $[-\frac{\sqrt{2\cdot e}}{2\cdot e}, \frac{\sqrt{2\cdot e}}{2\cdot e}]$  a  $[\frac{\sqrt{2\cdot e}}{2\cdot e}, -\frac{\sqrt{2\cdot e}}{2\cdot e}]$  jsou lokální maxima zadané funkce.

- (d) Funkce má nekonečně mnoho stacionárních bodů, které jsou též jejími lokálními extrémami. V bodě  $[0, 0]$  se nachází lokální minimum. Ostatní stacionární body, které jsou všechny lokálními maximy, leží na kružnici  $x^2 + y^2 = 1$ . Klasickým způsobem neumíme o těchto bodech rozhodnout. Pro ověření, že se jedná o lokální maxima, můžeme zavést substituci  $t = x^2 + y^2$  a vyšetřit lokální extrém funkce, jako by se jednalo o funkci jedné proměnné.
- (e) Funkce má jediný stacionární bod  $([2, 4])$ , který je jejím lokálním minimem. Pro  $y = 0$  neexistuje parciální derivace podle proměnné  $y$ . Podle toho, jak chápeme pojem *okolí bodu* (funkce není definovaná pro  $y < 0$ ), bychom měli vyšetřit ještě body, pro něž  $y = 0$ . Nicméně pro  $y = 0$  funkce lokálního extrému nenabývá, o čemž je potřeba se přesvědčit vyšetřením okolí „potenciálního“ lokálního minima v bodě  $[\frac{4}{3}, 0]$ .
- (f) Funkce má jeden stacionární bod, který není jejím lokálním extrémem. Pro  $x = -1$  nebo  $y = -1$  neexistují parciální derivace zadané funkce. Opět je na uvážení, jak chápat pojem *okolí bodu* a případně vyšetřit i lokální chování funkce v případech  $x = -1$  nebo  $y = -1$ . Již z grafu je vidět, že funkce tu dosahuje lokálně své nejvyšší hodnoty v bodě  $[-1, -1]$ , takže je možné mluvit o lokálním maximu funkce v tomto bodě.
- (g) Funkce má nekonečně mnoho stacionárních bodů, žádný z nich však není jejím lokálním extrémem. Funkce má dále dva body, v nichž neexistují parciální derivace. Bod  $[0, 0]$  není lokálním extrémem funkce, bod  $[2, 3]$  je lokálním minimem.

Příklad 3.31: Definice absolutního minima je naprosto stejná s definicí 3.11, jen nyní požadujeme, aby pro všechna  $X$  z množiny  $M$  platilo:  $f(X) \geq f(X^*)$ .

Příklad 3.35:

- (a) V tomto případě ani není potřeba nic počítat. Jen si pozorně přečíst zadání a zamyslet se nad ním. Největší hodnota (absolutní maximum) zadané funkce je dána „přímo“ množinou  $M$  a jsou to tedy všechny body na její hranici. Absolutní minimum získáme tak, když si uvědomíme, že druhá mocnina reálného čísla je vždy číslo nezáporné (tj. větší nebo rovno nule).
- (b) Opět není třeba nic počítat, stačí použít „selský rozum“. Množinu  $M$  můžeme přepsat do intervalů:  $x \in [-1, 1]$ ,  $y \in [-1, 1]$  a odtud už je na první pohled vidět, že absolutní minimum se nachází v bodě  $[-1, -1]$  a absolutní maximum v bodě  $[1, 1]$ .
- (c) Absolutní minimum funkce určíme již ze zadání, neboť absolutní hodnota nabývá své nejmenší hodnoty pro nulový argument a ten je uvnitř množiny  $M$ . Absolutní maximum můžeme hledat klasickou cestou. Zadaná funkce nemá stacionární body, má ovšem nekonečně mnoho bodů, kde není diferencovatelná. Z grafu funkce (případně rovnou ze zadání) zjistíme, že absolutní maximum leží na hranici množiny  $M$ . Například příkazem **extrema** můžeme extrém najít, a to hned ve čtyřech bodech:  $[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ ,  $[\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}]$ ,  $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$  a  $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}]$ .
- (d) Postupujeme „klasickým“ způsobem. Určíme lokální extrém (lok. max. v bodě  $[1, 1]$ ) a následně extrém na hranici množiny  $M$ . Celkem dostaneme, že absolutní maximum je v bodě  $[1, 1]$ , absolutní minima jsou dvě, a to v bodech  $[0, 4]$  a  $[4, 0]$ .

- (e) Zadaný trojúhelník  $M$  je možné vykreslit následující posloupností příkazů:
- ```
p1 := plots[pointplot]([[0, 2], [3, 0], [0, -1]], color = red,
symbolsize = 20, symbol = solidcircle):
p2 := plots[polygonplot]([[0, 2], [3, 0], [0, -1]], color = red,
style = line, thickness = 2):
plots[display](p1, p2)
```

Základním krokem je zápis jednotlivých úseček trojúhelníku v proměnných  $x$  a  $y$ . Pak pokračujeme „klasickým“ způsobem. Určíme lokální extrémy (lok. min. v bodě  $[\frac{1}{2}, 1]$ ) a následně extrémy na hranici množiny  $M$ . Celkem dostaneme, že absolutní maximum je v bodě  $[0, -1]$ , absolutní minimum v bodě  $[\frac{1}{2}, 1]$ .

- (f) Postupujeme opět „klasickým“ způsobem. Nejprve hledáme lokální extrémy. Dostáváme „tři“ stacionární body, přičemž jeden z nich pokrývá všechny body takové, že  $y = 0$ . Tento stacionární bod (body) však není extrémem již na první pohled, protože funkční hodnota je pro něj rovna nule. Zbylé dva stacionární body  $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$ ,  $[-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}]$  jsou lokální minimum a maximum zadané funkce. Nyní je potřeba si uvědomit, že funkce sinus je periodická s periodou  $2\pi$ , takže těchto lokálních extrémů je vlastně nekonečně mnoho a všechny jsou současně i extrémy globálními na celém definičním oboru. V zadání byla specifikována množina  $M$ , a tak je potřeba omezit množinu těchto extrémů tak, aby vyhovovala zadání, tj. absolutní maxima jsou body  $[\frac{\pi}{3} + 2 \cdot k \cdot \pi, \frac{\pi}{3} - 2 \cdot l \cdot \pi]$  pro  $k, l \in \mathbb{N}_0$ , absolutní minima jsou body  $[\frac{5\pi}{3} + 2 \cdot k \cdot \pi, -\frac{\pi}{3} - 2 \cdot l \cdot \pi]$  pro  $k, l \in \mathbb{N}_0$ .

Příklad 3.37: Řešíme naprosto stejným postupem jako v příkladu 3.36. Hledaná kladná čísla jsou:  $x = y = z = 4$ .

Příklad 3.38: Opět postupujeme stejně jako v příkladu 3.36. Minimalizujeme funkci  $f(x, y) = x + y + \frac{50}{\sqrt{x \cdot y}}$  pro  $x > 0, y > 0$ . Nejmenší možný součet takových čísel je 20 pro  $x = 5, y = 5, z = 10$ .

Příklad 3.39: Vzdálenost bodu o souřadnicích  $[x, y, z]$  od počátku souřadného systému je:  $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Tento součet musíme minimalizovat pro  $z = x \cdot y - 1$ . Přepisem analogickým k předchozím příkladům dostáváme úlohu minimalizovat funkci

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + (x \cdot y - 1)^2}$$

na celém jejím definičním oboru. K tomu můžeme využít příkaz `minimize`. Nejbližší počátku je bod  $[0, 0, -1]$ .

