

Československá akademie věd

Vědecký redaktor
Prof. Ing. Jiří Kracík, DrSc.
Recenzent
Ing. Václav Krejčí, CSc.

ÚVOD DO FYZIKY PLAZMATU

Francis F. Chen

.....
.....
Hlavní ústav
Depo v ústavě
Ústav, inv. č.
Signatura

017300
JK

U-4637/84
985/84

ACADEMIA / PRAHA 1984

Přeloženo z anglického originálu
Introduction to Plasma Physics
Francis F. Chen

© 1974 Plenum Press, New York
Translation © Karel Rohlena, 1984

Básniku a neúnavné studentce...

M. Conrad Chenovi
Evelyn C. Chenové

Předmluva

Tato kniha vznikla z textu přednášek pro studenty v kursu fyziky plazmatu, který byl po řadu let vypisován na kalifornské universitě (University of California) v Los Angeles. Vzhledem k nynějšímu rostoucímu zájmu o řízené termojaderné reakce a vzhledem k tomu, že fyzika plazmatu nachází široké uplatnění ve výzkumu kosmického prostoru a v relativistické astrofyzice, ukazuje se rozumným, aby se studium plazmatu stalo součástí základního vzdělání studentů podobně jako termodynamika a kvantová mechanika. Jakkoliv bylo základním cílem této knihy vyhovět potřebě textu, jemuž by dobře rozuměli studenti posledních ročníků, věřím, že může rovněž sloužit vědcům jiných oborů — např. fyziky pevných látek nebo fyziky laserů — jako schůdná cesta k obeznámení se s fyzikou plazmatu.

Držel jsem se dvou hlavních zásad: nepřenechávat čtenáři algebraické výpočty jako cvičení a nedovolit, aby algebra zatemnila fyziku. V jakém rozsahu se mohou tyto protichůdné úmysly usmířit, je do značné míry určeno přístupem k plazmatu jakožto ke dvěma navzájem se prostupujícím tekutinám. Dvoutekutinový model je pro pochopení snazší a zároveň přesnější než jednotekutinový, přinejmenším pro jevy v plazmatu s malou hustotou.

Úvodní kapitoly předpokládají jenom malou přípravu ze strany studentovy, u dalších kapitol se očekává, že bude držet krok s narůstající složitostí. Prvých šest a půl kapitol je možno probrat za devíti až desítitýdenní čtvrtletí. Studijní látka těchto kapitol byla pečlivě vybrána, aby obsahovala jenom podstatné. Zbývajících dvou a půl kapitol lze užít v semestrovém kursu nebo jako doplňkovou četbu. Značné úsilí jsem věnoval

jasnému vysvětlení Landauova útlumu – včetně onoho výkladu, jenž není vázán na znalost integrálu komplexní proměnné. Tom O'Neil a George Schmidt mně pomohli zjednodušit fyzikální model původně vypracovaný Johnem Dawsonem; jsem jim za to zavázán.

Někteří čtenáři nelibě ponesou, že se užívá cgs elektrostatických jednotek. Nemá samozřejmě smysl pít se o jednotkách; každý zkušený fyzik umí výmluvně a logicky bezvadně obhájit svůj oblíbený jednotkový systém. Systém užívaný zde je vysvětlen v dodatku I. Zvolil jsem ho proto, abych se vyhnul zbytečnému psaní c , ϵ_0 a μ_0 , a také proto, abych se shodoval s většinou vědeckých publikací v oboru fyziky plazmatu.

Rád bych poděkoval slečně Lise Tatarové a paní Betty Rae Brownové za mistrné intuitivní rozluštění mého rukopisu, panu Tim Lambertovi za stejné porozumění při přípravě obrázků, nejvíce pak Ande Chenové za to, že se smířila s tak četnými večery strávenými v osamocení.

Los Angeles, 1974

Francis F. Chen

Předmluva k českému vydání

Do české fyzikální literatury se dostává kniha amerického fyzika Francise F. Chena (*1929), významného odborníka ve fyzice plazmatu. Skutečnost, že autor je experimentálním fyzikem, se v knize zřetelně odráží a – jak věřím – znamená významné doplnění českých knih v tomto oboru již existujících.

Základní tendenci knihy je vést čtenáře k názorné představě o plazmatu. Tomu odpovídá jak výběr a uspořádání látky, tak i její zpracování. Proto je věnováno tolik místa výkladům fyzikálního významu odvozených vzorců, proto tak velký počet obrázků (přes 200), většinou schémat podporujících názornost výkladu, to je i smysl úloh, jimiž je vybaveno prvních sedm kapitol.

Autorovo úsilí po názornosti a přehlednosti výkladu staví překladatele před nesnadné rozhodnutí. Zachovat „symbolické termíny“ (E pole, ∇B drift, $E \times B$ drift, $\min B$ stabilizace apod.), které jsou výrazné, fyzikálně názorné a stručné, lze je při čtení uchopit „jediným pohledem“, ale v češtině zní cize, nebo je důsledně přepisovat do „češtější podoby“, verbalizovat je (elektrické pole, drift v gradientu magnetického pole či gradientový drift, drift ve zkřížených polích atp.)? Volil jsem nejprve druhý způsob, ale po jisté době jsem nabyl přesvědčení, že by se tím smazávala přehlednost textu, která je charakteristickým rysem originálu knihy, a pokusil jsem se český překlad se symbolickými – více méně pracovními – termíny „usmířit“.

Mnohdy jsem musel užít české výrazy bez jakéhokoliv úmyslu zavádět je jako české termíny fyziky plazmatu. Je známo, že angličtina si počíná

při volbě nových termínů velmi nenuceně, nezdědka je volí s jistou dávkou humoru podle zcela povrchní podobnosti. Jak do české fyziky — a to je paní s daleko vybranějším vyjadřováním — uvést třeba takovou *sausage instability* nebo *beach effect*? Doslovný překlad by byl sotva únosný. Česky psané původní práce, kde by se takové termíny spontánně objevovaly, dnes už prakticky neexistují, souhrnné články s popularizující tendencí se až k těmto termínům nedostanou (to se ovšem týká i zcela „střízlivých“ výrazů, jako např. cusp mirror, bow shock, bounce frequency atd.). Snažil jsem se najít české výrazy, které by daný pojem názorně vystihovaly, v některých případech, kdy se s termínem dále nepracovalo, jsem jej opsal. Protože však kniha má čtenáře uvést do fyziky plazmatu, tzn. vedle věcného výkladu jej má seznámit s termíny, s nimiž se setká v původní literatuře, považoval jsem za užitečné ponechat v rejstříku vedle českého původní termín anglický. Tam, kde jsem věc řešil opisem, uvádím anglický výraz pod čarou, případně — u méně běžných slov cizího původu, která jsem převzal — uvádím původní význam slova, zpravidla odvozený z latiny nebo řečtiny.

Nelze se nezmínit několika slovy o jednotkové soustavě. Z autorovy předmluvy je patrné, že použil elektrostatickou cgs soustavu, avšak nám brání zákon, abychom ho prostě následovali. Musel jsem přepočítat výrazy a rovnice do soustavy SI; věřím, že mi neuniklo žádné místo vyžadující tento přepočet a že čtenář nebude maten. Je pravda, že vzorce se tím zpravidla nijak nekomplikují. Závažnější je ta skutečnost, že v cizích časopisech se ve fyzice plazmatu soustava SI používá jen zřídka. Čtenář je proto v dodatku I, který jsem musel trochu přepracovat, a v dodatku II upozorněn na některé vztahy mezi těmito soustavami.

Děkuji svým přátelům za přečtení překladu a za připomínky, které jsem rád respektoval.

V Praze, v prosinci 1980

Překladatel

Obsah

Předmluva	7
Předmluva k českému vydání	9
Kapitola první: ÚVOD	17
1.1 Výskyt plazmatu v přírodě	17
1.2 Definice plazmatu	19
1.3 Pojem teploty	20
Úlohy 1-1, 1-2	23
1.4 Debyeovo stínění	23
1.5 Plazmatický parametr	26
1.6 Kritéria pro plazma	26
Úlohy 1-3 až 1-7	27
1.7 Aplikace fyziky plazmatu	27
1.7.1 Výboj v plynech (elektronika plynů)	28
1.7.2 Řízená termojaderná syntéza	28
1.7.3 Fyzika kosmického prostoru	29
1.7.4 Moderní astrofyzika	29
1.7.5 MHD generátor a iontový pohon	29
1.7.6 Plazma v pevných látkách	30
1.7.7 Plynné lasery	30
Kapitola druhá: POHYBY JEDNOTLIVÝCH ČÁSTIC	32
2.1 Úvod	32
2.2 Homogenní \mathbf{E} a \mathbf{B} pole	32
2.2.1 $\mathbf{E} = 0$	32
2.2.2 Konečné \mathbf{E} pole	34

2.2.3	Gravitační pole	36
	Úlohy 2-1 až 2-4	37
2.3	Nehomogenní B pole	38
2.3.1	$\nabla B \perp B$: grad- B drift	38
2.3.2	Zakřivené siločivky: drift zakřivení	40
2.3.3	$\nabla B \parallel B$: Magnetická zrcadla	41
	Úlohy 2-5 až 2-7	45
2.4	Nehomogenní E pole	46
2.5	Časově proměnné E pole	48
2.6	Časově proměnné B pole	50
2.7	Přehled driftů gyračního středu	52
2.8	Adiabatické invarianty	52
2.8.1	První adiabatický invariant, μ	52
2.8.2	Druhý adiabatický invariant, J	54
2.8.3	Třetí adiabatický invariant, ϕ	57
	Úlohy 2-8, 2-9	57
Kapitola třetí: PLAZMA JAKO SMĚS TEKUTIN		58
3.1	Úvod	58
3.2	Vztah fyziky plazmatu k obyčejné teorii elektromagnetismu	59
3.2.1	Maxwellovy rovnice	59
3.2.2	Magnetické látky v klasickém pojetí	60
3.2.3	Dielektrika v klasickém pojetí	61
3.2.4	Dielektrická konstanta plazmatu	61
	Úlohy 3-1, 3-2	62
3.3	Pohybová rovnice tekutiny	62
3.3.1	Konvektivní derivace	63
3.3.2	Tensor napětí	65
3.3.3	Srážky	68
3.3.4	Srovnání s obyčejnou hydrodynamikou	68
3.3.5	Rovnice kontinuity	69
3.3.6	Stavová rovnice	70
3.3.7	Úplná soustava rovnic pro tekutinu	70
3.4	Driftové pohyby tekutiny ve směru kolmém na B	71
	Úlohy 3-3 až 3-9	75
3.5	Driftové pohyby tekutiny ve směru rovnoběžném s B	75
3.6	Plazmatické přiblížení	77
Kapitola čtvrtá: VLNY V PLAZMATU		78
4.1	Popis vln	78
	Úloha 4-1	79
4.2	Grupová rychlost	80
4.3	Plazmové oscilace	81
	Úlohy 4-2 až 4-4	84
4.4	Elektronové plazmové vlny	85
	Úloha 4-5	91
4.5	Zvukové vlny	91
4.6	Iontové vlny	92
4.7	Platnost plazmatického přiblížení	94
4.8	Srovnání iontových a elektronových vln	95
4.9	Elektrostatické elektronové oscilace kolmé na B	98
	Úlohy 4-6, 4-7	102

4.10	Elektrostatické iontové vlny kolmé na B	104
4.11	Do ní hybridní frekvence	107
4.12	Elektromagnetické vlny s $B_0 = 0$	108
4.13	Experimentální použití	110
	Úlohy 4-8 až 4-11	114
4.14	Elektromagnetické vlny kolmé na B_0	115
4.14.1	Řádná vlna, $E_1 \parallel B_0$	115
4.14.2	Mimofádná vlna, $E_1 \perp B_0$	116
4.15	Mezní frekvence a rezonance	118
4.16	Elektromagnetické vlny rovnoběžné s B_0	121
4.17	Experimentální důsledky	123
4.17.1	Hvizdy	123
4.17.2	Faradayova rotace	125
	Úlohy 4-12 až 4-19	126
4.18	Hydromagnetické vlny	127
4.19	Magneto-zvukové vlny	132
4.20	Stručný přehled elementárních vln v plazmatu	134
4.21	CMA diagram	135
	Úlohy 4-20 až 4-26	137
Kapitola pátá: DIFÚZE A ODPOR		140
5.1	Difúze a pohyblivost ve slabě ionizovaných plynech	140
5.1.1	Veličiny charakterizující srážky	141
5.1.2	Veličiny charakterizující difúzi	142
5.2	Rozpad plazmatu difúzí	143
5.2.1	Ambipolární difúze	143
5.2.2	Difúze mezi rovnoběžnými stěnami	145
5.2.3	Difúze ve válci	147
5.3	Stacionární stav	148
5.3.1	Konstantní ionizační funkce	149
5.3.2	Rovinný zdroj	149
5.3.3	Zdroj v ose	150
5.4	Rekombinace	150
5.5	Difúze napříč magnetickým polem	152
5.5.1	Ambipolární difúze napříč B	155
5.5.2	Experimentální ověření	156
	Úlohy 5-1 až 5-3	158
5.6	Srážky v plně ionizovaném plazmatu	158
5.6.1	Odpor plazmatu	160
5.6.2	Mechanismus coulombovských srážek	160
5.6.3	Fyzikální význam η	162
5.6.4	Číselné hodnoty η	164
5.7	MHD rovnice v jednotekutinovém modelu	165
5.8	Difúze v plně ionizovaném plazmatu	167
5.9	Řešení difúzní rovnice	168
5.9.1	Časová závislost	169
5.9.2	Řešení nezávislá na čase	169
5.10	Bohmova a neoklasická difúze	170
	Úlohy 5-4 až 5-9	174

Kapitola šestá: ROVNOVÁHA A STABILITA	177
6.1 Úvod	177
6.2 Hydromagnetická rovnováha	179
6.3 Parametr β	181
6.4 Difúze magnetického pole do plazmatu	182
Úlohy 6-1, 6-2	184
6.5 Klasifikace nestabilit	185
6.6 Dvousvazková nestabilita	186
Úloha 6-3	190
6.7 „Gravitační“ nestabilita	190
6.8 Rezistivní driftové vlny	193
Kapitola sedmá: ÚVOD DO KINETICKÉ TEORIE	198
7.1 Fyzikální smysl $f(\mathbf{v})$	198
7.2 Rovnice kinetické teorie	204
7.3 Odvození rovnic pro tekutinu	209
7.4 Plazmové oscilace a Landauův útlum	211
7.5 Fyzikální význam Landauova útlumu	216
7.5.1 Kinetická energie elektronového svazku	219
7.5.2 Vliv počátečních podmínek	223
7.6 Fyzikální odvození Landauova útlumu	225
7.6.1 Rezonanční částice	228
7.6.2 Vyřešení dvou paradoxů	229
7.7 BGK a van Kampenovy módy	230
7.8 Experimentální ověření	230
7.9 Iontový Landauův útlum	233
Úloha 7-1	234
Kapitola osmá: NELINEÁRNÍ JEVY	235
8.1 Úvod	235
8.2 Stěnové vrstvy	237
8.2.1 Nezbytnost existence stěnové vrstvy	237
8.2.2 Rovnice pro rovinnou stěnovou vrstvu	239
8.2.3 Bohmovo kritérium stěnové vrstvy	240
8.2.4 Zákon Childův–Langmuirův	241
8.3 Iontové akustické rázové vlny	242
8.3.1 Sagdějevův potenciál	243
8.3.2 Kritická Machova čísla	246
8.3.3 Vzdělání strmosti vln	247
8.3.4 Experimentální pozorování	248
8.4 Ponderomotorická síla	249
8.5 Parametrické nestability	252
8.5.1 Vázané oscilátory	252
8.5.2 Frekvenční podmínka	253
8.5.3 Práh nestability	256
8.5.4 Fyzikální mechanismus	257
8.5.5 Oscilující dvousvazková nestabilita	258
8.5.6 Nestabilita parametrického rozpadu	261
8.6 Plazmová echa	263
8.7 Nelineární Landauův útlum	267

Kapitola devátá: ÚVOD DO ŘÍZENÉ TERMONUKLEÁRNÍ REAKCE	270
9.1 Problém řízené termonukleární reakce	270
9.1.1 Reakce	270
9.1.2 Nezbytnost plazmatu	271
9.1.3 Zápalná teplota	272
9.1.4 Lawsonovo kritérium	272
9.1.5 Hlavní problémy	272
9.1.6 Hlavní přístupy	273
9.2 Magnetické udržení: torusy	274
9.2.1 Rovnováha	274
9.2.2 Typy toroidálních systémů	275
9.2.3 Stabilita	275
9.2.4 Stellarátory	277
9.2.5 Tokamaky	279
9.2.6 Multipóly	283
9.2.7 Zařízení s relativistickým svazkem	286
9.3 Zrcadla	287
9.4 Pinče	293
9.5 Termojaderná reakce vyvolaná lasery	297
9.6 Ohřev plazmatu	300
9.7 Technické problémy termojaderné reakce	302
9.8 Shrnutí	304
DODATEK	306
I. Jednotky	306
II. Užitečné konstanty a vzorce	308
III. Užitečné vektorové relace	310
REJSTRÍK	312

Kapitola prvá

ÚVOD

VÝSKYT PLAZMATU V PŘÍRODĚ 1.1

Často se říká, že 99 % hmoty ve vesmíru je v plazmatickém stavu, to znamená v podobě elektricky vodivého plynu s atomy disociovanými na kladné ionty a záporné elektrony. Tento odhad asi není příliš přesný, ale je jistě přiměřený se zřetelem na skutečnost, že nitra i atmosféry hvězd, většina mezihvězdného vodíku a plynné mlhoviny jsou plazma. V našem vlastním sousedství se setkáváme s plazmatem, jakmile opustíme zemskou atmosféru, a to ve Van Allenových radiačních pásech a ve slunečním větru. Na druhé straně v našem každodenním životě je setkání s plazmatem omezeno na několik málo případů: úder blesku, jemný svit polární záře, vodivý plyn v zářivkách či v neonových reklamách a nepatrné množství ionizovaného plynu proudícího z trysek raket. Zdá se, že žijeme v tom jednom procentu vesmíru, v němž se plazma nevyskytuje přirozeně.

Proč tomu tak je, můžeme pochopit ze Sahovy rovnice, udávající stupeň ionizace, který můžeme očekávat v plynu v tepelné rovnováze

$$\frac{n_i}{n_n} \approx 2,4 \times 10^{21} \frac{T^{3/2}}{n_i} e^{-U_i/KT} \quad [1-1]$$

Zde n_i a n_n jsou hustoty (počet částic v m^3) ionizovaných a neutrálních atomů, T je teplota plynu v K, K je Boltzmannova konstanta a U_i je ionizační energie plynu – tj. počet joulů potřebný na odtržení vnějšího elektronu od atomu. V celé této knize používáme jednotky SI*. Pro obyčejný

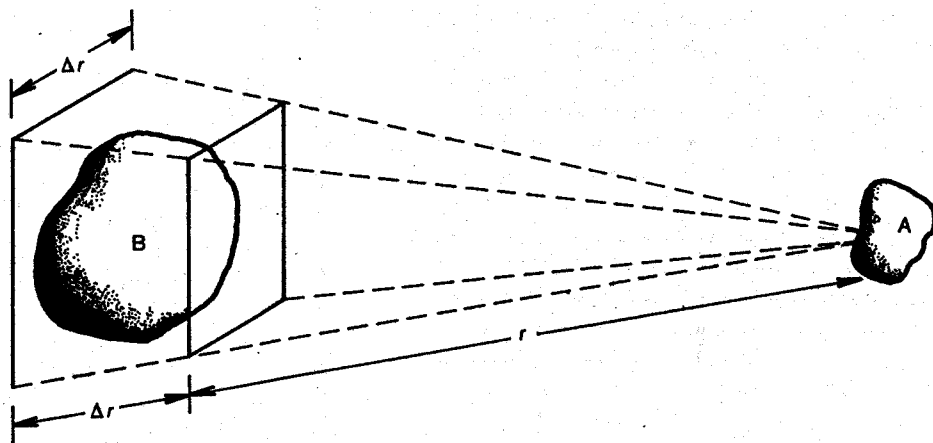
* V anglickém originálu knihy se používá jednotek cgs-elstat. Při překladu jsem musel respektovat čs. zákon 57/1975 Sb., který povoluje užívání pouze jednotek SI a se souhlasem Plenum Press – původního vydavatele – jsem přepočítal vzorce a vztahy do soustavy SI – pozn. překladatele.

vzduch při pokojové teplotě můžeme vzít $n_n \approx 3 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$ (viz úlohu 1-1), $T \approx 300 \text{ K}$ a $U_i = 14,5 \text{ eV}$ (pro dusík), kde $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$. Stupeň ionizace $n_i/(n_n + n_i) \approx n_i/n_n$ předpovězený rovnicí [1-1] je praprotřepatrný

$$\frac{n_i}{n_n} \approx 10^{-122}$$

Zvyšujeme-li teplotu, stupeň ionizace zůstává nízký, dokud se U_i nestane pouze nevelkým násobkem KT . Potom n_i/n_n příkře stoupá a plyn je v plazmatickém stavu. Dalším vzrůstem teploty se n_n stává menším než n_i , a plazma se konečně stává plně ionizovaným. Proto plazma existuje v kosmických tělesech s teplotami miliónů stupňů, ale nikoliv na Zemi. Tam, kde je plazma – alespoň plazma takového typu, o němž hovoříme – nemohl by život snadno existovat. Přirozený výskyt plazmatu při vysokých teplotách je důvodem označení „čtvrté skupenství hmoty“.

I když nemáme v úmyslu zdůrazňovat Sahovu rovnici, měli bychom podrobněji ukázat její fyzikální význam. Tepelná energie plynu je nerovnoměrně rozdělena atomům; atom je ionizován, podstoupí-li náhodně srážku s energií dostačující k tomu, aby byl odtržen elektron. V chladném plynu k takovým srážkám dochází zřídka, poněvadž atom musí být v sérii „příznivých“ srážek urychlen na daleko vyšší energii, než je střední energie. Exponenciální faktor v rov. [1-1] vyjadřuje skutečnost, že počet rychlých atomů exponenciálně ubývá s U_i/KT . Je-li jednou atom ionizován, zůstává nabitým, dokud se nesetká s elektronem; pak s ním velmi pravděpodobně rekombinuje a stává se opět neutrálním. Rekombinační rychlost zřejmě závisí na hustotě elektronů, kterou můžeme vzít jako rovnou n_i . Rovno-



OBR. 1-1 Ilustrace dálkového působení elektrostatické síly v plazmatu.

vážná hustota iontů by tedy měla ubývat s n_i ; a to je důvod pro faktor n_i^{-1} na pravé straně rov. [1-1]. Plazma v mezihvězdném prostředí vděčí za svou existenci nízké hodnotě n_i (asi $1/\text{cm}^3$), tedy nízké rekombinační rychlosti.

DEFINICE PLAZMATU 1.2

Plazmatem ovšem nemůže být nazýván jakýkoliv ionizovaný plyn; každý plyn je vždycky v nějakém malém stupni ionizován. Užitečná definice je takováto:

Plazma je kvazineutrální plyn nabitých a neutrálních částic, který vykazuje kolektivní chování.

Musíme nyní definovat pojmy „kvazineutrální“ a „kolektivní chování“. Co rozumíme kvazineutralitou, vyjasníme v odd. 1.4, „kolektivním chováním“ je míněno toto:

Uvažujme síly působící na molekulu např. obyčejného vzduchu. Poněvadž molekula je elektricky neutrální, nepůsobí na ni žádná elektromagnetická síla a gravitační síla je zanedbatelná. Taková molekula se pohybuje nerušeně, dokud se nesrazí s jinou molekulou a tyto srážky rozhodují o pohybu částic. Vystavíme-li neutrální plyn působení makroskopické síly, jako jsou zvukové vlny z reproduktoru, je toto působení jednotlivým atomům zprostředkováno ve srážkách. V plazmatu, v němž jsou nabitě částice, je situace zcela odlišná. Při svém pohybu mohou tyto nabitě částice vytvářet lokální koncentrace pozitivního nebo negativního náboje, které vedou ke vzniku elektrických polí. Tato pole ovlivňují pohyb jiných nabitých částic na vzdáleném místě.

Jaké je vzájemné působení dvou slabě nabitých oblastí plazmatu ve vzdálenosti r od sebe (obr. 1-1)? Coulombova síla mezi A a B se zmenšuje jako $1/r^2$. Pro daný prostorový úhel (to jest $\Delta r/r = \text{konstanta}$) však objem plazmatu v B, který může ovlivnit A, vzrůstá s r^3 . Elementy plazmatu tudíž na sebe navzájem působí silami i na velké vzdálenosti. Touto coulombovskou silou dalekého dosahu získává plazma bohatý repertoár možných pohybů a jí je obohacena oblast studia známá jako fyzika plazmatu. Nejzajímavější výsledky se vskutku týkají tak zvaného „bezsrážkového“ plazmatu, v němž dálkově působící elektromagnetické síly jsou mnohem větší než síly zprostředkované obyčejnými lokálními srážkami, takže srážky mohou být úplně zanedbány. „Kolektivním chováním“ rozumíme pohyby, které nezávisí pouze na lokálních podmínkách, ale rovněž na stavu plazmatu ve vzdálených oblastech.

Označení „plazma“ se zdá být nevhodné. Toto slovo pochází z řečtiny πλάσμα, -ατος, το , což znamená něco uzpůsobeného, vymyšleného. Plazma právě pro své kolektivní chování nemá sklon přizpůsobovat se vnějším vlivům; spíše se častěji chová, jako kdyby mělo svou vlastní hlavu.

1.3 POJEM TEPLOTY

Dříve než půjdeme dále, bude dobře přehlédnout a rozšířit naše fyzikální představy o „teplotě“. V plynu v tepelné rovnováze se vyskytují částice všech rychlostí a nejpravděpodobnější rozdělení těchto rychlostí je známo jako Maxwellovo rozdělení. Pro jednoduchost uvažujme plyn, v němž se částice mohou pohybovat jenom v jednom směru. (To není tak úplně pošetilé; například silné magnetické pole může přinutit elektrony, aby se pohybovaly pouze podél siločar.) Jednorozměrné Maxwellovo rozdělení je

$$f(u) = A \exp(-\frac{1}{2}mu^2/KT), \quad [1-2]$$

kde f je počet částic v m^3 s rychlostí mezi u a $u + du$, $\frac{1}{2}mu^2$ je kinetická energie a K je Boltzmannova konstanta

$$K = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K.}$$

Hustotu n , neboli počet částic v m^3 , dostaneme (viz obr. 1-2)

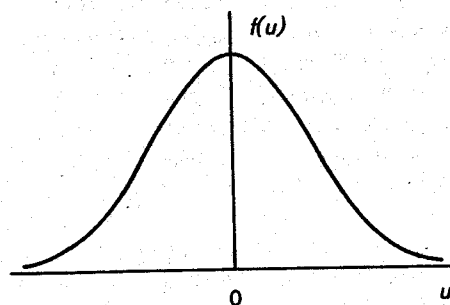
$$n = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) du. \quad [1-3]$$

Mezi konstantou A a hustotou n je vztah (viz úlohu 1-2)

$$A = n \left(\frac{m}{2\pi KT} \right)^{1/2}. \quad [1-4]$$

Šířka rozdělení je charakterizována konstantou T , kterou nazýváme teplota. Abychom pochopili přesný význam T , vypočítáme střední kinetickou energii částic s rozdělením [1-2]

$$E_{st} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}mu^2 f(u) du}{\int_{-\infty}^{\infty} f(u) du}. \quad [1-5]$$



OBR. 1-2 Maxwellovo rychlostní rozdělení

Definujme

$$v_i = (2KT/m)^{1/2} \quad \text{a} \quad y = u/v_i, \quad [1-6]$$

pak rov. [1-2] můžeme psát

$$f(u) = A \exp(-u^2/v_i^2)$$

a rov. [1-5] zapišeme

$$E_{st} = \frac{\frac{1}{2}mAv_i^3 \int_{-\infty}^{\infty} [\exp(-y^2)] y^2 dy}{Av_i \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-y^2) dy}.$$

Integrál v čitateli lze integrovat per partes

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (y[\exp(-y^2)]) dy &= \left[-\frac{1}{2} \exp(-y^2) y \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{1}{2} \exp(-y^2) dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-y^2) dy. \end{aligned}$$

Vykrácením integrálů dostáváme

$$E_{st} = \frac{\frac{1}{2}mAv_i^3 \cdot \frac{1}{2}}{Av_i} = \frac{1}{4}mv_i^2 = \frac{1}{2}KT. \quad [1-7]$$

Střední kinetická energie je tedy $\frac{1}{2}KT$.

Tento výsledek lze snadno rozšířit na třírozměrný pohyb. Maxwellovo rozdělení potom je

$$f(u, v, w) = A_3 \exp[-\frac{1}{2}m(u^2 + v^2 + w^2)/KT], \quad [1-8]$$

kde

$$A_3 = n \left(\frac{m}{2\pi KT} \right)^{3/2}. \quad [1-9]$$

Střední kinetická energie je

$$E_{st} = \frac{\iiint_{-\infty}^{\infty} A_3 \cdot \frac{1}{2}m(u^2 + v^2 + w^2) \exp[-\frac{1}{2}m(u^2 + v^2 + w^2)/KT] du dv dw}{\iiint_{-\infty}^{\infty} A_3 \exp[-\frac{1}{2}m(u^2 + v^2 + w^2)/KT] du dv dw}.$$

Všimněme si, že tento výraz je symetrický v u , v , a w , neboť Maxwellovo rozdělení je izotropní. Každý ze tří členů v čitateli je tudíž stejný jako ostatní. Potřebujeme pouze vyčíslit první člen a budeme jej násobit třemi

$$E_{st} = \frac{3A_3 \int \frac{1}{2}mu^2 \exp(-\frac{1}{2}mu^2/KT) du \iint \exp[-\frac{1}{2}m(v^2 + w^2)/KT] dv dw}{A_3 \int \exp(-\frac{1}{2}mu^2/KT) du \iint \exp[-\frac{1}{2}m(v^2 + w^2)/KT] dv dw}.$$

Užijeme-li předchozí výsledek, dostáváme

$$E_{st} = \frac{3}{2}KT. \quad [1-10]$$

Obecným výsledkem je, že E_{st} se rovná $\frac{1}{2}KT$ na každý stupeň volnosti.

Poněvadž je mezi T a E_{st} tak úzký vztah, bývá ve fyzice plazmatu zvykem udávat teplotu v jednotkách energie. Abychom se vyhnuli nejistotě o počtu dimenzí, neuzívá se k udání teploty E_{st} , nýbrž energie odpovídající KT . Pro $KT = 1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$ dostáváme

$$T = \frac{1,6 \times 10^{-19}}{1,38 \times 10^{-23}} = 11\,600.$$

Převodní faktor tedy je

$$1 \text{ eV} = 11\,600 \text{ K}. \quad [1-11]$$

Údajem 2-eV plazma rozumíme, že $KT = 2 \text{ eV}$, neboli v třírozměrném případě $E_{st} = 3 \text{ eV}$.

Je zajímavé, že plazma může mít několik teplot současně. Často se stává, že ionty a elektrony mají odlišná Maxwellova rozdělení s rozdílnými teplotami T_i a T_e . K tomu může dojít proto, že frekvence srážek iontů mezi sebou a elektronů mezi sebou je větší než frekvence srážek mezi ionty a elektrony. Každý druh částic pak může být ve své vlastní tepelné rovnováze, ale plazma se nemusí udržet dostatečně dlouhou dobu nezbytnou k tomu, aby se obě teploty vyrovnaly. Je-li přítomno magnetické pole B^* , může dokonce i jediný druh částic, řekněme iontů, mít dvě teploty, poněvadž síly působící na ion ve směru B jsou jiné než ty, které působí kolmo na B (vlivem Lorentzovy síly). Každá ze složek rychlosti, kolmo na B a rovnoběžně s B , může pak náležet různým Maxwellovým rozdělením s teplotami T_{\perp} a T_{\parallel} .

Dříve než opustíme náš přehled představ o teplotě, měli bychom uvést na správnou míru rozšířenou představu, že vysoká teplota nutně znamená spoustu tepla. Lidé obvykle žasnou, když se dovědí, že elektronová teplota uvnitř zářivkových trubíc je okolo 20 000 K. „Páni, vždyť to není cítit, takové horko!“ Ovšem že není, musíme vzít v úvahu také tepelnou kapacitu. Hustota elektronů uvnitř zářivek je daleko menší než hustota plynu při atmosférickém tlaku a úhrnné množství tepla, přeneseného na stěnu elektrony narážejícími na ni tepelnými rychlostmi, není tak velké. Každý má zkušenost s cigaretovým popelem, který se mu neškodně utrousil na ruku.

* V jednotkách cgs se rozměr (a ve vakuu i hodnota) intenzity magnetického pole H a magnetické indukce B shodují, lze tedy snadno nahradit jedno druhým. V soustavě SI jsou H a B rozdílné veličiny lišící se rozměrem (viz dodatek I). V celé této knize (až na oddíl 3.2.1–3.2.3, pojednávající o Maxwellových rovnicích obecně) se vektor H nevyskytuje. Nezpůsobíme tedy zmatení pojmů, jestliže pro vektorové pole magnetické indukce B v textu použijeme ve shodě s originálem stručné označení: *magnetické pole* nebo prostě *pole B* či *B pole*. — pozn. překl.

Ačkoliv je jeho teplota dost vysoká na to, aby způsobila popáleniny, nestačí na to celkové množství obsaženého tepla. Mnohé plazmatické laboratoře dosahují teplot řádově 1 000 000 K (100 eV), ale při hustotách $10^{18} - 10^{19}$ na m^3 není zahřívání stěn nikterak vážné.

1-1. Vypočítejte hustotu (v jednotkách m^{-3}) ideálního plynu za následujících podmínek:

(a) Při 0°C a tlaku 760 Torr (1 Torr = 1 mm Hg = 133,322 Pa). Tato hodnota se nazývá Loschmidtovo číslo.

(b) Ve vakuu 10^{-3} Torr (= 0,133 Pa) při pokojové teplotě 20°C . Pro každého experimentálního pracovníka je užitečné znát toto číslo z paměti. (10^{-3} Torr = 1 micron*)

1-2. Odvoďte konstantu A pro normalizované jednorozměrné Maxwellovo rozdělení

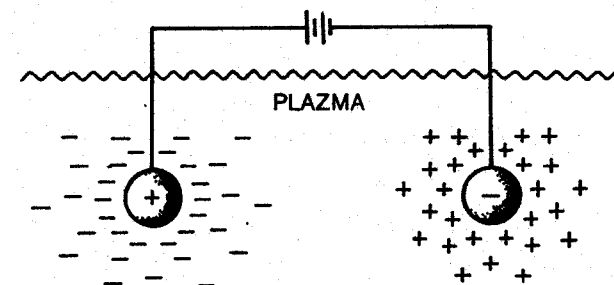
$$f(u) = A \exp(-mu^2/2KT)$$

tak, aby

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u) du = 1.$$

DEBYEOVO STÍNĚNÍ 1.4

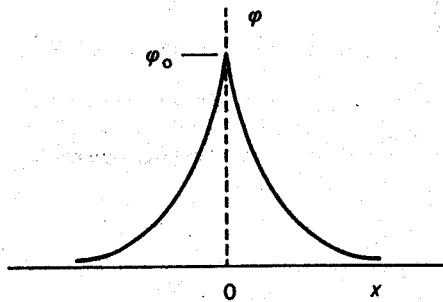
Základním rysem chování plazmatu je jeho schopnost odstínit elektrické potenciály, které jsou do něho vloženy. Představme si, že bychom chtěli vložení dvou koulí spojených s baterií vytvořit v plazmatu elektrické pole (obr. 1-3). Koule by přitahovaly částice s opačným nábojem a takřka okamžitě by oblak iontů obklopil zápornou kouli a oblak elektronů kouli kladnou. Předpokládejme, že rekombinaci na povrchu by bránila vrstva dielektrika nebo že by baterie byla natolik silná, že by potenciál vzdor rekombinaci udržela. Kdyby plazma bylo studené bez tepelných pohybů,



Debyeovo stínění. OBR. 1-3

* Toto označení není v české literatuře běžné; jedná se o hydrostatický tlak sloupce rtuti o výšce 1 μ — pozn. překl.

bylo by v oblaku právě tolik nábojů jako na kouli; odstínění by bylo dokonalé a vně oblaků by v plazmatu elektrické pole nebylo. Je-li však teplota konečná, mají ty částice, jež jsou na okraji oblaku, kde je elektrické pole slabé, dostatek tepelné energie k tomu, aby unikly z elektrostatické potenciálové jámy. Jako „okraj“ oblaku se pak jeví poloměr, na němž se potenciální energie přibližně rovná tepelné energii KT částic, a stínění není úplné. Potenciály velikosti KT/e mohou pronikat do plazmatu a způsobují, že v něm existuje konečné elektrické pole.