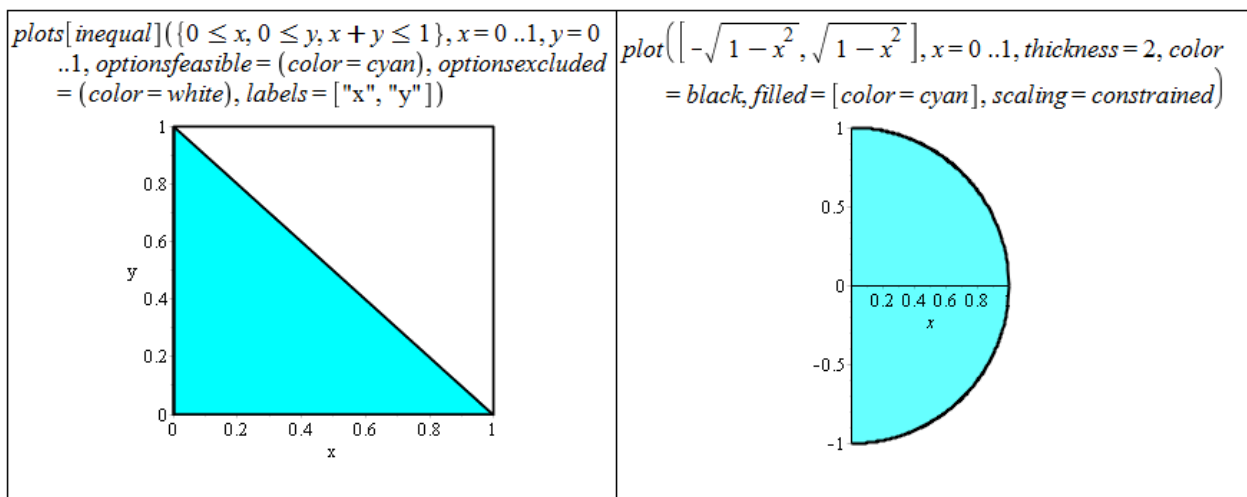
Příklad 3.40: Hledáme rovnici přímky  $y = k \cdot x + q$ , tj. reálná čísla  $k$  a  $q$ , pro něž platí, že  $S = (q - 2)^2 + (k + q - 3)^2 + (2 \cdot k + q - 5)^2$  je minimální. Můžeme opět využít příkazu `minimize` a dostáváme:  $k = \frac{3}{2}, q = \frac{11}{6}$ .

Příklad 3.42: U každého případu vykreslíme množinu  $\Omega$  a z obrázku určíme meze dvojnásobného integrálu.

- (a)

Můžeme volit následující:

$$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, \quad \text{nebo} \quad 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y.$$



Obrázek 6.26: Zobrazení množiny  $\Omega$  z příkladu 3.42.(a) vlevo, zobrazení množiny  $\Omega$  z příkladu 3.42.(b) vpravo.

Celkem tak získáme:

$$I = \iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^x f(x, y) \, dy \, dx = \int_0^1 \int_0^y f(x, y) \, dx \, dy.$$

(b)

Můžeme volit následující:

$$0 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}.$$

Celkem tak získáme:

$$I = \iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) \, dy \, dx.$$

(c)

Můžeme volit následující:

$$-3 < x \leq 0, -x-3 < y < x+3, \quad 0 \leq x < 3, x-3 < y < -x+3.$$

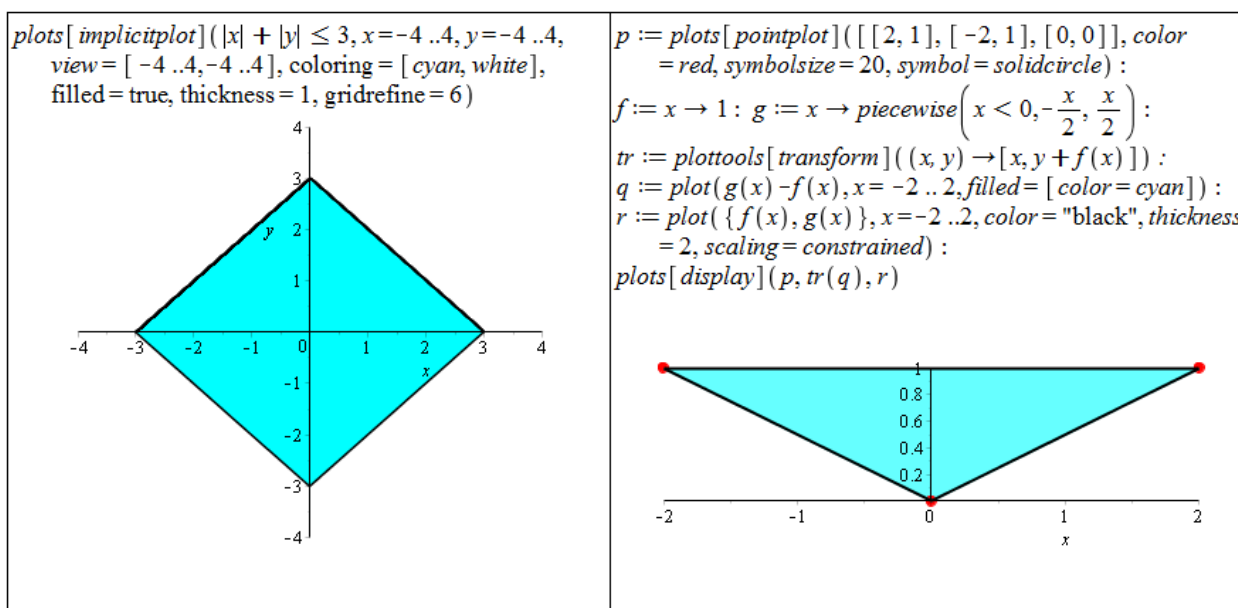
Celkem tak získáme:

$$I = \iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \int_{-3}^0 \int_{-x-3}^{x+3} f(x, y) \, dy \, dx + \int_0^3 \int_{x-3}^{-x+3} f(x, y) \, dy \, dx.$$

(d)

Můžeme volit následující:

$$-2 \leq x \leq 0, -\frac{x}{2} \leq y \leq 1, \quad 0 \leq x \leq 2, \frac{x}{2} \leq y \leq 1.$$



Obrázek 6.27: Zobrazení množiny  $\Omega$  z příkladu 3.42.(c) vlevo, zobrazení množiny  $\Omega$  z příkladu 3.42.(d) vpravo.

Celkem tak získáme:

$$I = \iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \int_{-2}^0 \int_{-\frac{x}{2}}^1 f(x, y) \, dy \, dx + \int_0^2 \int_{\frac{x}{2}}^1 f(x, y) \, dy \, dx.$$

Příklad 3.43: Podobně jako v předchozím příkladu si nejprve zobrazíme množinu ohraničenou integračními mezemi a následně množinu vyjádříme v obráceném pořadí mezí.

(a)

Přepis množiny v obráceném pořadí proměnných:

$$0 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq 2 \cdot y.$$

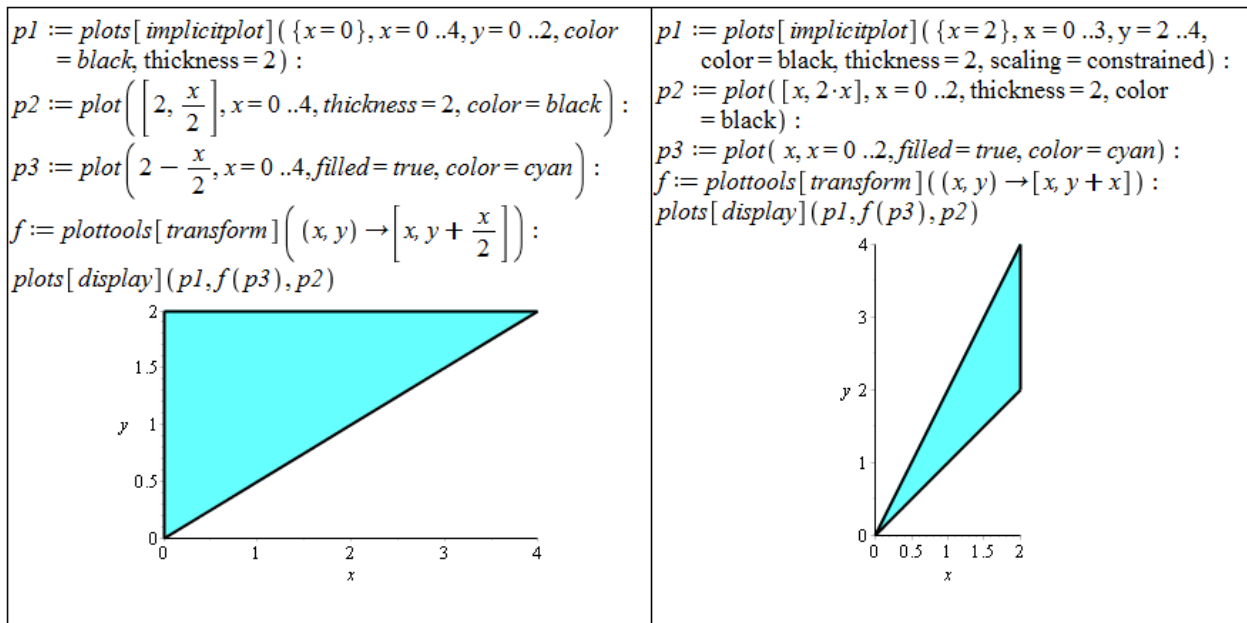
Celkem tak získáme:

$$\int_0^4 \int_{\frac{y}{2}}^2 f(x, y) \, dx \, dy = \int_0^2 \int_0^{2 \cdot y} f(x, y) \, dx \, dy.$$

(b) Přepis množiny v obráceném pořadí proměnných:

$$0 \leq y \leq 2, \frac{y}{2} \leq x \leq y, \\ 2 \leq y \leq 4, \frac{y}{2} \leq x \leq 2.$$

Celkem tak získáme:



Obrázek 6.28: Zobrazení množiny ohraničené integračními mezemi z příkladu 3.43.(a) vlevo, zobrazení množiny ohraničené integračními mezemi z příkladu 3.43.(b) vpravo.

$$\int_0^2 \int_x^{2-x} f(x, y) dy dx = \int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^y f(x, y) dx dy + \int_2^4 \int_{\frac{y}{2}}^2 f(x, y) dx dy.$$

(c) Přepis množiny v obráceném pořadí proměnných:

$$0 \leq y \leq 4, \sqrt{y} \leq x \leq 2.$$

Celkem tak získáme:

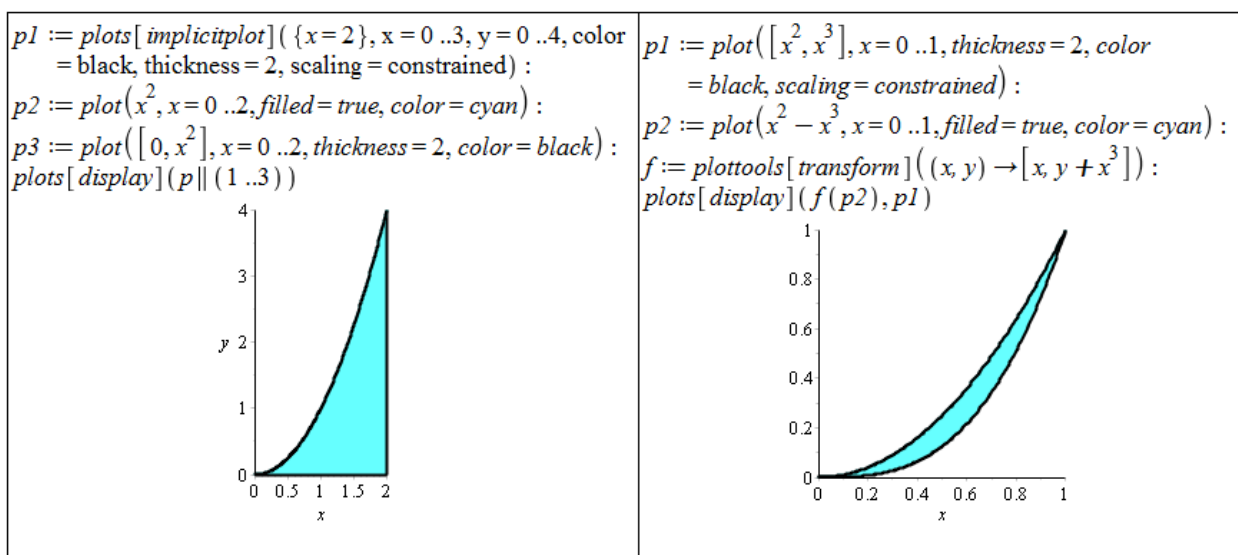
$$\int_0^2 \int_0^{x^2} f(x, y) dy dx = \int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 f(x, y) dx dy.$$

(d) Přepis množiny v obráceném pořadí proměnných:

$$0 \leq y \leq 1, \sqrt{y} \leq x \leq \sqrt[3]{y}.$$

Celkem tak získáme:

$$\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} f(x, y) dy dx = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x, y) dx dy.$$



Obrázek 6.29: Zobrazení množiny ohraničené integračními mezemi z příkladu 3.43.(c).

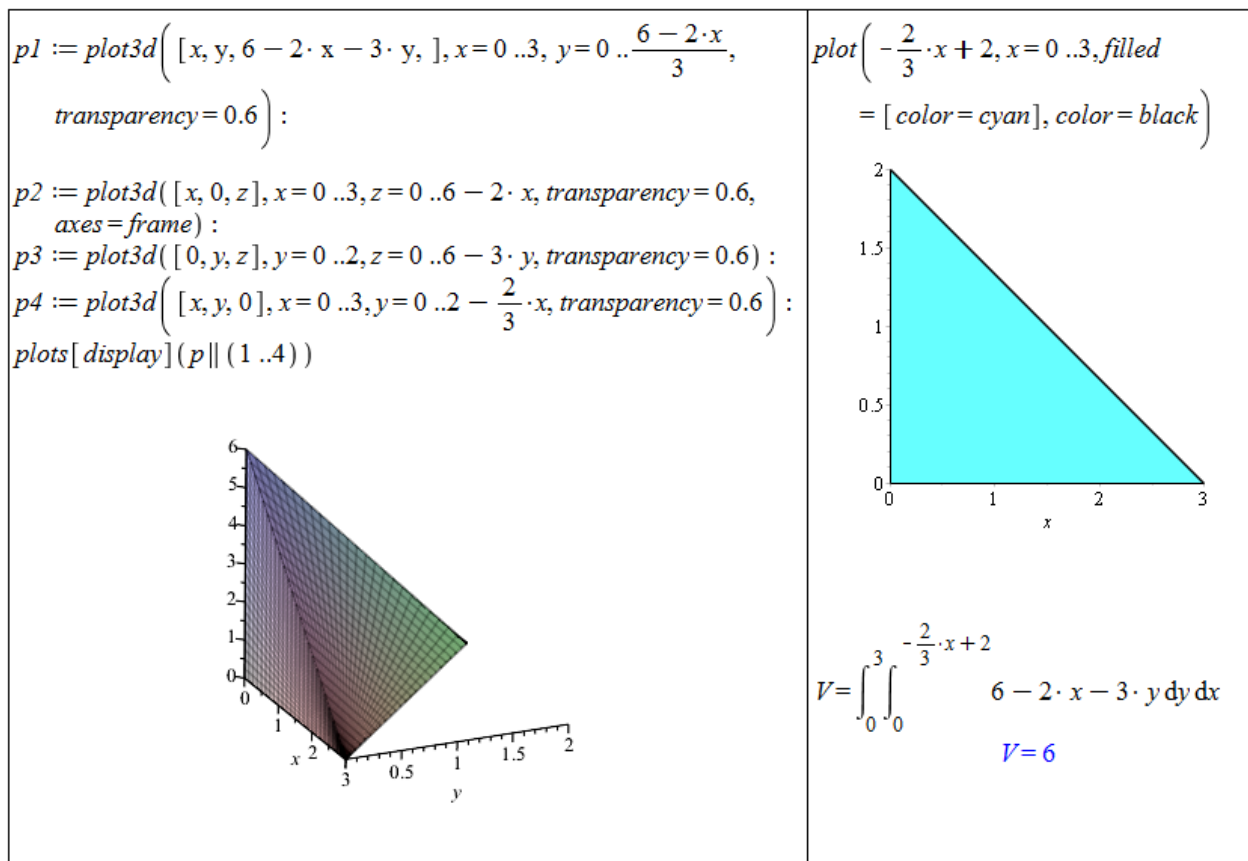
Příklad 3.45: Řešení je velice jednoduché. U příkladu 3.42 stačí dosadit  $f(x, y) = 1$  do integrálů, které jsme získali řešením příkladu. U příkladu 3.43 stačí dosadit  $f(x, y) = 1$  jak do zadání, tak do řešení příkladu.

Příklad 3.46: Vyjdeme z rovnice kružnice o poloměru  $r$ :  $x^2 + y^2 = r^2$ . Jestliže postupujeme od proměnné  $x$ , meze prvního integrálu jsou zřejmé:  $x \in [-1, 1]$ . Následně potřebujeme vyjádřit meze proměnné  $y$ , což provedeme právě z rovnice kružnice:  $y \in [-\sqrt{r^2 - x^2}, \sqrt{r^2 - x^2}]$ . Podle vztahu v poznámce 3.20 již jednoduše pomocí systému Maple určíme požadovaný obsah kruhu.

Příklad 3.47: Postupujeme analogicky předchozímu příkladu. Tentokrát vyjdeme z rovnice elipsy:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Proměnná  $x$  nyní nabývá hodnot z intervalu  $[-a, a]$ , pro meze proměnné  $y$  platí:  $y \in \left[-b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right]$ .

Příklad 3.49: Ve všech případech je vhodné pro získání představy vykreslit alespoň náznak tvaru získaného tělesa. Dále je vhodné si zobrazit podstavu tělesa, z níž odvodíme integrační meze. Dvojný integrál nám následně spočítá systém Maple, jen v případě (c) nezískáme přesnou (symbolickou) hodnotu a musíme použít příkaz `evalf`.