OBR. 1-4 Rozložení potenciálu v blízkosti mřížky v plazmatu

Vypočítejme přibližnou tloušťku takového oblaku nábojů. Představme si, že potenciál ϕ je v rovině $x = 0$ udržován na hodnotě ϕ_0 dokonale transparentní mřížkou (obr. 1-4). Chceme vypočítat $\phi(x)$. Pro jednoduchost předpokládáme, že poměr hmotností iontů a elektronů M/m je nekonečný, takže ionty se nepohybují, ale vytvářejí homogenní pozadí kladného náboje. Abychom byli preciznější, můžeme říci, že M/m je tak velké, že setrvačnost nedovoluje iontům, aby se znatelně pohnuly v časovém rozpětí experimentu. Poissonova rovnice zapsaná v jedné dimenzi je

$$\nabla^2 \phi = -\frac{e(n_1 - n_e)}{\epsilon_0} \quad (Z = 1). \quad [1-12]$$

Je-li hustota v dostatečné vzdálenosti n_∞ , dostáváme

$$n_1 = n_\infty.$$

V místě s potenciální energií $q\phi$ je elektronová rozdělovací funkce

$$f(u) = A \exp \left[-\left(\frac{1}{2}mu^2 + q\phi\right)/KT_e \right].$$

Nestálo by za to dokazovat to na tomto místě. Z názoru je zřejmé, co tato rovnice říká: na místě s velkou potenciální energií je méně částic, neboť ne všechny částice mají dostatečnou energii, aby se tam dostaly. Integrujeme-li $f(u)$ přes všechna u , položíme-li $q = -e$ a uvědomíme-li si, že $n_e(\phi \rightarrow 0) = n_\infty$, dostaneme

$$n_e = n_\infty \exp(e\phi/KT_e).$$

Tato rovnice bude s lepším fyzikálním porozuměním odvozena v oddíle 3.5. Dosadíme-li za n_1 a n_e do rov. [1-12], dostáváme

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = \frac{e}{\epsilon_0} n_\infty \left\{ \exp\left(\frac{e\phi}{KT_e}\right) - 1 \right\}.$$

V oblasti, kde $|e\phi/KT_e| \ll 1$, můžeme exponenciálu rozvinout do Taylorovy řady

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = \frac{e}{\epsilon_0} n_\infty \left[\frac{e\phi}{KT_e} + \frac{1}{2} \left(\frac{e\phi}{KT_e}\right)^2 + \dots \right]. \quad [1-13]$$

Pro oblast v blízkosti mřížky, kde $|e\phi/KT_e|$ může být velké, není žádné zjednodušení možné. Naštěstí tato oblast mnoho nepřispívá k tloušťce oblaku (nazývaného stěnová vrstva), protože zde potenciál velmi rychle padá. Ponecháme-li pouze lineární člen v rov. [1-13], dostáváme

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = \frac{n_\infty e^2}{\epsilon_0 KT_e} \phi. \quad [1-14]$$

Definujme

$$\lambda_D \equiv \left(\frac{\epsilon_0 KT_e}{ne^2} \right)^{1/2} \quad [1-15]$$

kde n stojí na místě n_∞ , a řešení rov. [1-14] můžeme psát jako

$$\phi = \phi_0 \exp(-|x|/\lambda_D). \quad [1-16]$$

Veličina λ_D , nazývaná Debyeova délka, je mírou stínící vzdálenosti neboli tloušťky stěnové vrstvy.

Povšimněme si, že vzrůstá-li hustota nabitých částic, λ_D se zmenšuje, jak lze očekávat, neboť v každé vrstvičce plazmatu je více elektronů. Dále λ_D vzrůstá s rostoucím KT_e . Bez tepelného neklidu by se nábojový oblak zhroutil v nekonečně tenkou vrstvičku. V definici λ_D vystupuje elektronová teplota, protože stínění obecně způsobují elektrony, pohyblivější než ionty, a to tak, že při svém pohybu vytvářejí v jednom případě nadbytek záporného elektrického náboje, v opačném případě jeho snížení. Jenom ve zvláštních situacích tato představa neplatí (viz úlohu 1-5).

Užitečné tvary rov. [1-15] jsou

$$\lambda_D = 69(T/n)^{1/2} \text{ m}, \quad T \text{ v K},$$

$$\lambda_D = 7,4 \times 10^3 (KT/n)^{1/2} \text{ m}, \quad KT \text{ v eV}. \quad [1-17]$$

Nyní před námi stojí úkol definovat „kvazineutralitu“. Je-li rozměr systému L daleko větší než λ_D , pak ať kdykoliv vznikne lokální koncentrace náboje nebo je do systému zaveden vnější potenciál, jsou odstíněny ve vzdálenosti krátké ve srovnání s L a ponechají převážnou část plazmatu

bez velkých elektrických potenciálů či polí. Na stěně nebo na nějaké překážce vně stínící vrstvy je $\nabla^2\phi$ velmi malé, n_i se rovná n_e , a to zpravidla s větší přesností než na 6 desetinných míst. Jenom malá nerovnováha náboje stačí ke vzniku potenciálů řádu KT/e . Plazma je „kvazineutrální“; to znamená, sdostatek neutrální, abychom mohli položit $n_i \approx n_e \approx n$, kde n je společná hustota nazývaná *hustota plazmatu*, ale nikoliv tak neutrální, aby se všechny zajímavé elektromagnetické síly ztratily.

Ionizovaný plyn je tehdy plazmatem, jestliže hustota nábojů je natolik vysoká, že λ_D je mnohem menší než L .

Jev Debyeova stínění se rovněž objevuje – v pozměněné podobě – v systémech s jedním druhem částic, jako jsou elektronové svazky v klystronech a magnetronech nebo protonové toky v cyklotronech. V takových případech lokálním nahromaděním částic vznikne veliké neodstíněné elektrické pole, krom těch případů, kdy hustota je mimořádně malá (což je velmi časté). Z vnějšíku vložený potenciál – například na drátěnou sondu – je odstíněn odpovídající změnou hustoty v blízkosti elektrody. Systémy s jedním druhem částic či plazma, jež není neutrální, nejsou přesně vzato plazmatem, ale matematický aparát fyziky plazmatu se při studiu takových systémů dá použít.

1.5 PLAZMATICKÝ PARAMETR

Shora uvedený mechanismus Debyeova stínění platí jenom tehdy, je-li v nábojovém oblaku dostatek částic. Jsou-li v oblasti vrstvy jedna nebo dvě částice, nemůže samozřejmě pojem Debyeova stínění být statisticky platný. Z rov. [1-17] můžeme vypočítat počet částic v „Debyeově sféře“

$$N_D = n \cdot \frac{4}{3}\pi\lambda_D^3 = 1,38 \times 10^6 T^{3/2}/n^{1/2} \quad (T \text{ v K}). \quad [1-18]$$

Kromě podmínky $\lambda_D \ll L$ vyžaduje „kolektivní chování“ ještě

$$N_D \gg 1. \quad [1-19]$$

1.6 KRITÉRIA PRO PLAZMA

Uvedli jsme dvě podmínky, které musí ionizovaný plyn splňovat, abychom jej mohli nazvat plazmatem. Třetí podmínka má co činit se srážkami. Například slabě ionizovaný plyn proudící z tryskových motorů nemůžeme označit jako plazma, protože nabitě částice se s neutrálními atomy srážejí tak často, že jejich pohyb je převážně řízen obyčejnými hydrodynamickými silami a nikoliv silami elektromagnetickými. Je-li ω frekvence typických oscilací plazmatu a τ střední doba mezi srážkami s neutrálními atomy, pak musí být $\omega\tau > 1$, má-li se plyn chovat spíše jako plazma než jako neutrální plyn. Tři podmínky, jež plazma musí splňovat, tedy jsou

$$1. \lambda_D \ll L, \quad 2. N_D \gg 1, \quad 3. \omega\tau > 1.$$

1-3. Do log-log grafu vynesete na jednu osu n_e ($10^6 - 10^{23} \text{ m}^{-3}$) a na druhou KT_e ($0,01 - 10^5 \text{ eV}$) a vyznačíte čáry konstantního λ_D a N_D . Do tohoto grafu vynesete tyto body (n v m^{-3} , KT v eV):

1. Typický reaktor jaderné syntézy: $n = 10^{21}$, $KT = 10\,000$.
2. Typické experimenty jaderné syntézy: $n = 10^{19}$, $KT = 100$ (torus); $n = 10^{23}$, $KT = 1000$ (pinč).
3. Typická ionosféra: $n = 10^{11}$, $KT = 0,05$.
4. Typický doutnavý výboj: $n = 10^{15}$, $KT = 2$.
5. Typický plamen: $n = 10^{14}$, $KT = 0,1$.
6. Typické Cs plazma: $n = 10^{17}$, $KT = 0,2$.
7. Meziplanetární prostor: $n = 10^6$, $KT = 0,01$.

Přesvědčte se, že se v těchto případech jedná o plazma.

1-4. Vypočítejte tlak v atmosférách* a v Pa**, kterým působí termonukleární plazma na nádobu. Předpokládejte $KT_e = KT_i = 20 \text{ keV}$, $n = 10^{21} \text{ m}^{-3}$ a $p = nKT$, kde $T = T_i + T_e$.

1-5. V naprosto ustáleném případě budou ionty i elektrony rozloženy podle Boltzmannova vztahu

$$n_j = n_0 \exp(-q_j\phi/KT_j).$$

Ukažte pro nekonečnou transparentní mřížku nabitou na potenciál ϕ , že stínící vzdálenost je přibližně dána vztahem

$$\lambda_D^{-2} = \frac{ne^2}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{KT_e} + \frac{1}{KT_i} \right).$$

Ukažte, že λ_D je určeno teplotou chladnějšího druhu částic.

1-6. Jiné odvození λ_D nám přiblíží význam této veličiny z jiné stránky. Uvažujme dvě nekonečné rovnoběžné desky umístěné v $x = \pm d$, držené na potenciálu $\phi = 0$. Prostor mezi nimi je rovnoměrně vyplněn plynem s hustotou n částic o náboji q .

(a) Pomocí Poissonovy rovnice ukažte, že rozložení potenciálu mezi deskami je

$$\phi = \frac{nq}{2\epsilon_0} (d^2 - x^2). \quad \checkmark$$

(b) Ukažte, že pro $d > \lambda_D$ je energie potřebná pro přenesení částice z desky do středové roviny větší než střední kinetická energie částic. $E_{st} = \frac{1}{2} kT$ pro $1D$.

1-7. Vypočítejte λ_D a N_D pro následující případy:

- (a) Doutnavý výboj s $n = 10^{16} \text{ m}^{-3}$, $KT_e = 2 \text{ eV}$.
- (b) Zemská ionosféra s $n = 10^{12} \text{ m}^{-3}$, $KT_e = 0,1 \text{ eV}$.
- (c) 9-pinč s $n = 10^{23} \text{ m}^{-3}$, $T_e = 800 \text{ eV}$.

APLIKACE FYZIKY PLAZMATU 1.7

Plazma můžeme charakterizovat dvěma parametry. Ty se pro různé typy plazmatu mění v mimořádně širokém rozsahu: velikost n se mění přes 18 řádů od 10^6 do 10^{24} m^{-3} a KT se může měnit od 0,1 do 10^6 eV . O ně-

* kp/cm^2 – pozn. překl.

** v orig. textu je tuna/stopa² – pozn. překl.

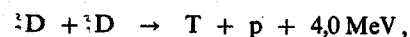
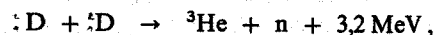
kterých případech promluvíme velmi krátce níže. Tento úžasný rozsah hustoty plně oceníme, uvědomíme-li si, že hustota vzduchu a vody se liší jenom o faktor 10^3 , zatímco voda a hvězdy bílí trpaslíci jsou odděleny faktorem pouhých 10^5 . Dokonce neutronové hvězdy jsou toliko 10^{15} krát hustší než voda. Nicméně všechny případy plynného plazmatu v celém rozsahu hustot 10^{18} lze popsat touž soustavou rovnic, neboť se užívá pouze klasických (nikoliv kvantových) zákonů fyziky.

1.7.1 Výboj v plynech (elektronika plynů)

První s plazmatem pracovali Langmuir, Tonks a jejich spolupracovníci ve dvacátých letech tohoto století. Tento výzkum byl podnícen potřebou vyvinout trubice, které by při nízkém tlaku mohly vést velké proudy, a musely by tedy být naplněny ionizovaným plynem. Zkoumali slabě ionizované doutnavé výboje a jejich kladné sloupce s typickými hodnotami $KT_e \approx 2 \text{ eV}$ a $10^{14} < n < 10^{18} \text{ m}^{-3}$. Zde byl objeven jev stínění; stěnová vrstva obklopující elektrodu je přímo vidět jako tmavá vrstvička. S výbojem v plynech se dnes setkáváme ve rtuťových usměrňovačích, vodíkových thyratronech, ignitronech*, jiskřičkách, svařovacích obloucích, neonových trubicích a zářivkách a u blesku.

1.7.2 Řízená termojaderná syntéza

Počátky moderní fyziky plazmatu klademe do roku 1952, kdy se objevil návrh vytvořit reaktor, v němž by byla ovládnuta termojaderná reakce vodíkové bomby. Základní reakce, v nichž vystupují deuteriové (D) a tritiové (T) atomy, jsou tyto



Účinné průřezy těchto reakcí syntézy jsou dostatečně velké teprve pro srážkové energie nad 10 keV. Urychlený svazek deuterionů, ostřelující terčik, zůstane bez účinku, protože většina deuterionů ztratí svou energii v rozptylových srážkách dříve, než by mohly vyvolat reakci syntézy. Je nezbytné vytvořit plazma, v němž by tepelné energie byly v oblasti 10 keV. Problém ohřátí a udržení takového plazmatu vedl od roku 1952 k rychlému rozvoji této vědy, fyziky plazmatu. Tento problém zůstává stále nevyřešen a na něj je zaměřena větší část aktivního výzkumu ve fyzice plazmatu.

* jednofázový usměrňovač s řídicí mřížkou – pozn. překl.

Fyzika kosmického prostoru 1.7.3

Jinou důležitou aplikací fyziky plazmatu je studium kosmického prostoru v okolí Země. Nepřetržitý proud nabitých částic, nazývaný sluneční vítr, naráží na magnetosféru Země, která nás před tímto zářením stíní a je jim zároveň deformována. Typické parametry slunečního větru jsou $n = 5 \times 10^6 \text{ m}^{-3}$, $KT_i = 10 \text{ eV}$, $KT_e = 50 \text{ eV}$, $B = 5 \times 10^{-9} \text{ T}$ a rychlost proudění 300 km/s. Ionosféru, rozprostírající se od výšky 50 km až do 10 zemských poloměrů, tvoří slabě ionizované plazma, jehož hustota se mění s výškou a dosahuje hodnoty $n = 10^{12} \text{ m}^{-3}$. Teplota je pouze 10^{-1} eV . Van Allenovy pásy jsou vytvářeny nabitými částicemi zachycenými zemským magnetickým polem. Zde je $n \leq 10^9 \text{ m}^{-3}$, $KT_e \leq 1 \text{ keV}$, $KT_i \approx 1 \text{ eV}$ a $B \approx 500 \times 10^{-9} \text{ T}$. Krom toho je zde ještě horká složka s $n = 10^3 \text{ m}^{-3}$ a $KT_e = 40 \text{ keV}$.

Moderní astrofyzika 1.7.4

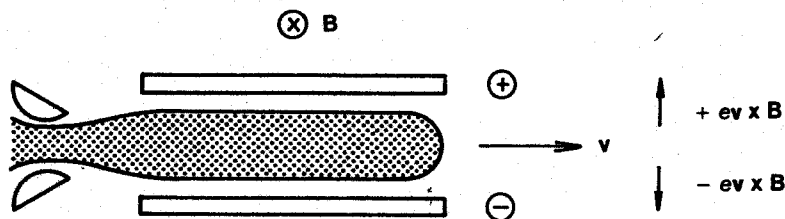
Nitra a atmosféry hvězd jsou tak horké, že jsou v plazmatickém stavu. Teplota ve středu Slunce se například odhaduje na 2 keV; při této teplotě probíhají termojaderné reakce, jejichž důsledkem je sluneční záření. Sluneční korona je prořídilé plazma s teplotami do 200 eV. Mezihvězdné prostředí obsahuje ionizovaný vodík s $n \approx 10^6 \text{ m}^{-3}$. Urychlování kosmického záření se vysvětluje pomocí různých plazmatických teorií. Ačkoliv hvězdy v galaxii nejsou nabity, chovají se jako částice v plazmatu, a kinetické teorie plazmatu se užívá k předpovědím vývoje galaxií. Radioastronomie objevila četné zdroje záření, jež je s největší pravděpodobností vyzařováno plazmatem. Krabí mlhovina je bohatým zdrojem plazmatických jevů, neboť se o ní ví, že se v ní udržuje magnetické pole. To platí i o vizuálním pulsaru. Současná teorie pulsarů je popisuje jako rychle rotující neutronové hvězdy s plazmatem emitujícím z povrchu synchrotronní záření.

MHD generátor a iontový pohon 1.7.5

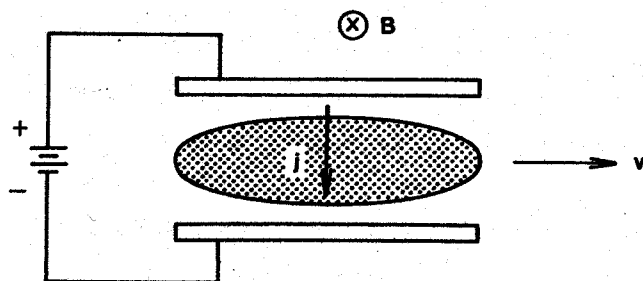
Vrátíme-li se zpět na Zem, dostaneme se ke dvěma praktickým aplikacím fyziky plazmatu. Magnetohydrodynamický (MHD) generátor využívá hustého plazmatu tryskajícího napříč magnetickým polem k výrobě elektřiny (obr. 1-5). Lorentzova síla $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, kde \mathbf{v} je rychlost proudění, způsobuje, že ionty jsou hnány vzhůru a elektrony dolů, a nabíjejí tak obě elektrody na různé potenciály. Z elektrod může pak být odebírán elektrický proud, přičemž jsme se vyhnuli tepelnému cyklu, který má malou účinnost.

Týž princip v obráceném smyslu je užít při vývoji iontových motorů pro dlouhé meziplanetární lety. Na elektrody (obr. 1-6) je přivedeno napětí, jež vyvolá v plazmatu elektrický proud. Síla $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ vystřeluje plazma z ra-

kety a výsledná reakční síla rakety urychluje. Vypuzované plazma musí být stále neutrální, jinak by se kosmická loď nabíjela na vysoký potenciál.



OBR. 1-5 Průběh MHD generátoru.



OBR. 1-6 Průběh iontového motoru pro pohon kosmických lodí.

1.7.6 Plazma v pevných látkách

Volné elektrony a díry v polovodičích vytvářejí plazma vykazující též druh oscilací a nestabilit jako plynné plazma. Pro studium těchto jevů je obzvláště užitečné plazma vstříknuté do InSb. Krystalická mříž způsobuje, že efektivní srážková frekvence je daleko menší, než bychom očekávali v pevných látkách, s $n \approx 10^{29} \text{ m}^{-3}$. A co více, díry v polovodičích mohou mít velmi malou efektivní hmotnost — až $0,01m_e$ — takže mají vysokou cyklotronovou frekvenci i při nevelkých magnetických polích. Kdybychom spočítali N_D pro plazma v pevných látkách, bylo by v důsledku nízké teploty a velké hustoty menší než jedna. Kvantově mechanické efekty (princip neurčitosti) však dávají plazmatu dostatečně vysokou efektivní teplotu, takže N_D nabývá úctyhodně vysoké hodnoty. V nedávné době byly nalezeny některé tekutiny, jako je roztok sodíku ve čpavku, jež se rovněž chovají jako plazma.

1.7.7 Plynné lasery

K „čerpání“ plynných laserů — to jest k dosažení inverze obsazení hladin, jež vede k zesílení světla — se nejběžněji užívá výboje v plynech. Může to být nízkotlaký doutnavý výboj pro kontinuální laser nebo vysokotlaký

jiskrový výboj pro impulsní laser. He-Ne lasery se běžně užívají pro kalibraci a zeměměřičské účely. Výkonný CO_2 laser se objevuje jako obráběcí nástroj a rovněž se využívá ve vojenské technice. HCN laser umožňuje studium v doposud nepřístupné daleké infračervené oblasti. Činnost všech těchto laserů by nebyla možná bez existence plazmatu.

Kapitola druhá

POHYBY JEDNOTLIVÝCH ČÁSTIC

2.1 ÚVOD

Analyzovat plazma je obzvláště obtížné proto, že jeho hustoty spadají do „střední“ oblasti. Tekutiny, jako voda, jsou tak husté, že pohyby jednotlivých molekul nemusí být brány v úvahu. Převládají srážky a dostačují jednoduché rovnice obyčejné dynamiky tekutin. V opačném krajním případě, v přístrojích pracujících s velmi malou hustotou, jako je synchrotron, je potřeba počítat jenom s trajektoriemi jednotlivých částic; kolektivní efekty často nejsou důležité. Plazma se někdy chová jako tekutina a někdy jako soubor jednotlivých částic. Máme-li se naučit, jak s touto schizofrenní osobností zacházet, musíme nejprve porozumět tomu, jak se jednotlivé částice chovají v elektrickém a magnetickém poli. Tato kapitola se od následujících liší v tom, že *E a B pole považujeme za předepsaná* a neovlivněná nabitými částicemi.

2.2 HOMOGENNÍ E A B POLE

2.2.1 $E = 0$

V tomto případě nabitá částice krouží; tento jednoduchý pohyb nazýváme *cyklotronní rotace**. Pohybová rovnice je

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad [2-1]$$

* Lze se rovněž setkat s termínem *cyklotronní gyrace* (původně z řeckého $\gamma\upsilon\omicron\sigma\varsigma$ = kruh, zákrut, závit), *Larmorova rotace* nebo *Larmorova gyrace* – pozn. překl.

Položíme-li $\hat{\mathbf{z}}^*$ do směru \mathbf{B} ($\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$), dostáváme

$$\begin{aligned} m\dot{v}_x &= qBv_y, & m\dot{v}_y &= -qBv_x, & m\dot{v}_z &= 0, \\ \ddot{v}_x &= \frac{qB}{m}\dot{v}_y = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_x, & \ddot{v}_y &= -\frac{qB}{m}\dot{v}_x = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_y. \end{aligned} \quad [2-2]$$

To popisuje jednoduchý harmonický oscilátor s *cyklotronní frekvencí***, kterou definujeme

$$\omega_c \equiv \frac{|q|B}{m} \quad [2-3]$$

Podle konvence, kterou jsme zvolili, je ω_c vždycky nezáporné. Řešení rov. [2-2] je potom

$$v_{x,y} = v_{\perp} \exp(\pm i\omega_c t + \delta_{x,y}),$$

kde \pm označuje znaménko q . Fázi δ můžeme zvolit tak, že

$$v_x = v_{\perp} e^{i\omega_c t} = \dot{x}, \quad [2-4a]$$

kde v_{\perp} je kladná konstanta znamenající rychlost v rovině kolmé na \mathbf{B} . Potom

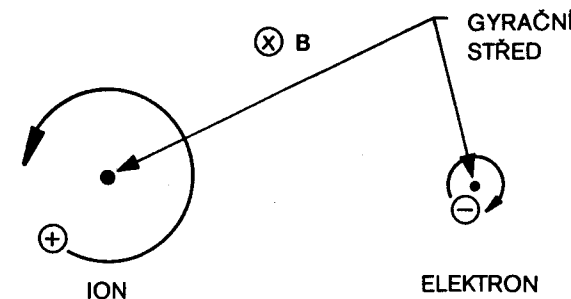
$$v_y = \frac{m}{qB}\dot{v}_x = \pm \frac{1}{\omega_c}\dot{v}_x = \pm i v_{\perp} e^{i\omega_c t} = \dot{y}. \quad [2-4b]$$

Integrujeme-li ještě jednou, dostáváme

$$x - x_0 = -i \frac{v_{\perp}}{\omega_c} e^{i\omega_c t}, \quad y - y_0 = \pm \frac{v_{\perp}}{\omega_c} e^{i\omega_c t}. \quad [2-5]$$

Definujeme *Larmorův poloměr*

$$r_L \equiv \frac{v_{\perp}}{\omega_c} = \frac{mv_{\perp}}{|q|B} \quad [2-6]$$



Larmorovy orbity v magnetickém poli. OBR. 2-1

* $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$ značí jednotkové vektory ve směru souřadnicových os – pozn. překl.

** též *gyrofrekvence* nebo *Larmorova frekvence* – pozn. překl.

Vezměme reálnou část rov. [2-5] a dostáváme

$$x - x_0 = r_L \sin \omega_c t, \quad y - y_0 = \pm r_L \cos \omega_c t. \quad [2-7]$$

To popisuje *orbit** okolo *gyračního středu*** (x_0, y_0) , který je pevný (obr. 2-1). Směr kroužení je vždycky takový, že magnetické pole vytvářené nabitou částicí má opačný směr než vnější vložené pole. Částice plazmatu mají tedy sklon ke *zmenšování* magnetického pole, plazma je *diamagnetické*. Vedle tohoto pohybu má částice ještě libovolnou rychlost v_z rovnoběžnou s \mathbf{B} . Tato složka rychlosti není polem \mathbf{B} ovlivňována. Trajektorii nabitě částice v prostoru je obvykle šroubovice.

2.2.2 Konečné \mathbf{E} pole

Připustíme-li nyní přítomnost elektrického pole, bude výsledným pohybem součet dvou pohybů: obyčejná kruhová Larmorova rotace plus unášení (drift) gyračního středu. Osu x můžeme zvolit tak, aby ležela podél \mathbf{E} , takže $E_y = 0$. Stejně jako předtím z -ová složka rychlosti nemá žádný vztah k příčným složkám a můžeme se jí zabývat odděleně. Pohybová rovnice je nyní

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad [2-8]$$

její z -ová složka je

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{q}{m} E_z$$

neboli

$$v_z = \frac{qE_z}{m} t + v_{z0}. \quad [2-9]$$

To je prostě zrychlování ve směru \mathbf{B} . Příčné složky rov. [2-8] jsou

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= \frac{q}{m} E_x \pm \omega_c v_y, \\ \frac{dv_y}{dt} &= 0 \mp \omega_c v_x. \end{aligned} \quad [2-10]$$

* kruhová dráha, původně dráha planet; [z latinského orbita = stopa (zanechaná jedoucím kolem)]. Tohoto výrazu se v češtině užívá při popisu elektronového obalu v atomu. My jím budeme označovat kruhovou (cyklotronně rotační) složku dráhy částice – pozn. překl.

** v naší terminologii by bylo důslednější anglické „guiding center“ překládat „střed cyklotronní rotace“, což je také termín v češtině užívaný. Protože ale kniha tento pojem hojně používá, budeme pracovat s jednodušším označením „gyrační střed“ [podobně jako J. Kleczek v knize „Plazma ve vesmíru a laboratoři“ (Academia 1968)], i když jsem si vědom, že slovo gyrační v české terminologii upomíná spíše na jevy spojené s rotační setrvačností – pozn. překl.

Po derivování dostáváme (pro konstantní \mathbf{E})

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= -\omega_c^2 v_x, \\ \dot{v}_y &= \mp \omega_c \left(\frac{q}{m} E_x \pm \omega_c v_y \right) = -\omega_c^2 \left(v_y + \frac{E_x}{B} \right). \end{aligned} \quad [2-11]$$

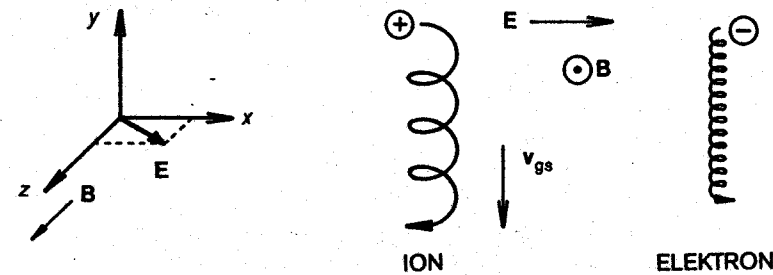
To můžeme napsat jako

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(v_y + \frac{E_x}{B} \right) = -\omega_c^2 \left(v_y + \frac{E_x}{B} \right),$$

takže rov. [2-11] je převedena na předchozí případ, nahradíme-li v_y výrazem $v_y + (E_x/B)$. Rov. [2-4] je tedy nahrazena výrazy

$$\begin{aligned} v_x &= v_{\perp} e^{i\omega_c t}, \\ v_y &= \pm i v_{\perp} e^{i\omega_c t} - \frac{E_x}{B}. \end{aligned} \quad [2-12]$$

Larmorův pohyb zůstává týž jako před tím, ale přes něj se překládá drift* \mathbf{v}_{gs} gyračního středu ve směru $-y$ (pro $E_x > 0$) (obr. 2-2).



Drift částic ve zkříženém elektrickém a magnetickém poli. OBR. 2-2

Abychom dostali obecný výraz pro \mathbf{v}_{gs} , budeme řešit rov. [2-8] ve vektorovém tvaru. Člen $m d\mathbf{v}/dt$ v rov. [2-8] můžeme vypustit, neboť dává pouze krouživý pohyb s frekvencí ω_c , který nám je již znám. Rov. [2-8] pak přechází v

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0. \quad [2-13]$$

Vektorový součin s \mathbf{B} dává

$$\mathbf{E} \times \mathbf{B} = \mathbf{B} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = vB^2 - \mathbf{B}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}). \quad [2-14]$$

Příčné složky této rovnice jsou

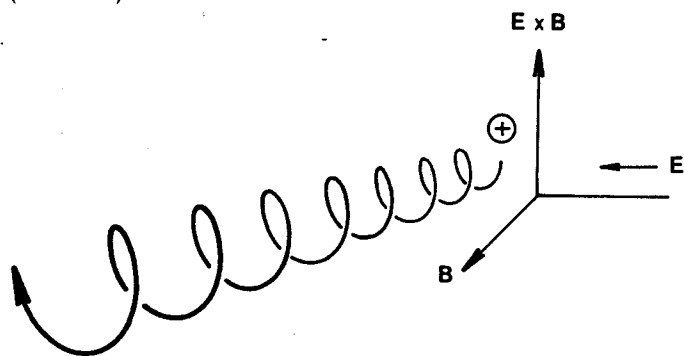
$$\mathbf{v}_{\perp gs} = \mathbf{E} \times \mathbf{B} / B^2 \equiv \mathbf{v}_E. \quad [2-15]$$

* anglické slovo – to drift = být poháněn (větre, vodou). Ve fyzice označuje proudění, které je výsledkem složitějšího, dokonce i chaotického pohybu. V češtině se lze někdy setkat s termínem *unášení* – pozn. překl.

To je definice v_E , driftu gyračního středu vyvolaného elektrickým polem. Užitečný tvar rov. [2-15] je

$$v_E = \frac{E \text{ (V/m)}}{B \text{ (T)}} \frac{m}{s} = 10^8 \frac{E \text{ (V/cm)}}{B \text{ (Gauss)}} \frac{\text{cm}}{s} \quad [2-16]$$

Je důležité všimnout si, že v_E nezávisí na q , m a v_L . Příčina je zřejmá z této fyzikální představy: V první polovině svého orbitu na obr. 2-2 získává ion v elektrickém poli energii, zvětšuje se v_L , a tudíž i r_L . V druhé půlce oběhu energii ztrácí a zmenšuje se r_L . Různost r_L na levé a pravé straně oběhu způsobuje drift v_E . Záporný elektron krouží v opačném směru, ale energii získává rovněž v opačném směru; výsledkem je drift v téměř směru jako drift iontů. Máme-li dvě částice s touž energií, ale rozdílnou hmotností, bude lehčí mít menší r_L a driftový posun připadající na jeden oběh bude menší. Jeho cyklotronní frekvence bude však větší a tyto dva efekty se navzájem přesně zruší. Dvě částice s touž hmotností ale rozdílnými energiemi by měly totéž ω_c . Pomalejší bude mít menší r_L , a získá tedy za polovinu oběhu od E méně energie. Pro částice s menší energií je poměrná změna r_L — při dané změně energie — větší a tyto dva efekty se navzájem rovněž zruší (úloha 2-2).



OBR. 2-3 Skutečná dráha cyklotronně rotující částice v prostoru.

Výsledná dráha v třírozměrném prostoru je tedy zešikmená šroubovice s proměnným stoupáním (obr. 2-3).

2.2.3 Gravitační pole

Předcházející výsledek může být použit na jiné síly, nahradíme-li qE v pohybové rovnici [2-8] obecnou silou F . Drift gyračního středu vyvolaný silou F je potom

$$v_r = \frac{1}{q} \frac{F \times B}{B^2} \quad [2-17]$$

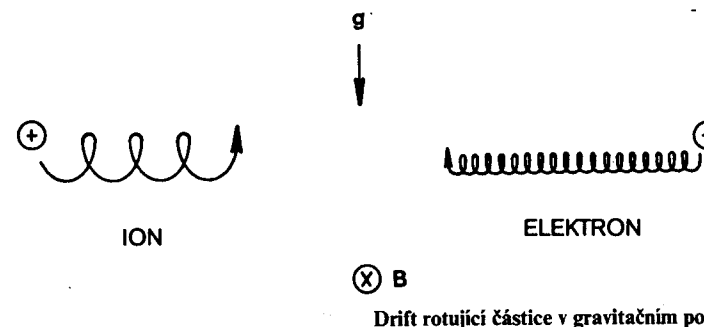
Ve zvláštním případě, je-li F gravitační silou mg , je drift

$$v_g = \frac{m \mathbf{g} \times \mathbf{B}}{q B^2} \quad [2-18]$$

Driftu v_E se podobá v tom, že je kolmý jak na sílu, tak i na B , ale liší se v jednom důležitém ohledu. Drift v_g mění znaménko s nábojem částic. Při gravitační síle je drift iontů a elektronů namířen v opačných směrech, tím v plazmatu vzniká výsledná proudová hustota daná výrazem

$$j = n(M + m) \frac{\mathbf{g} \times \mathbf{B}}{B^2}. \quad [2-19]$$

Fyzikální příčinou tohoto driftu je opět změna Larmorova poloměru (obr. 2-4), když částice získává a ztrácí energii v gravitačním poli. Elektrony krouží v opačném smyslu než ionty, ale síla na ně nyní působí v téměř směru, takže drift má opačný směr. Velikost v_g je obvykle zanedbatelná (úloha 2-4), ale jsou-li silokřivky zakřiveny, vzniká efektivní gravitační síla způsobená odstředivou silou. Tato síla, jež není zanedbatelná, je nezávislá na hmotnosti; proto jsme nezdůrazňovali závislost na m v rov. [2-18].



OBR. 2-4 Drift rotující částice v gravitačním poli.

Odstředivá síla je příčinou nestability plazmatu nazývané „gravitační nestabilita“, která nemá se skutečnou gravitací nic společného.

2-1. Vypočítejte r_L pro následující případy, je-li $v_{||}$ zanedbatelné:

(a) Elektron s energií 10 keV v magnetickém poli Země 5×10^{-5} T.

(b) Proton slunečního větru letící rychlostí 300 km/s, $B = 5 \times 10^{-9}$ T.

(c) Ion He^+ s energií 1 keV v sluneční atmosféře v blízkosti slunečních skvrn, kde $B = 5 \times 10^{-2}$ T.

2-2. Ukažte, že v_E je stejné pro dva ionty téže hmotnosti a náboje, ale s různými energiemi. Užijte následující fyzikální představy (viz obr. 2-2). Aproximujte pravou

ÚLOHY

Vezměme reálnou část rov. [2-5] a dostáváme

$$x - x_0 = r_L \sin \omega_c t, \quad y - y_0 = \pm r_L \cos \omega_c t. \quad [2-7]$$

To popisuje *orbit** okolo *gyračního středu*** (x_0, y_0) , který je pevný (obr. 2-1). Směr kroužení je vždycky takový, že magnetické pole vytvářené nabitou částicí má opačný směr než vnější vložené pole. Částice plazmatu mají tedy sklon ke *zmenšování* magnetického pole, plazma je *diamagnetické*. Vedle tohoto pohybu má částice ještě libovolnou rychlost v_z rovnoběžnou s \mathbf{B} . Tato složka rychlosti není polem \mathbf{B} ovlivňována. Trajektorii nabitě částice v prostoru je obvykle šroubovice.