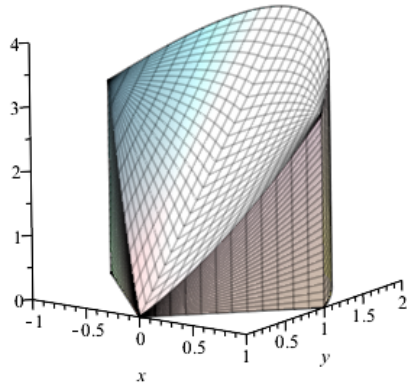


Obrázek 6.30: Řešení příkladu 3.49.(a).

```

p1 := plot3d([x, y, x^2 + 2·y], x=-1..1, y=|x|..2 - x^2,
  transparency=0.6, axes=frame):
p2 := plot3d([x, |x|, z], x=-1..1, z=0..x^2 + 2·|x|,
  transparency=0.6):
p3 := plot3d([x, 2 - x^2, z], x=-1..1, z=0..4 - x^2,
  transparency=0.6):
p4 := plot3d([x, y, 0], x=-1..1, y=|x|..2 - x^2, transparency
  = 0.6):
plots[display](p|| (1..4))

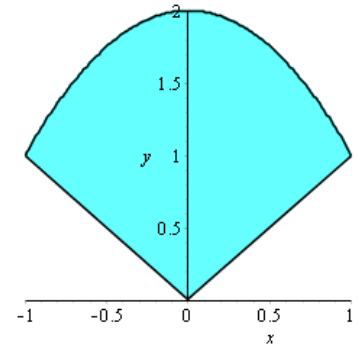
```



```

p1 := plot([2 - x^2, |x|], x=-1..1, y=0..2, color
  = black):
p2 := plot(2 - x^2 - |x|, x=-1..1, filled=true,
  color=cyan):
f := plottools[transform]((x, y) -> [x, y
  + |x|]):
plots[display](f(p2), p1)

```



$$V = \int_{-1}^0 \int_{-x}^{2-x^2} (x^2 + 2 \cdot y) \, dy \, dx + \int_0^1 \int_x^{2-x^2} (x^2 + 2 \cdot y) \, dy \, dx$$

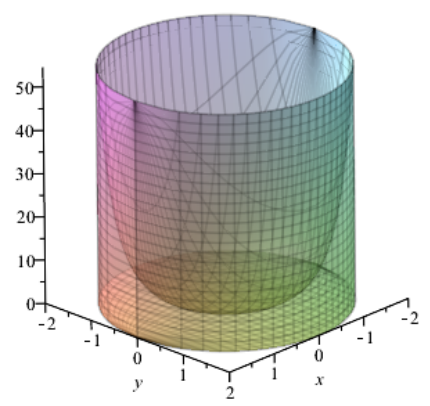
$$V = \frac{11}{2}$$

Obrázek 6.31: Řešení příkladu 3.49.(b).

```

p1 := seq(plot3d([x, y, zn·e^(x^2+y^2)], x=-2..2, y=-sqrt(4-x^2)
  ..sqrt(4-x^2), axes=frame, transparency=0.6), zn in [0, 1]):
p2 := seq(plot3d([x, zn·sqrt(4-x^2), z], x=-2..2, z=0..e^4,
  transparency=0.6), zn in [-1, 1]):
plots[display](p1, p2)

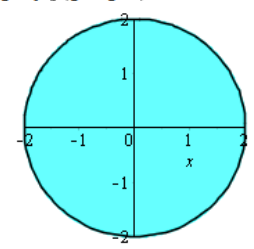
```



```

p1 := plot([sqrt(4-x^2), -sqrt(4-x^2)], x=-2
  ..2, filled=true, color=cyan):
p2 := plots[implicitplot]([x^2 + y^2 = 4], x
  =-2..2, y=-2..2, color=black):
plots[display](p1, p2)

```



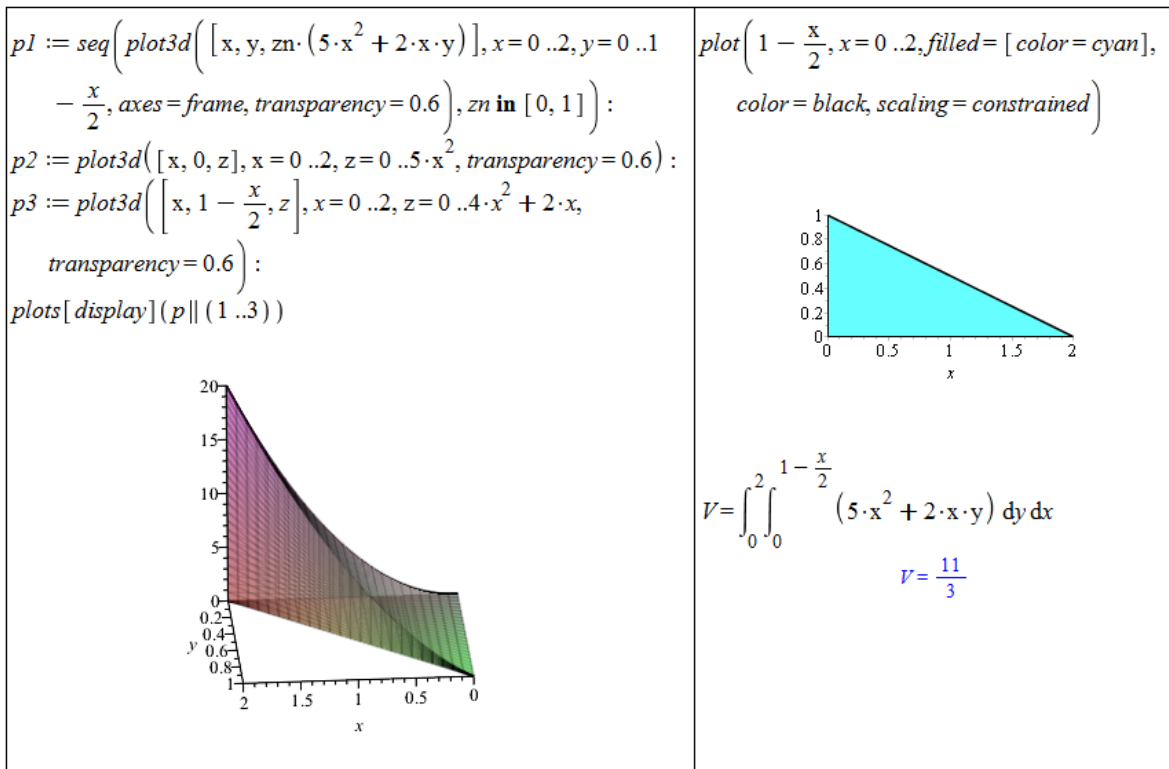
$$V = \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} e^{x^2+y^2} \, dy \, dx$$

$$V = \int_{-2}^2 \left( -\operatorname{erf}(1\sqrt{4-x^2}) e^{x^2} \sqrt{\pi} \right) \, dx$$

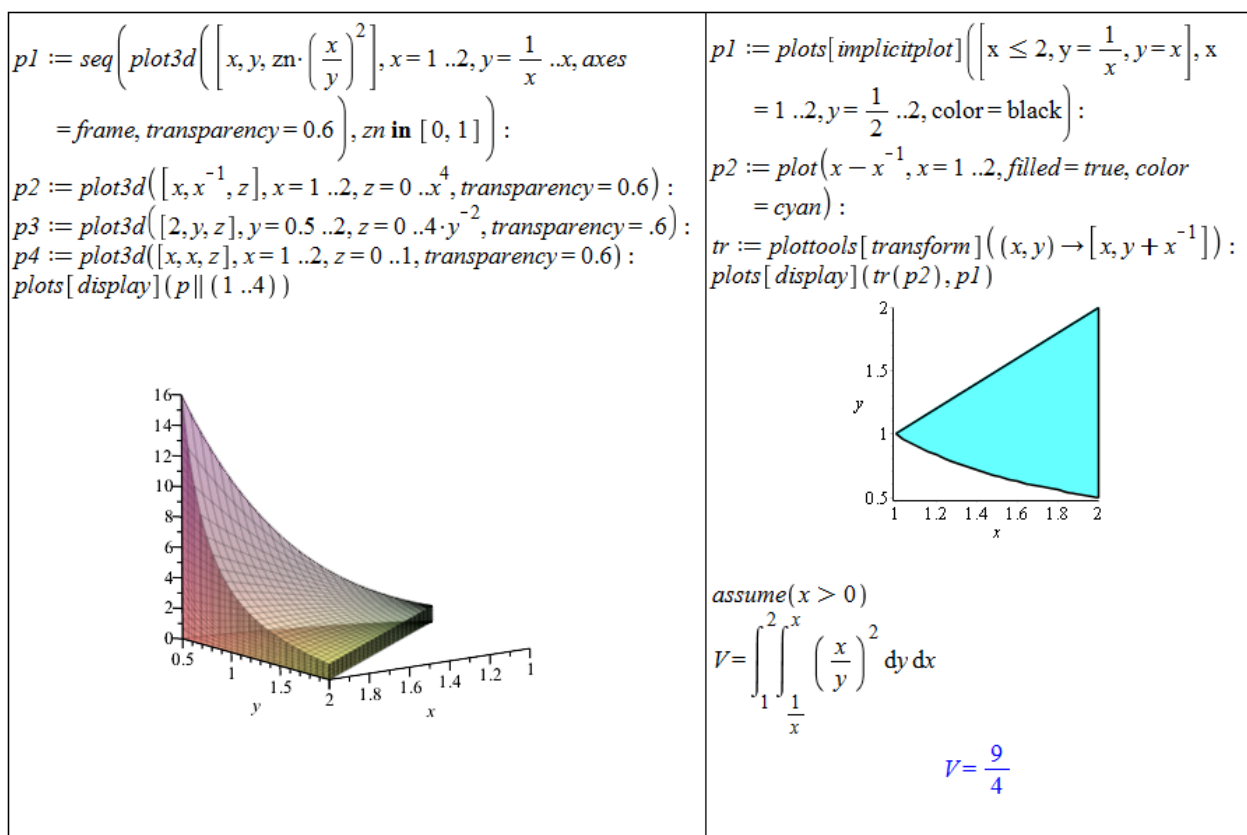
$$\operatorname{evalf}(\%)$$

$$V = 168.3835544$$

Obrázek 6.32: Řešení příkladu 3.49.(c).



Obrázek 6.33: Řešení příkladu 3.49.(d).



Obrázek 6.34: Řešení příkladu 3.49.(e).

Příklad 3.50: Kvádr je třeba vhodně umístit do souřadné soustavy – například tak, že spodní roh podstavy dáme do bodu  $[0, 0, 0]$ , zbylé rohy podstavy budou v bodech  $[a, 0, 0]$ ,  $[0, b, 0]$  a  $[a, b, 0]$ . Výška kvádru bude rovna  $c$ . Z toho vyplývá, že funkce ohraničující kvádr je konstantní funkce  $f(x, y) = c$  a podstavu kvádru můžeme přepsat do mezí následovně:  $x \in [0, a]$ ,  $y \in [0, b]$ .

Příklad 3.51: Je potřeba znát rovnici koule:  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ . Koule vyjádřená touto rovnicí má střed v počátku souřadné soustavy. Její objem určíme tak, že spočítáme objem její horní poloviny (která leží nad rovinou  $z = 0$ ) a ten vynásobíme dvěma. Plášť horní poloviny koule je popsán funkcí  $f(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ , podstava je tvořena kruhem popsáným nerovnicí  $x^2 + y^2 \leq r^2$ . Integrační meze tak můžeme zapsat následovně:  $x \in [-r, r]$ ,  $y \in [-\sqrt{r^2 - x^2}, \sqrt{r^2 - x^2}]$ .

Příklad 3.52: Opět je potřeba vhodně umístit válec do souřadného systému. Můžeme například podstavu válce umístit do roviny  $z = 0$  tak, že její střed je v počátku souřadné soustavy. Podstava je pak popsána nerovnicí  $x^2 + y^2 \leq r^2$  a je možné ji přepsat do integračních mezí následovně:  $x \in [-r, r]$ ,  $y \in [-\sqrt{r^2 - x^2}, \sqrt{r^2 - x^2}]$ . Válec je shora ohraničen konstantní funkcí  $f(x, y) = v$ .

Příklad 3.54: Postupujeme stejným způsobem jako v příkladu 3.53.  
Výsledky:

- (a)  $S = 3 \cdot \sqrt{14}$ ,
- (b)  $S = -\frac{15}{16} + \frac{185}{128} \cdot \ln(5) + \frac{5}{6} \cdot \sqrt{5} + \frac{185}{64} \cdot \operatorname{arcsinh}\left(\frac{2}{5} \cdot \sqrt{5}\right) \doteq 5.58$ ,
- (c) příslušný integrál musíme vyhodnotit numericky,  $S \doteq 583.77$ ,
- (d) příslušný integrál musíme vyhodnotit numericky,  $S \doteq 7.57$ ,
- (e) příslušný integrál musíme vyhodnotit numericky,  $S \doteq 6.00$ .

Příklad 3.55: Kouli umístíme opět středem do počátku souřadného systému. Povrch horní poloviny koule je pak popsán funkcí  $f(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ . Integrační meze můžeme zapsat následovně:  $x \in [-r, r]$ ,  $y \in [-\sqrt{r^2 - x^2}, \sqrt{r^2 - x^2}]$ . Získaný výsledek je třeba vynásobit dvěma (neboť počítáme povrch pouze horní poloviny koule).

Příklad 3.56: Povrch horní poloviny koule je popsán funkcí  $f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ . Dále je třeba odvodit integrační meze. Rovina  $z = 2$  protne kouli v bodech kružnice popsané rovnicí  $x^2 + y^2 = 21$  a rovina  $z = 4$  protne kouli v bodech kružnice popsané rovnicí  $x^2 + y^2 = 9$ . Množina  $\Omega$  je tedy prstencového tvaru vymezená kružnicemi o poloměrech  $\sqrt{21}$  a 3. Díky symetrii celého tělesa je možné zabývat se pouze prvním oktantem a výsledek vynásobit čtyřmi. Integrační meze (meze části množiny  $\Omega$ ) bychom pak zapsali následovně:  $x \in [0, 3]$ ,  $y \in [\sqrt{9 - x^2}, \sqrt{21 - x^2}] \cup x \in [3, \sqrt{21}]$ ,  $y \in [0, \sqrt{21 - x^2}]$ .

Pro získání symbolického výsledku je třeba převést integrál do polárních souřadnic, např. příkazem `ChangeOfVariables` z balíku `Student[MultivariateCalculus]`. Maple to nezvládne dokonale, a tak je potřeba následně zapsat do polárních souřadnic ještě množinu  $\Omega$  (pro získání integračních mezí). V polárních souřadnicích je navíc jednodušší množinu  $\Omega$  zapsat, a tak ji přepíšeme rovnou celou. Pro poloměr  $r$  platí:  $3 \leq r \leq \sqrt{21}$ , a pro úhel  $\theta$ :  $0 \leq \theta \leq 2 \cdot \pi$ .

$$f(x, y) := \sqrt{25 - x^2 - y^2}$$

$$(x, y) \rightarrow \sqrt{25 - x^2 - y^2}$$

$$\text{Student[MultivariateCalculus][ChangeOfVariables] \left( \int_0^3 \int_{\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{21-x^2}} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right)^2} \right) dy dx, \right.$$

$$\left. \left[ \text{cartesian}_{x, y}, \text{polar}_{r, \theta} \right] \right)$$

$$\int_{x=0}^{x=3} \int_{y=\sqrt{9-x^2}}^{y=\sqrt{21-x^2}} 5 \sqrt{-\frac{1}{-25+r^2}} r dr d\theta$$

$$\int_3^{\sqrt{21}} \int_0^{2 \cdot \pi} 5 \sqrt{-\frac{1}{-25+r^2}} r d\theta dr$$

$$20 \pi$$

Obrázek 6.35: Řešení příkladu 3.56

Příklad 3.58: Můžeme využít dvojných integrálů již získaných při řešení příkladu 3.48 a pouze funkci  $f(x, y)$  „přepsat“ do mezí pro proměnnou  $z$  v třetím integrálu. Zřejmě platí:

- (a)  $z \in [0, x^2 + y^2]$ ,
- (b)  $z \in [0, 64 - x^2]$ .

Příklad 3.59: Postupujeme analogicky k řešení příkladu 3.50. Kvádr vhodně umístíme do souřadné soustavy a jeho meze pak můžeme zapsat následovně:  $x \in [0, a], y \in [0, b], z \in [0, c]$ .

Příklad 3.60: Koule je speciálním případem trojosého elipsoidu z příkladu 3.57 pro  $a = b = c = r$ . Můžeme tedy pouze pozměnit tyto hodnoty v řešení v příkladu 3.57 a získáme vztah pro objem koule o poloměru  $r$ .

Příklad 3.61: Postupujeme analogicky k řešení příkladu 3.52. Válec vhodně umístíme do souřadné soustavy a jeho meze pak můžeme zapsat následovně:  
 $x \in [-r, r], y \in [-\sqrt{r^2 - x^2}, \sqrt{r^2 - x^2}], z \in [-v, v]$ .