2.2.2 Konečné \mathbf{E} pole

Připustíme-li nyní přítomnost elektrického pole, bude výsledným pohybem součet dvou pohybů: obyčejná kruhová Larmorova rotace plus unášení (drift) gyračního středu. Osu x můžeme zvolit tak, aby ležela podél \mathbf{E} , takže $E_y = 0$. Stejně jako předtím z -ová složka rychlosti nemá žádný vztah k příčným složkám a můžeme se jí zabývat odděleně. Pohybová rovnice je nyní

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad [2-8]$$

její z -ová složka je

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{q}{m} E_z$$

neboli

$$v_z = \frac{qE_z}{m} t + v_{z0}. \quad [2-9]$$

To je prostě zrychlování ve směru \mathbf{B} . Příčné složky rov. [2-8] jsou

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= \frac{q}{m} E_x \pm \omega_c v_y, \\ \frac{dv_y}{dt} &= 0 \mp \omega_c v_x. \end{aligned} \quad [2-10]$$

* kruhová dráha, původně dráha planet; [z latinského orbita = stopa (zanechaná jedoucím kolem)]. Tohoto výrazu se v češtině užívá při popisu elektronového obalu v atomu. My jim budeme označovat kruhovou (cyklotronně rotační) složku dráhy částice – pozn. překl.

** v naší terminologii by bylo důslednější anglické „guiding center“ překládat „střed cyklotronní rotace“, což je také termín v češtině užívaný. Protože ale kniha tento pojem hojně používá, budeme pracovat s jednodušším označením „gyrační střed“ [podobně jako J. Kleczek v knize „Plazma ve vesmíru a laboratoři“ (Academia 1968)], i když jsem si vědom, že slovo gyrační v české terminologii upomíná spíše na jevy spojené s rotační setrvačností – pozn. překl.

Po derivování dostáváme (pro konstantní \mathbf{E})

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= -\omega_c^2 v_x, \\ \dot{v}_y &= \mp \omega_c \left(\frac{q}{m} E_x \pm \omega_c v_y \right) = -\omega_c^2 \left(v_y + \frac{E_x}{B} \right). \end{aligned} \quad [2-11]$$

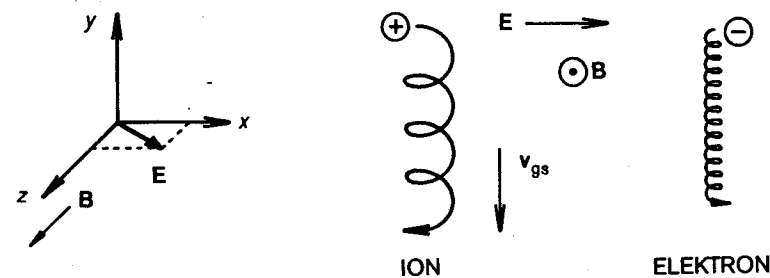
To můžeme napsat jako

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(v_y + \frac{E_x}{B} \right) = -\omega_c^2 \left(v_y + \frac{E_x}{B} \right),$$

takže rov. [2-11] je převedena na předchozí případ, nahradíme-li v_y výrazem $v_y + (E_x/B)$. Rov. [2-4] je tedy nahrazena výrazy

$$\begin{aligned} v_x &= v_{\perp} e^{i\omega_c t}, \\ v_y &= \pm i v_{\perp} e^{i\omega_c t} - \frac{E_x}{B}. \end{aligned} \quad [2-12]$$

Larmorův pohyb zůstává týž jako před tím, ale přes něj se překládá drift* \mathbf{v}_{gs} gyračního středu ve směru $-y$ (pro $E_x > 0$) (obr. 2-2).



Drift částic ve zkříženém elektrickém a magnetickém poli. OBR. 2-2

Abychom dostali obecný výraz pro \mathbf{v}_{gs} , budeme řešit rov. [2-8] ve vektorovém tvaru. Člen $m d\mathbf{v}/dt$ v rov. [2-8] můžeme vypustit, neboť dává pouze krouživý pohyb s frekvencí ω_c , který nám je již znám. Rov. [2-8] pak přechází v

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0. \quad [2-13]$$

Vektorový součin s \mathbf{B} dává

$$\mathbf{E} \times \mathbf{B} = \mathbf{B} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = vB^2 - \mathbf{B}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}). \quad [2-14]$$

Příčné složky této rovnice jsou

$$\mathbf{v}_{\perp gs} = \mathbf{E} \times \mathbf{B} / B^2 \equiv \mathbf{v}_E. \quad [2-15]$$

* anglické slovo – to drift = být poháněn (větre, vodou). Ve fyzice označuje proudění, které je výsledkem složitějšího, dokonce i chaotického pohybu. V češtině se lze někdy setkat s termínem *unášení* – pozn. překl.

půlku orbity polokružnicemi odpovídajícími energii po urychlení polem E a levou polovinu polokružnicemi odpovídajícími energii po zpomalení. Můžete považovat E za tak slabé, že poměrná změna v_{\perp} je malá.

2-3. Předpokládejte, že se elektrony řídí Boltzmannovým vztahem z úlohy 1-5 v cylindricky symetrickém sloupci plazmatu, v němž charakteristická délka pro změnu $n(r)$ je λ ; to jest $\partial n/\partial r \approx -n/\lambda$.

(a) Užijte $E = -\nabla\phi$ a najděte radiální elektrické pole pro dané λ .

(b) Ukažte, že pro elektrony jsou efekty konečného Larmorova poloměru velké, když $v_E \approx v_r$. Zejména ukažte, že $r_L = 2\lambda$, když $v_E = v_r$.

(c) Platí (b) také pro ionty?

Pokyn: Nepoužijte Poissonovu rovnici.

2-4. Předpokládejte, že tak zvaný Q -systém má konstantní pole 0,2 T a cylindrické plazma s teplotou $KT_e = KT_i = 0,2$ eV. Experimentálně zjištěný profil hustoty má tvar

$$n = n_0 \exp[\exp(-r^2/a^2) - 1],$$

$a = 1$ cm a $n_0 = 10^{17} \text{ m}^{-3}$. Nechť se hustota řídí Boltzmannovým vztahem pro elektrony $n = n_0 \exp(e\phi/KT_e)$.

(a) Vypočítejte maximum v_E .

(b) Srovnajte tuto hodnotu s driftem v_d způsobeným gravitačním polem Země.

(c) Na jakou hodnotu může být sníženo B , než Larmorův poloměr iontů draslíku ($A = 39$) nabude hodnoty a ?

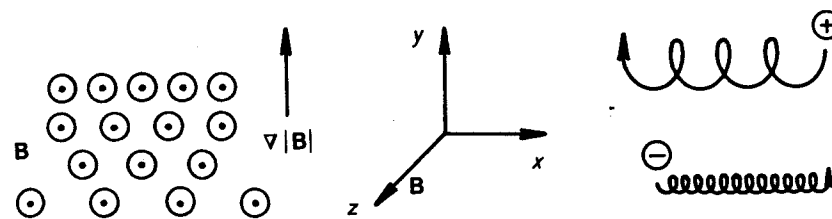
2.3 NEHOMOGENNÍ B POLE

Nyní, když je zaveden pojem gyračního středu, můžeme probrat pohyb částic v nehomogenních E a B polích, jež se mění v prostoru nebo čase. Při homogenních polích jsme byli s to odvodit přesné výrazy pro drift gyračního středu. Jakmile však zavedeme nehomogenitu, stává se problém pro přesné řešení příliš komplikovaný. Přibližná odpověď se obvykle získává tak, že výraz rozvineme pro malou hodnotu r_L/L , kde L je charakteristická délka nehomogenity. Tento typ teorie, nazývaný *teorie orbity*, může být velice složitý. Budeme vyšetřovat jenom nejjednodušší případy, v nichž se vyskytuje vždy jenom jedna nehomogenita.

2.3.1 $\nabla B \perp B$: grad- B drift

V tomto případě jsou silokřivky přímé, ale jejich hustota vzrůstá, např. ve směru y (obr. 2-5). Za pomoci naší jednoduché fyzikální představy můžeme výsledek předvídat. Gradient $|B|$ způsobuje, že Larmorův poloměr je větší v dolní části orbity než v horní, a to by mělo vést k driftu pro ionty a elektrony v opačných směrech, kolmých jak na B , tak i na ∇B . Driftová rychlost by zřejmě měla být úměrná r_L/L a v_{\perp} .

Uvažujme Lorentzovu sílu $F = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, zprůměrovanou přes jeden



Drift rotující částice v nehomogenním magnetickém poli. OBR. 2-5

oběh. Zřejmě platí, že $\bar{F}_x = 0$, neboť částice stráví stejně dlouhou dobu při pohybu vzhůru jako při pohybu dolů. Chceme vypočítat přibližný tvar \bar{F}_y ; užijeme *neporušený orbit* částice pro výpočet střední hodnoty. Neporušený orbit je dán rov. [2-4] a [2-7] pro konstantní B pole. Vezmeme-li reálnou část rov. [2-4], dostáváme

$$F_y = -qv_x B_z(y) = -qv_{\perp}(\cos \omega_c t) \left[B_0 \pm r_L(\cos \omega_c t) \frac{\partial B}{\partial y} \right], \quad [2-20]$$

přítom jsme provedli Taylorův rozvoj B pole okolo bodu $x_0 = 0, y_0 = 0$ a užili jsme rov. [2-7]

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{B}_0 + (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \dots \\ B_z &= B_0 + y(\partial B_z/\partial y) + \dots \end{aligned} \quad [2-21]$$

Tento rozvoj ovšem platí jen pro $r_L/L \ll 1$, kde L je charakteristická délka pro $\partial B_z/\partial y$. Při rotaci je průměrná hodnota prvního členu v rov. [2-20] nula a průměrná hodnota $\cos^2 \omega_c t$ je $\frac{1}{2}$, takže

$$\bar{F}_y = \mp qv_{\perp} r_L \cdot \frac{1}{2} (\partial B/\partial y). \quad [2-22]$$

Driftová rychlost gyračního středu je pak

$$\mathbf{v}_{gs} = \frac{1}{q} \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{B}}{B^2} = \frac{1}{q} \frac{\bar{F}_y}{|B|} \hat{\mathbf{x}} = \mp \frac{v_{\perp} r_L}{B} \cdot \frac{1}{2} \frac{\partial B}{\partial y} \hat{\mathbf{x}}, \quad [2-23]$$

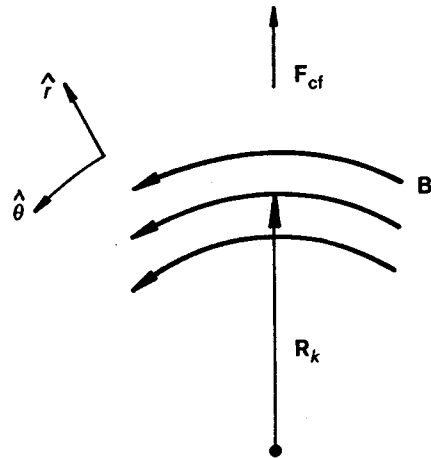
přičemž jsme užili rov. [2-17]. Protože volba y -ové osy byla libovolná, lze tento výsledek zobecnit

$$\mathbf{v}_{\nabla B} = \pm \frac{1}{2} v_{\perp} r_L \frac{\mathbf{B} \times \nabla B}{B^2} \quad [2-24]$$

Tento výraz vykazuje všechny závislosti, které jsme očekávali z fyzikálních představ; pouze faktor $\frac{1}{2}$ (pocházející ze středování) nebyl předpovězen. Pověšme si, že \pm zastupuje znaménko náboje a kurzívni B zastupuje $|B|$. Veličinu $\mathbf{v}_{\nabla B}$ nazýváme *drift v gradientu magnetického pole* a budeme ji stručně označovat *grad- B drift*; má opačný směr pro ionty a elektrony a způsobuje proud kolmý k B . Pro přesný výpočet $\mathbf{v}_{\nabla B}$ by bylo nutno užít při středování přesný výraz pro orbit včetně driftu.

2.3.2 Zakřivené siločivky: drift zakřivení

Předpokládejme nyní, že jsou siločivky magnetického pole zakřivené, poloměr jejich křivosti R_k je konstantní a přitom že je konstantní i $|\mathbf{B}|$ (obr. 2-6). Takové pole nevyhovuje Maxwellovým rovnicím pro vakuum,



OBR. 2-6 Zakřivené magnetické pole.

a proto k efektu, který zde odvodíme, se ve skutečnosti vždycky bude přičítat grad- B drift. Drift gyračního středu způsobuje odstředivá síla, která působí na částice při jejich tepelném pohybu podél siločar. Označuje-li v_{\parallel}^2 střední hodnotu čtverce podélné složky (podél \mathbf{B}) chaotické rychlosti, je střední odstředivá síla (centrifugální síla)

$$F_{cf} = \frac{mv_{\parallel}^2}{R_k} \hat{r} = mv_{\parallel}^2 \frac{R_k}{R_k^2}. \quad [2-25]$$

Podle rov. (2-17) tato síla vede ke vzniku driftu

$$\mathbf{v}_R = \frac{1}{q} \frac{F_{cf} \times \mathbf{B}}{B^2} = \frac{mv_{\parallel}^2}{qB^2} \frac{R_k \times \mathbf{B}}{R_k^2}. \quad [2-26]$$

Drift \mathbf{v}_R se nazývá *drift zakřivení*.

Zbývá ještě vypočítat grad- B drift, který tento pohyb vždycky doprovází a který je důsledkem toho, že při narůstajícím poloměru klesá hodnota $|\mathbf{B}|$. Pro vakuum platí $\nabla \times \mathbf{B} = 0$. V cylindrických souřadnicích na obr. 2-6 má $\nabla \times \mathbf{B}$ pouze složku z , neboť \mathbf{B} má pouze složku ϑ a $\nabla \mathbf{B}$ jenom složku r . Dostáváme potom

$$(\nabla \times \mathbf{B})_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB_{\vartheta}) = 0, \quad B_{\vartheta} \sim \frac{1}{r}. \quad [2-27]$$

Tedy

$$|\mathbf{B}| \sim \frac{1}{R_k}, \quad \frac{\nabla |\mathbf{B}|}{|\mathbf{B}|} = -\frac{R_k}{R_k^2}. \quad [2-28]$$

Užijeme rov. [2-24] a dostáváme

$$\mathbf{v}_{VB} = \mp \frac{1}{2} \frac{v_{\perp} r_L}{B^2} \mathbf{B} \times |\mathbf{B}| \frac{R_k}{R_k^2} = \pm \frac{1}{2} \frac{v_{\perp}^2}{\omega_c} \frac{R_k \times \mathbf{B}}{R_k^2 B} = \frac{1}{2} \frac{m}{q} v_{\perp}^2 \frac{R_k \times \mathbf{B}}{R_k^2 B^2}. \quad [2-29]$$

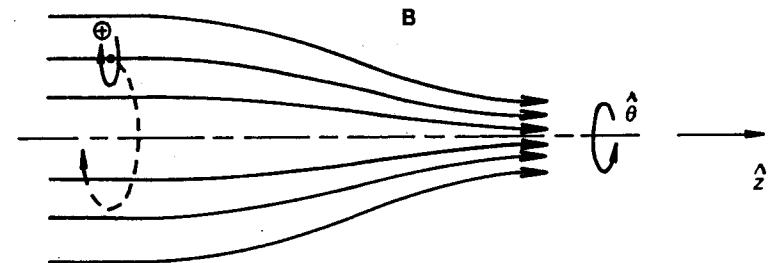
Přičteme-li tento výsledek k \mathbf{v}_R , dostáváme úplný drift v zakřiveném poli ve vakuu

$$\mathbf{v}_{VB} + \mathbf{v}_R = \frac{m}{q} \frac{R_k \times \mathbf{B}}{R_k^2 B^2} (v_{\parallel}^2 + \frac{1}{2} v_{\perp}^2) \quad [2-30]$$

Škoda, že se tyto driftы sečítají. Stočíme-li totiž ve snaze udržet termionukleární plazma magnetické pole do tvaru torusu, částice budou z torusu vždycky unikat, ať užijeme jakéhokoliv triku při volbě teploty a magnetických polí.

 $\nabla B \parallel \mathbf{B}$: Magnetická zrcadla 2.3.3

Nyní se budeme zabývat magnetickým polem, které je směřováno především podél osy z a jehož velikost se mění ve směru z . Necht' je pole osově symetrické s $B_{\vartheta} = 0$ a $\partial/\partial\vartheta = 0$. Protože se siločivky sbíhají a rozbíhají, nutně existuje složka B_r (obr. 2-7). Chceme ukázat, že to vede ke vzniku sily, která může částici uvěznit v magnetickém poli.



Drift částice v poli magnetického zrcadla. OBR. 2-7

B_r můžeme obdržet ze vztahu $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB_r) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0. \quad [2-31]$$

Jestliže $\partial B_z / \partial z$ je dáno pro $r = 0$ a přilíží se s r nemění, dostáváme přibližně

$$rB_r = - \int_0^r r \frac{\partial B_z}{\partial z} dr \simeq - \frac{1}{2} r^2 \left[\frac{\partial B_z}{\partial z} \right]_{r=0},$$

$$B_r = - \frac{1}{2} r \left[\frac{\partial B_z}{\partial z} \right]_{r=0}. \quad [2-32]$$

$|B|$ mění se s r způsobuje grad- B drift gyračních středů okolo osy symetrie, ale nevznikne radiální grad- B drift, protože $\partial B / \partial \vartheta = 0$. Složky Lorentzovy síly jsou

$$F_r = q(v_\vartheta B_z - v_z \beta_\vartheta), \quad (1)$$

$$F_\vartheta = q(-v_r B_z + v_z B_r), \quad (2) \quad (3)$$

$$F_z = q(v_r \beta_\vartheta - v_\vartheta B_r). \quad (4) \quad [2-33]$$

Dva členy vymizí, jestliže $B_\vartheta = 0$, a členy 1 a 2 vedou ke vzniku obyčejné cyklotronní rotace. Člen 3 vymizí na ose; tam, kde není nulový, způsobí azimutální síla drift v radiálním směru. Tento drift pouze nutí gyrační středy sledovat siločáry. My se zajímáme hlavně o člen 4. Užijeme-li rov. [2-32], obdržíme

$$F_z = \frac{1}{2} q v_\vartheta r \left(\partial B_z / \partial z \right). \quad [2-34]$$

Nyní musíme středovat přes jeden oběh. Pro jednoduchost uvažujme částici, jejíž gyrační střed leží na ose. v_ϑ pak zůstává při oběhu konstantní; podle znaménka q je $v_\vartheta = \pm v_\perp$. Protože $r = r_L$, je průměrná síla

$$\bar{F}_z = \mp \frac{1}{2} q v_\perp r_L \frac{\partial B_z}{\partial z} = \mp \frac{1}{2} q \frac{v_\perp^2}{\omega_c} \frac{\partial B_z}{\partial z} = - \frac{1}{2} \frac{m v_\perp^2}{B} \frac{\partial B_z}{\partial z}. \quad [2-35]$$

Magnetický moment* rotující částice definujeme

$$\mu \equiv m v_\perp^2 / B \quad [2-36]$$

takže

$$\bar{F}_z = -\mu (\partial B_z / \partial z). \quad [2-37]$$

To je zvláštní případ síly působící na diamagnetickou částici, která může být obecně zapsána

$$F_\parallel = -\mu \partial B / \partial s = -\mu \nabla_\parallel B, \quad [2-38]$$

kde ds je element křivky podél B . Povšimněme si, že definice [2-36] je táž, jako obyčejná definice magnetického momentu proudové smyčky o plo-

* Stejně jako originál užíváme toto zkrácené označení místo správnějšího magnetický dipólový moment – pozn. překl.

še A a proudu I : $\mu = IA$. V případě iontu s jedním nábojem je I vytvářeno nábojem e obíhající dokola $\omega_c / 2\pi$ krát za vteřinu: $I = e \omega_c / 2\pi$. Plocha A je $\pi r_L^2 = \pi v_\perp^2 / \omega_c^2$. Tedy

$$\mu = \frac{\pi v_\perp^2}{\omega_c^2} \frac{e \omega_c}{2\pi} = \frac{1}{2} \frac{v_\perp^2 e}{\omega_c} = \frac{1}{2} \frac{m v_\perp^2}{B}.$$

Při pohybu částice oblastmi silnějšího a slabšího B mění se její Larmorův poloměr, ale μ zůstává invariantní. Abychom to dokázali, vezměme z pohybové rovnice její složku podél B

$$m \frac{dv_\parallel}{dt} = -\mu \frac{\partial B}{\partial s}. \quad [2-39]$$

Levou stranu vynásobíme v_\parallel a pravou jeho ekvivalentem ds/dt a dostaneme

$$m v_\parallel \frac{dv_\parallel}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_\parallel^2 \right) = -\mu \frac{\partial B}{\partial s} \frac{ds}{dt} = -\mu \frac{dB}{dt}. \quad [2-40]$$

Zde dB/dt vyjadřuje změnu B , jak ji vidí částice; B samo je časově konstantní. Energie částic se musí zachovávat, platí tedy

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_\parallel^2 + \frac{1}{2} m v_\perp^2 \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_\parallel^2 + \mu B \right) = 0 \quad [2-41]$$

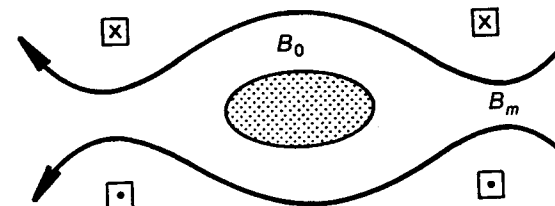
a pomocí [2-40] přechází tato rovnice ve tvar

$$-\mu \frac{dB}{dt} + \frac{d}{dt} (\mu B) = 0,$$

takže

$$d\mu/dt = 0. \quad [2-42]$$

Na invariantnosti μ je založen princip jednoho ze základních projektů na udržení plazmatu, tzv. magnetického zrcadla. Když částice při svém tepelném pohybu přichází z oblasti se slabým polem do oblasti silného pole, setkává se se vzrůstajícím B a aby zachovala konstantní μ , musí její v_\perp vzrůst; je-li tudíž v „hrdle“ zrcadla B dostatečně veliké, v_\parallel případně klesne na nulu a částice se „odrazí“ zpět do oblasti slabého pole. Příčinou odrazu je samozřejmě síla F_\parallel . Nehomogenní pole obyčejného páru cívek vytváří magnetická zrcadla, mezi nimiž může být plazma uzavřeno (obr. 2-8). Tento účinek se projevuje jak u iontů, tak i u elektronů.



Plazma zachycené mezi dvěma magnetickými zrcadly.

Takovéto zachycení však není dokonalé. Například částice s $v_{\perp} = 0$ nebude mít žádný magnetický moment a nebude na ni působit žádná síla ve směru \mathbf{B} . Částice, která má ve střední rovině ($B = B_0$) malé v_{\perp}/v_{\parallel} , rovněž unikne, není-li maximální pole B_m dostatečně veliké. Které částice při daném B_0 a B_m uniknou? Má-li částice ve střední rovině $v_{\perp} = v_{\perp 0}$ a $v_{\parallel} = v_{\parallel 0}$, v místě své obrátky bude mít $v_{\perp} = v'_{\perp}$ a $v_{\parallel} = 0$. Nechť je tam pole B' . Invariantnost μ dává

$$\frac{1}{2}mv_{\perp 0}^2/B_0 = \frac{1}{2}mv_{\perp}'^2/B' \quad [2-43]$$

Podle zákona o zachování energie musí platit

$$v_{\perp}'^2 = v_{\perp 0}^2 + v_{\parallel 0}^2 \equiv v_0^2 \quad [2-44]$$

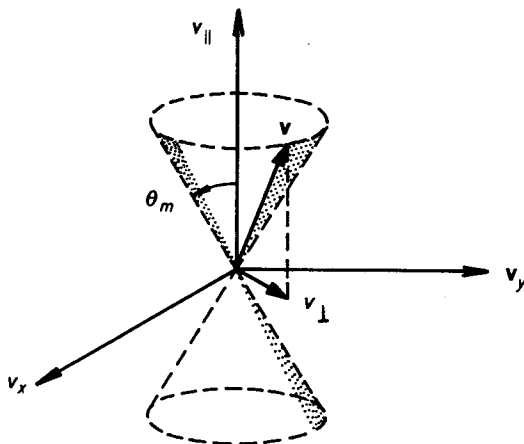
Kombinací rov. [2-43] a [2-44] obdržíme

$$\frac{B_0}{B'} = \frac{v_{\perp 0}^2}{v_{\perp}'^2} = \frac{v_{\perp 0}^2}{v_0^2} \equiv \sin^2 \vartheta, \quad [2-45]$$

kde ϑ je úhel stoupání šroubovicové dráhy v oblasti slabého pole. Částice s menším ϑ se odrazí jako v zrcadle v oblastech většího B . Je-li ϑ příliš malé, překročí B' hodnotu B_m a k odrazu částice vůbec nedojde. Nahradíme-li v rov. [2-45] B' hodnotou B_m , získáme výraz pro nejmenší ϑ , při němž se částice zachytí

$$\sin^2 \vartheta_m = B_0/B_m \equiv 1/R_m, \quad [2-46]$$

kde R_m je *zrcadlový poměr*. Rovnice [2-46] určuje v rychlostním prostoru povrch kuželovité oblasti, nazývané *únikový kužel* (obr. 2-9). Částice ležící uvnitř únikového kuželu se nezachytí. Plazma uzavřené mezi zrcadly není tudíž nikdy izotropní. Všimněte si, že únikový kužel je nezávislý na q a m .



OBR. 2-9 Únikový kužel.

Nedochází-li ke srážkám, jsou ionty a elektrony zachyceny stejnou měrou. Dochází-li ke srážkám, budou částice ztraceny, jestliže ve srážce změni svůj úhel stoupání a dostanou se do únikového kuželu. Ke ztrátě elektronů dochází obecně snadněji, protože mají vyšší srážkovou frekvenci.

Magnetické zrcadlo původně navrhl Enrico Fermi jako mechanismus pro urychlování kosmických paprsků. Protony odražené se od magnetických zrcadel přibližujících se k sobě vysokými rychlostmi mohou při každém odrazu získávat energii. Jak taková zrcadla mohou vzniknout, je jiná otázka. Jiným případem zrcadlového efektu je zachycení částice ve Van Allenových pásech. Magnetické pole Země, silné u pólů a slabé na rovníku, vytváří přirozené zrcadlo se značně velkým R_m .

2-5. Předpokládejme, že na rovníku je intenzita magnetického pole Země 3×10^{-5} T a že ubývá s $1/r^3$, jako u dokonalého dipólu. Nechť v rovině rovníku ve vzdálenosti $r = 5$ zemských poloměrů je izotropní rozdělení protonů s energií 1 eV a elektronů 30 keV, hustota každého druhu částic je $n = 10^7$ m $^{-3}$.

ÚLOHY

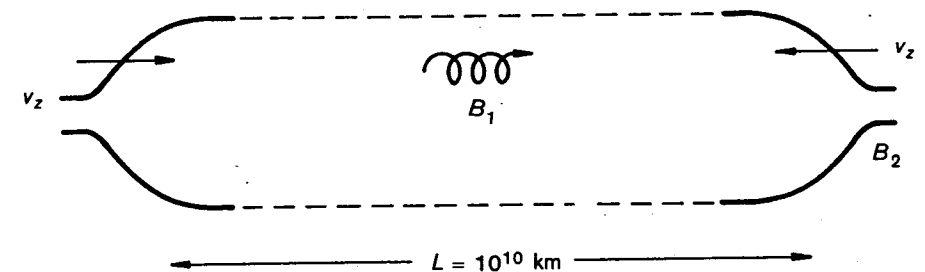
- Vypočítejte rychlosti ∇B driftu pro ion a elektron.
- Driftuje elektron směrem východním nebo západním?
- Jak dlouho trvá elektronu, než oběhne Zemi?
- Vypočítejte hustotu proudu obtékajícího Zemi v A/m 2 .

2-6. V magnetickém poli nekonečného přímého drátu, jímž protéká proud I , se nachází elektron v klidu. V čase $t = 0$ je drát náhle nabit na kladný potenciál ϕ , aniž je tím proud I ovlivněn. Elektron získá od elektrického pole energii a začne driftovat.

- Namalujte schéma orbity elektronu a směry s ním souvisejících I , \mathbf{B} , \mathbf{v}_E , $\mathbf{v}_{\nabla B}$ a \mathbf{v}_R .
- Vypočítejte velikosti těchto driftových rychlostí pro poloměr 1 cm, jestliže $I = 500$ A, $\phi = 460$ V a poloměr drátu je 1 mm. Předpokládejte, že potenciál ϕ je na stěnách vakuové komory ve vzdálenosti 10 cm držen na 0 V.

Návod: Kromě výrazů uvedených v textu je potřeba mít o pohybu dobrou intuitivní představu.

- 2-7. Proton kosmického záření je zachycen mezi dvěma pohybujícími se magnetickými zrcadly. Jeho počáteční energie je $W = 1$ keV a ve střední rovině je $v_{\perp} = v_{\parallel}$. Každé zrcadlo se pohybuje ke středové rovině rychlostí $v_z = 10$ km/s (obr. 2-10).



Urychlování kosmického záření. OBR. 2-10

(a) S ohledem na invariantnost μ pomocí vzorce pro únikový kužel vypočítejte energii, na kterou bude proton urychlen dříve, než unikne.

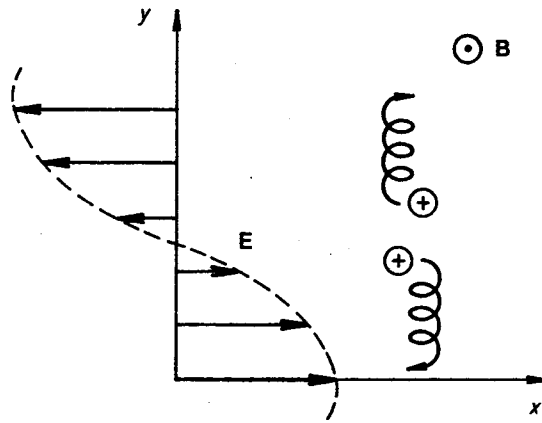
(b) Jak dlouho bude trvat, než tuto energii získá?

1. Považujte zrcadla za ploché písty a ukažte, že rychlost získaná při každém odražení je $2v_x$.
2. Vypočítejte počet potřebných odrazů.
3. Vypočítejte čas T , za který proton tolikrát proběhne vzdálenost L . Dostačující přesnost je faktor 2.

2.4 NEHOMOGENNÍ E POLE

Nyní ponecháme magnetické pole homogenní a elektrické pole bude nehomogenní. Pro jednoduchost nechť \mathbf{E} má směr x a ve směru y se sinusově mění (obr. 2-11)

$$\mathbf{E} \equiv E_0(\cos ky) \hat{x}. \quad [2-47]$$



OBR. 2-11 Drift rotující částice v nehomogenním elektrickém poli.

Tato struktura pole má vlnovou délku $\lambda = 2\pi/k$ a je výsledkem sinusového rozložení nábojů, jež nemusíme specifikovat. V praxi může takové rozložení náboje vzniknout v plazmatu při vlnovém pohybu. Pohybová rovnice je

$$m(d\mathbf{v}/dt) = q[\mathbf{E}(y) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}], \quad [2-48]$$

jejíž příčné složky jsou

$$\dot{v}_x = \frac{qB}{m} v_y + \frac{q}{m} E_x(y) \quad \dot{v}_y = -\frac{qB}{m} v_x, \quad [2-49]$$

$$\ddot{v}_x = -\omega_c^2 v_x \pm \omega_c \frac{\dot{E}_x}{B}, \quad [2-50]$$

$$\ddot{v}_y = -\omega_c^2 v_y - \omega_c^2 \frac{E_x(y)}{B}, \quad [2-51]$$

$E_x(y)$ je intenzita elektrického pole v místě částice. Abychom ji stanovili, potřebujeme znát orbit částice, který se vlastně snažíme vypočítat. Je-li elektrické pole slabé, můžeme pro výpočet $E_x(y)$ přibližně užít *neporušený orbit*. Takový orbit bez působení pole E byl dán výrazem [2-7]

$$y = y_0 \pm r_L \cos \omega_c t. \quad [2-52]$$

Z rov. [2-51] a [2-47] nyní dostáváme

$$\ddot{v}_y = -\omega_c^2 v_y - \omega_c^2 \frac{E_0}{B} \cos k(y_0 \pm r_L \cos \omega_c t). \quad [2-53]$$

Očekáváme, že výsledné řešení, jež hledáme, bude součtem rotace s frekvencí ω_c a ustáleného driftu v_E . Protože nás zajímá výraz pro v_E , vyloučíme rotační pohyb středováním přes jeden rotační cyklus. Rovnice [2-50] potom dává $\bar{v}_x = 0$. Oscilující člen \ddot{v}_y v rov. [2-53] středováním zřejmě dává nulu

$$\ddot{v}_y = 0 = -\omega_c^2 \bar{v}_y - \omega_c^2 \frac{E_0}{B} \overline{\cos k(y_0 \pm r_L \cos \omega_c t)}. \quad [2-54]$$

Rozkladem kosinu dostáváme

$$\begin{aligned} \cos k(y_0 \pm r_L \cos \omega_c t) &= \cos(ky_0) \cos(kr_L \cos \omega_c t) \mp \\ &\mp \sin(ky_0) \sin(kr_L \cos \omega_c t). \end{aligned} \quad [2-55]$$

Bude dostačovat, rozebereme-li případ malého Larmorova poloměru $kr_L \ll 1$. Taylorův rozvoj

$$\begin{aligned} \cos \varepsilon &= 1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \dots \\ \sin \varepsilon &= \varepsilon + \dots \end{aligned} \quad [2-56]$$

dovoluje nám psát

$$\begin{aligned} \cos k(y_0 \pm r_L \cos \omega_c t) &\approx (\cos ky_0) (1 - \frac{1}{2}k^2 r_L^2 \cos^2 \omega_c t) \mp \\ &\mp (\sin ky_0) kr_L \cos \omega_c t. \end{aligned}$$

Poslední člen vymizí při středování přes čas a rov. [2-54] dává

$$\bar{v}_y = -\frac{E_0}{B} (\cos ky_0) (1 - \frac{1}{4}k^2 r_L^2) = -\frac{E_x(y_0)}{B} (1 - \frac{1}{4}k^2 r_L^2). \quad [2-57]$$

Obyčejný drift v polích $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ (stručně: $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ drift) je tak nehomogenitou modifikován na tvar

$$\mathbf{v}_E = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} (1 - \frac{1}{4}k^2 r_L^2). \quad [2-58]$$

Snadno nahlédneme fyzikální smysl. Ion, jehož gyrační střed se nachází v maximu \mathbf{E} , ve skutečnosti značnou část času stráví v oblastech, kde je \mathbf{E} slabší. Jeho střední drift je tedy menší než hodnota E/B v místě gyračního středu. V lineárně proměnném poli \mathbf{E} by ion na jedné straně

orbitu byl v silnějším poli a na druhé straně v poli o stejnou část slabším, takže opravný člen $k v_E$ se zruší. Z toho je zřejmé, že opravný člen závisí na druhé derivaci E . Pro sinusový průběh, který jsme předpokládali, je druhá derivace vzhledem k E vždycky záporná. Pro libovolně se měnící E je pouze třeba ik nahradit ∇ a rov. [2-58] zapsat

$$\mathbf{v}_E = \left(1 + \frac{1}{4} r_L^2 \nabla^2\right) \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad [2-59]$$

Druhý člen se nazývá *efekt konečného Larmorova poloměru*. Jaký je význam této opravy? Poněvadž r_L je daleko větší pro ionty než pro elektrony, není už \mathbf{v}_E nezávislé na druhu částic. Objeví-li se v plazmatu nějaké zhuštění, může elektrické pole způsobit, že se elektrony a ionty oddělí a vytvoří tak další elektrické pole. Existuje-li mechanismus zpětné vazby, jímž sekundární elektrické pole zvyšuje pole primární, E neomezeně poroste a plazma bude nestabilní. Takovou nestabilitou nazývanou *driftová nestabilita* se budeme zabývat v jedné z příštích kapitol. Grad- B drift je ovšem rovněž efektem konečného Larmorova poloměru a vede rovněž k separaci nábojů. Avšak podle rov. [2-24] je $\mathbf{v}_{\nabla B}$ úměrné kr_L , zatímco opravný člen v rov. [2-58] je úměrný $k^2 r_L^2$. Efekt nehomogenního pole E je tedy významný při relativně velkém k neboli při malých rozměrech nehomogenity. Proto driftové nestability náležejí k obecnější třídě nestabilit nazývaných *mikro-nestability*.