Příklad 3.63: Zadaná funkce představuje plášť horní poloviny koule o poloměru  $r = 1$ . V příkladu tak počítáme objem horní poloviny koule o zmíněném poloměru a z předešlých příkladů víme, že by výsledek měl vyjít  $\frac{2 \cdot \pi}{3}$ . Můžeme například zapsat dvojný integrál v kartézských souřadnicích a použít příkaz `ChangeOfVariables`. Nové integrační meze odvodíme velmi snadno, neboť se jedná o kruh o poloměru  $r = 1$ . Dostáváme tedy:  $r \in [0, 1], \theta \in [0, 2 \cdot \pi]$ .

Příklad 3.64: Ve všech příkladech (3.46, 3.51, 3.52, 3.60 a 3.61) jsme v tomto textu využili kartézských souřadnic. Nyní tedy provedeme příslušné výpočty v souřadnicích polárních, sférických a cylindrických.

V příkladu 3.46 počítáme obsah kruhu o poloměru  $r$ . V polárních souřadnicích můžeme kruh popsat následovně:  $x = \rho \cdot \cos(\theta), y = \rho \cdot \sin(\theta)$ , kde  $\rho \in [0, r], \theta \in [0, 2 \cdot \pi]$ . Podle poznámky 3.24 tak počítáme integrál

$$\int_0^{2 \cdot \pi} \int_0^r \rho \, d\rho \, d\theta.$$

Jak v příkladu 3.46, tak i nyní bychom měli obdržet tabulkový vzorec:  $S = \pi \cdot r^2$ .

V příkladu 3.51 počítáme objem koule o poloměru  $r$ . Využijeme polárních souřadnic, v nichž popíšeme podstavu horní polokoule následovně:  $x = \rho \cdot \cos(\theta), y = \rho \cdot \sin(\theta)$ , kde  $\rho \in [0, r], \theta \in [0, 2 \cdot \pi]$ . Podle poznámky 3.24 tak počítáme integrál

$$2 \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} \int_0^r \rho \cdot \sqrt{r^2 - \rho^2 \cdot \cos^2(\theta) - \rho^2 \cdot \sin^2(\theta)} \, d\rho \, d\theta.$$

Jak v příkladu 3.51, tak i nyní bychom měli obdržet tabulkový vzorec:  $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$ .

V příkladu 3.52 počítáme objem válce o poloměru podstavy  $r$  a výšce  $v$ . Využijeme opět polárních souřadnic, v nichž popíšeme podstavu válce:  $x = \rho \cdot \cos(\theta), y = \rho \cdot \sin(\theta)$ , kde  $\rho \in [0, r], \theta \in [0, 2 \cdot \pi]$ . Podle poznámky 3.24 tak počítáme integrál

$$\int_0^{2 \cdot \pi} \int_0^r \rho \cdot v \, d\rho \, d\theta.$$

Jak v příkladu 3.52, tak i nyní bychom měli obdržet tabulkový vzorec:  $V = \pi \cdot r^2 \cdot v$ .

V příkladu 3.60 počítáme objem koule o poloměru  $r$ . Ve sférických souřadnicích můžeme kouli popsat následovně:  $x = \rho \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(\theta), y = \rho \cdot \sin(\phi) \cdot \sin(\theta), z = \rho \cdot \cos(\theta)$ , kde  $\rho \in [0, r], \phi \in [0, 2 \cdot \pi], \theta \in [0, 2 \cdot \pi]$ . Podle poznámky 3.25 tak počítáme integrál

$$\int_0^{2 \cdot \pi} \int_0^{2 \cdot \pi} \int_{-r}^r \sin(\theta) \cdot \rho^2 \, d\rho \, d\phi \, d\theta.$$

Jak v příkladu 3.60, tak i nyní bychom měli obdržet tabulkový vzorec:  $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$ .

V příkladu 3.61 počítáme objem válce o poloměru podstavy  $r$  a výšce  $v$ . V cylindrických souřadnicích můžeme válec popsat následovně:  $x = \rho \cdot \cos(\theta), y = \rho \cdot \sin(\theta), z = z$ , kde  $\rho \in [0, r], \theta \in [0, 2 \cdot \pi], z \in [0, v]$ . Podle poznámky 3.26 tak počítáme integrál

$$\int_0^{2 \cdot \pi} \int_0^r \int_0^v \rho \, dz \, d\rho \, d\theta.$$

Jak v příkladu 3.61, tak i nyní bychom měli obdržet tabulkový vzorec:  $V = \pi \cdot r^2 \cdot v$ .

Příklad 3.65: Všechny tři řady umí Maple „sečíst“.

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)} = 1, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty, \text{ řada diverguje.}$$

Příklad 3.68:

- (a)  $s_n = \sqrt{n}$ ,  $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty \Rightarrow$  řada diverguje,
- (b)  $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} > \frac{1}{\sqrt{n^2+2n+1}} = \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} = \frac{1}{n+1}$ , řada  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$  diverguje  $\Rightarrow$  zadaná řada také diverguje,
- (c)  $a_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^4+1}} < \sqrt{\frac{1}{n^3}}$ , řada  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{n^3}}$  konverguje  $\Rightarrow$  konverguje i zadaná řada,
- (d) použijeme limitní srovnávací kritérium a budeme srovnávat s řadou  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ , o níž víme, že konverguje,
- (e) použijeme limitní verzi podílového kritéria a zjistíme, že řada konverguje,
- (f) využijeme opět limitní verze podílového kritéria a zjistíme, že řada diverguje,
- (g) využijeme limitní verze odmocninového kritéria a zjistíme, že zadaná řada konverguje,
- (h) využijeme limitní verze podílového kritéria a zjistíme, že zadaná řada konverguje,
- (i) stačí zadat systému Maple a zjistíme, že zadaná řada konverguje; jinak je možné použít například integrální kritérium.

Příklad 3.71:

- (a) Jak součet zadané řady, tak součet řady absolutních hodnot umí určit Maple přímo. Zadaná řada konverguje absolutně.
- (b) Součet zadané řady i řady absolutních hodnot opět určí Maple přímo (i když je potřeba se „nevyděsit“ vypsaným tvarem výsledku pro součet zadané řady). Zadaná řada konverguje neabsolutně.
- (c) Pomocí Leibnizova kritéria zjistíme, že zadaná řada konverguje. Pomocí integrálního kritéria ověříme, že řada absolutních hodnot diverguje. Zadaná řada proto konverguje neabsolutně.
- (d) Pomocí Leibnizova kritéria zjistíme, že zadaná řada konverguje. Srovnávacím kritériem s řadou  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  ověříme, že řada absolutních hodnot diverguje. Zadaná řada proto konverguje neabsolutně.
- (e) Pomocí limitní varianty odmocninového kritéria zjistíme, že řada absolutních hodnot konverguje. Zadaná řada proto konverguje absolutně.
- (f) V příkladu 3.67.(c) jsme zjistili, že řada absolutních hodnot zadané řady konverguje, tedy zadaná řada konverguje absolutně.

## 6.4 Lineární algebra s Maple v $\mathbb{C}^n$

Příklad 4.2: Musíme najít lineární kombinace vektorů báze tak, abychom získali vektory báze standardní. Tj. např. pro

$$e_1 = (1, 0, 0) = \frac{1}{3} \cdot (3, 0, 0) + 0 \cdot (0, 2, 0) + 0 \cdot (0, 0, 1).$$

Souřadnice vektoru  $e_1$  v bázi  $\alpha$  jsou proto  $(\frac{1}{3}, 0, 0)$ .

Příklad 4.3: Nejsou. Je možné se o tom přesvědčit např. použitím příkazu `Basis`.

Příklad 4.4: Negenerují. Opět je možné se o tom přesvědčit např. použitím příkazu `Basis`. Bázi tvoří pouze 2 z vektorů.

Příklad 4.6:

$$G^2 - 3 \cdot F = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -9 & -14 \end{pmatrix}, \quad A - F = \text{nedefinováno}, \quad A - G \cdot F \cdot A = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 5 & 59 \\ -7 & -13 \end{pmatrix},$$

$$B \cdot A \cdot C \cdot H - B \cdot F \cdot B^T = 113.$$

Příklad 4.7:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \cdot (1 - I) & \frac{1}{3} \cdot I \\ \frac{1}{3} \cdot (1 + I) & -\frac{1}{3} \cdot I \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \frac{1}{a \cdot d - b \cdot c} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

$$F^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 4.8: Ve všech případech využíváme vytvoření matice pomocí příkazu `Matrix(4, f)`, kde funkce  $f$  specifikuje požadovanou závislost.

Příklad 4.9:

a) Například  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .      b) Například  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Příklad 4.10: Zvolíme nějaký vektor, např.  $u = (1, 1)^T$ . Vypočteme  $v = A \cdot u$  pro nějakou hodnotu  $\alpha$  a pomocí příkazu `PlotVector` vykreslíme  $u$  a  $v$ .

Příklad 4.13: Postupujeme zcela analogicky příkladu 4.11. Souřadnice vektoru  $v$  v bázi  $\alpha$  jsou:  $(0, 1, 2)^T$ .

Příklad 4.14: Můžeme použít např. příkazu `Basis`:



a) vektor  $u_3$ ,

b) žádný z uvedených.

Příklad 4.15: Jestliže vhodně zvolíme bázi, tj. např.  $\alpha = \{1, x, x^2, x^3\}$  pro  $\mathbb{R}_3[x]$ , vektor  $1 - x$  má v této bázi souřadnice  $(1, -1, 0, 0)$  atd. Posléze již můžeme použít příkaz **Basis** jako v předchozím příkladu.

a) vektory jsou lineárně závislé, např.  $x^3 - 1 = -(1 - x) - (x - x^2) - (x^2 - x^3)$ ,

b) totéž co za (a), např.  $x^3 + 1 = (1 + x) - (x + x^2) + (x^2 + x^3)$ ,

c) vektory jsou lineárně nezávislé,

d) není nutné ani cokoli počítat, jedná se o 4 vektory v prostoru dimenze 3.

$\mathbb{R}_n[x]$  se standardním sčítáním polynomů a skalárním násobkem polynomu je vektorový prostor – je třeba ověřit, že platí:

1.  $p(x) = 0 \in \mathbb{R}_n[x]$  je nulový prvek, tj.  $\forall q(x) \in \mathbb{R}_n[x] : q(x) + p(x) = q(x)$ ,

2.  $\forall q(x) \in \mathbb{R}_n[x] : \exists -q(x) \in \mathbb{R}_n[x] : q(x) + (-q(x)) = 0$ ,

3.  $\forall p(x), q(x), r(x) \in \mathbb{R}_n[x] : (p(x) + q(x)) + r(x) = p(x) + (q(x) + r(x))$ ,

4.  $\forall p(x), q(x) \in \mathbb{R}_n[x] : p(x) + q(x) = q(x) + p(x)$ ,

5.  $\forall a, b \in \mathbb{R}, p(x) \in \mathbb{R}_n[x] : a \cdot (b \cdot p(x)) = (a \cdot b) \cdot p(x)$ ,

6.  $p(x) = 1 \in \mathbb{R}_n[x]$  je jednotkový prvek, tj.  $\forall q(x) \in \mathbb{R}_n[x] : q(x) \cdot p(x) = q(x)$ ,

7.  $\forall a \in \mathbb{R}, p(x), q(x) \in \mathbb{R}_n[x] : a \cdot (p(x) + q(x)) = a \cdot p(x) + a \cdot q(x)$ ,

8.  $\forall a, b \in \mathbb{R}, p(x) \in \mathbb{R}_n[x] : (a + b) \cdot p(x) = a \cdot p(x) + b \cdot p(x)$ .

Příklad 4.16: Řešíme analogicky příkladu 4.12:

a) „kritické“ hodnoty:  $a = -1, b = 1$ ,

b) „kritické“ hodnoty:  $a = 0, b = -2$ .

Příklad 4.17: Řešíme opět analogicky příkladu 4.12: „kritické“ hodnoty:  $a = 1, b = 2, c = 6$ .

Příklad 4.19: Řešení probíhá analogicky příkladu 4.18. Postup v případě (a) ilustruje obrázek 6.36. Pokud používáme příkaz **assign** a řešíme více příkladů najednou, je třeba mít na paměti, že vytváříme proměnné, do nichž přiřazujeme nějaké hodnoty – to může v dalších příkladech „vadit“ a je třeba buď změnit názvy proměnných nebo z používaných jmen  $(x_1, x_2, \dots)$  hodnoty odstranit. O správnosti řešení se můžeme též přesvědčit dosazením do původní rovnice.

Příklad 4.20: Řešíme opět analogicky příkladu 4.18. Dostáváme nekonečně mnoho řešení pro tři různé reálné parametry.

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <pre>with(LinearAlgebra) : A := Matrix([[1, 2·I, 0], [0, 3 - I, 6 - 2·I], [2, 0, -1], [1, 1, 1]])       <math display="block">\begin{bmatrix} 1 &amp; 2I &amp; 0 \\ 0 &amp; 3 - I &amp; 6 - 2I \\ 2 &amp; 0 &amp; -1 \\ 1 &amp; 1 &amp; 1 \end{bmatrix}</math> y := &lt;5 + 4·I, 10, 5 + 3·I, 5 + 2·I&gt;       <math display="block">\begin{bmatrix} 5 + 4I \\ 10 \\ 5 + 3I \\ 5 + 2I \end{bmatrix}</math> R := GaussianElimination(Matrix([A, y]))       <math display="block">\begin{bmatrix} 1 &amp; 2I &amp; 0 &amp; 5 + 4I \\ 0 &amp; 3 - I &amp; 6 - 2I &amp; 10 \\ 0 &amp; 0 &amp; -1 + 8I &amp; -9 + 7I \\ 0 &amp; 0 &amp; 0 &amp; 0 \end{bmatrix}</math></pre> | <pre>res := Matrix([seq([x_i], i = 1 ..3)]): solve({seq((R[i, 1 ..3].res)[1] = R[i, 4], i = 1 ..3)}, {x_1, x_2, x_3}) {x_1 = 3 + 2I, x_2 = 1 - I, x_3 = 1 + I} assign(%) res       <math display="block">\begin{bmatrix} 3 + 2I \\ 1 - I \\ 1 + I \end{bmatrix}</math></pre> |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Obrázek 6.36: Řešení příkladu 4.19.

Příklad 4.21: Můžeme řešit mnoha způsoby, které Maple nabízí. Vždy bychom se měli dopracovat k výsledku, v němž se ve jmenovatelích objevují v součtinu výrazy  $a^2 + b^2$  a  $c$ , tj. zadaná soustava má právě jedno řešení, pokud jsou tyto různé od nuly.

Příklad 4.23: Postupujeme stejně jako v příkladu 4.22.

Příklad 4.24: Postupujeme stejně jako v příkladu 4.22.

Příklad 4.25: V zadání není specifikován postup výpočtu, takže stačí pouze „přepsat“ do systému Maple a vyhodnotit.

Příklad 4.26: Totéž jako v předešlém příkladu. Pouze je třeba dát si pozor na zápis symbolu pro násobení matic.

Příklad 4.28: K Laplaceovu rozvoji využijeme zavedený příkaz `laplace`. Matice lze jednoduše upravovat do tvarů „výhodnějších“ pro výpočet, nicméně to není nutné. Přímým výpočtem determinantu můžeme ověřit správnost výpočtu pomocí Laplaceova rozvoje.

Příklad 4.29: Pro reálné matice z příkladu 4.23 není třeba nic ověřovat, neboť konjugovaná matice je shodná s původní maticí (podobně jako v případě reálného čísla). U nereálných matic využijeme např. příkazů `conjugate` a `map`.

# Rejstřík

- ?, 15
- %, 18
  
- abs, 12
- absolutní konvergence řady, 148
- add, 170
- All values, 25
- AllSolutions, 23
- allvalues, 24
- alternující řada, 147
- animate, 46, 85
- apply, 35
- Approximate Integration, 79, 135
- ApproximateInt, 135
- ArcLength, 83
- assign, 20
- Assistants, 15
- assume, 28, 91
- assuming, 29
- Asymptotes, 71
- axes, 43
  
- Basis, 154
- bod uzávěru, 119
  
- Change, 73
- changecoords, 125, 139
- ChangeOfVariables, 125, 139
- Classic Worksheet, 7
- coeff, 29
- collect, 29
- color, 43
- combine, 28, 158
- conjugate, 172
- contourplot, 100
- contours, 100, 201
- convert, 29, 60, 75
- copy, 172
- CriticalPoints, 71
  
- D, 55, 106
- definiční obor, 36
- DeleteColumn, 170
- DeleteRow, 170
- Determinant, 115, 168
- diff, 54, 106
- Digits, 16, 20
- DirectionalDerivative, 109
- discont, 52, 64, 66, 67, 105
- display, 45, 107
- divergence řady, 140
- Document Mode, 9
- dolní integrál, 76
- dolní integrální součet, 76
- Drawing, 43
- dsolve, 23
  
- Error, (in plot) ..., 179
- Error, (in rtable/Power) singular matrix, 158
- Error, illegal use of an object as a name, 177
- Error, invalid assignment, 176
- Error, invalid input, 169, 174
- Error, invalid operator parameter name, 177
- Error, invalid power, 177
- Error, numeric exception: division by zero, 177
- Error, recursive assignment, 151
- Error, unable to match delimiters, 176
- eval, 33, 34, 55, 115, 170
- evalb, 38
- evalf, 16, 18, 24
- expand, 29, 33
- extrema, 65, 115, 119
- ExtremePoints, 71
  