2.5 ČASOVĚ PROMĚNNÉ E POLE

Nechť jsou nyní E a B prostorově homogenní ale proměnná v čase. Uvažujme nejprve případ, kdy se sinusově mění s časem pouze E . Nechť má směr osy x

$$E = E_0 e^{i\omega t} \hat{x}. \quad [2-60]$$

Protože $\dot{E}_x = i\omega E_x$, můžeme rov. [2-50] psát

$$\ddot{v}_x = -\omega_c^2 \left(v_x \mp \frac{i\omega}{\omega_c} \frac{\dot{E}_x}{B} \right). \quad [2-61]$$

Definujme

$$\begin{aligned} \tilde{v}_p &\equiv \pm \frac{i\omega}{\omega_c} \frac{\dot{E}_x}{B}, \\ \tilde{v}_E &\equiv -\frac{\dot{E}_x}{B}, \end{aligned} \quad [2-62]$$

kde jsme připsali vlnovky pouze pro zdůraznění, že drift osciluje. Horní

(spodní) znaménko označuje jako obvykle kladné (záporné) q . Rov. [2-50] a [2-51] nyní přecházejí v

$$\begin{aligned} \ddot{v}_x &= -\omega_c^2 (v_x - \tilde{v}_p), \\ \ddot{v}_y &= -\omega_c^2 (v_y - \tilde{v}_E). \end{aligned} \quad [2-63]$$

Podobně jako v rov. [2-12] chceme najít řešení, které bude součtem driftu a rotačního pohybu

$$\begin{aligned} v_x &= v_{\perp} e^{i\omega_c t} + \tilde{v}_p, \\ v_y &= \pm i v_{\perp} e^{i\omega_c t} + \tilde{v}_E. \end{aligned} \quad [2-64]$$

Budeme-li nyní dvakrát derivovat podle času, dostaneme

$$\begin{aligned} \ddot{v}_x &= -\omega_c^2 v_x + (\omega_c^2 - \omega^2) \tilde{v}_p, \\ \ddot{v}_y &= -\omega_c^2 v_y + (\omega_c^2 - \omega^2) \tilde{v}_E. \end{aligned} \quad [2-65]$$

To není týž výsledek jako rov. [2-63], pokud neplatí $\omega^2 \ll \omega_c^2$. Předpokládáme-li, že E se mění pomalu, takže $\omega^2 \ll \omega_c^2$, je rov. [2-64] přibližným řešením rov. [2-63].

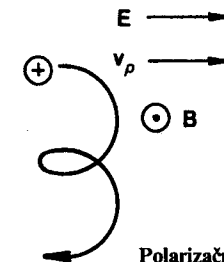
Rovnice [2-64] nám říká, že pohyb gyračního středu má dvě složky. y -ová složka, kolmá na B a E , je obyčejný $E \times B$ drift s tím rozdílem, že v_E nyní pomalu osciluje s frekvencí ω . x -ová složka, nový drift *ve směru E* , se nazývá *polarizační drift*. Nahradíme-li $i\omega$ derivací $\partial/\partial t$, můžeme zobecnit rov. [2-62] a polarizační drift definovat jako

$$\mathbf{v}_p = \pm \frac{1}{\omega_c B} \frac{d\mathbf{E}}{dt} \quad [2-66]$$

Protože \mathbf{v}_p má pro ionty a elektrony opačný směr, vzniká *polarizační proud*; pro $Z = 1$ je

$$\mathbf{J}_p = ne(v_{ip} - v_{ep}) = \frac{ne}{eB^2} (M + m) \frac{d\mathbf{E}}{dt} = \frac{q}{B^2} \frac{d\mathbf{E}}{dt}, \quad [2-67]$$

kde q je měrná hmotnost.



Polarizační drift. OBR. 2-12

Fyzikální smysl polarizačního driftu je prostý (obr. 2-12). Představme si nepohybující se ion v magnetickém poli. Je-li náhle zapnuto pole E ,

začne se ion nejprve pohybovat ve směru \mathbf{E} . Teprve když nabere rychlost \mathbf{v} , pocítí Lorentzovu sílu $e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ a začne se podle obr. 2-12 pohybovat směrem dolů. Zůstává-li nyní \mathbf{E} konstantní, žádný drift \mathbf{v}_p už nebude dále existovat, nýbrž jenom drift \mathbf{v}_E . Obrátí-li se však \mathbf{E} , vznikne opět okamžitý drift, tentokrát doleva. \mathbf{v}_p je tedy driftem zapnutý, je způsoben setrvačností a objevuje se pouze v první polovině cyklu každého oběhu, během nějž se \mathbf{E} mění. \mathbf{v}_p jde tudíž k nule s ω/ω_c .

Jev polarizace v plazmatu se podobá polarizaci v pevném dielektriku, kde $\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$. Dipóly jsou v plazmatu ionty a elektrony oddělené na vzdálenost r_L . Protože se ale ionty a elektrony pohybují tak, aby zachovaly kvazineutralitu, nevede časově konstantní \mathbf{E} pole ke vzniku polarizačního pole \mathbf{P} . Osciluje-li však \mathbf{E} , vede opožďování iontů v důsledku jejich setrvačnosti ke vzniku oscilujícího proudu \mathbf{j}_p .

2.6 ČASOVĚ PROMĚNNÉ \mathbf{B} POLE

Dovolíme konečně magnetickému poli, aby se měnilo s časem. Protože Lorentzova síla je vždycky kolmá na \mathbf{v} , nemůže magnetické pole samo od sebe předávat nabitě částici energii. \mathbf{B} však souvisí s elektrickým polem

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}} \quad [2-68]$$

a to už může částice urychlovat. Nemůžeme nadále předpokládat, že tato pole jsou naprosto homogenní. Nechť $\mathbf{v}_\perp = d\mathbf{l}/dt$ je příčná rychlost, kde \mathbf{l} je element dráhy podél trajektorie částice (při zanedbané v_\parallel). Skalární součin pohybové rovnice [2-8] s \mathbf{v}_\perp nám dává

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_\perp^2 \right) = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}_\perp = q\mathbf{E} \cdot \frac{d\mathbf{l}}{dt} \quad [2-69]$$

Integraci přes jednu periodu dostaneme změnu připadající na jeden oběh

$$\delta \left(\frac{1}{2} m v_\perp^2 \right) = \int_0^{2\pi/\omega_c} q\mathbf{E} \cdot \frac{d\mathbf{l}}{dt} dt.$$

Mění-li se pole pomalu, můžeme integraci podle času nahradit krivkovým integrálem přes neporušený orbit

$$\begin{aligned} \delta \left(\frac{1}{2} m v_\perp^2 \right) &= \oint_S q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = q \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} \\ &= -q \int_S \dot{\mathbf{B}} \cdot d\mathbf{S}. \end{aligned} \quad [2-70]$$

Zde \mathbf{S} je plocha ohraničená Larmorovým orbitem a má směr daný pravidlem pravé ruky, ukazují-li prsty ve směru \mathbf{v} . Protože je plazma diamagne-

tické, platí $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} < 0$ pro ionty a > 0 pro elektrony. Rov. [2-70] dostává tak podobu

$$\delta \left(\frac{1}{2} m v_\perp^2 \right) = \pm q \dot{B} \pi r_L^2 = \pm q \pi B \frac{v_\perp^2}{\omega_c} \frac{m}{\pm q B} = \frac{1}{2} m v_\perp^2 \frac{2\pi \dot{B}}{B \omega_c} \quad [2-71]$$

Výraz $2\pi \dot{B}/\omega_c = \dot{B}/f_c$ je právě změna δB , připadající na jednu periodu rotace. Tedy

$$\delta \left(\frac{1}{2} m v_\perp^2 \right) = \mu \delta B. \quad [2-72]$$

Jelikož levá strana je $\delta(\mu B)$, dostáváme požadovaný výsledek

$$\delta \mu = 0. \quad [2-73]$$

V pomalu se měnících magnetických polích je magnetický moment invariantní.

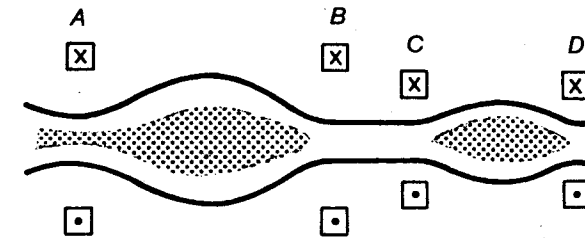
Když se intenzita magnetického pole mění, rozpínají se a stahují Larmorovy orbity a částice ztrácejí a získávají energii příčného pohybu. Tato výměna energie mezi částicemi a polem je velmi jednoduše popsána rovnicí [2-73]. Pomocí invariantnosti μ můžeme snadno dokázat tento známý teorém

Magnetický tok Larmorovým orbitem je konstantní.

Tok ϕ je dán součinem BS , kde $S = \pi r_L^2$. Tedy

$$\phi = B \pi \frac{v_\perp^2}{\omega_c^2} = B \pi \frac{v_\perp^2 m^2}{q^2 B^2} = \frac{2\pi m}{q^2} \frac{1}{2} m v_\perp^2 = \frac{2\pi m}{q^2} \mu \quad [2-74]$$

a ϕ je konstantní, jestliže je konstantní μ .



Dvoustupňová adiabatická komprese plazmatu.

OBR. 2-13

Této vlastnosti využívá jedna metoda ohřevu plazmatu, známá jako *adiabatická komprese*. Na obrázku 2-13 je schéma uspořádání. Plazma je vstříknuto do prostoru mezi zrcadla A a B. Cívkami A a B je pak impulsně zvýšeno \mathbf{B} a tudíž i v_\perp^2 . Ohřáté plazma pak může být převedeno do prostoru C-D dalším impulsem v cívice A, jímž se zvýší zrcadlový poměr. Impulsy v cívkách C a D potom plazma dále zkomprimují a zahřejí. Někdy se užívá i třetího stupně. Taková zařízení byla ve velkém měřítku instalována v kalifornském Livermoru v Lawrence Radiation Laboratory.

2.7 PŘEHLED DRIFTŮ GYRAČNÍHO STŘEDU

$$\text{Obecná síla } F \quad \mathbf{v}_f = \frac{1}{q} \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad [2-17]$$

$$\text{Elektrické pole} \quad \mathbf{v}_E = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad [2-15]$$

$$\text{Gravitační pole} \quad \mathbf{v}_g = \frac{m \mathbf{g} \times \mathbf{B}}{q B^2} \quad [2-18]$$

$$\text{Nehomogenní } E \quad \mathbf{v}_E = \left(1 + \frac{1}{4} r_L^2 \nabla^2\right) \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad [2-59]$$

Nehomogenní \mathbf{B} pole

$$\text{Grad-}B \text{ drift} \quad \mathbf{v}_{VB} = \pm \frac{1}{2} v_L r_L \frac{\mathbf{B} \times \nabla B}{B^2} \quad [2-24]$$

$$\text{Drift zakřivení} \quad \mathbf{v}_R = \frac{m v_{\parallel}^2}{q} \frac{\mathbf{R}_k \times \mathbf{B}}{R_k^2 B^2} \quad [2-26]$$

$$\text{Zakřivené vakuové pole} \quad \mathbf{v}_R + \mathbf{v}_{VB} = \frac{m}{q} (v_{\parallel}^2 + \frac{1}{2} v_L^2) \frac{\mathbf{R}_k \times \mathbf{B}}{R_k^2 B^2} \quad [2-30]$$

$$\text{Polarizační drift} \quad \mathbf{v}_p = \pm \frac{1}{\omega_c B} \frac{d\mathbf{E}}{dt} \quad [2-66]$$

2.8 ADIABATICKÉ INVARIANTY

Z klasické mechaniky je známo, že pro každý systém s periodickým pohybem je integrál akce přes jednu periodu $\oint p dq$ konstantou tohoto pohybu. p a q jsou zde zobecněný impuls a zobecněná souřadnice, jež se při pohybu opakují. Jestliže v systému dochází k pomalé změně, takže pohyb není zcela periodický, konstanta pohybu se nemění a nazýváme ji *adiabatický invariant*. Slovem pomalý zde rozumíme pomalý ve srovnání s periodou pohybu, takže integrál $\oint p dq$ je dobře definován, i když to už není přesně vzato integrál po uzavřené křivce. Adiabatické invarianty hrají ve fyzice plazmatu důležitou úlohu; v mnoha případech se složitými pohyby nám umožňují získat jednoduché odpovědi. Existují tři adiabatické invarianty, z nichž každý odpovídá jinému typu periodického pohybu.

2.8.1 První adiabatický invariant, μ

S veličinou

$$\mu = m v_{\perp}^2 / 2B$$

jsme se už setkali a dokázali jsme, že je v prostorově a časově proměnných B polích invariantní. Příslušným periodickým pohybem je samozřejmě

cyklotronní rotace. Jestliže za p dosadíme moment impulsu $m v_{\perp} r$ a za dq souřadnici $d\vartheta$, je integrál impulsu

$$\oint p dq = \oint m v_{\perp} r_L d\vartheta = 2\pi r_L m v_{\perp} = 2\pi \frac{m v_{\perp}^2}{\omega_c} = 4\pi \frac{m}{|q|} \mu. \quad [2-75]$$

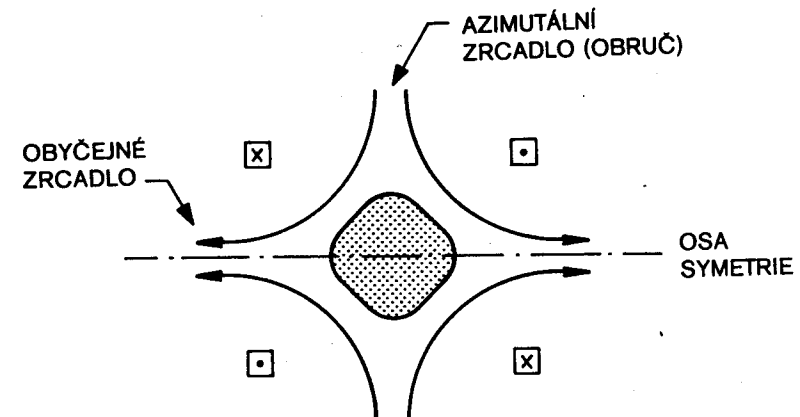
μ je tedy konstantou pohybu, pokud se nemění q/m . Dokázali jsme invariantnost μ jenom s tou implicitní podmínkou, že $\omega/\omega_c \ll 1$, kde ω je frekvence charakterizující rychlost změny B , jak ji vidí částice. Existuje však důkaz, že μ je invariantní i pro $\omega \leq \omega_c$. Řečeno s teoretiky, μ je invariantní „pro všechny řady v rozvoji podle ω/ω_c “. Prakticky to znamená, že během jedné periody rotace se μ mění mnohem méně než B .

Je právě tak důležité vědět, že *neexistuje* adiabatický invariant, jako kdy existuje. Adiabatická invariantnost μ je porušena, jestliže ω není ve srovnání s ω_c malé. Ukážeme tři případy, kdy k tomu dochází.

(A) *Magnetické čerpání*. Jestliže se v zrcadlovém systému sinusově mění intenzita B , bude oscilovat v_{\perp} částic; ale z hlediska delšího časového úseku částice neziskají žádnou energii. Dojde-li však ke srážce částic, poruší se invariantnost μ a plazma může být zahřáto. Zvláště částice srážející se během komprese může přeměnit část své rotační energie v energii spojenou s v_{\parallel} , a ta jí už není během expanzní fáze odňata.

(B) *Cyklotronní ohřev*. Představme si nyní, že B pole osciluje s frekvencí ω_c . Indukované elektrické pole se pak bude otáčet ve fázi s některými z částic a bude spojitě zrychlovat jejich larmorovský pohyb. Podmínka $\omega \ll \omega_c$ je porušena, μ není zachováno a plazma může být zahřáto.

(C) *Vstřícná zrcadla*. Jestliže v jedné z cívek jednoduchého systému zrcadel obrátíme proud, vznikne systém vstřícných zrcadel (obr. 2-14). Proti obyčejným zrcadlům má toto uspořádání navíc azimutální magnetické



Plazma držené ve vstřícných magnetických zrcadlech. OBR. 2-14

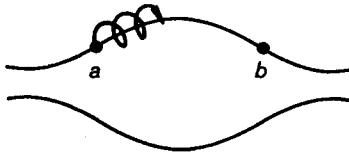
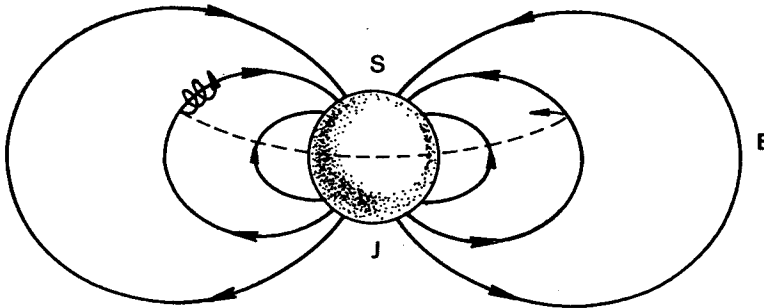
zrcadlo ve tvaru obruče. Plazma uzavřené v takovém přístroji by mělo být stabilnější než v obyčejném zrcadle. Žel ztráty únikovým kuželem jsou daleko větší, částečně proto, že vznikla dodatečná úniková oblast a částečně proto, že pohyb není adiabatický. Jelikož ve středu symetrie B pole vymizí, ω_c je tam nulové a μ se nezachovává. V blízkosti středu je lokální Larmorův poloměr větší než rozměry přístroje. Částice nacházející se v rychlostním prostoru mimo únikový kužel se může po projití neadiabatickou oblastí vynořit s v_{\perp}/v_{\parallel} uvnitř únikového kuželu. Přesnou trajektorii lze nalézt jedině pomocí samočinného počítače.

2.8.2 Druhý adiabatický invariant, J

Představme si částici uzavřenou mezi dvěma magnetickými zrcadly: odráží se od nich a vykonává tak periodický pohyb s určitou odrazovou frekvencí. Konstantou tohoto pohybu je $\oint mv ds$, kde ds je element dráhy (gyračního středu) podél siločáry. Protože však gyrační středy driftují napříč siločar, není tento pohyb přesně periodický a konstanta pohybu se stává adiabatickým invariantem. Nazývá se *podélný invariant** J a je definován pro půlku cyklu od jednoho místa odrazu do druhého (obr. 2-15)

$$J = \int_a^b v_{\parallel} ds$$

[2-76]

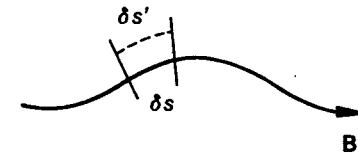
OBR. 2-15 Částice kmitající mezi body obrátky a a b v poli magnetických zrcadel.

OBR. 2-16 Pohyb nabité částice v magnetickém poli Země.

* též longitudinální invariant – pozn. překl.

Dokážeme, že v časově konstantním nehomogenním B poli je J invariantem; výsledek platí i pro pole měnící se pomalu s časem.

Dříve než se do tohoto poněkud zdoluhavého důkazu pustíme, probereme si jeden případ patřící k těm typům problémů, v nichž bude teorém o invariantnosti J užitečný. Jak jsme již viděli, magnetické pole Země zachycuje podobně jako zrcadla nabitě částice, které se pomalu driftově pohybují podél rovnoběžek okolo Země (úloha 2-5; viz obr. 2-16). Kdyby magnetické pole bylo naprosto symetrické, částice by se případně dostaly driftem zpět k téže silokřivce. Skutečné pole je však pokrivené takovými jevy, jako je sluneční vítr. Dostane se za takové situace nějaká částice vůbec kdy zpět k téže siločáře? Protože se energie částice zachovává a v místě obrátky je $\frac{1}{2}mv_{\perp}^2$, z invariantnosti μ plyne, že v místě obrátky je vždy stejné $|B|$. Při driftovém pohybu zpět by se na téže zeměpisné délce částice mohla nacházet na jiné siločáře, v jiné výšce. K tomu však nemůže dojít, zachovávala-li se J . J určuje délku siločáry mezi dvěma obrátkami a pro jednu zeměpisnou délku neexistují takové dvě siločáry, jejichž délka mezi dvěma body s týmž $|B|$ by byla stejná. Z toho plyne, že se i v slabě nesymetrickém poli částice vrátí k téže silokřivce.

Důkaz invariantnosti J . OBR. 2-17

Dokážeme invariantnost J . Nejprve ukážeme invariantnost výrazu $v_{\parallel} \delta s$, kde δs je úsek dráhy podél B (obr. 2-17). Následkem driftu gyračního středu bude částice nacházející se na s po jisté době Δt na jiné siločáře $\delta s'$. Délka $\delta s'$ je určena rovinami kolnými na B , procházejícími koncovými body úseku δs . Délka δs je zřejmě úměrná poloměru zakřivení

$$\frac{\delta s}{R_k} = \frac{\delta s'}{R'_k},$$

takže

$$\frac{\delta s' - \delta s}{\Delta t \delta s} = \frac{R'_k - R_k}{\Delta t R_k} \quad [2-77]$$

„Radiální“ složka rychlosti v_{gs} je tedy

$$v_{gs} \cdot \frac{R_k}{R_k} = \frac{R'_k - R_k}{\Delta t R_k} \quad [2-78]$$

Z rov. [2-24] a [2-26] dostáváme

$$v_{gs} = v_{VB} + v_R = \pm \frac{1}{2} v_{\perp} r_L \frac{\mathbf{B} \times \nabla B}{B^2} + \frac{mv_{\perp}^2}{q} \frac{R_k \times \mathbf{B}}{R_k^2 B^2} \quad [2-79]$$

Poslední člen nemá složku ve směru \mathbf{R}_k . Ujijeme rov. [2-78] a [2-79] a rov. [2-77] přepíšeme do tvaru

$$\frac{1}{\delta s} \frac{d}{dt} \delta s = \mathbf{v}_{gs} \cdot \frac{\mathbf{R}_k}{R_k^2} = \frac{1}{2} \frac{m}{q} \frac{v_{\perp}^2}{B^3} (\mathbf{B} \times \nabla B) \cdot \frac{\mathbf{R}_k}{R_k^2}. \quad [2-80]$$

To je rychlost změny δs , jak se jeví částici. Nyní musíme vypočítat rychlost změny složky v_{\parallel} , jak ji pozoruje částice. Energie rovnoběžného a energie kolmého pohybu jsou definovány

$$W \equiv \frac{1}{2} m v_{\parallel}^2 + \frac{1}{2} m v_{\perp}^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \mu B \equiv W_{\parallel} + W_{\perp}. \quad [2-81]$$

v_{\parallel} tedy můžeme napsat

$$v_{\parallel} = [(2/m)(W - \mu B)]^{1/2}. \quad [2-82]$$

V tomto výrazu jsou W a μ konstantní a mění se pouze B . Tudiž

$$\frac{\dot{v}_{\parallel}}{v_{\parallel}} = -\frac{1}{2} \frac{\mu \dot{B}}{W - \mu B} = -\frac{1}{2} \frac{\mu \dot{B}}{W_{\parallel}} = -\frac{\mu \dot{B}}{m v_{\parallel}^2}. \quad [2-83]$$

Protože jsme považovali B za časově konstantní, je \dot{B} nenulové jenom v důsledku pohybu gyračního středu

$$\dot{B} = \frac{dB}{dr} \frac{dr}{dt} = \mathbf{v}_{gs} \cdot \nabla B = \frac{m v_{\perp}^2}{q} \frac{\mathbf{R}_k \times \mathbf{B}}{R_k^2 B^2} \cdot \nabla B. \quad [2-84]$$

Tak dostáváme

$$\frac{\dot{v}_{\parallel}}{v_{\parallel}} = -\frac{\mu}{q} \frac{(\mathbf{R}_k \times \mathbf{B}) \cdot \nabla B}{R_k^2 B^2} = \frac{1}{2} \frac{m}{q} \frac{v_{\perp}^2}{B} \frac{(\mathbf{B} \times \nabla B) \cdot \mathbf{R}_k}{R_k^2 B^2}. \quad [2-85]$$

Relativní změna $v_{\parallel} \delta s$ je tedy

$$\frac{1}{v_{\parallel} \delta s} \frac{d}{dt} (v_{\parallel} \delta s) = \frac{1}{\delta s} \frac{d\delta s}{dt} + \frac{1}{v_{\parallel}} \frac{dv_{\parallel}}{dt}. \quad [2-86]$$

Z rovnic [2-80] a [2-85] je vidět, že se tyto dva členy zruší, takže

$$v_{\parallel} \delta s = \text{konstanta}. \quad [2-87]$$

To však není, přesně vzato, totožné s tvrzením, že J je konstantní. Při integraci $v_{\parallel} \delta s$ od jednoho bodu obrátky k druhému se může stát, že body obrátky na $\delta s'$ nekoincidují s průsečíky s kolmými rovinami (obr. 2-17). Avšak každá chyba v J , která z takové nepřesnosti vznikne, je zanedbatelná, protože v je v blízkosti bodů obrátky skoro nulové. Dokázali jsme tudíž, že

$$J = \int_a^b v_{\parallel} ds = \text{konstanta}. \quad [2-88]$$

Příkladem porušení invariantnosti J je metoda ohřevu plazmatu nazvaná *magnetické čerpání na průletové frekvenci*. Představme si, že cívky

zrcadlového systému jsou napájeny střídavým proudem, takže zrcadla se přibližně s průletovou frekvencí částice k sobě přibližují a vzdalují. Takové částice, které budou mít správnou průletovou frekvenci, se setkají vždycky s přibližujícím se zrcadlem a jejich v_{\parallel} poroste. V tomto případě se J nezachovává, protože změna \mathbf{B} se už nejeví jako pomalá ve srovnání s dobou mezi dvěma odrazy od zrcadel.

Třetí adiabatický invariant, ϕ 2.8.3

Vraťme se k obr. 2-16. Pomalý drift gyračního středu kolem Země představuje třetí typ periodického pohybu. Ukazuje se, že adiabatickým invariantem s tímto pohybem spojeným je celkový magnetický tok ϕ plochou obemknutou touto driftovou drahou. Je celkem zřejmé, že jak se \mathbf{B} bude měnit, bude se částice držet při takovém povrchu, že celkový počet obemknutých siločar zůstane konstantní. Invariant ϕ zřídka nachází uplatnění, protože většina fluktuací \mathbf{B} není v časovém měřítku krátká ve srovnání s periodou driftu. Jako příklad porušení invariantnosti ϕ můžeme citovat jistou práci z nedávné doby, pojednávající o excitaci hydromagnetických vln v ionosféře. Tyto vlny mají dlouhou periodu ve srovnání s dobou driftu částice okolo Země. Částice tedy může potkávat takovou vlnu pokaždé v téže fázi. Při vhodné fázi se bude energie driftu částice přeměňovat v energii vln a vlna bude buzena.

2-8. Odvoďte výsledek úlohy 2-7(b) přímo užitím invariantnosti J .

(a) Označte $\int v_{\parallel} ds \approx v_{\parallel} L$ a derivujte podle času.

(b) Z toho vyjádřete T pomocí dL/dt . Odpověď obdržíte, položíte-li $dL/dt = -2v_{\perp}$.

2-9. Při ohřevu plazmatu adiabatickou kompresí invariantnost μ vyžaduje, aby se KT_{\perp} zvětšovalo s růstem B . Magnetické pole však nemůže částice urychlovat, protože Lorentzova síla $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ je vždycky kolmá na rychlost. Jak tedy částice energii získávají?

ÚLOHY

Kapitola třetí

PLAZMA JAKO SMĚS TEKUTIN

3.1 ÚVOD

Situace v plazmatu je daleko komplikovanější, než jak jsme ji popsali v předchozí kapitole. \mathbf{E} a \mathbf{B} pole nejsou předem dána, ale určují je rozmístění a pohyby samotných částic. Musíme řešit self-konzistentní* problém, tzn. musíme nalézt soubor trajektorií částic a konfigurací polí tak, aby tato pole byla vytvářena částicemi při jejich orbitálním pohybu a aby částice byly těmito poli nuceny pohybovat se právě v těchto orbitech. A to vše se mění s časem!

Řekli jsme si, že typické hustoty plazmatu jsou asi 10^{18} iontově elektronových párů v m^3 . Kdyby se každá z těchto částic pohybovala po složité trajektorii a bylo by nezbytné vysledovat každou z nich, byla by předpověď chování plazmatu úlohou bez naděje na úspěch. Naštěstí to obvykle není nutné, protože překvapivou většinu – snad až 80% – jevů pozorovaných v reálných experimentech můžeme vysvětlit dosti hrubým modelem. Je to model užívaný mechanikou tekutin; nehledí se v něm na identitu jednotlivé částice a sleduje se pouze pohyb elementů tekutiny. V případě plazmatu tato tekutina ovšem obsahuje elektrické náboje. V obvyklé tekutině se částice navzájem velmi rychle srážejí a udržují tak při pohybu objemový element tekutiny pohromadě. Je až překvapující, že tento model vyhovuje i pro plazma, v němž dochází ke srážkám obvykle daleko méně často. Ale ukážeme si, že to má svou příčinu.

Tato kniha se z větší části věnuje tomu, co vyplývá z teorie tekutin aplikované na plazma. Vytříbenější přístup – kinetická teorie plazmatu –

* self-consistent = (angl.) sám se sebou se shodující – pozn. překl.

se neobejde bez množství výpočtů a nehodí se proto pro úvodní kurs. Úvod do kinetické teorie je podán v kapitole 7.

V některých případech není ani teorie tekutin, ani kinetická teorie schopná popsat chování plazmatu, a pak je nutno přistoupit k oné únavné práci sledovat trajektorie jednotlivých částic. S moderními samočinnými počítači je to možné, jejich paměť však stačí na uložení souřadnic polohy a rychlosti jenom pro přibližně 10^4 částic a až na výjimky lze řešit pouze jedno nebo dvourozměrné problémy. Nicméně simulační metody začaly v nedávné době hrát důležitou roli a vyplňují mezeru mezi teorií a experimentem v té oblasti, kde se ani kinetická teorie nemůže dostat blíže k vysvětlení pozorovaných jevů.

VZTAH FYZIKY PLAZMATU 3.2 K OBYČEJNÉ TEORII ELEKTROMAGNETISMU

Maxwellovy rovnice 3.2.1

Ve vakuu

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \sigma, \quad [3-1]$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}, \quad [3-2]$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad [3-3]$$

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j} + \dot{\mathbf{E}}. \quad [3-4]$$

V hmotném prostředí

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \sigma, \quad [3-5]$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}, \quad [3-6]$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad [3-7]$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \dot{\mathbf{D}}, \quad [3-8]$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad [3-9]$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \quad [3-10]$$

σ a \mathbf{j} v rov. [3-5] a [3-8] znamenají hustotu „volného“ náboje a proudu. „Vázaný“ náboj a proud vznikající polarizací a magnetizací prostředí jsou zahrnuti v definici veličin \mathbf{D} a \mathbf{H} prostřednictvím ε a μ . V plazmatu odpovídají těmto „vázaným“ nábojům a proudům ionty a elektrony; protože se však tyto náboje pohybují komplikovaným způsobem, bylo by nepraktické snažit se zahrnout všechny tyto efekty do dvou konstant ε a μ . Ve fyzice plazmatu se proto obvykle pracuje s rovnicemi pro vakuum [3-1]–[3-4], v nichž σ a \mathbf{j} zahrnují všechny náboje a proudy, vnější i vnitřní.

Povšimněme si, že jsme v rovnicích pro vakuum užili \mathbf{E} a \mathbf{B} a nikoliv \mathbf{D} a \mathbf{H} . To proto, že skutečně měřitelné veličiny, síly $q\mathbf{E}$ a $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$, závisí na \mathbf{E} a \mathbf{B} a nikoliv na \mathbf{D} a \mathbf{H} , a to i tam, kde $\varepsilon = \varepsilon_0$ a $\mu = \mu_0$.

3.2.2 Magnetické látky v klasickém pojetí

Protože každá rotující částice má magnetický moment, mohlo by se zdát, že by bylo logické považovat plazma za magnetickou látku s permeabilitou μ_m . (Připsali jsme k permeabilitě písmenko m, abychom ji odlišili od adiabatického invariantu μ .) Abychom poznali, proč se takto nepřestupuje, připomeňme si, jakým způsobem se magnetické látky obvykle popisují.

Feromagnetické domény např. kousku železa mají magnetické momenty μ_i , jež vedou ke vzniku objemové magnetizace

$$\mathbf{M} = \frac{1}{V} \sum \mu_i \quad [3-11]$$

v jednotce objemu. Její účinek je týž jako účinek vázaného proudu o hustotě

$$\mathbf{j}_m = \nabla \times \mathbf{M}. \quad [3-12]$$

V rovnici [3-4] pro vakuum musíme do \mathbf{j} zahrnout jak tento proud, tak i „volný“, neboli vtištěný proud \mathbf{j}_v

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j}_v + \mathbf{j}_m + \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}}. \quad [3-13]$$

Rovnici [3-13] chceme zapsat v jednoduchém tvaru

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_v + \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}}, \quad [3-14]$$

kde by \mathbf{j}_m bylo zahrnuto v definici \mathbf{H} . Toho docílíme položením

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}. \quad [3-15]$$

Abychom dostali jednoduchý vztah mezi \mathbf{B} a \mathbf{H} , předpokládejme, že \mathbf{M} je úměrné \mathbf{B} , neboli \mathbf{H}

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}. \quad [3-16]$$

Konstantu χ_m nazýváme magnetickou susceptibilitou. Tak dostáváme

$$\mathbf{B} = \mu_0(1 + \chi_m) \mathbf{H} \equiv \mu_m \mathbf{H}. \quad [3-17]$$

Tento jednoduchý vztah mezi \mathbf{B} a \mathbf{H} je umožněn lineárním tvarem rovnice [3-16].

V plazmatu v magnetickém poli má každá částice magnetický moment μ_a a veličina \mathbf{M} je součtem všech těchto momentů v objemové jednotce. Víme ale, že

$$\mu_a = \frac{mv_{\perp a}^2}{2B} \sim \frac{1}{B}, \quad M \sim \frac{1}{B}.$$

Vztah mezi \mathbf{M} a \mathbf{H} či \mathbf{B} už není lineární a nemůžeme psát $\mathbf{B} = \mu_m \mathbf{H}$ s konstantním μ_m . Bylo by proto bez užítu považovat plazma za magnetické prostředí.

Dielektrika v klasickém pojetí 3.2.3

Polarizace \mathbf{P} v jednotce objemu je součtem všech momentů elektrických dipólů \mathbf{p}_i . Tak vznikne vázaný náboj o hustotě

$$\sigma_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}. \quad [3-18]$$

V rovnici [3-1] pro vakuum musíme započíst vázaný i volný náboj

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \sigma_v + \sigma_p. \quad [3-19]$$

Chceme to zapsat v jednoduchém tvaru

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \sigma_v, \quad [3-20]$$

kde by σ_p bylo zahrnuto v definici \mathbf{D} . Toho docílíme položením

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \equiv \varepsilon \mathbf{E}. \quad [3-21]$$

Je-li \mathbf{P} lineárně úměrné \mathbf{E}

$$\mathbf{P} = \chi_e \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad [3-22]$$

pak je ε konstanta daná výrazem

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_0 \chi_e = \varepsilon_0(1 + \chi_e) \equiv \varepsilon_0 \varepsilon_r, \quad [3-23]$$

kde ε_r se nazývá poměrná dielektrická konstanta. Neexistuje *a priori* důvod, proč by vztah [3-22] neměl v plazmatu platit, pokusíme se tedy odvodit výraz pro ε v tomto prostředí.

Dielektrická konstanta plazmatu 3.2.4

V oddíle 2.5 jsme si ukázali, že fluktuující pole \mathbf{E} vede ke vzniku polarizačního proudu \mathbf{j}_p a ten zase ke vzniku polarizačního náboje, jenž je dán rovnicí kontinuity

$$\frac{\partial \sigma_p}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_p = 0. \quad [3-24]$$

Tento vztah je ekvivalentní rovnici [3-18], ale jak jsme už dříve upozornili, k polarizaci v plazmatu nedojde, dokud se elektrické pole nemění s časem. Protože pro \mathbf{j}_p máme explicitní výraz a pro σ_p nikoliv, je výhodnější pracovat se čtvrtou Maxwellovou rovnicí [3-4]

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} = (\mathbf{j}_v + \mathbf{j}_p) + \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}}. \quad [3-25]$$

Chceme to zapsat ve tvaru

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j}_v + \varepsilon \dot{\mathbf{E}}, \quad [3-26]$$

čehož docílíme dosazením

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{j_p}{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r. \quad [3-27]$$

Z rovnice [2-67] pro j_p dostáváme

$$\varepsilon_r = 1 + \frac{q}{\varepsilon_0 B^2} \quad [3-28]$$

To je nízkofrekvenční poměrná dielektrická konstanta plazmatu pro příčné pohyby. Uvedené vymezení je nezbytné, protože náš výraz pro j_p platí jenom pro $\omega^2 \ll \omega_c^2$ a pro \mathbf{E} kolmé na \mathbf{B} . Obecný výraz pro ε_r je ovšem velmi složitý a stěží by se vešel na jednu stránku.

Všimněme si, že pro $q \rightarrow 0$ se poměrná dielektrická konstanta ε_r správně blíží jedné, tj. hodnotě, kterou má ve vakuu; rovněž pro $B \rightarrow \infty$ se ε_r blíží jedné, to proto, že polarizační drift \mathbf{v}_p mizí, tím mizí i odezva pohybu částic na příčné elektrické pole. Druhý člen v rov. [3-28] je v běžném laboratorním plazmatu velký ve srovnání s jednou. Je-li např. $n = 10^6 \text{ m}^{-3}$ a $B = 0,1 \text{ T}$, dostáváme pro vodík

$$\frac{q}{\varepsilon_0 B^2} = \frac{(10^{16})(1,67 \times 10^{-27})}{(8,85 \times 10^{-12})(10^{-2})} = 189.$$

To znamená, že elektrické pole vzbuzené nabitými částicemi plazmatu podstatně mění pole přiložené z vnějšku. Plazma s velkým ε_r odstíní střídavé pole, podobně jako plazma s malým λ_D odstíní stejnosměrné pole.

ÚLOHY 3-1. Z Poissonovy rovnice [3-1], rovnice kontinuity [3-24] a z rovnice [2-67] odvoďte nízkofrekvenční dielektrickou konstantu (výraz [3-28]) pro homogenní plazma tím, že položíte $\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla(\varepsilon \mathbf{E}) = 0$.

3-2. Iontovou cyklotronovou frekvenci označme Ω_c a plazmovou frekvenci iontů definujeme

$$\Omega_p = (ne^2/M\varepsilon_0)^{1/2},$$

kde M je hmotnost iontu. Za jakých podmínek bude platit, že dielektrická konstanta ε_r se rovná přibližně Ω_p^2/Ω_c^2 ?

3.3 POHYBOVÁ ROVNICE TEKUTINY

Maxwellovy rovnice nám dávají odpověď na otázku, jaká \mathbf{E} a \mathbf{B} pole vzniknou při daném stavu plazmatu. Abychom mohli řešit self-konzistentní problém, musíme mít ještě rovnici, která popíše odpověď plazmatu na

daná \mathbf{E} a \mathbf{B} . V tekutinovém přiblížení vycházíme z představy, že se plazma skládá ze dvou nebo více vzájemně se prostupujících tekutin; každému druhu částic přísluší jedna tekutina. V nejjednodušším případě, kdy je v plazmatu jenom jeden druh iontů, budeme potřebovat pohybové rovnice pro dvě tekutiny, jednu pro tekutinu kladně nabitých iontů a jednu pro tekutinu záporně nabitých elektronů. V částečně ionizovaném plynu budeme potřebovat ještě rovnici pro tekutinu neutrálních atomů. K vzájemnému působení mezi tekutinou neutrálních částic na jedné straně a ionty a elektrony na straně druhé bude docházet jenom prostřednictvím srážek. Tekutiny iontů a elektronů budou na sebe působit i tehdy, kdy ke srážkám nedochází, prostřednictvím \mathbf{E} a \mathbf{B} polí, která samy vytvářejí.

Konvektivní derivace 3.3.1

Pohybová rovnice pro jednu částici je

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad [3-29]$$

Předpokládejme nejprve, že nedochází ke srážkám a že neexistují tepelné pohyby. Pak se všechny částice v objemovém elementu tekutiny pohybují společně a střední rychlost \mathbf{u} částic v elementu je táž, jako rychlost jednotlivé částice \mathbf{v} . Rovnici pro tekutinu dostaneme jednoduše vynásobením rov. [3-29] hustotou n

$$mn \frac{d\mathbf{u}}{dt} = qn(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad [3-30]$$

Tento tvar však není pro náš účel vhodný. V rovnici [3-29] se časová derivace vztahuje na souřadný systém pohybující se s částicí. My ale naopak potřebujeme rovnici pro elementy tekutiny, které jsou v prostoru pevné; jiný postup by byl nepraktický. Představme si, že elementem tekutiny je kapka smetany v šálku s kávou. Při míchání se kapka pokříví, protáhne do vláken a konečně se rozptýlí po celém šálku a ztratí svou identitu. Element tekutiny na pevném místě v šálku však svoji identitu zachovává, i když do něj částice spojitě vcházejí a zase vycházejí ven.

Provedme transformaci do proměnných v pevném souřadném systému. Libovolnou vlastnost tekutiny v jednorozměrném prostoru se souřadnicí x označme $\mathbf{G}(x, t)$. Časová změna \mathbf{G} v souřadném systému pohybujícím se s tekutinou se vyjádří dvěma členy

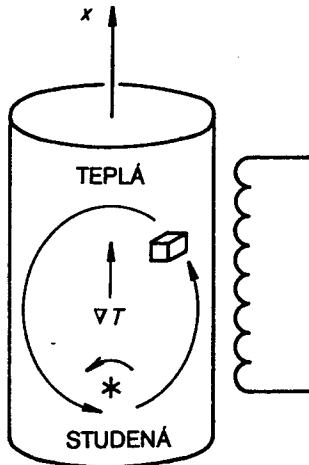
$$\frac{d\mathbf{G}(x, t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} + u_x \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x}. \quad [3-31]$$

Prvý člen vpravo představuje změnu \mathbf{G} v pevném bodě v prostoru, druhý vyjadřuje změnu \mathbf{G} , jak by ji zaznamenal pozorovatel pohybující se s teku-

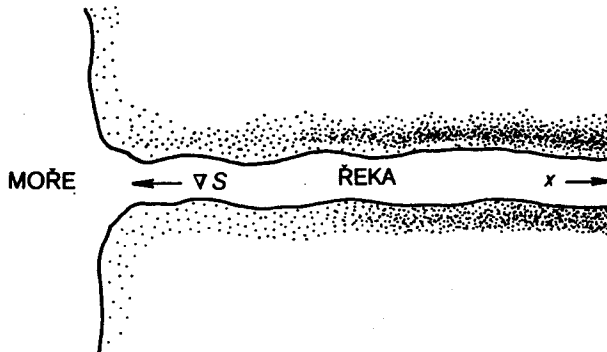
tinou do oblasti, v níž má G odlišnou hodnotu. V trojrozměrném prostoru má rov. [3-31] obecnější tvar

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) G. \quad [3-32]$$

Tento výraz nazýváme *konvektivní derivací* a někdy ho zapisujeme DG/Dt . Všimněme si, že $(\mathbf{u} \cdot \nabla)$ je *skalární* diferenciální operátor. Poněvadž znaménko tohoto členu je někdy zdrojem nedorozumění, ozřejmíme si je na dvou jednoduchých příkladech.



OBR. 3-1 Pohyb elementů tekutiny v ohřivači vody.



OBR. 3-2 Směr gradientu slanosti při ústí řeky.

Na obrázku 3-1 je elektrický ohřivač vody, v němž horká voda stoupá vzhůru a chladná klesá ke dnu. Nechť $G(x, t)$ je teplota T , ∇G pak míří vzhůru. Sledujme element tekutiny v blízkosti stěny nádoby. Je-li topné těleso zapnuto, je element tekutiny při pohybu zahříván a platí $dT/dt > 0$.

Jestliže navíc vrtulka rozproudí tekutinu tak, jak je naznačeno na obrázku, sníží se teplota v *pevném* elementu tekutiny konvekcí chladné vody zespoda. V tom případě je $\partial T/\partial x > 0$ a $u_x > 0$, tzn. $\mathbf{u} \cdot \nabla T > 0$. Změna teploty v pevném elementu $\partial T/\partial t$ je výsledkem těchto dvou procesů působících proti sobě

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{dT}{dt} - \mathbf{u} \cdot \nabla T. \quad [3-33]$$

Je zřejmé, že alespoň po nějakou krátkou dobu může být $\partial T/\partial t$ rovno nule.

V druhém příkladu považujeme G za míru slanosti vody S v blízkosti ústí řeky (obr. 3-2). Je-li x směr proti proudu, je normální gradient S takový, že $\partial S/\partial x < 0$. Při přílivu se celé rozhraní mezi slanou a čerstvou vodou posune proti proudu, $u_x > 0$. Potom

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -u_x \frac{\partial S}{\partial x} > 0 \quad [3-34]$$

a to znamená, že slanost vzrůstá v každém místě. Při dešti se ovšem slanost všude zmenšuje a ke střední části rov. [3-34] musíme přičíst záporný člen dS/dt .

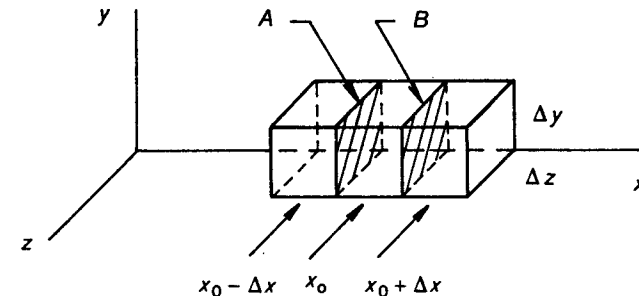
V případě plazmatu vezměme za G rychlost tekutiny \mathbf{u} a zapišme rov. [3-30] takto

$$m n \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = q n (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}), \quad [3-35]$$

kde $\partial \mathbf{u}/\partial t$ je derivace podle času v pevném souřadném systému.

Tenzor napětí 3.3.2

Vezmeme-li v úvahu i tepelný pohyb, musíme k pravé straně rov. [3-35] přidat tlakovou sílu. Tato síla vzniká chaotickým pohybem částic směrem do elementu tekutiny a ven z něj a v rovnici pro jednu částici nevystupuje. Nechť element tekutiny $\Delta x \Delta y \Delta z$ má střed v bodě $(x_0, \frac{1}{2}\Delta y, \frac{1}{2}\Delta z)$ (obr. 3-3).



Elementy tekutiny — k výkladu tenzoru napětí. OBR. 3-3

Pro jednoduchost budeme uvažovat jenom x -ovou složku pohybu ploškami A a B. Počet částic, jež za vteřinu projdou ploškou A rychlostí v_x , je

$$\Delta n_v v_x \Delta y \Delta z,$$

kde Δn_v je počet částic v jednotce objemu, jež mají rychlost v_x

$$\Delta n_v = \Delta v_x \iiint f(v_x, v_y, v_z) dv_y dv_z.$$

Hybnost každé z částic je mv_x . O hustotě n a teplotě KT v každém z elementů předpokládáme, že se vztahují ke středu elementů. Hybnost P_{A+} vcházející ploškou A do elementu v místě x_0 je tedy

$$P_{A+} = \sum \Delta n_v m v_x^2 \Delta y \Delta z = \Delta y \Delta z [m \overline{v_x^2} \cdot \frac{1}{2} n]_{x_0 - \Delta x}. \quad [3-36]$$

Sečtením přes všechna Δn_v dostaneme střední hodnotu $\overline{v_x^2}$ přes celé rychlostní rozdělení. Faktor $\frac{1}{2}$ zde vystupuje proto, že jenom polovina částic v elementu v místě $x_0 - \Delta x$ směřuje směrem k plošce A. Podobně hybnost přenášená ploškou B je

$$P_{B+} = \Delta y \Delta z [m \overline{v_x^2} \cdot \frac{1}{2} n]_{x_0}.$$

Čistý zisk x -ové složky hybnosti od částic pohybujících se doprava je

$$\begin{aligned} P_{A+} - P_{B+} &= \Delta y \Delta z \cdot \frac{1}{2} m ([n \overline{v_x^2}]_{x_0 - \Delta x} - [n \overline{v_x^2}]_{x_0}) \\ &= \Delta y \Delta z \cdot \frac{1}{2} m (-\Delta x) \frac{\partial}{\partial x} (n \overline{v_x^2}). \end{aligned} \quad [3-37]$$

Tento výsledek se zdvojnásobí příspěvkem částic pohybujících se doleva, jež nesou sice zápornou x -ovou hybnost, ale také se pohybují opačným směrem vzhledem ke gradientu $n \overline{v_x^2}$. Úplná změna hybnosti elementu tekutiny v místě x_0 je tedy

$$\frac{\partial}{\partial t} (n m u_x) \Delta x \Delta y \Delta z = -m \frac{\partial}{\partial x} (n \overline{v_x^2}) \Delta x \Delta y \Delta z. \quad [3-38]$$

Rozložme rychlost částice v_x na dvě komponenty

$$v_x = u_x + v_{xt}, \quad u_x = \bar{v}_x,$$

kde u_x je rychlost tekutiny a v_{xt} je chaotická tepelná rychlost. Pro jednorozměrné Maxwellovo rozdělení máme podle rov. [1-7]

$$\frac{1}{2} m \overline{v_{xt}^2} = \frac{1}{2} K T \quad [3-39]$$

a rovnice [3-38] dostává tvar

$$\frac{\partial}{\partial t} (n m u_x) = -m \frac{\partial}{\partial x} [n (\overline{u_x^2} + 2 \overline{u_x v_{xt}} + \overline{v_{xt}^2})] = -m \frac{\partial}{\partial x} \left[n \left(u_x^2 + \frac{K T}{m} \right) \right].$$

Po partiálním derivováním

$$m n \frac{\partial u_x}{\partial t} + m u_x \frac{\partial n}{\partial t} = -m u_x \frac{\partial (n u_x)}{\partial x} - m n u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} (n K T) \quad [3-40]$$

a použijeme-li rovnici kontinuity

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (n u_x) = 0, \quad [3-41]$$

zruší se členy nejbližší rovníčka na obou stranách rovnice [3-40]. Definujeme-li tlak

$$p \equiv n K T \quad [3-42]$$

dostáváme konečně

$$m n \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x}. \quad [3-43]$$

To je známá síla způsobená gradientem tlaku. Přičtením elektromagnetických sil a zobecněním na tři dimenze dostáváme rovnici pro pohyb tekutiny

$$m n \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = q n (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \nabla p. \quad [3-44]$$

To, co jsme odvodili, je pouze speciální případ: přenos x -ové složky hybnosti pohybem v x -ovém směru; přitom jsme tekutinu považovali za izotropní, takže týž výraz platí i pro y -ový a z -ový směr. Je však možné například i to, aby y -ová složka hybnosti byla přenášena pohybem v x -ovém směru. Předpokládejme, že u_x je nulové v rovnoběžnostěnu $x = x_0$ na obr. 3-3, ale je kladné po obou stranách. Když se potom částice ploškami A a B stěhují tím i oním směrem, přinášejí větší kladnou y -ovou složku, než odnášejí a element tekutiny tak získává hybnost v y -ovém směru. Toto *střížné napětí* nemůžeme vyjádřit jako skalár p , ale musíme je chápat jako tenzor \mathbf{P} , tenzor napětí*, jehož složky $P_{ij} = m n v_i v_j$ udávají směr pohybu i složku hybnosti. V obecném případě se člen $-\nabla p$ nahradí výrazem $-\nabla \cdot \mathbf{P}$.

Nebudeme zde uvádět tenzor napětí v obecném tvaru, zmíníme se jenom o dvou nejjednodušších případech. Je-li rozdělovací funkce izotropní maxwellovská, má \mathbf{P} tvar

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} \quad [3-45]$$

* Termín *napětí* pochází z nauky o pružnosti, tj. byl zvolen pro popis pevných látek. Představa „napínání“ není pro plyn – tedy ani pro plazma – právě nejvýstižnější. Krom toho se tu pojem *napětí* střetává s *elektrickým napětím*. Přesto užíváme tyto termíny, protože je to v české literatuře běžné. Pozornější čtenář zmaten nebude už proto, že první termín se vyskytuje jenom ve spojení *tenzor napětí* – pozn. překl.

a $\nabla \cdot \mathbf{P}$ je právě ∇p . V oddíle 1.3 jsme hovořili o tom, že v přítomnosti magnetického pole může plazma mít dvě teploty T_{\perp} a T_{\parallel} . V takovém případě existují i dva tlaky $p_{\perp} = nKT_{\perp}$ a $p_{\parallel} = nKT_{\parallel}$. Tenzor napětí je potom

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & p_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & p_{\parallel} \end{pmatrix}, \quad (3-46)$$

kde souřadnice třetího řádku či sloupce je ve směru \mathbf{B} . Matice je stále diagonální a v rovině kolmé na \mathbf{B} vykazuje izotropii.

V obyčejné tekutině se mimodiagonální složky většinou týkají viskozity. Jestliže se částice srážejí, opouštějí element se střední rychlostí ve směru rychlosti tekutiny \mathbf{u} v bodě, kde došlo k poslední srážce. Tato hybnost se v příští srážce přenesení na jiný element tekutiny. Tento proces směřuje k vyrovnávání \mathbf{u} v různých bodech a to, co intuitivně chápeme jako viskozitu, je výsledný odpor střížnému toku. Čím větší je střední volná dráha, tím dále se hybnost přenáší a tím větší je viskozita. V plazmatu existuje podobný jev, který se objevuje i tehdy, kdy ke srážkám nedochází. Larmorovou rotací se částice (zejména ionty) dostávají do odlišných částí plazmatu a snaží se vyrovnat tam rychlosti tekutiny. Velikost této bezsrážkové viskozity je tedy určována Larmorovým poloměrem a nikoliv střední volnou dráhou. Tento efekt konečného Larmorova poloměru se přičítá ke srážkové viskozitě a má úzký vztah k driftu \mathbf{v}_E v nehomogenním \mathbf{E} poli (rov. [2-58]).

3.3.3 Srážky

Je-li kromě nabitě tekutiny přítomen i neutrální plyn, vyměňují si ve vzájemných srážkách hybnost. Úbytek hybnosti připadající na jednu srážku je úměrný relativní rychlosti $\mathbf{u} - \mathbf{u}_0$, kde \mathbf{u}_0 je rychlost neutrální tekutiny. Jestliže τ , průměrná doba mezi srážkami, je přibližně konstantní, můžeme výslednou sílu zhruba zapsat $-m\mathbf{n}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0)/\tau$. Pohybovou rovnicí [3-44] zobecníme, aby obsahovala anizotropní tlak a neutrální srážky

$$m\mathbf{n} \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = qn(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \nabla \cdot \mathbf{P} - \frac{m\mathbf{n}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0)}{\tau}. \quad (3-47)$$

Srážky mezi nabitými částicemi zde nejsou vyjádřeny, o nich pojednáme v 5. kapitole.

3.3.4 Srovnání s obyčejnou hydrodynamikou

Pro obyčejné tekutiny platí rovnice Navierova–Stokesova

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla p + \rho \nu \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (3-48)$$

Je to též rovnice jako rovnice plazmatu [3-47] bez elektromagnetických sil a bez srážek mezi různými druhy částic (jde jenom o jeden druh). Viskózní člen $\rho \nu \nabla^2 \mathbf{u}$, kde ν je kinematický koeficient viskozity, je právě srážková část $\nabla \cdot \mathbf{P} - \nabla p$ v nepřítomnosti magnetických polí. Rovnice [3-48] popisuje tekutinu, v níž dochází k častým srážkám mezi částicemi. Rovnice [3-47] však byla odvozena bez jakéhokoliv explicitního výroku o srážkách. Jsou-li tedy tyto dvě rovnice identické až na členy s \mathbf{E} a \mathbf{B} , může rovnice [3-47] opravdu plazma popsat? Odpovědí je opatrné ano a jeho zdůvodněním si ozřejmíme, čím je vymežována použitelnost teorie popisující plazma jako tekutinu.

Při odvozování rov. [3-47] jsme ve skutečnosti implicitně předpokládali, že ke srážkám dochází, a sice v rov. [3-39], když jsme rozdělovací funkci považovali za maxwellovskou. Takové rozdělení se obyčejně ustaví jako výsledek častých srážek. Tento předpoklad jsme však užili jenom k vyjádření střední hodnoty v_{xi}^2 . Jakékoliv jiné rozdělení s touž střední hodnotou by nám dalo stejnou odpověď. Teorie tekutin není tedy příliš citlivá k odchylkám od maxwellovského rozdělení, i když existují případy, v nichž tyto odchylky důležité jsou. Pak se musí užít kinetická teorie.

Empirické pozorování, které provedl Irving Langmuir, rovněž mluví ve prospěch tekutinové teorie. Při práci s elektrostatickou sondou, která je po něm pojmenována, Langmuir zjistil, že rozdělovací funkce elektronů se shoduje s Maxwellovým rozdělením daleko víc, než lze vysvětlit srážkami. Tento jev, nazývaný *Langmuirův paradox*, se někdy připisuje vysokofrekvenčním oscilacím. Uspokojivé řešení tohoto paradoxu neznáme, ale snad je to jeden z těch mála případů ve fyzice plazmatu, kdy příroda pracuje v náš prospěch.

Jinou příčinou toho, že tekutinový model je vhodný pro plazma, je skutečnost, že magnetické pole, pokud je přítomno, hraje v jistém smyslu roli srážek. Kdyby částice byla urychlována např. polem \mathbf{E} , zvyšovala by neustále svou rychlost, kdyby jí to bylo dovoleno, jako při volném pádu. Dochází-li však k častým srážkám, dosáhne částice limitní rychlosti úměrné \mathbf{E} . Například elektrony v měděném drátu se společně pohybují driftovou rychlostí $\mathbf{v} = \mu \mathbf{E}$, kde μ je pohyblivost. Magnetické pole rovněž omezuje zvyšování rychlosti tím, že nutí částice, aby kroužily v Larmorových orbitech. Elektrony v plazmatu se také společně pohybují rychlostí úměrnou \mathbf{E} , a to driftovou rychlostí $\mathbf{v}_E = \mathbf{E} \times \mathbf{B}/B^2$. V tomto smyslu se plazma chová jako tekutina s četnými srážkami. Ve směru podél magnetických siločar pohyb částic ovšem nijak omežován není a představa tekutiny se pro něj nijak zvlášť nehodí. *Teorie tekutin je dobrým přiblížením pro pohyby kolmé na \mathbf{B} .*

Rovnice kontinuity 3.3.5

Ze zákona o zachování hmoty plyne, že celkový počet částic N v objemu V se může měnit jedině tehdy, jestliže je nenulový výsledný tok částic plo-

chou S ohraničující tento objem. Jelikož hustota toku částic je nu , dostáváme ze Stokesova teorému

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \int_V \frac{\partial n}{\partial t} dV = - \oint_S nu \cdot dS = - \int_V \nabla \cdot (nu) dV. \quad [3-49]$$

Protože tento vztah musí platit pro jakýkoliv objem V , musí si být rovny integrované výrazy

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (nu) = 0. \quad [3-50]$$

Takováto rovnice kontinuity existuje pro každý druh částic. Jakýkoliv vznik či zánik částic musíme přičíst k pravé straně rovnice.

3.3.6 Stavová rovnice

Abychom systém rovnic uzavřeli, potřebujeme ještě jeden vztah. Pro ten účel můžeme užít termodynamickou stavovou rovnici, která vyjadřuje vztah mezi p a n

$$p = Cq^\gamma, \quad [3-51]$$

kde C je konstanta a γ je poměr specifických tepel C_p/C_v . Člen ∇p lze tedy vyjádřit takto

$$\frac{\nabla p}{p} = \gamma \frac{\nabla n}{n}. \quad [3-52]$$

Pro izotermickou kompresi máme

$$\nabla p = \nabla(nKT) = KT \nabla n$$

a z toho je zřejmé, že $\gamma = 1$. Při adiabatické kompresi se bude měnit i KT a pro γ dostaneme hodnotu větší než jedna. Jestliže N je počet stupňů volnosti, je γ dáno výrazem

$$\gamma = (2 + N)/N. \quad [3-53]$$

Má-li platit stavová rovnice, musí být tepelný tok zanedbatelný, tzn. tepelná vodivost musí být malá. A to je opět daleko lépe splněno ve směrech kolmých na \mathbf{B} , než ve směru s ním rovnoběžném. Naštěstí pro přiměřený popis většiny základních jevů vystačíme s hrubým vztahem [3-51].

3.3.7 Úplná soustava rovnic pro tekutinu

Nechť má plazma pro jednoduchost jenom dva druhy částic: ionty a elektrony; rozšíření na více druhů je zcela prosté. Hustota náboje a proudová hustota jsou potom dány výrazy

$$\begin{aligned} \sigma &= n_i q_i + n_e q_e, \\ \mathbf{j} &= n_i q_i \mathbf{v}_i + n_e q_e \mathbf{v}_e. \end{aligned} \quad [3-54]$$

Protože už se nebudeme zabývat pohyby jednotlivé částice, můžeme pro rychlost tekutiny užít symbolu \mathbf{v} místo \mathbf{u} . Zanedbáme srážky a viskozitu. Rovnice [3-1]–[3-4], [3-44], [3-50] a [3-51] vytvářejí následující soustavu

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = n_i q_i + n_e q_e, \quad [3-55]$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}, \quad [3-56]$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad [3-57]$$

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} = n_i q_i \mathbf{v}_i + n_e q_e \mathbf{v}_e + \dot{\mathbf{E}}, \quad [3-58]$$

$$m_j n_j \left[\frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial t} + (\mathbf{v}_j \cdot \nabla) \mathbf{v}_j \right] = q_j n_j (\mathbf{E} + \mathbf{v}_j \times \mathbf{B}) - \nabla p_j, \quad j = i, e, \quad [3-59]$$

$$\frac{\partial n_j}{\partial t} + \nabla \cdot (n_j \mathbf{v}_j) = 0, \quad j = i, e, \quad [3-60]$$

$$p_j = C(m_j n_j)^{\gamma_j}, \quad j = i, e. \quad [3-61]$$

Ukazuje se, že pro 16 skalárních neznámých (n_i , n_e , p_i , p_e , \mathbf{v}_i , \mathbf{v}_e , \mathbf{E} a \mathbf{B}) máme 18 skalárních rovnic, počítáme-li každou vektorovou rovnici za tři rovnice skalární. Dvě z Maxwellových rovnic jsou však přebytečné, neboť rov. [3-55] a [3-57] můžeme získat, aplikujeme-li na rov. [3-58] a [3-56] operátor divergence (úloha 3-7). Řešením této soustavy 16 rovnic pro 16 neznámých dostáváme v sebe uzavřenou (self-konzistentní) soustavu polí a pohybů v přiblížení, které nám poskytuje tekutinový model.

DRIFTOVÉ POHYBY TEKUTINY VE SMĚRU KOLMÉM NA \mathbf{B} 3.4

Protože se element tekutiny skládá z mnoha individuálních částic, očekávali bychom, že kapalina bude vykazovat driftové pohyby kolmé na \mathbf{B} , jestliže se takovými driftovými pohyby pohybují jednotlivé gyrační středy. V rovnicích tekutiny se však objevuje člen ∇p a s ním souvisí driftový pohyb, který vykazují elementy tekutiny, ale nikoliv částice. Pro každý druh částic můžeme napsat pohybovou rovnici

$$m_n \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = qn(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \nabla p. \quad [3-62]$$

Všimněme si poměru členů ① a ③

$$\frac{\text{①}}{\text{③}} \approx \frac{|m_n i \omega v_\perp|}{|q n v_\perp B|} \approx \frac{\omega}{\omega_c}.$$

Položili jsme zde $\partial/\partial t = i\omega$ a zajímá nás pouze \mathbf{v}_\perp . U driftových pohybů pomalých ve srovnání s časovým měřítkem daným ω_c můžeme člen ① zanedbat. Zanedbáme rovněž člen $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ a dodatečně ukážeme, že to je

v pořádku. Nechť \mathbf{E} a \mathbf{B} jsou homogenni, ale n a p nechť mají nenulový gradient. To je běžná situace u magneticky drženého plazmatického sloupce (obr. 3-4). Vytvoříme vektorový součin rov. [3-62] s \mathbf{B} a dostaneme (zanedbáme-li levou stranu rovnice)

$$0 = qn[\mathbf{E} \times \mathbf{B} + (\mathbf{v}_\perp \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}] - \nabla p \times \mathbf{B} \\ = qn[\mathbf{E} \times \mathbf{B} + \mathbf{B}(\mathbf{v}_\perp \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{v}_\perp B^2] - \nabla p \times \mathbf{B}.$$

Tudíž

$$\mathbf{v}_\perp = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} - \frac{\nabla p \times \mathbf{B}}{qnB^2} \equiv \mathbf{v}_E + \mathbf{v}_D, \quad [3-63]$$

kde

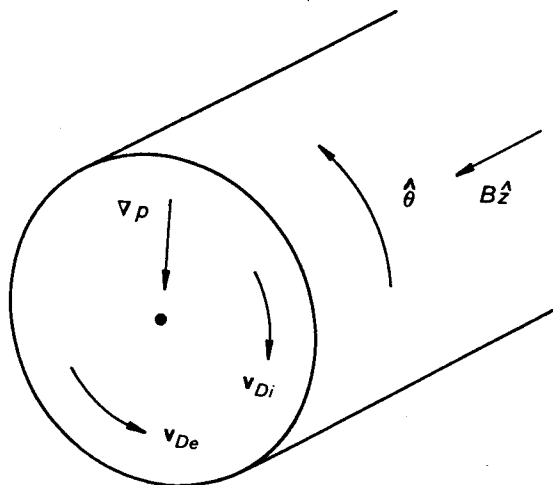
$$\mathbf{v}_E \equiv \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad \mathbf{E} \times \mathbf{B} \text{ drift}, \quad [3-64]$$

$$\mathbf{v}_D \equiv -\frac{\nabla p \times \mathbf{B}}{qnB^2} \quad \text{diamagnetický drift}. \quad [3-65]$$

Drift \mathbf{v}_E je týž jako pro gyrační středy, ale teď jsme dostali nový drift \mathbf{v}_D , který se nazývá *diamagnetický drift*. Jelikož \mathbf{v}_D je kolmé na směr gradientu, je naše zanedbání členu $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ ospravedlněno.

Diamagnetický drift můžeme pomocí rovnice [3-52] zapsat takto

$$\mathbf{v}_D = \pm \frac{\gamma KT}{eB} \frac{\hat{\mathbf{z}} \times \nabla n}{n}. \quad [3-66]$$



OBR. 3-4 Diamagnetické driftы v cylindrickém plazmatu.

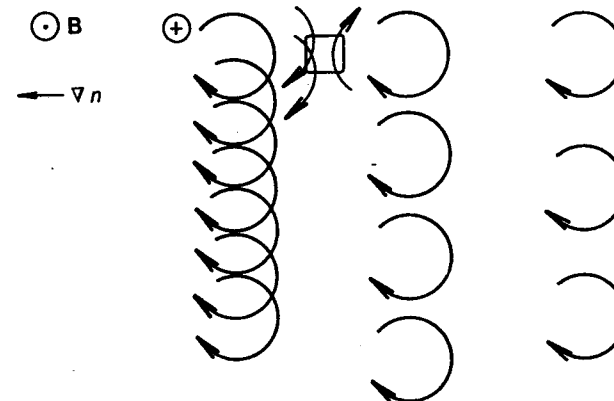
$\hat{\mathbf{z}}$ je jednotkový vektor ve směru osy z . V případě izotermního plazmatu s geometrií naznačenou na obr. 3-4, při níž $\nabla n = n'\hat{\mathbf{r}}$, dostáváme následující výrazy, dobře známé všem experimentátorům, kteří se zabývali Q-systémem*

$$\mathbf{v}_{Di} = \frac{KT_i}{eB} \frac{n'}{n} \hat{\mathbf{g}}, \\ \mathbf{v}_{De} = -\frac{KT_e}{eB} \frac{n'}{n} \hat{\mathbf{g}}. \quad [3-67]$$

Velikost v_D snadno vypočteme podle vzorce

$$v_D = \frac{KT \text{ (eV)}}{B \text{ (T)}} \frac{1}{\Lambda \text{ (m)}} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 10^8 \frac{KT \text{ (eV)}}{B \text{ (G)}} \frac{1}{\Lambda \text{ (cm)}} \frac{\text{cm}}{\text{s}}, \quad [3-68]$$

kde Λ je charakteristická délka pro změnu hustoty n/n' vyjádřená v m (nebo cm).



OBR. 3-5 Vznik diamagnetického driftu.

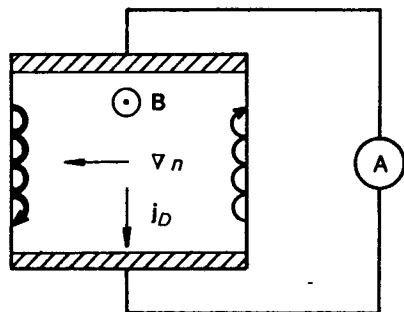
Fyzikální smysl diamagnetického driftu je zřejmý z obr. 3-5. Zde jsme namalovali orbity iontů rotujících v magnetickém poli; gradient hustoty směřuje doleva, což je naznačeno hustotou orbitů. Každým objemovým elementem se pohybuje více iontů dolů než nahoru, protože ionty pohybující se dolů přicházejí z oblasti s vyšší hustotou. Výsledkem je tedy drift tekutiny kolmý na ∇n a na \mathbf{B} , i když se gyrační středy nepohybují. Diamagnetický drift mění znaménko s q , protože se mění smysl rotace. Velikost v_D nezávisí na hmotnosti, protože závislost rychlosti daná faktorem $m^{-1/2}$ se zkrátí se závislostí Larmorova poloměru $m^{-1/2}$ – při menším Larmorově poloměru je v jeho dosahu menší změna hustoty.

* V Q-systému vzniká klidné (quiescentní – odtud označení – pozn. překl.) plazma tím způsobem, že atomy Cs nebo K jsou tepelně ionizovány při dopadu na horké wolframové desky. Diamagnetický drift byl poprvé změřen v Q-systémech.

Poněvadž drift iontů a elektronů má obrácený směr, vzniká diamagnetický proud. Pro $\gamma = Z = 1$ je dán výrazem

$$j_D = ne(\mathbf{v}_{Di} - \mathbf{v}_{De}) = (KT_i + KT_e) \frac{\mathbf{B} \times \nabla n}{B^2}. \quad [3-69]$$

Podle částicového modelu bychom neočekávali, že naměříme proud, nepohybují-li se driftově gyrační středy, v modelu tekutinovém vzniká proud všude tam, kde je gradient tlaku. Tato dvě hlediska usmíříme, uvědomíme-li si, že všechny experimenty musí být prováděny v plazmatu omezených rozměrů. Předpokládejme, že by plazma bylo v pevné nádobě (obr. 3-6).



OBR. 3-6 Drifty částic v ohraničeném plazmatu a jejich vztah k driftovým pohybům tekutiny.

Kdybychom měli vypočítat proud z jednočásticového modelu, museli bychom vzít v úvahu částice na okrajích, které se pohybují po cykloidální dráze. Poněvadž nalevo je více částic než vpravo, výsledný proud míří dolů, což souhlasí s tekutinovým modelem. Z tohoto příkladu vidíme, že práce s jednočásticovým modelem může být dosti záludná, kdežto tekutinový model obvykle dává správné výsledky při prostém správném použití, i když obsahuje „fiktivní“ driftové pohyby, jako je diamagnetický drift.

Jak to nyní bude s grad- B driftem a s driftem zakřivení, které se objevily v jednočásticovém modelu? V tekutinovém modelu se nevyskytují z následujícího důvodu. Na základě termodynamiky lze ukázat, že magnetické pole neovlivňuje Maxwellovo rozdělení, a to proto, že Lorentzova síla je kolmá na \mathbf{v} a nemůže změnit energii částice. Rozdělení $f(\mathbf{v})$, které je nejpravděpodobnější bez \mathbf{B} pole, je rovněž nejpravděpodobnější při nenulovém \mathbf{B} poli. Jestliže v nehomogenním \mathbf{B} poli je nulový gradient hustoty a $f(\mathbf{v})$ je maxwellovské, pak výsledná hybnost předávaná určitému elementu tekutiny je nulová. Tekutina nevykazuje driftový pohyb, i když jednotlivé gyrační středy se driftově pohybují; driftové pohyby částic se v každém pevně zvoleném elementu tekutiny zruší. Pro nehomogenní \mathbf{E} pole by tento

závěr neplatil. Efekt konečného Larmorova poloměru, o němž jsme hovořili v oddíle 2.4, by pak způsobil jak drift gyračních středů, tak drift tekutiny, ale ty by nebyly stejné; mají dokonce opačná znaménka! Drift částice jsme počítali ve 2. kapitole a drift tekutiny lze spočítat z nediagonálních komponent \mathbf{P} . Bereme-li v úvahu efekty konečného Larmorova poloměru, je nesmírně obtížné smířit tekutinový model s částicovým. Prostý příklad jako na obr. 3-6 nám nepomůže, protože bychom museli rozlišovat tak jemné rozdíly, jako například skutečnost, že při nenulovém gradientu hustoty není hustota gyračních středů táž jako hustota částic!