- factor, 29, 158
- fsolve, 23
- FunctionChart, 70
  
- GaussianElimination, 164, 165, 167
- GaussianEliminationTutor, 164
- grid, 95
- gridrefine, 95, 97, 100
  
- HermitianTranspose, 172
- hessián, 115

Hessian, 115  
 Hessova matice, 115  
 hlavní menu, 7  
 horní integrál, 77  
 horní integrální součet, 76  
  
 implicitplot, 81, 95, 97, 100, 125  
 implicitplot3d, 106  
 inequal, 97, 125  
 InflectionPoints, 71  
 Int, 73, 124  
 int, 72, 77, 124  
 integrální kritérium, 145  
 integrační konstanta, 72  
 IntegrationTools, 73, 74  
 integrovatelná funkce, 77  
 intsolve, 23  
 InversePlot, 39  
 InverseTutor, 5, 39, 165  
 invfunc, 39  
 iscont, 52  
 isolve, 23  
  
 kernelopts(maxdigits), 16  
 kontextová lišta, 7  
 konvergence řady, 140  
  
 labels, 43  
 Lagrangeova věta o střední hodnotě, 71  
 laplace, 169, 170  
 lcm, 17  
 legend, 43  
 Leibnizovo kritérium, 147  
 limit, 49, 102  
 limitní Raabeovo kritérium, 145  
 limitní srovnávací kritérium, 144  
 LinearAlgebra, 21, 115, 160, 168  
 LinearSolve, 23, 160  
 LinearSolveTutor, 164  
 LinearSystemPlotTutor, 160  
  
 Maclaurinův vzorec, 60  
 Maclaurinův zbytek, 60  
 map, 158, 172  
 Maple Help, 13  
 Math Apps, 5, 15  
 Math Mode, 9  
 Matrix, 155, 158  
 MatrixInverse, 158  
 Maximize, 117, 119  
 maximize, 37, 117, 119, 121  
  
 MeanValueTheorem, 71  
 metoda per partes, 72  
 Minimize, 117, 119  
 minimize, 37, 117, 119, 121  
 msolve, 23  
 mtaylor, 113  
 MultiInt, 124, 125  
  
 nástrojová lišta, 7  
 neabsolutní konvergence řady, 148  
 nekonečná řada, 140  
 neurčitý integrál, 72  
 normal, 28  
 numer, 162  
 numpoints, 95  
  
 obor hodnot, 36  
 odmocninové kritérium, 144  
 ohraničená funkce, 36  
 op, 162, 172  
 Optimization, 117, 119  
 Order, 60, 113  
 oscilace řady, 140  
  
 palety, 7, 11  
 parfrac, 75  
 Parts, 73  
 pdsolve, 23  
 Pi, 12  
 piecewise, 35  
 Plot, 43  
 plot, 43, 66, 140  
 Plot Builder, 43  
 plot3d, 85, 87, 94, 95, 100, 106, 107, 112  
 PlotBuilder, 94  
 plots, 46, 81, 97, 107, 112, 125, 127  
 plottools, 125  
 PlotVector, 151  
 podílové kritérium, 145  
 pointplot3d, 107, 112  
 polygonplot, 208  
 posloupnost, 139  
 posloupnost částečných součtů, 140  
 primitivní funkce, 72  
 printf, 170  
  
 RealDomain, 22, 37  
 ReducedRowEchelonForm, 167  
 restart, 20  
 Riemannův integrál, 77  
 RiemannSum, 78, 135

Rolleova věta, 71  
 RollesTheorem, 71  
 Roots, 71  
 RowDimension, 169  
 rsolve, 23  
  
 seq, 140  
 simplify, 22, 28, 29, 33  
 singular, 105  
 solve, 23, 64, 81  
 sort, 29  
 spacecurve, 106, 119  
 sqrt, 12  
 srovnávací kritérium, 143  
 stacionární body, 63  
 Standard Worksheet, 6  
 stavová lišta, 7  
 Student[Calculus1], 39, 70, 78  
 Student[LinearAlgebra], 164, 165  
 Student[MultivariateCalculus], 109, 124, 135  
 subs, 73, 170  
 substituční metoda, 72  
 Sum, 141  
 sum, 141  
 SurfaceOfRevolution, 88  
  
 Tasks, 15  
 taylor, 60, 113  
 Taylorův polynom, 59, 113  
 Taylorův vzorec, 59, 113  
 Taylorův zbytek, 59, 113  
 Text Mode, 9  
 thickness, 43  
 transform, 125  
 Transpose, 158  
 Tutors, 15  
 type, 176  
  
 unapply, 34, 55, 78  
 unassign, 20  
 Units, 22  
 Units Calculator, 22  
 unwith, 21  
 uzávěr množiny, 119  
 uzavřená množina, 119  
  
 value, 73, 74  
 Vector, 150  
 VectorCalculus, 115  
 verify, 38  
 VolumeOfRevolution, 85  
  
 Warning, solutions may have been lost, 180  
 Warning, unable to determine if ..., 180  
 What Assumptions, 23  
 with, 21, 115  
 Worksheet Mode, 9

# Literatura

- [1] Ash, C., Ash, R. B.: *The Calculus Tutoring Book*. Wiley-IEEE Press (1993)
- [2] Došlá, Z., Došlý, O.: *Diferenciální počet funkcí více proměnných*. Masarykova Univerzita, Brno (1999)
- [3] Došlá, Z., Plch, R., Sojka, P.: *Nekonečné řady s programem Maple*. Masarykova Univerzita, Brno (2002)
- [4] Hamhalter, J., Tišer, J.: *Integrální počet funkcí více proměnných*. ČVUT, Praha (2005) [online]. [cit 2010-12-27]. Dostupný z WWW: <<http://math.feld.cvut.cz/tiser/intpocet.htm>>
- [5] Hřebíček, J., Pospíšil, Z., Urbánek, J.: *Úvod do matematického modelování s využitím Maple*. CERM, Brno (2010)
- [6] Hummelová, I., Hamříková, R., Janků, V., Tannenbergová, M., Dostálová, M., Dudková, K., Dudek, J.: *ZÁKLADY MATEMATIKY pro kombinované a distanční studium*. Fakulta elektrotechniky a informatiky, VŠB – Technická univerzita Ostrava, 2003. [online]. [cit 2010-08-28]. Dostupný z WWW: <[http://cementarna.ic.cz/matematika\\_prehled/](http://cementarna.ic.cz/matematika_prehled/)>
- [7] Kalus, R., Hrivňák, D.: *Breviář vyšší matematiky*. Ostravská univerzita, Ostrava 2001. [online]. [cit 2010-12-31]. Dostupný z WWW: <<http://artemis.osu.cz/skripta/kalus1/intro.pdf>>
- [8] Kouřilová-Šnyrychová, P.: *Dvojný Riemannův integrál*. [online]. [cit 2010-12-27]. Dostupný z WWW: <<http://kma.me.sweb.cz/dvoj-integr%C3%A1l.pdf>>
- [9] Maplesoft: *Maple User Manual*. [online]. [cit 2010-08-17] Dostupný z WWW: <[http://www.maplesoft.com/documentation\\_center](http://www.maplesoft.com/documentation_center)>
- [10] Ústav Matematiky FSI VUT Brno: *MATEMATIKA online*. [online]. [cit 2010-08-17] Dostupný z WWW: <<http://mathonline.fme.vutbr.cz/>>
- [11] Mendelson, E.: *3000 Solved Problems in Calculus*. McGraw-Hill (1988)
- [12] Novák, V.: *Diferenciální počet v R*. Masarykova univerzita, Brno (1997)
- [13] Plch, R., Došlá, Z., Sojka, P.: *Matematická analýza s programem Maple. Díl 1, Diferenciální počet funkcí více proměnných*. Masarykova Univerzita, Brno (1999)
- [14] Slovák, J.: *Lineární algebra 1997/1998*. Masarykova Univerzita, Brno. [online]. [cit 2012-10-16]. Dostupný z WWW: <<http://is.muni.cz/el/1431/podzim2009/M1110/um/sp/933531/la1jslovak.pdf>>

- [15] Zlatoš, P.: *Lineárna algebra a geometria*. Bratislava (2006). [online]. [cit 2012-10-16]. Dostupný z WWW: <[http://is.muni.cz/el/1431/podzim2009/M1110/um/4020337/lag\\_kap0-10.pdf](http://is.muni.cz/el/1431/podzim2009/M1110/um/4020337/lag_kap0-10.pdf)>