3-3. Cylindricky symetrický sloupec plazmatu v homogenním \mathbf{B} poli má $n(r) = n_0 \exp(-r^2/r_0^2)$ a $n_i = n_e = n_0 \exp(e\phi/KT_e)$. ÚLOHY

(a) Ukažte, že \mathbf{v}_E a \mathbf{v}_{De} mají stejnou velikost a opačný směr.

(b) Ukažte, že plazma rotuje jako pevné těleso.

(c) V soustavě, která rotuje rychlostí \mathbf{v}_E , se šíří plazmatické vlny (driftové vlny) fázovou rychlostí $\mathbf{v}_\phi = 0,5\mathbf{v}_{De}$. Jaké je \mathbf{v}_ϕ v laboratorní soustavě? Do diagramu $r-\theta$ zakreslete šipky označující relativní velikosti a směry \mathbf{v}_E , \mathbf{v}_{De} a \mathbf{v}_ϕ v laboratorní soustavě.

3-4. Máme plazma z úlohy 3-3. Jak závisí hustota diamagnetického proudu na poloměru? Je tento proud v laboratorní souřadnicové soustavě nesen ionty nebo elektrony nebo oběma druhy částic?

3-5. Jak dalece by diamagnetický proud z předcházející úlohy zmenšil B v ose, jestliže $B = 0,4 \text{ T}$, $n_0 = 10^{16} \text{ m}^{-3}$, $KT_e = KT_i = 0,25 \text{ eV}$? Návod: Užijte pro vhodnou smyčku Ampérův zákon.

3-6. Pro parametry z úlohy 3-5 nakreslete graf elektronových frekvencí ω_c a ω_p jako funkcí poloměru. Označte hodnoty ω_c a ω_p příslušející ose. Tento graf je typický pro experimenty s plazmatem o nízké hustotě a později se na něj odvoláme.

3-7. Ukažte, že rov. [3-55] a [3-57] jsou v soustavě Maxwellových rovnic nadbytečné.

3-8. Ukažte, že výraz pro j_D v rov. [3-69] má rozměr hustoty proudu.

3-9. Ukažte, že jestliže proud vypočítaný z částicového modelu (obr. 3-6) souhlasí pro jednu šířku nádoby s proudem vypočítaným z diamagnetického driftu, potom bude souhlasit pro všechny šířky.

DRIFTOVÉ POHYBY TEKUTINY VE SMĚRU ROVNOBĚŽNÉM S \mathbf{B} 3.5

z -ová složka pohybové rovnice pro tekutinu je

$$m_n \left[\frac{\partial v_z}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) v_z \right] = qnE_z - \frac{\partial p}{\partial z}. \quad [3-70]$$

Konvektivní člen bývá často zanedbán, protože je mnohem menší než člen $\partial v_z / \partial t$. Vyhneme se zde složitému rozboru a jednoduše se budeme zabývat případem, kdy v_z je prostorově homogenní. Užijeme rov. [3-52] a dostáváme

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{q}{m} E_z - \frac{\gamma K T}{m n} \frac{\partial n}{\partial z} \quad [3-71]$$

To nám říká, že tekutina je podél \mathbf{B} urychlována kombinovanými silami, elektrostatickou a gradientem tlaku. Zvlášť důležitý výsledek dostaneme, použijeme-li pro elektrony s nulovou hmotností rov. [3-71]. Vezmeme limitu $m \rightarrow 0$ a specifikujeme $q = -e$ a $\mathbf{E} = -\nabla\phi$; dostáváme

$$q E_z = e \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\gamma K T_e}{n} \frac{\partial n}{\partial z} \quad [3-72]$$

Elektrony jsou tak pohyblivé, že jejich tepelná vodivost je téměř nekonečná. Můžeme proto elektrony považovat za izotermické a položit $\gamma = 1$. Integrací dostáváme

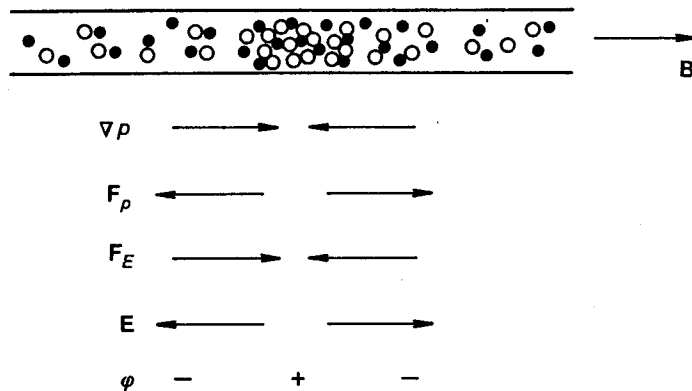
$$e\phi = K T_e \ln n + C$$

neboli

$$n = n_0 \exp(e\phi / K T_e) \quad [3-73]$$

To je Boltzmannův vztah pro elektrony.

Fyzikálně to znamená, že elektrony jsou v důsledku své lehkosti velice pohyblivé a působí-li na ně nějaká výsledná síla, jejich pohyb se velmi rychle zrychluje a nabývají vysokých energií. Jelikož elektrony nemohou opustit nějakou oblast hromadně, protože by za nimi zůstal veliký iontový náboj, musí být síly působící na elektrony, tj. elektrostatická síla a gradient tlaku, dobře vyváženy. Z této podmínky plyne Boltzmannův vztah. Vší-



OBR. 3-7 Fyzikální smysl Boltzmannova vztahu mezi hustotou a potenciálem.

mněme si, že rovnice [3-73] platí pro každou siločáru zvlášť. Pokud elektrony nemají možnost pohybovat se napříč \mathbf{B} , mohou být jednotlivé siločáry nabitý na různé potenciály. Vodiče, na nichž siločáry končí, mohou vytvářet takovou možnost pohybu napříč \mathbf{B} a experimentátoři musí tyto koncové efekty pečlivě zvážit.

Na obrázku 3-7 je znázorněno, co se děje, jestliže se v plazmatu objeví lokální zhuštění. Necht' gradient hustoty směřuje do středu zobrazeného úseku a necht' $K T$ je konstantní. Gradient tlaku pak rovněž míří doprostřed. Poněvadž je plazma kvazineutrální, existuje tento gradient jak pro elektronovou, tak i pro iontovou tekutinu. Síla F_p působící na elektronovou tekutinu v důsledku gradientu tlaku žene pohyblivé elektrony ven ze středu a zanechává tam ionty. Výsledný kladný náboj vytváří pole \mathbf{E} a s ním vzniká síla F_E , působící na elektrony proti F_p . Jedině když F_E je stejně velké, ale opačného směru než F_p , je dosaženo ustáleného stavu. Je-li \mathbf{B} časově konstantní, je \mathbf{E} elektrostatické pole $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ a ϕ musí být velké uprostřed, kde je velké n , a právě to nám říká rov. [3-73]. Odchylka od přesné neutrality se nastává tak, že vznikne náboj právě dostačující k vytvoření pole \mathbf{E} , jež vyváží síly působící na elektrony.

PLAZMATICKÉ PŘIBLÍŽENÍ 3.6

Předcházející příklad nám prozradil důležitou vlastnost plazmatu, která nachází široké použití. Jsme zvyklí počítat \mathbf{E} z Poissonovy rovnice, jestliže známe hustotu σ . Ve fyzice plazmatu se obvykle postupuje opačně. \mathbf{E} se vypočte z pohybových rovnic a Poissonova rovnice slouží pouze k nalezení σ . Důvodem je ta skutečnost, že v plazmatu převládá tendence zachovat neutralitu. Pohybují-li se ionty, elektrony je následují. \mathbf{E} se musí nastavit tak, aby dráhy elektronů a iontů zachovávaly neutralitu. Hustota náboje má druhořadou důležitost; nastává se tak, aby byla splněna Poissonova rovnice. To ovšem platí pouze pro nízkofrekvenční pohyby, při nichž setrvačnost elektronů nehraje roli.

V plazmatu je obvykle možné předpokládat $n_i = n_e$ a zároveň $\nabla \cdot \mathbf{E} \neq 0$. To nazýváme *plazmatickým přiblížením*. Je to základní rys plazmatu, rys, který je začátečníkovi v tomto oboru těžko pochopitelný. *Neužívejte pro výpočet \mathbf{E} Poissonovu rovnici, pokud to není nevyhnutelné!* Nyní můžeme v systému rovnic pro tekutinu [3-55]–[3-61] vynechat Poissonovu rovnici a jednu z neznámých tím, že položíme $n_i = n_e = n$. K otázce platnosti plazmatického přiblížení se vrátíme, až se dostaneme k teorii iontových vln. Pak se ozřejmí, proč jsme museli Poissonovu rovnici užít při odvozování Debyeova stínění.

Kapitola čtvrtá

VLNY V PLAZMATU

4.1 POPIS VLN

Každý periodický pohyb tekutiny můžeme Fourierovou analýzou rozložit; jeví se nám pak jako superpozice sinusových oscilací s různými frekvencemi ω a vlnovými délkami λ . Kterákoliv z těchto složek je jednoduchá vlna. Je-li amplituda oscilací malá, má vlna obyčejně sinusový tvar a vytváří ji jenom jedna složka. Touto situací se budeme zabývat.

Každá sinusově oscilující veličina — např. hustota n — může být zapsána takto

$$n = \bar{n} \exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)], \quad (4-1)$$

kde v kartézských souřadnicích je

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z. \quad (4-2)$$

Zde n je konstanta určující amplitudu vlny, k se nazývá konstanta šíření. Šíří-li se vlna ve směru x , má k pouze x -ovou složku a rov. [4-1] přechází ve tvar

$$n = \bar{n} e^{i(kx - \omega t)}.$$

Podle konvence se za měřitelnou veličinu považuje reálná část výrazu v exponenciálním zápisu. Zvolme n jako reálné; brzy uvidíme, že to odpovídá volbě počátků pro x a t . Reálná část n potom je

$$\operatorname{Re}(n) = n \cos(kx - \omega t). \quad (4-3)$$

Místo na vlně, jemuž přísluší konstantní fáze, se pohybuje tak, že $(d/dt)(kx - \omega t) = 0$, čili

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} \equiv v_\phi \quad (4-4)$$

To je *fázová rychlost*. Je-li ω/k kladné, vlna se pohybuje doprava, tj. x vzrůstá s rostoucím t , a to tak, aby $kx - \omega t$ zůstávalo konstantní. Jestliže je ω/k záporné, pohybuje se vlna doleva. Stejně dobře bychom byli mohli napsat

$$n = \bar{n} e^{i(kx + \omega t)},$$

pak by kladné ω/k znamenalo zápornou fázovou rychlost. To je konvence, které se někdy užívá, ale my ji nepřijmeme. Z rov. [4-3] je zřejmé, že změnou znaménka u ω i u k se nic nezmění.

Vezměme nyní jinou veličinu, která ve vlně osciluje, řekněme elektrické pole \mathbf{E} . Protože jsme již zvolili fázový posuv hustoty n jako nulový, musíme poli \mathbf{E} umožnit, aby bylo fázově posunuto o δ

$$\mathbf{E} = \bar{\mathbf{E}} \cos(kx - \omega t + \delta) \quad \text{neboli} \quad \mathbf{E} = \bar{\mathbf{E}} e^{i(kx - \omega t + \delta)}, \quad (4-5)$$

kde $\bar{\mathbf{E}}$ je reálný konstantní vektor.

Bývá zvykem zahrnout informaci o fázovém posuvu do $\bar{\mathbf{E}}$ tím, že dovolíme, aby $\bar{\mathbf{E}}$ bylo komplexní. Můžeme psát

$$\mathbf{E} = \bar{\mathbf{E}} e^{i\delta} e^{i(kx - \omega t)} \equiv \bar{\mathbf{E}}_k e^{i(kx - \omega t)},$$

kde $\bar{\mathbf{E}}_k$ je komplexní amplituda. Fázový posuv δ můžeme z $\bar{\mathbf{E}}_k$ znovu vypočítat, neboť $\operatorname{Re}(\bar{\mathbf{E}}_k) = \bar{\mathbf{E}} \cos \delta$ a $\operatorname{Im}(\bar{\mathbf{E}}_k) = \bar{\mathbf{E}} \sin \delta$, takže

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\operatorname{Im}(\bar{\mathbf{E}}_k)}{\operatorname{Re}(\bar{\mathbf{E}}_k)}. \quad (4-6)$$

V dalším textu budeme všechny amplitudy považovat za komplexní a vypustíme index k . Jakoukoliv oscilující veličinu \mathbf{g}_1 запиšeme

$$\mathbf{g}_1 = \mathbf{g}_1 \exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)], \quad (4-7)$$

takže \mathbf{g}_1 může představovat buď komplexní amplitudu nebo celý výraz [4-7]. Zmatek tím vzniknout nemůže, protože v lineární teorii vln se na obou stranách každé rovnice objeví též exponenciální faktor a můžeme jej vykrátit.

4-1. Mezi oscilující hustotou n_1 a potenciálem ϕ_1 v „driftové vlně“ platí vztah

$$\frac{n_1}{n_0} = \frac{e\phi_1}{KT_e} \frac{\omega^* + ia}{\omega + ia},$$

kde všechny ostatní symboly (s výjimkou i) představují kladné hodnoty.

ÚLOHA

- (a) Nalezněte výraz pro fázový posuv δ veličiny ϕ_1 vzhledem k n_1 . (Pro jednoduchost považujte n_1 za reálné.)
 (b) Jestliže je $\omega < \omega^*$, předchází ϕ_1 hustotu n_1 nebo se za ní opoždí?

4.2 GRUPOVÁ RYCHLOST

Fázová rychlost vlny v plazmatu často přesáhne rychlost světla c . Tím není teorie relativity porušena, protože nekonečně dlouhá řada vln o konstantní amplitudě nemůže nést informaci. Například rádiová nosná vlna nenesení informaci, pokud není modulována. Modulační informace nepostupuje fázovou, ale grupovou rychlostí, která je vždy menší než c . Abychom to ilustrovali, představme si modulovanou vlnu tvořenou skládáním („rázy“) dvou vln o skoro stejných frekvencích. Nechť jsou to vlny

$$\begin{aligned} E_1 &= E_0 \cos [(k + \Delta k)x - (\omega + \Delta\omega)t], \\ E_2 &= E_0 \cos [(k - \Delta k)x - (\omega - \Delta\omega)t]. \end{aligned} \quad (4-8)$$

Frekvence vln E_1 a E_2 se liší o $2\Delta\omega$. Protože fázová rychlost ω/k každé vlny musí odpovídat prostředí, jímž se šíří, musíme diferencíálním členem $2\Delta k$ vyjádřit změnu konstanty šíření. Použijme zkrácených symbolů

$$\begin{aligned} a &= kx - \omega t, \\ b &= (\Delta k)x - (\Delta\omega)t \end{aligned}$$

a dostáváme

$$\begin{aligned} E_1 + E_2 &= E_0 \cos(a + b) + E_0 \cos(a - b) = \\ &= E_0 (\cos a \cos b - \sin a \sin b + \cos a \cos b + \sin a \sin b) = \\ &= 2E_0 \cos a \cos b, \\ E_1 + E_2 &= 2E_0 \cos [(\Delta k)x - (\Delta\omega)t] \cos(kx - \omega t). \end{aligned} \quad (4-9)$$



OBR. 4-1 Prostorová změna elektrického pole ve dvou vlnách s rozdílnou frekvencí.

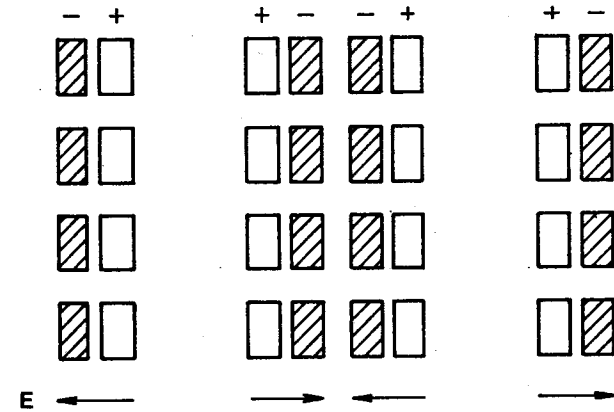
To je sinusově modulovaná vlna (obr. 4-1). Informaci přenáší obálka vlny daná výrazem $\cos [(\Delta k)x - (\Delta\omega)t]$, a ta postupuje rychlostí $\Delta\omega/\Delta k$. Provedeme limitu $\Delta\omega \rightarrow 0$ a grupovou rychlost definujeme jako

$$v_g = d\omega/dk \quad (4-10)$$

Tato veličina nemůže být větší než c .

PLAZMOVÉ OSCILACE 4.3

Jsou-li elektrony v plazmatu posunuty proti homogennímu iontovému pozadí, vytvoří se elektrické pole takového směru, aby obnovilo neutralitu plazmatu přitažením elektronů do jejich původní polohy. Elektrony však v důsledku své setrvačnosti přeběhnou a oscilují okolo své rovnovážné polohy s charakteristickou frekvencí známou jako *plazmová frekvence*. Tato oscilace je tak rychlá, že masivní ionty nemají čas reagovat na oscilující pole a můžeme je považovat za pevné. Prázdné obdélníčky na obr. 4-2 symbolizují elementy iontové tekutiny a zaplněné obdélníčky znamenají střídavě vychýlené elementy elektronové tekutiny. Hromadění náboje, k němuž tak dochází, vytváří prostorově periodické pole E , které se snaží uvést elektrony do jejich neutrálních poloh.



Mechanismus plazmových oscilací. OBR. 4-2

Odvodíme výraz pro plazmovou frekvenci ω_p v nejjednodušším případě, za těchto předpokladů: (1) Magnetické pole je nulové; (2) částice nemají tepelný pohyb ($KT = 0$); (3) ionty mají v prostoru pevné homogenní rozložení; (4) plazma se rozprostírá do nekonečna a (5) elektrony se pohybují pouze ve směru osy x . Podle posledního předpokladu máme

$$\nabla = \hat{x} \partial/\partial x, \quad \mathbf{E} = E\hat{x}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{E} = -\nabla\phi. \quad (4-11)$$

Nedochází tedy ke změnám magnetického pole, jedná se o elektrostatické oscilace.

Pohybová rovnice a rovnice kontinuity pro elektrony jsou

$$m n_e \left[\frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} + (\mathbf{v}_e \cdot \nabla) \mathbf{v}_e \right] = -en_e \mathbf{E}, \quad (4-12)$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \mathbf{v}_e) = 0. \quad (4-13)$$

Použijeme jedinou z Maxwellových rovnic, a to tu, v níž se nevyskytuje \mathbf{B} : Poissonovu rovnici. Tento případ je výjimkou z obecného pravidla uvedeného v oddíle 3.6, že se Poissonovy rovnice nemůže užívat k nalezení \mathbf{E} . Zde se jedná o vysokofrekvenční oscilace; setrvačnost elektronů hraje v tomto případě důležitou roli a odchylka od neutrality je tím hlavním efektem. Proto napíšeme

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \varepsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial \mathbf{x} = e(n_i - n_e). \quad [4-14]$$

Rovnice [4-12]–[4-14] snadno vyřešíme, budeme-li je *linearizovat*. Tím se rozumí, že amplituda oscilací je malá a členy obsahující vyšší řády amplitudových faktorů mohou být zanedbány. Nejprve rozdělíme závisle proměnné veličiny na dvě části: „rovnovážná“ část bude označena indexem 0 a „poruchová“ indexem 1

$$n_e = n_0 + n_1, \quad \mathbf{v}_e = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1. \quad [4-15]$$

Rovnovážné veličiny vyjadřují stav plazmatu bez oscilací. Protože jsme předpokládali, že v klidu, dříve než jsou elektrony vychýleny, je plazma homogenní a neutrální, platí

$$\begin{aligned} \nabla n_0 = \mathbf{v}_0 = \mathbf{E}_0 = 0, \\ \frac{\partial n_0}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t} = 0. \end{aligned} \quad [4-16]$$

Rovnice [4-12] nyní dostává tvar

$$m \left[\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) \mathbf{v}_1 \right] = -e \mathbf{E}_1. \quad [4-17]$$

Člen $(\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) \mathbf{v}_1$ je kvadratický v amplitudě a jeho škrtnutím rovnicí zlinearárujeme. *Lineární teorie* platí potud, pokud $|v_1|$ je natolik malé, že kvadratické členy jsou opravdu zanedbatelné. Podobně rov. [4-13] dává

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_1}{\partial t} + \nabla \cdot (n_0 \mathbf{v}_1 + n_1 \mathbf{v}_1) = 0, \\ \frac{\partial n_1}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla n_0 = 0. \end{aligned} \quad [4-18]$$

U Poissonovy rovnice [4-14] si uvědomme, že v rovnovážném stavu je $n_{i0} = n_{e0}$ a že ionty jsou nepohyblivé ($n_{i1} = 0$), tak dostáváme

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_1 = -en_1/\varepsilon_0. \quad [4-19]$$

O oscilujících veličinách předpokládáme, že se mění sinusově

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 = v_1 e^{i(kx - \omega t)} \hat{\mathbf{x}}, \\ n_1 = n_1 e^{i(kx - \omega t)}, \\ \mathbf{E} = E_1 e^{i(kx - \omega t)} \hat{\mathbf{x}}. \end{aligned} \quad [4-20]$$

Časovou derivaci $\partial/\partial t$ můžeme tedy nahradit faktorem $-i\omega$ a gradient ∇ faktorem $ik\hat{\mathbf{x}}$. Rovnice [4-17]–[4-19] nyní přecházejí v

$$-im\omega v_1 = -eE_1, \quad [4-21]$$

$$-i\omega n_1 = -n_0 ikv_1, \quad [4-22]$$

$$ikE_1 = -en_1/\varepsilon_0. \quad [4-23]$$

Vyloučíme n_1 a E_1 a z rov. [4-21] dostáváme

$$-im\omega v_1 = -e \frac{-e}{i\varepsilon_0 k} \frac{-n_0 ikv_1}{-i\omega} = -\frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 \omega} v_1. \quad [4-24]$$

Není-li v_1 nulové, musí platit

$$\omega^2 = \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m}.$$

Plazmová frekvence tedy je

$$\omega_p = \left(\frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m} \right)^{1/2} \quad [4-25]$$

Při numerickém výpočtu můžeme užít přibližný vzorec

$$\omega_p/2\pi = f_p \approx 9 \sqrt{n} \text{ (m}^{-3/2}) \text{ s}^{-1} \quad [4-26]$$

Tato frekvence, závisající pouze na hustotě, je jedním ze základních parametrů plazmatu. V důsledku toho, že m je malé, je plazmová frekvence obvykle velice vysoká. Například v plazmatu o hustotě $n = 10^{18} \text{ m}^{-3}$ je

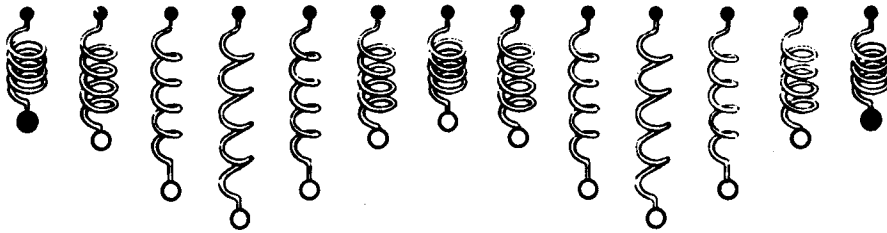
$$f_p \approx 10(10^{18})^{1/2} = 10^{10} \text{ s}^{-1} = 10 \text{ GHz}.$$

Záření na frekvenci f_p bývá v oblasti mikrovln. Tuto veličinu můžeme srovnat s jinou elektronovou frekvencí: ω_c , pro niž použijeme numerický vzorec

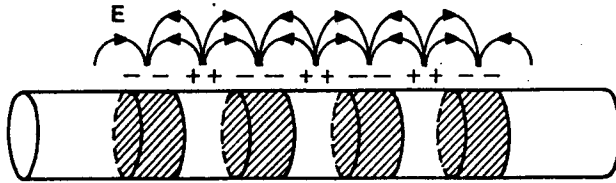
$$f_{ce} \approx 2,8 \times 10^{10} B \text{ (T)} \text{ s}^{-1} = 28B \text{ (T)} \text{ GHz} = 2,8B \text{ (kG)} \text{ GHz}. \quad [4-27]$$

Je-li tedy $B \approx 0,35 \text{ T}$ a $n \approx 10^{18} \text{ m}^{-3}$, je cyklotronová frekvence přibližně rovna plazmové frekvenci elektronů.

Rovnice [4-25] nám říká, že objeví-li se někde plazmové oscilace, musí mít frekvenci závislou pouze na n . Zdůrazněme, že ω nezávisí na k , takže grupová rychlost $d\omega/dk$ je nula, rozruch se nešíří. Na mechanické analogii (obr. 4-3) si vysvětlíme, jak je to možné. Představme si řadu těžkých kuliček zavěšených na pružinách rozmístěných pravidelně v jednom směru. Jsou-li všechny pružiny stejné, budou všechny kuličky vertikálně kmitat s touž frekvencí. Rozkmitáme-li kuličky s vhodným fázovým posunutím vůči ostatním, mohou vytvářet vlnu postupující v tom či onom směru. Frekvence je pevně dána pružinami, ale vlnová délka může být



OBR. 4-3 Vlna složená ze souboru nezávislých oscilátorů.



OBR. 4-4 Plazmové oscilace se v ohraničeném prostředí šíří prostřednictvím elektrického pole na okrajích.

zvolena libovolně. Obě nerozkmitané kuličky na koncích tím nebudou ovlivněny, původní rozruch se nebude šířit. Můžeme vytvořit postupnou nebo stojící vlnu jako na napnutém provazu. Vlny na provaze se však musí šířit, protože každý jeho úsek je spojen se sousedními úseky.

Tato analogie rení zcela přesná, protože při plazmových oscilacích dochází k pohybům ve směru k a nikoliv kolmo na k . Pokud se však elektrony nesrazí s ionty nebo spolu navzájem, můžeme si je stále ještě představovat jako nezávislé oscilátory pohybující se horizontálně (na obr. 4-3). Ale co bude dělat elektrické pole? Nebude přesahovat oblast původní poruchy a rozkmitávat sousední vrstvy plazmatu? V našem jednoduchém případě nikoliv, protože elektrické pole je v důsledku stejného počtu kladných a záporných nekonečných rovinných vrstev náboje nulové. V kterémkoliv konečném systému se plazmové oscilace budou šířit. Na obr. 4-4 jsou kladné a záporné čárkované oblasti rovinných plazmových oscilací uzavřeny v cylindrické trubici. Okrajovým elektrickým polem je porucha svázána se sousedními vrstvami a oscilace nezůstanou lokalizovány.

ÚLOHY 4-2. Vypočítejte plazmovou frekvenci se započtením pohybu iontů, a tak se přesvědčte o správnosti našeho předpokladu, že ionty jsou pevné (návod: započítejte člen n_1 do Poissonovy rovnice a užiňte pohybovou rovnici a rovnici kontinuity pro ionty).

4-3. Vypočítejte fázový posuv δ (zkráceně budeme o fázovém posuvu hovořit prostě jako o „fázi“) pro ϕ_1 , E_1 a v_1 v jednoduchých plazmových oscilacích s nepohyblivými ionty a prostorovo-časovým faktorem $\exp[i(kx - \omega t)]$; fáze n_1 je nulová. Ilustrujte

relativní fáze tak, že nakreslíte sinusové vlny představující n_1 , ϕ_1 , E_1 a v_1 : (a) jako funkce x , (b) jako funkce t pro $\omega/k > 0$ a (c) jako funkce t pro $\omega/k < 0$. Pověšněte si, že časový graf lze získat posunováním x -ového grafu správným směrem, jako když vlna míjí pevného pozorovatele.

4-4. Linearizovanou Poissonovu rovnici, kterou jsme užili při odvození jednoduchých plazmových oscilací, napište ve tvaru

$$\nabla \cdot (\epsilon E) = 0$$

a odvoďte výraz pro dielektrickou konstantu ϵ použitelnou pro vysokofrekvenční podélné pohyby.

ELEKTRONOVÉ PLAZMOVÉ VLNY 4.4

Existuje ještě jiný efekt, který může způsobit, že se plazmové oscilace šíří, a to tepelný pohyb. Elektrony proudící do přilehlých vrstev plazmatu svými tepelnými rychlostmi přinášejí informaci o tom, co se děje v oblasti oscilací. Plazmové oscilace bychom pak měli správně nazvat plazmové vlny. Tento efekt můžeme snadno započíst přidáním členu $-\nabla p_e$ k pohybové rovnici [4-12]. V jednorozměrném případě bude podle rov. [3-53] γ rovno třem. Tedy

$$\nabla p_e = 3KT_e \nabla n_e = 3KT_e \nabla(n_0 + n_1) = 3KT_e \frac{\partial n_1}{\partial x} \hat{x}$$

a linearizovaná pohybová rovnice je

$$mn_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -en_0 E_1 - 3KT_e \frac{\partial n_1}{\partial x}. \quad [4-28]$$

Všimněte si, že jsme při linearizaci zanedbali členy $n_1 \partial v_1 / \partial t$ a $n_1 E_1$, jakož i člen $(v_1 \cdot \nabla) v_1$. Z rovnic [4-20], [4-28] dostáváme

$$-i\omega n_0 v_1 = -en_0 E_1 - 3KT_e i k n_1. \quad [4-29]$$

Pro E_1 a n_1 stále platí rovnice [4-23] a [4-22], máme tedy

$$i\omega n_0 v_1 = \left[en_0 \left(\frac{-e}{ik\epsilon_0} \right) + 3KT_e ik \right] \frac{n_0 ik}{i\omega} v_1,$$

$$\omega^2 v_1 = \left(\frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m} + \frac{3KT_e}{m} k^2 \right) v_1,$$

$$\omega^2 = \omega_p^2 + \frac{3}{2} k^2 v_t^2 \quad [4-30]$$

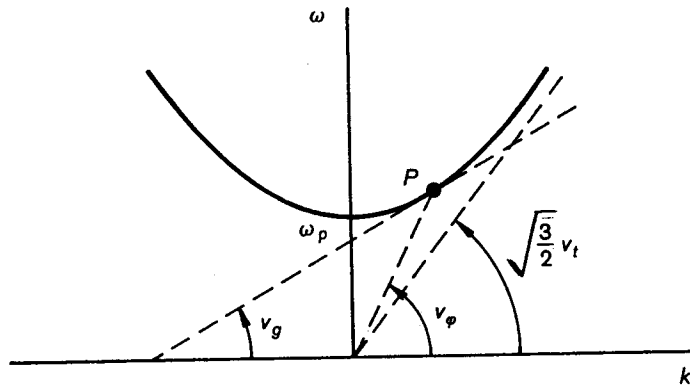
kde $v_t^2 \equiv 2KT_e/m$. Frekvence nyní závisí na k a grupová rychlost je konečná

$$2\omega d\omega = \frac{3}{2} v_t^2 \cdot 2k dk,$$

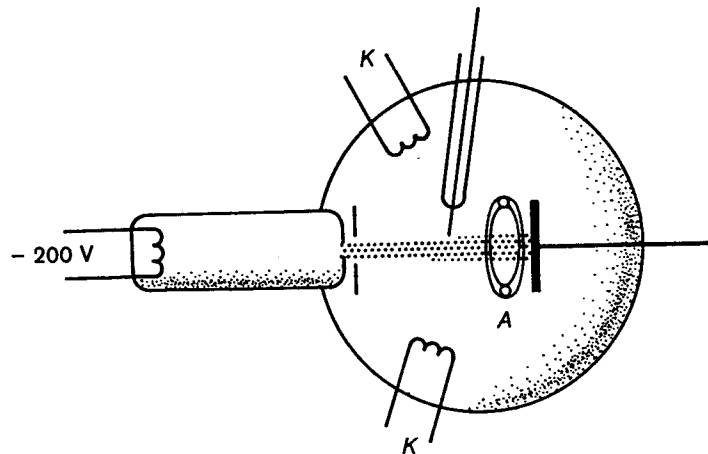
$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{3}{2} \frac{k}{\omega} v_t^2 = \frac{3}{2} \frac{v_t^2}{v_\phi}. \quad [4-31]$$

Že je v_g vždycky menší než c , lehce poznáme z grafu rov. [4-30]. Obrázek 4-5 je grafickým znázorněním *disperzního vztahu* $\omega(k)$, jak je dán rovnicí [4-30]. V každém bodě P na této křivce udává sklon přímky vedené počátkem fázovou rychlost ω/k . Sklon samotné křivky v bodě P udává grupovou rychlost. Ta je ovšem vždycky menší než $(\frac{3}{2})^{1/2} v_t$, která je – v naší nerelativistické teorii – mnohem menší než c . Všimněte si, že při velkých k (malých λ) informace postupuje v podstatě tepelnou rychlostí. Při malých k (velkých λ) postupuje informace pomaleji než v_t , i když v_g je větší než v_t . To je proto, že při velkých λ je malý gradient hustoty a tepelný pohyb přenáší velmi malou část hybnosti do sousedních vrstev.

O existenci plazmových oscilací se ví od dvacátých let tohoto století, od doby Langmuirovy. Teprve podrobná teorie vypracovaná 1949 Bohmem a Grosseem ukázala, jak by se takové vlny šířily a jak by mohly být vybudeny.

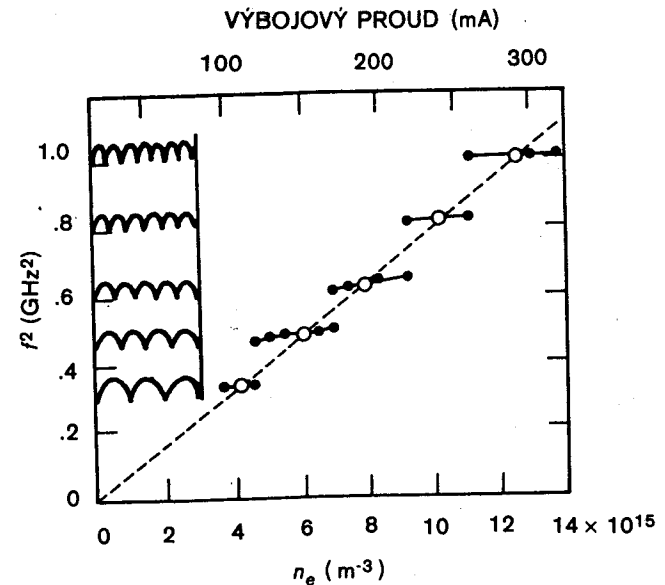


OBR. 4-5 Disperzní křivka elektronových plazmových vln (vlny Bohmovy–Grossovy).



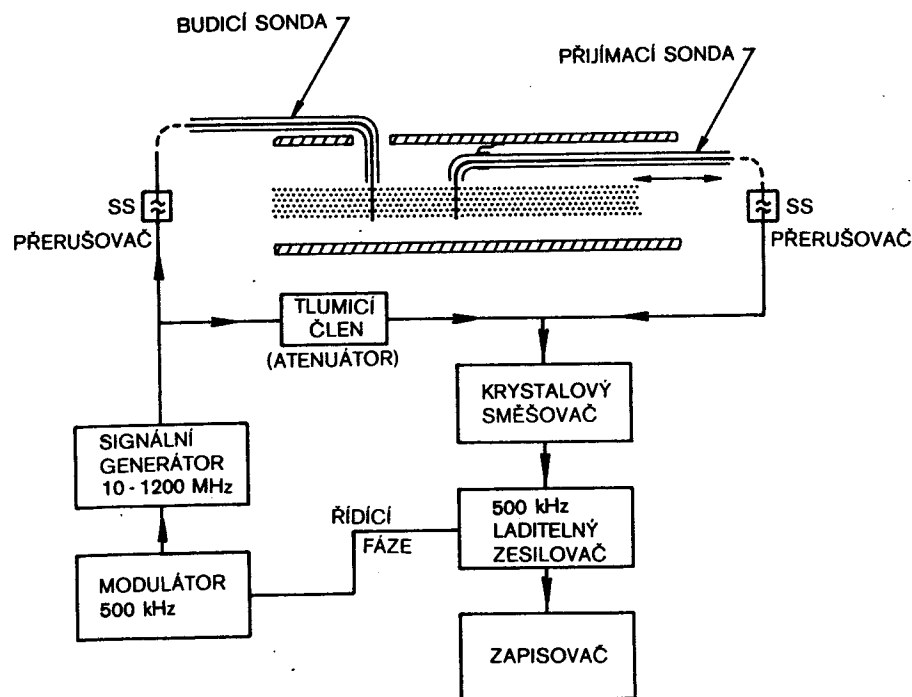
OBR. 4-6 Schéma Looneyova–Brownova experimentu s plazmovými oscilacemi.

Jednoduchý způsob, jak vybudit plazmové vlny, by byl přivést oscilující potenciál na mřížku nebo na sérii mřížek v plazmatu, ale oscilátory pracující v GHz oblasti nebyly v té době obecně dostupné. Bylo místo toho nutno užít pro excitaci plazmových vln elektronový svazek. Kdyby byly elektrony ve svazku shlukovány tak, že by nějaký pevný bod míjely s frekvencí f_p , generovaly by touto frekvencí elektrické pole a excitovaly plazmové oscilace. Není nutné tyto elektronové shluky vytvářet předem; jakmile se jednou plazmové oscilace objeví, způsobí shlukování elektronů a oscilace porostou vlivem pozitivního zpětnovazebného mechanismu. První experiment, který tuto teorii testoval, provedli v roce 1954 Looney a Brown. Celé jejich zařízení bylo ve skleněné baňce o průměru asi 10 cm obr. (4-6). Elektrický výboj mezi katodou K a prstencovou anodou A ve rtuťových párách o nízkém tlaku (3×10^{-3} Torr $\approx 0,4$ Pa) vytvářel plazma zaplňující baňku. Elektronový svazek vznikl v boční trubici, v níž bylo vlákno se záporným předpětím. Emitované elektrony byly urychleny na 200 V a vstřeleny do plazmatu malým otvorem. K zachycení oscilací sloužila pohyblivá sonda z tenkého drátu spojená s přijímačem rádiových vln. Na obr. 4-7, uvádějícím jejich experimentální výsledky, je vyneseno f^2 v závislosti na výbojovém proudu, který je obecně úměrný hustotě. Body vykazují lineární



Druhá mocnina pozorované frekvence v závislosti na hustotě plazmatu, která je v podstatě úměrná výbojovému proudu. Vložený obrázek znázorňuje prostorové rozložení intenzity oscilací, svědčící o rozdílném uspořádání stojatých vln v každé skupině experimentálních bodů. [Převzato z D. H. Looney a S. C. Brown, Phys. Rev. 93, 965 (1954).]

OBR. 4-7

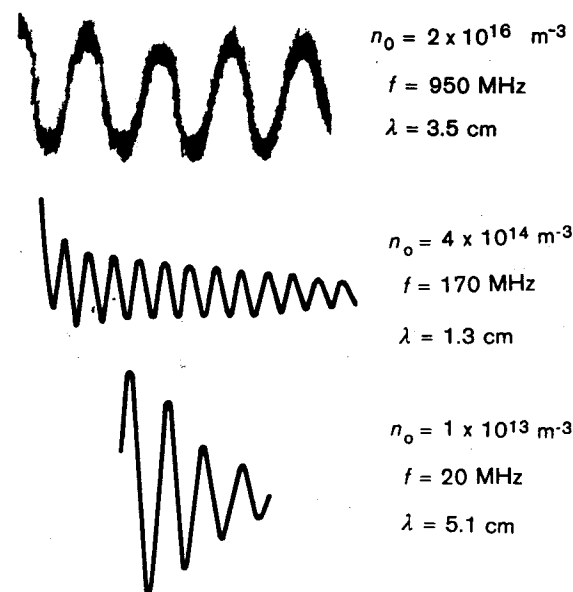


OBR. 4-8 Schéma experimentálního zařízení pro měření plazmových vln. [Převzato z P. J. Barrett, H. G. Jones a R. N. Franklin, Plasma Physics 10, 911 (1968).]

závislost, což je zhruba v soulase s rov. [4-26]. Odchytky od přímky bychom mohli přisoudit členu $k^2 v_i^2$ v rov. [4-30]. Avšak ne všechny frekvence byly pozorovány; k muselo být takové, aby se na délku sloupce plazmatu vešel celý počet půlvln. Na levé straně obrázku 4-7 je znázorněno rozložení stojatých vln. Předpověděné pohybující se plazmové vlny nemohly být v tomto experimentu pozorovány, pravděpodobně proto, že svazek byl tak tenký, že tepelné pohyby vynášely elektrony ven ze svazku a oscilační energie se tak rozplynula. K shlukování elektronů nedocházelo v plazmatu, ale v oscilující stěnové vrstvě na koncích plazmatického sloupce. Tento raný experiment přinesl poučení, že k realizaci podmínek předpokládaných teorií homogenního plazmatu je třeba značné zručnosti.

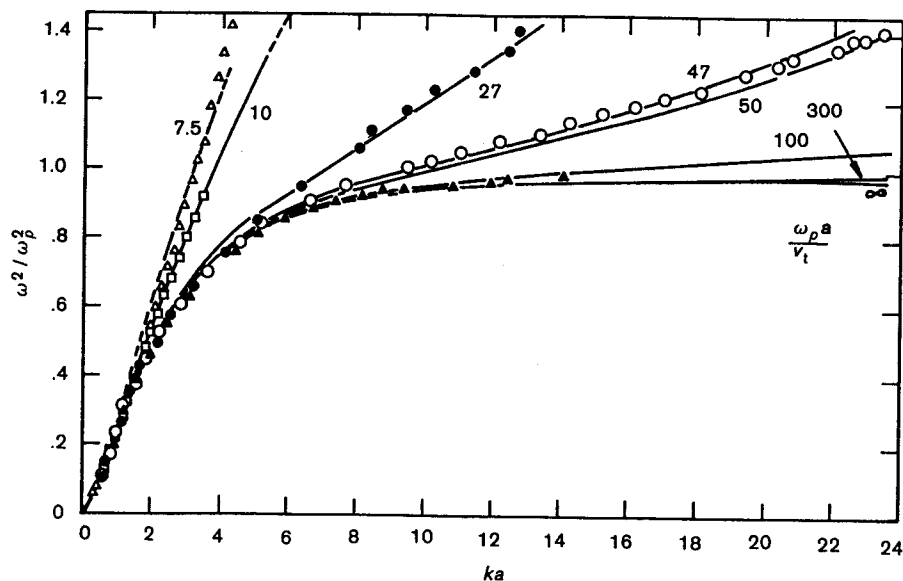
V nedávné době řada experimentů přesně prověřovala Bohmův-Grossův disperzní vztah (rov. [4-30]). Jako příklad moderní experimentální techniky ukážeme výsledky Barrettovy, Jonesovy a Franklinovy. Na obr. 4-8 je schéma jejich aparatury. Cylindrický sloupec klidného plazmatu vzniká v Q-systému tepelnou ionizací Cs atomů na wolframových deskách (nejsou zakresleny). Silné magnetické pole vymezuje pohyb elektronů do směru podél osy sloupce. Vlny jsou vybudzeny oscilátorem, jehož napětí se přivádí

na sondu, a na druhé, pohyblivé sondě jsou detegovány. Aby druhá sonda nezachycovala signál, který se z první sondy šíří jako obyčejné mikrovlny (elektromagnetické vlny), je okolo plazmatu kovové stínění, které vytváří vlnovod s mezní frekvencí vyšší, než je užitá frekvence. Postupující vlny jsou sledovány interferometricky: přiváděný a zachycený signál jsou detegovány krystalem, který na výstupu dává velké stejnosměrné napětí, jsou-li signály ve fázi; jsou-li signály fázově posunuty o 90° , je na výstupu nulové napětí. Na obr. 4-9 je výsledný signál jako funkce polohy podél sloupce. Hladina šumu je potlačena užitím synchronní detekce. Excitační signál je přerušován s frekvencí 500 kHz a zachycený signál by měl mít modulaci rovněž 500 kHz. Detegujeme-li pouze 500 kHz-ovou složku zachyceného signálu, odstraníme šum na jiných frekvencích. Ze záznamů výstupního signálu na obr. 4-9 můžeme změřit k . Měníme-li frekvenci oscilátoru ω , získáme disperzní křivku, tj. závislost $(\omega/\omega_p)^2$ na ka , kde a je poloměr sloupce (obr. 4-10). Jednotlivé křivky jsou označeny hodnotami výrazu $\omega_p a/v_i$. Křivka pro $v_i = 0$ je označena ∞ a odpovídá disperznímu vztahu $\omega = \omega_p$. Pro konečné v_i odpovídají křivky závislosti uvedené na obr. 4-5. Mezi experimentálními body a teoretickými křivkami je dobrý

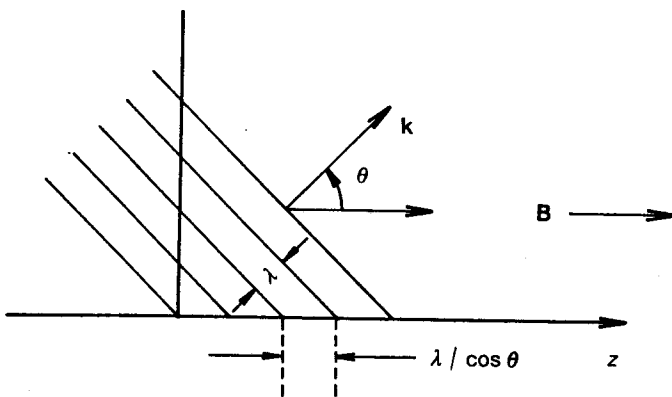


Prostorová změna poruchy hustoty v plazmové vlně, indikovaná interferometrem, který násobí okamžité údaje hustot ze dvou sond a zobrazuje jejich časový průměr. Interferometr je naladěn na frekvenci vlny, která se mění s hustotou. Výrazný útlum při nízkých hustotách je způsoben šumem v plazmatu. [Převzato z Barrett, Jones a Franklin, citovaná práce.]

OBR. 4-9



OBR. 4-10 Porovnání změřených a vypočtených disperzních křivek pro elektronové plazmové vlny ve válci o poloměru a . [Převzato z Barrett, Jones a Franklin, citovaná práce.]



OBR. 4-11 Vlnoplochy postupující pod nenulovým úhlem vzhledem k magnetickému poli jsou ve směru pole od sebe vzdáleny více než o λ .

souhlas. Zmenšení ω při malých hodnotách ka je způsobeno konečnou geometrií plazmatu, jak je znázorněno na obr. 4-4, v tomto experimentu však můžeme tento efekt vysvětlit jiným způsobem. Elektrické pole musí na vodivém stínění splňovat okrajovou podmínku $E = 0$. Proto musí plazmové vlny postupovat pod jistým úhlem vzhledem k magnetickému poli. V plazmatu dochází k interferenci mezi vlnou s radiální složkou k namíře-

nou ven a vlnou s radiální složkou k namířenou dovnitř, a tím je okrajová podmínka splněna. Ve vlnách postupujících pod jistým úhlem k \mathbf{B} jsou však vrchy a důly ve větší vzdálenosti, než $\lambda/2$ (obr. 4-11). Protože se elektrony mohou pohybovat jenom podél \mathbf{B} (když je B veliké), jsou méně urychlovány a frekvence se tak snižuje pod ω_p .

- 4-5. (a) Započítejte tlumicí vliv srážek na šíření Langmuirových vln (elektronových plazmových vln), a to tak, že k pohybové rovnici elektronů přidáte člen $-m\nu\mathbf{v}$ a znovu odvodíte disperzní vztah pro $T_e = 0$.
 (b) Napište explicitní výraz pro $\text{Im}(\omega)$ a ukažte, že jeho znaménko značí, že vlna je v čase tlumená.

ÚLOHA

ZVUKOVÉ VLNY 4.5

Jako úvod k iontovým vlnám přehledněme krátce teorii zvukových vln v obyčejném vzduchu. Zanedbáme-li viskozitu, můžeme Navierovu–Stokesovu rovnici [3-48], která tyto vlny popisuje, zapsat

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p = -\frac{\gamma p}{\rho} \nabla \rho. \quad [4-32]$$

Rovnice kontinuity je

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad [4-33]$$

Linearizaci pro odchylky od rovnovážného stacionárního stavu s hodnotami p_0 a ρ_0 dostáváme

$$-i\omega \rho_0 \mathbf{v}_1 = -\frac{\gamma p_0}{\rho_0} i k \rho_1, \quad [4-34]$$

$$-i\omega \rho_1 + \rho_0 i k \cdot \mathbf{v}_1 = 0, \quad [4-35]$$

kde jsme opět použili vlnovou závislost ve tvaru

$$\exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)].$$

Pro rovinnou vlnu s $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{x}}$ a $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{x}}$ dostáváme po vyloučení ρ_1

$$-i\omega \rho_0 v_1 = -\frac{\gamma p_0}{\rho_0} i k \frac{\rho_0 i k v_1}{i\omega},$$

$$\omega^2 v_1 = k^2 \frac{\gamma p_0}{\rho_0} v_1,$$

neboli

$$\frac{\omega}{k} = \left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0} \right)^{1/2} = \left(\frac{\gamma K T}{M} \right)^{1/2} \equiv c_s \quad [4-36]$$

To je výraz pro rychlost zvukových vln c_z v neutrálním plynu. Jsou to tlakové vlny šířící se od jedné vrstvy ke druhé srážkami mezi molekulami vzduchu. V plazmatu, v němž nejsou neutrální částice a srážky jsou nečetné, dochází k analogickému jevu. Říká se mu *iontově akustická vlna* nebo krátce *iontová vlna*.

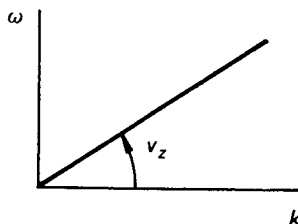
4.6 IONTOVÉ VLNY

Nedochází-li ke srážkám, nemohou vzniknout obyčejné zvukové vlny. Ionty si však přesto mohou působením svých nábojů navzájem předávat chvění; akustické vlny vznikají prostřednictvím elektrického pole. Protože se jedná o pohyb těžkých iontů, oscilace budou mít nízkou frekvenci a my můžeme užít plazmatické přiblížení podle oddílu 3.6. Položíme proto $n_i = n_e = n$ a nebudeme používat Poissonovu rovnici. Rovnice pro iontovou tekutinu bez působení magnetického pole je

$$Mn \left[\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} + (\mathbf{v}_i \cdot \nabla) \mathbf{v}_i \right] = en\mathbf{E} - \nabla p = -en \nabla \phi - \gamma_i K T_i \nabla n. \quad [4-37]$$

Zde jsme předpokládali $\mathbf{E} = -\nabla \phi$ a použili jsme stavovou rovnici. Předpokládejme, že jde o rovinné vlny, a linearizováním dostaneme

$$-i\omega M n_0 v_{i1} = -en_0 i k \phi_1 - \gamma_i K T_i i k n_1. \quad [4-38]$$



OBR. 4-12 Disperzní křivka iontově akustických vln v limitním případě malé Debyeovy délky.

Pro elektrony můžeme položit $m = 0$ a použít úvahy oddílu 3.5, v němž jsme se zabývali pohyby podél \mathbf{B} , pro současný případ $\mathbf{B} = 0$. Pro zachování rovnováhy sil působících na elektrony je nutné, aby

$$n_e = n = n_0 \exp\left(\frac{e\phi_1}{K T_e}\right) = n_0 \left(1 + \frac{e\phi_1}{K T_e} + \dots\right)$$

Porucha hustoty elektronů, a tudíž i iontů, je potom

$$n_1 = n_0 \frac{e\phi_1}{K T_e}. \quad [4-39]$$

Zde n_0 z Boltzmannova vztahu má rovněž význam hustoty v rovnovážném stavu plazmatu, v němž jsme zvolili $\phi_0 = 0$, protože jsme předpokládali $\mathbf{E}_0 = 0$. Při linearizování rov. [4-39] jsme zanedbali členy vyšších řádů v Taylorově rozvoji exponenciely.

Jediná další rovnice, kterou potřebujeme, je linearizovaná rovnice kontinuity pro ionty. Z rov. [4-22] dostáváme

$$i\omega n_1 = n_0 i k v_{i1}. \quad [4-40]$$

V rov. [4-38] vyjádříme ϕ_1 a n_1 pomocí v_{i1} z rovnic [4-39] a [4-40] a obdržíme

$$i\omega M n_0 v_{i1} = \left(en_0 i k \frac{K T_e}{en_0} + \gamma_i K T_i i k \right) \frac{n_0 i k v_{i1}}{i\omega},$$

$$\omega^2 = k^2 \left(\frac{K T_e}{M} + \frac{\gamma_i K T_i}{M} \right),$$

$$\frac{\omega}{k} = \left(\frac{K T_e + \gamma_i K T_i}{M} \right)^{1/2} \equiv v_z \quad [4-41]$$

To je disperzní vztah pro *iontově akustické vlny*; v_z je rychlost zvuku v plazmatu. Protože podle našeho předpokladu jsou v rovinné vlně ionty stlačovány v jednom směru, můžeme položit $\gamma_i = 3$. Elektrony se vzhledem k těmto vlnám pohybují tak rychle, že v každém místě stačí vyrovnat svou teplotu, jejich pohyb je tedy izotermní a $\gamma_e = 1$. Jinak by se před $K T_e$ v rov. [4-41] objevil faktor γ_e .

Disperzní křivka pro iontové vlny (obr. 4-12) se svým charakterem podstatně liší od disperzní křivky elektronových vln (obr. 4-5). Plazmové oscilace jsou v podstatě *vlny s konstantní frekvencí* s odchylkami v důsledku tepelných pohybů, kdežto iontové vlny jsou v podstatě *vlny s konstantní rychlostí* a mohou se vyskytovat pouze tehdy, existuje-li tepelný pohyb. Grupová rychlost iontových vln se rovná fázové rychlosti. Příčiny této rozlišnosti snadno nahlédneme, připomeneme-li si fyzikální mechanismy obou jevů. Při elektronových plazmových oscilacích zůstávají ostatní částice (totiž ionty) v podstatě pevně na místě, při iontově akustických vlnách ostatní částice (tj. elektrony) zdaleka na místě nezůstávají, naopak jsou přetahovány spolu s ionty a snaží se odstínit elektrické pole vznikající nahromaděním iontů. Toto stínění není však dokonalé, protože, jak jsme viděli v oddíle 1.4, v důsledku tepelného pohybu elektronů mohou pronikat ven potenciály řádu $K T_e/e$. Tak dochází k tomu, že ionty vytvářejí oblasti zhuštění a zředění, stejně jako v obyčejné zvukové vlně. Stlačené oblasti se rozpínají do míst zředění, a to ze dvou příčin. Předně ionty rozptyluje jejich tepelný pohyb; to vyjadřuje druhý člen pod odmocninou v rov. [4-41]. Za druhé shluky iontů jsou kladně nabitý a výsledné elektrické pole se snaží je rozptýlit. Toto pole je převážně odstíněno elektrony a jenom malá část,

úměrná KT_e , může na shluky iontů působit. To vyjadřuje první člen pod odmocninou v rov. [4-41]. V důsledku své setrvačnosti ionty přeběhnou, zhuštění a zředění vznikají znovu a vytvářejí vlnu.

Druhý proces, o němž jsme hovořili, vede k pozoruhodnému jevu. Iontové vlny budou existovat, i když se KT_i blíží k nule. To se v neutrálním plynu nemůže stát (rov. [4-36]). Akustická rychlost potom je

$$v_z = (KT_e/M)^{1/2}. \quad [4-42]$$

S tím se často setkáváme v laboratorním plazmatu, v němž je běžným jevem $T_i \gg T_e$. Zvuková rychlost v_z je dána *elektronovou* teplotou (protože elektrické pole je jí úměrné) a hmotností *iontů* (protože je jí úměrná setrvačnost tekutiny).

4.7 PLATNOST PLAZMATICKÉHO PŘÍBLÍŽENÍ

Při odvozování rychlosti iontových vln jsme užili podmínku neutrality $n_i = n_e$, zatímco jsme připustili, aby E bylo konečné. Abychom viděli, jakou chybu jsme do našeho výpočtu zanesli, připustíme nyní, aby se n_i lišilo od n_e , a užijeme linearizovanou Poissonovu rovnici

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_1 = k^2 \phi_1 = e(n_{i1} - n_{e1})/\epsilon_0. \quad [4-43]$$

Elektronová hustota je dána linearizovaným Boltzmannovým zákonem [4-39]

$$n_{e1} = \frac{e\phi_1}{KT_e} n_0. \quad [4-44]$$

Dosazením do rov. [4-43] dostáváme

$$\phi_1 \left(k^2 + \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 K T_e} \right) = \frac{e n_{i1}}{\epsilon_0},$$

$$\phi_1 (k^2 \lambda_D^2 + 1) = \frac{e n_{i1}}{\epsilon_0} \lambda_D^2. \quad [4-45]$$

Iontová hustota je dána linearizovanou rovnicí kontinuity pro ionty [4-40]

$$n_{i1} = \frac{k}{\omega} n_0 v_{i1}. \quad [4-46]$$

Dosazením výrazů [4-45] a [4-46] do iontové pohybové rovnice [4-38] nacházíme

$$i\omega M n_0 v_{i1} = \left(e n_0 i k \frac{e \lambda_D^2}{\epsilon_0} \frac{1}{1 + k^2 \lambda_D^2} + \gamma_i K T_i i k \right) \frac{k}{\omega} n_0 v_{i1},$$

$$\omega^2 = \frac{k^2}{M} \left(\frac{n_0 e^2 \lambda_D^2}{\epsilon_0} \frac{1}{1 + k^2 \lambda_D^2} + \gamma_i K T_i \right), \quad [4-47]$$

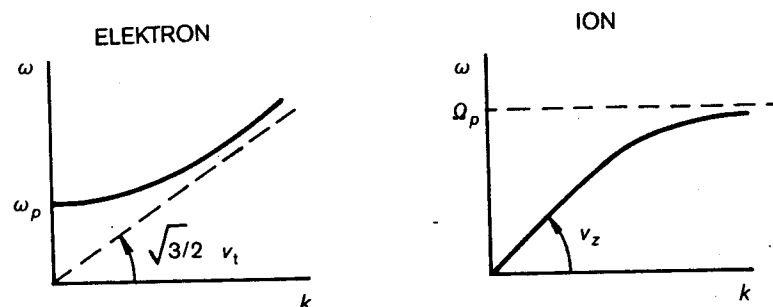
$$\frac{\omega}{k} = \left(\frac{K T_e}{M} \frac{1}{1 + k^2 \lambda_D^2} + \frac{\gamma_i K T_i}{M} \right)^{1/2}. \quad [4-48]$$

Až na faktor $1 + k^2 \lambda_D^2$ je to týž výraz jako ten, který jsme obdrželi předtím ([4-41]). Náš předpoklad $n_i = n_e$ vedl k chybě řádu $k^2 \lambda_D^2 = (2\pi \lambda_D / \lambda)^2$. Protože ve většině experimentů je λ_D velice malé, platí plazmatické přiblížení s výjimkou velmi krátkých vlnových délek.

SROVNÁNÍ IONTOVÝCH A ELEKTRONOVÝCH VLN 4.8

Máme-li na mysli vlny s krátkými vlnovými délkami, položíme $k^2 \lambda_D^2 \gg 1$ a z rov. [4-47] dostáváme

$$\omega^2 = k^2 \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 M k^2} = \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 M} \equiv \Omega_p^2. \quad [4-49]$$



Srovnání disperzních křivek elektronových plazmových vln a iontové akustických vln. OBR. 4-13

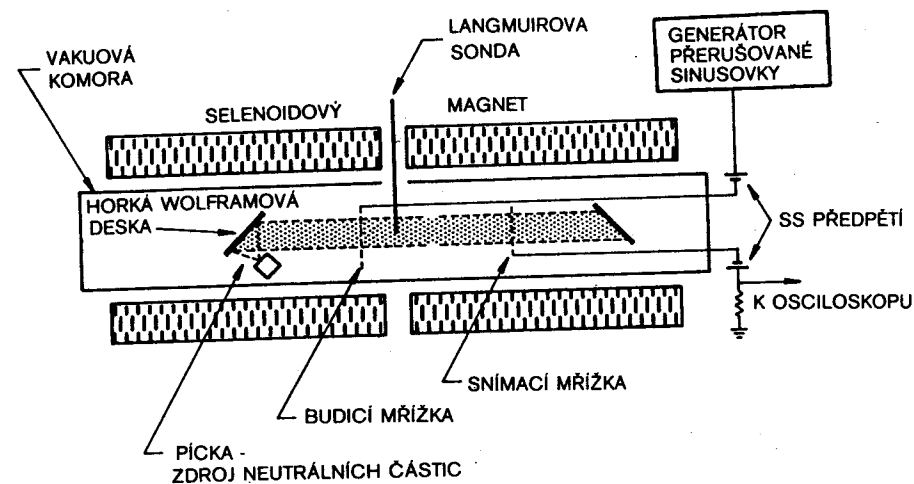
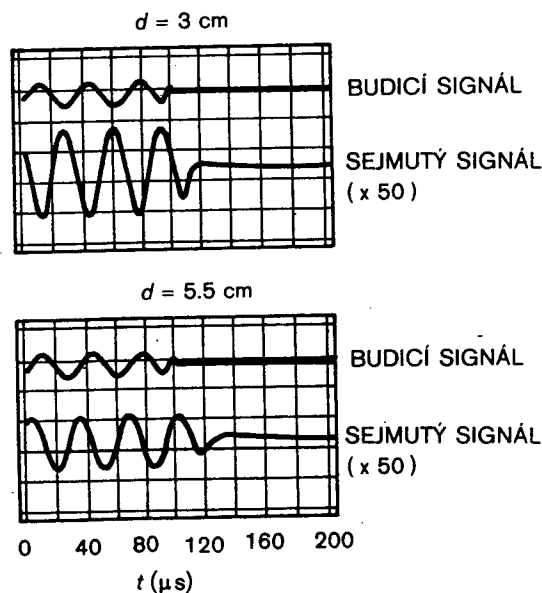


Schéma měřicí aparatury na detekci iontových vln v Q-systému. [Převzato z A. Y. Wong, OBR. 4-14 R. W. Motley a N. D'Angelo, Phys. Rev. 133, A936 (1964).]

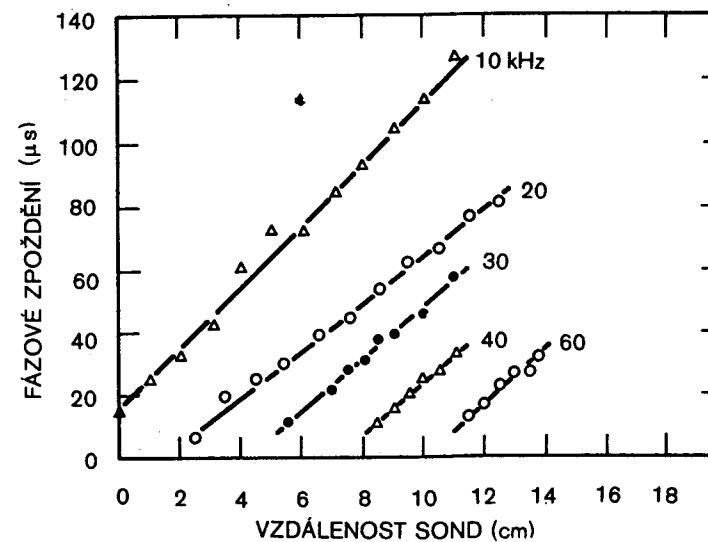
Pro jednoduchost jsme vzali rovněž limitu $T_i \rightarrow 0$. Ω_p je plazmová frekvence iontů. Pro vysoké frekvence (krátké vlnové délky) se iontově akustická vlna změni ve vlnu s konstantní frekvencí. Chování elektronových plazmových vln a iontově akustických vln má tedy komplementární charakter: základní vlastnost prvních je konstantní frekvence, ale při velkých k se stávají vlnami s konstantní rychlostí; základní vlastnost druhých je konstantní rychlost, ale při velkých k se stávají vlnami s konstantní frekvencí. Toto srovnání je znázorněno na obrázku 4-13.



OBR. 4-15 Oscilogramy signálů z budicí a přijímací mřížky, jež jsou od sebe ve vzdálenosti d . Podle zpoždění je zřejmé, že se jedná o postupující vlnu. [Převzato z Wong, Motley a D'Angelo, citovaná práce.]

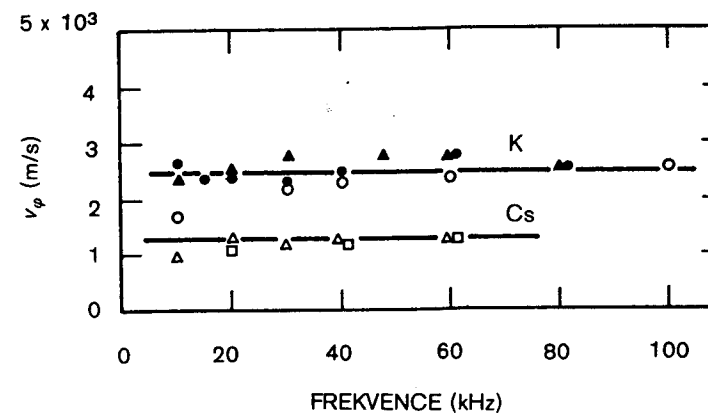
Existenci iontových vln poprvé experimentálně ověřili Wong, Motley a D'Angelo. Obrázek 4-14 ukazuje jejich aparaturu; opět se jedná o Q-systém. (Není náhodné, že se tak často zmiňujeme o Q-systémech; pečlivé experimentální ověřování teorie plazmatu bylo možné teprve poté, co byly objeveny způsoby, jak vytvářet klidné plazma.) Vlny byly vysílány a snímány mřížka... umístěnými v plazmatu. Na obrázku 4-15 jsou osciloskopické záznamy přiváděného a zachyceného signálu. Ze změny fáze lze nalézt fázovou rychlost (která je v tomto případě též jako grupová rychlost). Na obr. 4-16 jsou vyneseny fázové posuvy jako funkce vzdálenosti pro hustotu plazmatu $3 \times 10^{17} \text{ m}^{-3}$. Fázové rychlosti jsou dány sklony těchto

křivek a na obr. 4-17 jsou vyneseny pro dvě hmotnosti a různé hustoty plazmatu n_0 . Experimentálně je tím ukázáno, že v_z nezávisí na ω a n_0 , a zároveň dva soubory bodů pro K a Cs ukazují závislost na M .



Zpoždění v závislosti na vzdálenosti sond při různých frekvencích budicího generátoru. Sklon křivek dává fázovou rychlost. [Převzato z Wong, Motley a D'Angelo, citovaná práce.]

OBR. 4-16



Měřená fázová rychlost iontových vln v draslíkovém a cesiovém plazmatu jako funkce frekvence. Jednotlivé soubory bodů odpovídají různým hustotám plazmatu. [Převzato z Wong, Motley a D'Angelo, citovaná práce.]

OBR. 4-17

4.9 ELEKTROSTATICKÉ ELEKTRONOVÉ OSCILACE KOLMÉ NA \mathbf{B}

Dosud jsme předpokládali, že $\mathbf{B} = 0$. Je-li však v plazmatu nenulové magnetické pole, může vzniknout mnohem víc typů vln. Budeme vyšetřovat jenom nejjednodušší případy a začneme vysokofrekvenčními elektrostatickými oscilacemi elektronů šířícími se v pravých úhlech k magnetickému poli. Nejprve bychom měli definovat termíny kolmý (perpendikulární), rovnoběžný (paralelní), podélný (longitudinální), příčný (transversální), elektrostatický a elektromagnetický. *Rovnoběžný a kolmý* budeme užívat pro označení směru \mathbf{k} vzhledem k neporušenému magnetickému poli \mathbf{B}_0 . *Podélný a příčný* se týká směru \mathbf{k} vzhledem k oscilujícímu elektrickému poli \mathbf{E}_1 . Je-li oscilující magnetické pole \mathbf{B}_1 nulové, jde o vlnu *elektrostatickou*, v opačném případě o *elektromagnetickou*. Vztah mezi posledními čtyřmi termíny je dán Maxwellovou rovnicí

$$\nabla \times \mathbf{E}_1 = -\dot{\mathbf{B}}_1 \quad (4-50)$$

neboli

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E}_1 = \omega \mathbf{B}_1 \quad (4-51)$$

Je-li vlna podélná (longitudinální), $\mathbf{k} \times \mathbf{E}_1$ je nulové a vlna je rovněž elektrostatická. Je-li vlna příčná (transversální), je \mathbf{B}_1 konečné a vlna je elektromagnetická. Mezi \mathbf{k} a \mathbf{B}_0 nebo \mathbf{E}_1 může ovšem být libovolný úhel, pak by se jednalo o kombinaci základních modů zde uvedených.

Vraťme se zpět k elektronovým oscilacím kolmým na \mathbf{B}_0 a předpokládejme, že ionty jsou pro frekvence oscilací příliš těžké, takže se nepohybují a vytvářejí homogenní pozadí kladného náboje. Zanedbáme rovněž tepelné pohyby a položíme $KT_e = 0$. Rovnovážné plazma má jako obvykle časově konstantní a prostorově homogenní n_0 a \mathbf{B}_0 a nulové \mathbf{E}_0 a \mathbf{v}_0 . Pohyb elektronů se pak řídí následujícími linearizovanými rovnicemi

$$m \frac{\partial \mathbf{v}_{e1}}{\partial t} = -e(\mathbf{E}_1 + \mathbf{v}_{e1} \times \mathbf{B}_0), \quad (4-52)$$

$$\frac{\partial n_{e1}}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_{e1} = 0, \quad (4-53)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_1 = -en_{e1}/\epsilon_0. \quad (4-54)$$

Budeme se zabývat pouze *podélnými* vlnami $\mathbf{k} \parallel \mathbf{E}_1$. Bez újmy na obecnosti můžeme zvolit osu x tak, aby měla směr \mathbf{k} a \mathbf{E}_1 , a osu z tak, aby ležela ve směru \mathbf{B}_0 (obr. 4-18). Tak $k_y = k_z = E_y = E_z = 0$, $\mathbf{k} = k\hat{x}$ a $\mathbf{E} = E\hat{x}$. Vynecháme indexy 1 a e a rozepíšeme rov. [4.52] ve složkách

$$-i\omega m v_x = -eE - ev_x B_0, \quad (4-55)$$

$$-i\omega m v_y = +ev_x B_0, \quad (4-56)$$

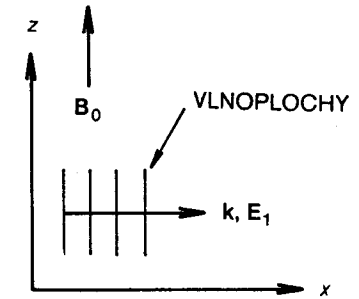
$$-i\omega m v_z = 0.$$

Z rovnice [4-56] vyjádříme v_y , dosadíme do rov. [4-55] a dostáváme

$$i\omega m v_x = eE + eB_0 \frac{ieB_0}{m\omega} v_x,$$

$$v_x = \frac{eE/im\omega}{1 - \omega_c^2/\omega^2}. \quad (4-57)$$

Všimněme si, že v_x se stává při cyklotronové rezonanci $\omega = \omega_c$ nekonečné.



Geometrické schéma podélné rovinné vlny šířící se kolmo na \mathbf{B}_0 .

OBR. 4-18

To lze očekávat, protože elektrické pole mění znaménko s v_x a spojitě urychluje elektrony. Zanedbáme-li členy $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ a ∇p , jsou rovnice pro tekutinu a rovnice pro jednotlivou částici totožné, všechny částice se pohybují zároveň. Z linearizovaného tvaru rov. [4-53] dostáváme

$$n_1 = \frac{k}{\omega} n_0 v_x. \quad (4-58)$$

Linearizováním rov. [4-54] a použitím posledních dvou výsledků dostáváme

$$ikE = -\frac{e}{\epsilon_0} \frac{k}{\omega} n_0 \frac{eE}{im\omega} \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1},$$

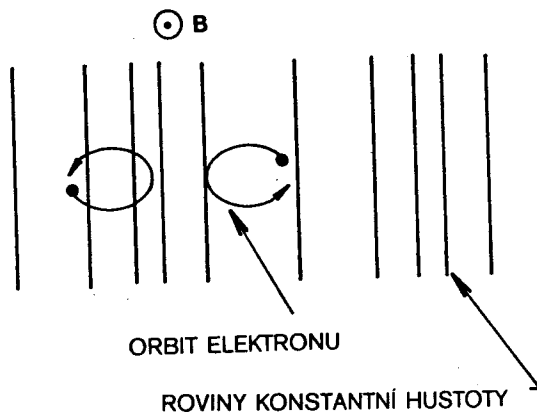
$$\left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right) E = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} E. \quad (4-59)$$

Disperzní vztah je tedy

$$\omega^2 = \omega_p^2 + \omega_c^2 \equiv \omega_h^2 \quad (4-60)$$

Frekvence ω_h se nazývá *horní hybridní frekvence*. Tuto frekvenci mají elektrostatické elektronové vlny kolmé na \mathbf{B} , kdežto vlny ve směru \mathbf{B} jsou obyčejné plazmové oscilace s $\omega = \omega_p$. Grupová rychlost je opět nulová, pokud zanedbáváme tepelné pohyby.

Fyzikální znázornění těchto oscilací je na obr. 4-19. Elektronů v rovinné vlně vytvářejí oblasti zhuštění a zředění jako při plazmových oscilacích. Nyní je však přítomno \mathbf{B} pole kolmé na pohyb a Lorentzova síla přeměňuje trajektorie v elipsy. Na elektrony působí nyní dvě síly vracející je zpět do rovnovážné polohy, elektrostatické pole a Lorentzova síla,



OBR. 4-19 Pohyb elektronů při horní hybridní oscilaci.

frekvence je proto větší než frekvence plazmových oscilací. S magnetickým polem jdoucím k nule půjde k nule i ω_c v rov. [4-60] a dostaneme opět plazmové oscilace. Jde-li k nule hustota plazmatu, půjde i ω_p k nule a dostaneme obyčejnou Larmorovu rotaci, protože elektrostatické síly vymizí spolu s hustotou.

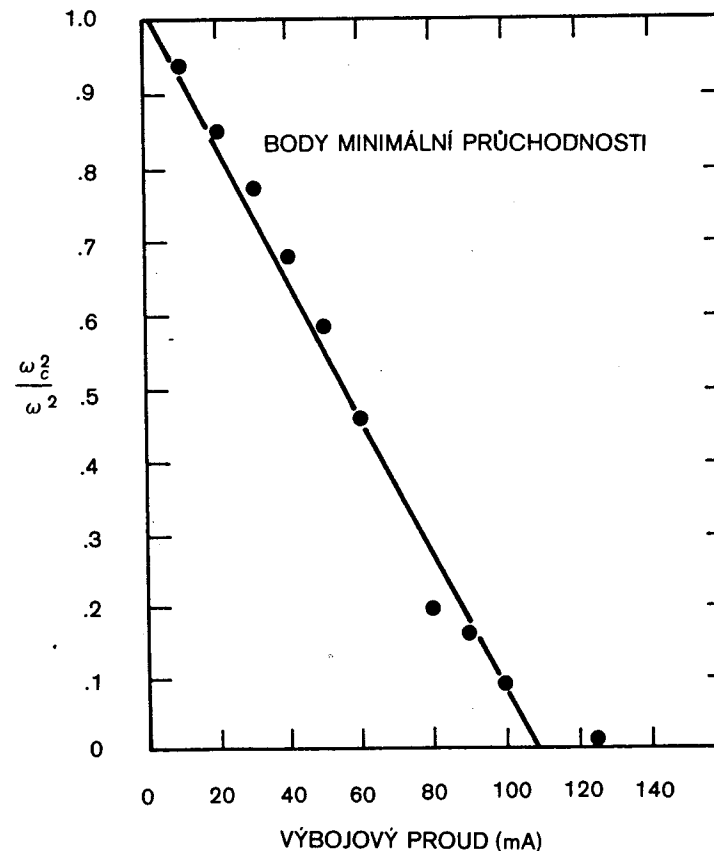
Existence horní hybridní frekvence byla experimentálně ověřována průchodem mikrovlnného signálu napříč magnetickým polem. Měníme-li hustotu plazmatu, pak při takové hodnotě, pro niž se ω_h rovná frekvenci signálu, snižuje se propustnost plazmatu, protože jsou vybudeny oscilace s horní hybridní frekvencí a energie mikrovln je absorbována. Podle rov. [4-60] je závislost ω_c^2/ω^2 na hustotě lineární

$$\frac{\omega_c^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = 1 - \frac{ne^2}{\epsilon_0 m \omega^2}$$

Na obr. 4-20, kde je vyneseno ω_c^2/ω^2 jako funkce výbojového proudu, jenž je úměrný n , je tato závislost experimentálně ověřena.

Svírají-li \mathbf{k} a \mathbf{B} úhel ϑ , dostaneme dvě možné vlny. Jedna je stejná jako plazmové oscilace a druhá jako horní hybridní oscilace, ale obě jsou modifikovány úhlem šíření. Podrobnosti jsme ponechali pro cvičení (úloha 4-7). Na obrázku 4-21 je schematický graf $\omega(k_z)$ pro tyto dvě vlny při pevném k_x ,

kde $k_x/k_z = \tan \vartheta$. V důsledku symetričnosti rovnice [4-60] je případ $\omega_c > \omega_p$ tentýž jako $\omega_p > \omega_c$, jenom indexy jsou zaměněny. Pro velká k_z běží vlna rovnoběžně s \mathbf{B}_0 . Jedna vlna jsou plazmové oscilace při $\omega = \omega_p$, druhá vlna $\omega = \omega_c$ je nefyzikální kořen při $k_z \rightarrow \infty$. Příklad malého k_z , kdy $\mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0$, jsme rozebírali v tomto oddíle. Spodní větev vymizí, zatímco horní větev se přibližuje frekvenci hybridních oscilací $\omega = \omega_h$. Tyto křivky byly prvně vypočteny Trivelpieceem a Gouldem, kteří je také experimentálně ověřili (obr. 4-22). Trivelpieceův-Gouldův experiment byl uskutečněn ve



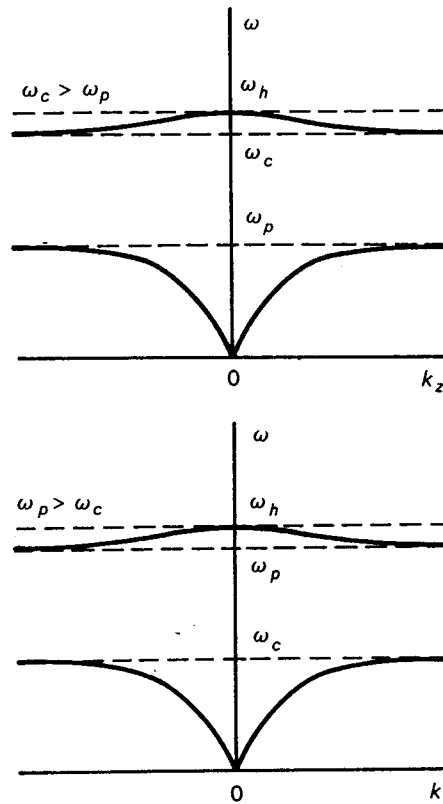
OBR. 4-20 Výsledky experimentu dokazujícího existenci horní hybridní frekvence zmápnáním podmínek, při nichž dochází k maximální absorpci (minimální průchodnosti) mikrovlnné energie vyslané napříč magnetickým polem. Pole (vyjádřené prostřednictvím ω_c^2/ω^2), při němž tento jev nastane, je vyneseno jako funkce výbojového proudu (úměrného hustotě plazmatu). [Převzato z R. S. Harp, Proceedings of the Seventh International Conference on Phenomena in Ionized Gases, Belgrade, 1965, II, 294 (1966).]

sloupci cylindrického plazmatu. Lze ukázat, že změna k_z je v tomto případě ekvivalentní změně úhlu šíření rovinné vlny vzhledem k B_0 .

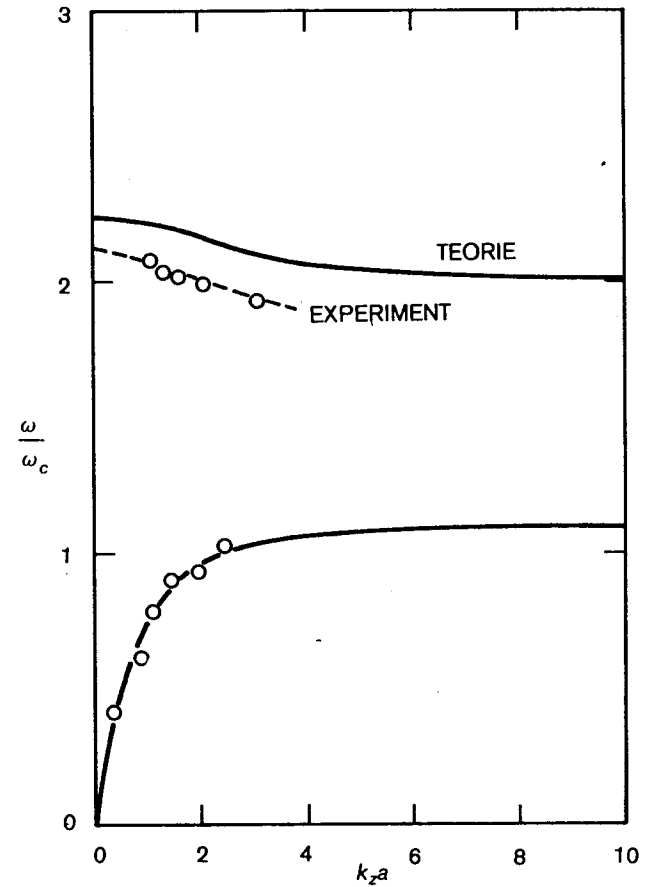
ÚLOHY 4-6. Ukažte, že při horní hybridní oscilaci jsou eliptické orbity (obr. 4-19) prodlouženy vždycky ve směru k . (Návod: Z pohybové rovnice odvoďte výraz pro v_x/v_z jako funkci ω/ω_c)

4-7. Nalezněte disperzní vztah pro elektrostatické elektronové vlny šířící se pod libovolným úhlem ϑ vzhledem k B_0 . Návod: Zvolte osu x tak, aby k a E ležely v rovině $x - z$ (obr. 4-23). Potom

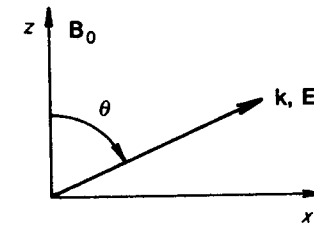
$$E_x = E_1 \sin \vartheta, \quad E_z = E_1 \cos \vartheta, \quad E_y = 0$$



OBR. 4-21 Trivelpieceovy-Gouldovy disperzní křivky pro elektrostatické elektronové vlny ve vodivém válci naplněném homogenním plazmatem, jehož osa je souběžná s magnetickým polem. [Převzato z A. W. Trivelpiece a R. W. Gould, J. Appl. Phys. 30, 1784 (1959).]



OBR. 4-22 Experimentální ověření Trivelpieceových-Gouldových křivek, dokazující existenci zpětných vln, tj. vln, jejichž grupová rychlost, jak je vidět ze sklonu disperzní křivky, má opačný směr než rychlost fázová. [Převzato z Trivelpiece-Gould, citovaná práce.]



OBR. 4-23

a podobně pro k . Řešte pohybovou rovnici obvyklým způsobem s homogenním n_0 a $v_0 = E_0 = 0$.

(a) Ukažte, že odpověď je

$$\omega^2(\omega^2 - \omega_n^2) + \omega_c^2 \omega_p^2 \cos^2 \vartheta = 0.$$

(b) Napište obě řešení této rovnice kvadratické v ω^2 a ukažte, že v limitě $\vartheta \rightarrow 0$ a $\vartheta \rightarrow \pi/2$ dostanete výsledek, který již známe. Ukažte, že v těchto limitách je jeden z kořenů nefyzikální.

(c) Doplněním na čtverec ukažte, že shora uvedená rovnice je rovnicí elipsy

$$\frac{(y-1)^2}{1^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1,$$

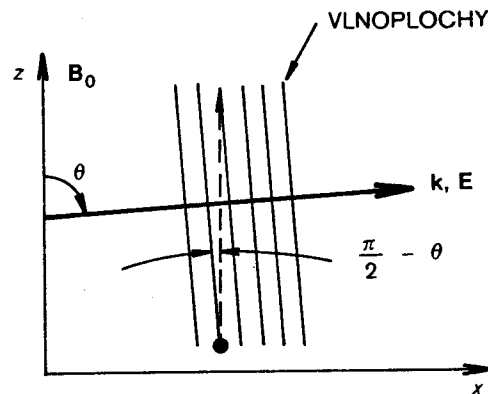
kde $x \equiv \cos \vartheta$, $y \equiv 2\omega^2/\omega_h^2$ a $a \equiv \omega_h^2/2\omega_c\omega_p$.

(d) Nakreslete tuto elipsu pro $\omega_p/\omega_c = 1, 2$ a ∞ .

(e) Ukažte, že pro $\omega_c > \omega_p$ je spodní kořen pro ω vždycky menší než ω_p pro kterékoliv $\vartheta \rightarrow 0$ a horní kořen vždycky leží mezi ω_c a ω_h ; pro $\omega_p > \omega_c$ leží spodní kořen pod ω_c , kdežto horní kořen je mezi ω_p a ω_h .

4.10 ELEKTROSTATICKÉ IONTOVÉ VLNY KOLMÉ NA B

Nyní budeme zkoumat, co se stane s iontově akustickou vlnou, jestliže je k kolmé na B_0 . To svádí k tomu, abychom položili $k \cdot B_0$ přesně rovno nule. Dostali bychom tak výsledek (oddíl 4.11), který by sice byl matematicky správný, ale nepopisoval by to, co se obvykle v reálném plazmatu děje. Namísto toho ponecháme k téměř kolmé k B_0 ; co se tím „téměř“ myslí, objasníme později. Považujeme jako obvykle plazma za nekonečné, mající v rovnovážném stavu časově konstantní a prostorově homogenní n_0 a B_0 a nechť je $v_0 = E_0 = 0$. Pro jednoduchost položíme $T_i = 0$; tím se nepřipravíme o žádný důležitý jev, protože, jak už víme, akustické vlny existují i při $T_i = 0$. Budeme rovněž předpokládat, že jde o vlny elektrostatické s $k \times E = 0$, takže $E = -\nabla\phi$. Geometrie je znázorněna na obr. 4-24. Úhel $\frac{1}{2}\pi - \vartheta$ považujeme za tak malý, že můžeme položit $E = E_1 \hat{x}$ a $\nabla = -ik\hat{x}$, pokud máme na mysli pohyb iontů. V případě elektronů je však velký rozdíl, je-li $\frac{1}{2}\pi - \vartheta$ nula nebo malé, ale konečné. Larmorův poloměr pro



OBR. 4-24 Geometrické schéma elektrostatické iontové cyklotronní vlny šířící se přibližně kolmo na B_0 .

elektrony je tak malý, že se elektrony ve směru x nemohou pohybovat a neutralizovat tak prostorový náboj; celý účinek elektrického pole spočívá v tom, že nutí elektrony k driftovému pohybu sem a tam v y -ovém směru. Jestliže však ϑ není přesně $\frac{1}{2}\pi$, mohou se elektrony pohybovat podél vyčárkované přímky (ve směru B_0) na obr. 4-24, přenesají náboj ze záporných do kladných oblastí vlny a uskutečňují tak Debyeův mechanismus stínění. Ionty nemohou podobný pohyb efektivně vykonávat, protože jejich setrvačnost jim nedovolí, aby během periody uběhly tak velkou vzdálenost. Proto můžeme v jejich případě k_z zanedbat. Mezní úhel $\chi = \frac{1}{2}\pi - \vartheta$ je úměrný poměru iontové ku elektronové rychlosti ve směru B_0 : $\chi \approx (m/M)^{1/2}$ (v radiánech). Pro větší úhly χ platí postup, který teď ukážeme. Pro menší úhly χ je nutno postupovat jako v odd. 4.11.

Po tomto zdlouhavém úvodu přistoupíme k stručnému odvození výsledků. Pohybová rovnice iontů má tvar

$$M \frac{\partial v_{i1}}{\partial t} = -e \nabla \phi_1 + e v_{i1} \times B_0. \quad [4-61]$$

Předpokládáme rovinnou vlnu šířící se ve směru x . Rozepsáním poslední rovnice do složek dostáváme

$$\begin{aligned} -i\omega M v_{ix} &= -eik\phi_1 + e v_{iy} B_0, \\ -i\omega M v_{iy} &= -e v_{ix} B_0. \end{aligned} \quad [4-62]$$

Postupujeme podobně jako předešle a nacházíme

$$v_{ix} = \frac{ek}{M\omega} \phi_1 \left(1 - \frac{\Omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1}, \quad [4-63]$$

kde $\Omega_c = eB_0/M$ je iontová cyklotronní frekvence. Rovnice kontinuity pro ionty dává jako obvykle

$$n_{i1} = n_0 \frac{k}{\omega} v_{ix}. \quad [4-64]$$

Předpokládáme, že se elektrony mohou pohybovat ve směru B_0 , protože úhel χ není nulový, můžeme tedy pro ně užít Boltzmannův zákon. V linearizovaném tvaru zní

$$\frac{n_{e1}}{n_0} = \frac{e\phi_1}{KT_e}. \quad [4-65]$$

Plazmatické přiblížení $n_i = n_e$ systém rovnic uzavírá. Rovnici [4-63] můžeme pomocí rov. [4-64] a [4-65] zapsat

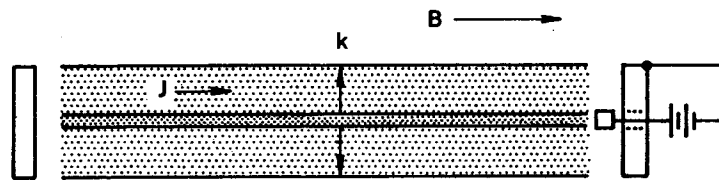
$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\Omega_c^2}{\omega^2}\right) v_{ix} &= \frac{ek}{M\omega} \frac{KT_e}{en_0} \frac{n_0 k}{\omega} v_{ix}, \\ \omega^2 - \Omega_c^2 &= k^2 \frac{KT_e}{M}. \end{aligned} \quad [4-66]$$

Poněvadž jsme položili $KT_i = 0$, můžeme totéž zapsat takto

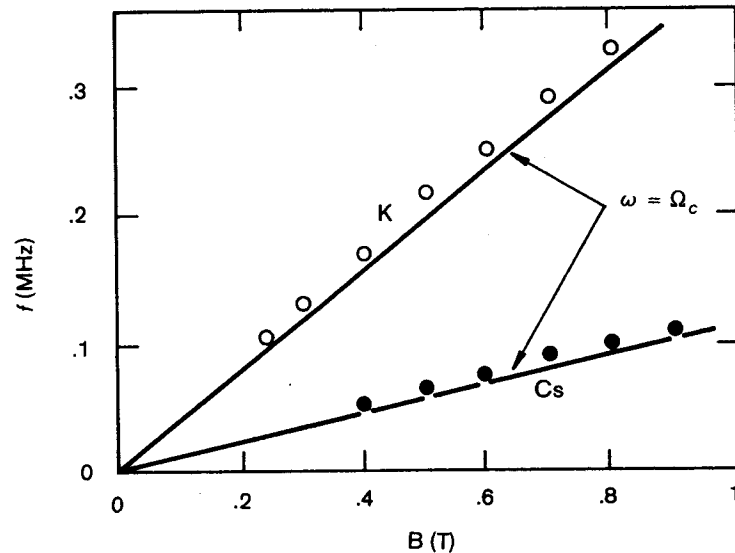
$$\omega^2 = \Omega_c^2 + k^2 v_z^2 \quad [4-67]$$

To je disperzní vztah pro *elektrostatické iontové cyklotronní vlny*.

Fyzikální vysvětlení těchto vln je velmi podobné tomu, které jsme podali na obr. 4-19 pro horní hybridní vlny. Ionty mají tendenci oscilovat jako ve vlně akustického typu, ale Lorentzova síla představuje novou sílu směřující k obnově původního stavu a její vliv se v rov. [4-67] projeví členem Ω_c^2 . Akustický disperzní vztah $\omega^2 = k^2 v_z^2$ platí tehdy, vytvářejí-li elektrony Debyeovo stínění. V tomto případě to činí prolétáváním dlouhé vzdálenosti ve směru B_0 .



OBR. 4-25 Schéma experimentu s elektrostatickými iontovými cyklotronními vlnami v Q-systému. [Podle R. W. Motley a N. D'Angelo, Phys. Fluids 6, 296 (1963).]



OBR. 4-26 Naměřená frekvence elektrostatických iontových cyklotronních vln v závislosti na magnetickém poli. [Převzato z Motley a D'Angelo, citovaná práce.]

Elektrostatické iontové cyklotronní vlny poprvé pozorovali Motley a D'Angelo, opět v Q-systému (obr. 4-25). Vlny se šířily radiálně směrem ven napříč magnetickým polem a byly buzeny elektrickým proudem tekoucím podél osy k malé pomocné elektrodě. Princip buzení je poměrně složitý a nebudeme se jím zabývat. Jejich výsledky jsou na obr. 4-26, kde je vynesena frekvence vln v závislosti na magnetickém poli. Člen $k^2 v_z^2$ byl při tomto experimentu malý ve srovnání s členem Ω_c^2 a měřené frekvence byly jen o málo vyšší než Ω_c .

DOLNÍ HYBRIDNÍ FREKVENCE 4.11

Budeme se teď zabývat tím, co se stane, jestliže ϑ je přesně $\pi/2$ a elektrony nemohou svým pohybem podél siločar udržovat neutralitu plazmatu. Namísto Boltzmannovým zákonem budou se teď řídit úplnou pohybovou rovnicí [3-62]. Ponecháme-li elektronům konečnou hmotnost, bude tato rovnice netriviální dokonce i tehdy, předpokládáme-li $T_e = 0$ a vypustíme-li člen ∇p , což pro jednoduchost učiníme. Pohybová rovnice iontů [4-63] zůstává nezměněna, takže

$$v_{ix} = \frac{ek}{M\omega} \phi_1 \left(1 - \frac{\Omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1} \quad [4-68]$$

V rov. [4-68] zaměníme e za $-e$, M za m a Ω_c za $-\omega_c$ a můžeme rovnou napsat výsledek řešení rovnice [3-62] pro elektrony při $T_e = 0$

$$v_{ex} = -\frac{ek}{m\omega} \phi_1 \left(1 - \frac{\Omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1} \quad [4-69]$$

Rovnice kontinuity dávají

$$n_{i1} = n_0 \frac{k}{\omega} v_{i1}, \quad n_{e1} = n_0 \frac{k}{\omega} v_{e1} \quad [4-70]$$

Má-li platit plazmatické přiblížení $n_i = n_e$, musí být $v_{i1} = v_{e1}$. Položme rovnice [4-68] a [4-69] rovné sobě navzájem a dostaneme

$$M \left(1 - \frac{\Omega_c^2}{\omega^2}\right) = -m \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right),$$

$$\omega^2 (M + m) = m\omega_c^2 + M\Omega_c^2 = e^2 B^2 \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right),$$

$$\omega^2 = \frac{e^2 B^2}{Mm} = \Omega_c \omega_c,$$

$$\omega = (\Omega_c \omega_c)^{1/2} \equiv \omega_d \quad [4-71]$$

To nazýváme *dolní hybridní frekvenci*. Je to frekvence, kterou by měly elektrostatické iontové oscilace, kdyby ϑ bylo přesně $\pi/2$. Protože je obtížné držet ϑ s požadovanou přesností na této hodnotě, lze frekvenci $\omega = \omega_d$ zřídka pozorovat.

4.12 ELEKTROMAGNETICKÉ VLNY S $\mathbf{B}_0 = 0$

Podle složitosti přicházejí nyní na řadu vlny s $\mathbf{B}_1 \neq 0$. To jsou příčné elektromagnetické vlny – světelné vlny či rádiové vlny procházející plazmatem. Začneme stručným přehledem chování světelných vln ve vakuu. Příslušné Maxwellovy rovnice jsou

$$\nabla \times \mathbf{E}_1 = -\dot{\mathbf{B}}_1, \quad (4-72)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B}_1 = \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}}_1, \quad (4-73)$$

neboť ve vakuu je $\mathbf{j} = 0$. Rovnici [4-73] dělíme ε_0 a aplikujeme na ni operátor rotace a dosadíme ji do časově zderivované rovnice [4-72]. Poněvadž $1/(\varepsilon_0 \mu_0) = c^2$, dostáváme

$$c^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}_1) = \nabla \times \dot{\mathbf{E}}_1 = -\ddot{\mathbf{B}}_1. \quad (4-74)$$

Opět předpokládáme rovinné vlny s vlnovým faktorem $\exp[i(kx - \omega t)]$ a dostáváme

$$\omega^2 \mathbf{B}_1 = -c^2 \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{B}_1) = -c^2 [\mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_1) - k^2 \mathbf{B}_1]. \quad (4-75)$$

Protože podle jiné z Maxwellových rovnic $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_1 = -i \nabla \cdot \mathbf{B}_1 = 0$, je výsledek

$$\omega^2 = k^2 c^2 \quad (4-76)$$

a c je fázová rychlost ω/k světelných vln.

V plazmatu s $\mathbf{B}_0 = 0$ zůstává rov. [4-72] nezměněna, ale k rovnici [4-73] musíme přičíst člen \mathbf{j}_1 , odpovídající poruchovým proudům v důsledku pohybu nabitých částic

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B}_1 = \frac{\mathbf{j}_1}{\varepsilon_0} + \dot{\mathbf{E}}_1. \quad (4-77)$$

Časová derivace této rovnice je

$$c^2 \nabla \times \dot{\mathbf{B}}_1 = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \mathbf{j}_1}{\partial t} + \ddot{\mathbf{E}}_1 \quad (4-78)$$

a rotace rov. [4-72] dává

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}_1) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}_1) - \nabla^2 \mathbf{E}_1 = -\nabla \times \dot{\mathbf{B}}_1. \quad (4-79)$$

Vyloučíme-li $\nabla \times \dot{\mathbf{B}}_1$ a předpokládáme-li závislost $\exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$, dostáváme

$$-\mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_1) + k^2 \mathbf{E}_1 = \frac{i\omega}{\varepsilon_0 c^2} \mathbf{j}_1 + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}_1. \quad (4-80)$$

Příčnými vlnami rozumíme $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_1 = 0$, z toho plyne

$$(\omega^2 - c^2 k^2) \mathbf{E}_1 = -\frac{i\omega}{\varepsilon_0} \mathbf{j}_1. \quad (4-81)$$

Máme-li na mysli světelné vlny nebo mikrovlny, bude jejich frekvence tak vysoká, že můžeme ionty považovat za pevné a proud \mathbf{j}_1 je potom výsledkem jedině pohybu elektronů

$$\mathbf{j}_1 = -n_0 e \mathbf{v}_{e1}. \quad (4-82)$$

Z linearizované pohybové rovnice pro elektrony dostáváme (pro $KT_e = 0$)

$$m \frac{\partial \mathbf{v}_{e1}}{\partial t} = -e \mathbf{E}_1,$$

$$\mathbf{v}_{e1} = \frac{e \mathbf{E}_1}{i m \omega}. \quad (4-83)$$

Rovnici [4-81] můžeme nyní zapsat

$$(\omega^2 - c^2 k^2) \mathbf{E}_1 = \frac{i\omega}{\varepsilon_0} n_0 e \frac{e \mathbf{E}_1}{i m \omega} = \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m} \mathbf{E}_1. \quad (4-84)$$

Na pravé straně poznáváme výraz pro ω_p^2 a výsledek je

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2. \quad (4-85)$$

To je disperzní vztah pro *elektromagnetické vlny* šířící se plazmatem bez stejnosměrného magnetického pole. Vidíme, že disperzní vztah pro vakuum [4-76] je pozměněn o člen ω_p^2 , připomínající plazmové oscilace. Fázová rychlost světelných vln v plazmatu je větší než rychlost světla

$$v_\phi^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = c^2 + \frac{\omega_p^2}{k^2} > c^2. \quad (4-86)$$

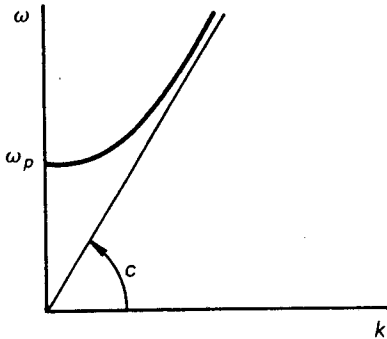
Grupová rychlost nemůže však rychlost světla překročit. Z rov. [4-85] nacházíme

$$\frac{d\omega}{dk} = v_g = \frac{c^2}{v_\phi}, \quad (4-87)$$

takže v_g je menší než c , vždycky když v_ϕ je větší než c . Disperzní vztah [4-85] je na obr. 4-27. Připomíná nám graf z obr. 4-5 pro plazmové vlny, ale disperzní vztah je ve skutečnosti zcela odlišný, protože asymptotická rychlost c na obr. 4-27 je nesrovnatelně větší než tepelná rychlost v_t na obr. 4-5. Důležitější je rozdíl v útlumu těchto vln. Plazmové vlny s velkým kv_t jsou silně tlumeny; k tomuto výsledku se dostaneme z kinetické teorie

v 7. kapitole. Elektromagnetické vlny se naopak při velkých kc stávají řádnou světelnou vlnou a v této limitě nejsou přítomností plazmatu tlumeny.

Pro disperzní vztahy, jako je rov. [4-85], je příznačná existence tzv. *mezní frekvence*. Vysíláme-li plazmatem mikrovlnný svazek s danou frekvencí ω , vlnová délka $2\pi/k$ bude mít v plazmatu hodnotu předepsanou



OBR. 4-27 Disperzní křivka elektromagnetických vln v plazmatu bez ss magnetického pole.

rovnicí [4-85]. Bude-li se hustota plazmatu a tudíž i ω_p^2 zvyšovat, musí se k^2 zmenšovat a vlnová délka bude stále větší a větší, až konečně dosáhne takové hustoty, že k^2 bude nula. Pro hustoty větší než tato mezní nemůže žádné reálné k splňovat rov. [4-85], vlna se nemůže šířit. Tento mezní případ nastane při kritické hustotě n_k , při níž $\omega = \omega_p$, tj. (z rov. [4-25])

$$n_k = \epsilon_0 m \omega^2 / e^2. \quad [4-88]$$

Je-li n příliš velké nebo ω příliš malé, elektromagnetická vlna nemůže projít plazmatem a podle rov. [4-85] je k imaginární

$$ck = (\omega^2 - \omega_p^2)^{1/2} = i|\omega_p^2 - \omega^2|^{1/2}. \quad [4-89]$$

Protože prostorová závislost vlny je $\exp(ikx)$, bude při imaginárním k exponenciálně tlumená. Hloubku vrstvy δ , do níž signál pronikne, vypočteme takto

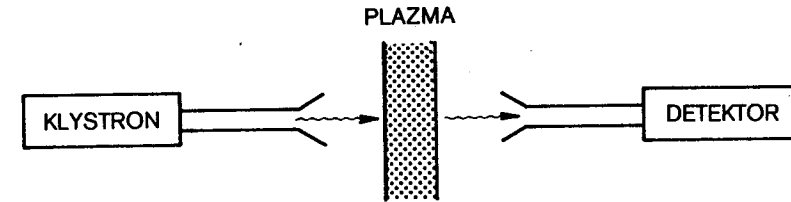
$$e^{ikx} = e^{-|k|x} = e^{-x/\delta}, \quad \delta = |k|^{-1} = \frac{c}{(\omega_p^2 - \omega^2)^{1/2}}. \quad [4-90]$$

Pro laboratorní plazma leží mezní frekvence většinou v oblasti mikrovln.

4.13 EXPERIMENTÁLNÍ POUŽITÍ

Skutečnost, že existuje mezní frekvence, nabízí snadný způsob měření hustoty plazmatu. Mikrovlnný signál z klystronu je do plazmatu vysílán trychtýřovou anténou (obr. 4-28). Svazek, který prošel plazmatem, je za-

chycen jinou anténou a detegován krystalem. Měříme-li frekvenci nebo hustotu plazmatu, zmizí detegovaný signál, jakmile je někde v plazmatu splněna podmínka [4-88]. Tímto postupem zjistíme maximální hustotu. Není to příliš vhodný či mnohostranný způsob, protože oblast frekvencí generovaných jedním mikrovlnným generátorem je omezená.

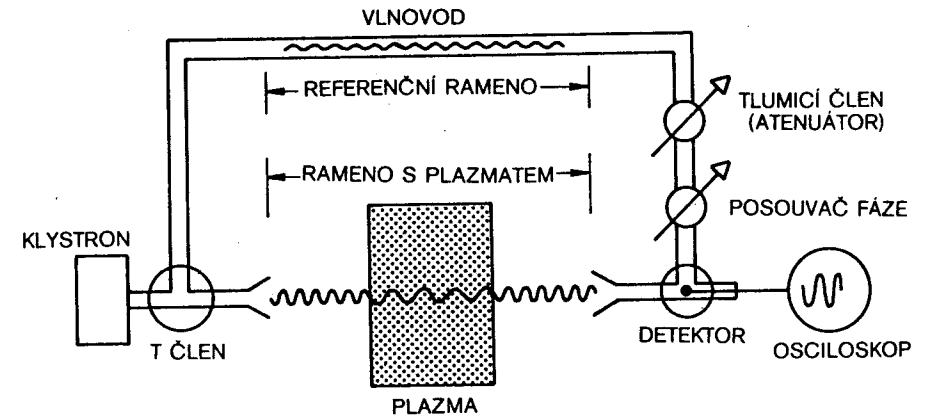


Mikrovlnné stanovení hustoty plazmatu měřením mezní frekvence procházejícího signálu. OBR. 4-28

Pro měření hustoty se všeobecně užívá metody založené na jevu disperze, tj. na změně indexu lomu předpověděné rovnicí [4-85]. Index lomu \tilde{n} je definován

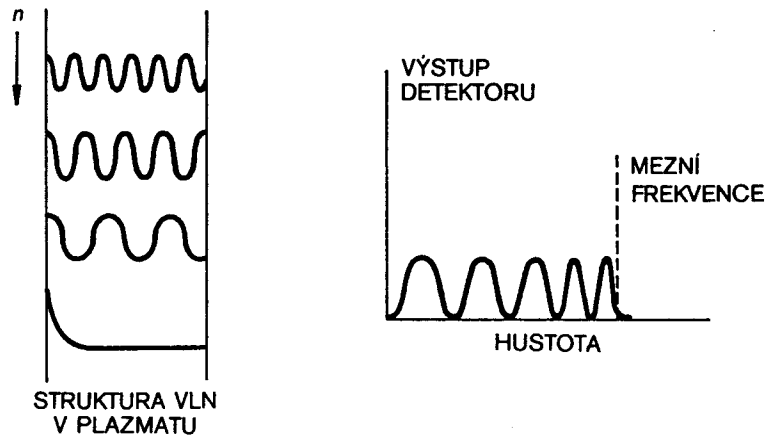
$$\tilde{n} \equiv c/v_p = ck/\omega. \quad [4-91]$$

Je zřejmé, že se mění s ω , tzn. plazma je disperzním prostředím. K měření se užívá mikrovlnný interferometr (obr. 4-29), pracující na týchž fyzikálních principech jako Michelsonův interferometr. Signál klystronu je rozdělen a veden dvěma cestami. Jedna část signálu přichází k detektoru „referenčním ramenem“, druhá je poslána skrz plazma a zachycena trychtýřovými anténami. Detektor reaguje na střední hodnotu čtverce součtu amplitud zachycených signálů. Tlumicím členem (atenuátorem) a posouvačem fáze jsou nejprve signály nastaveny tak, aby se před vytvořením plazmatu jejich

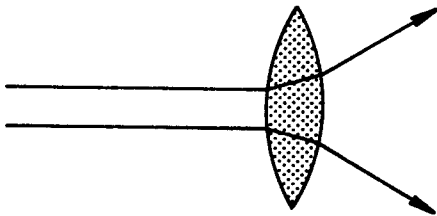


Mikrovlnný interferometr pro měření hustoty plazmatu. OBR. 4-29

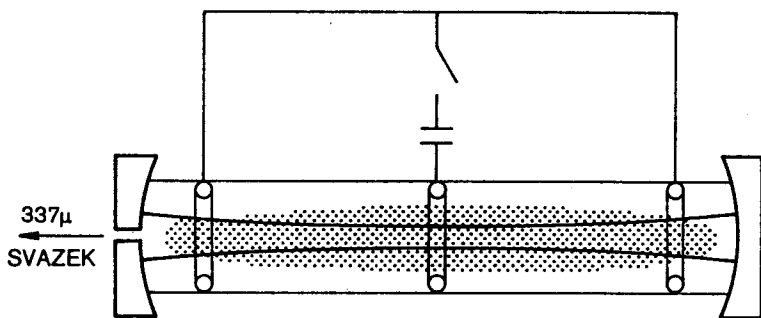
amplitudy sobě rovnaly a fáze byla posunuta o 180° , takže na výstupu detektoru je nula. Vytvoříme-li pak v příslušném objemu plazma, prodlouží se vlnová délka signálu jím procházejícího (obr. 4-30), jeho fáze se změní



OBR. 4-30 Signál na výstupu interferometru (vpravo) při rostoucí hustotě plazmatu. Vlevo jsou odpovídající uspořádání vln v plazmatu.



OBR. 4-31 Plazmatická čočka má neobyčejné optické vlastnosti, protože index lomu je menší než jedna.



OBR. 4-32 Impulsní kyanovodíkový laser emitující záření $\lambda = 337 \mu\text{m}$. Plazma vzniká při vybití kondenzátoru přes prstencové elektrody ve směsi methanu a dusíku.

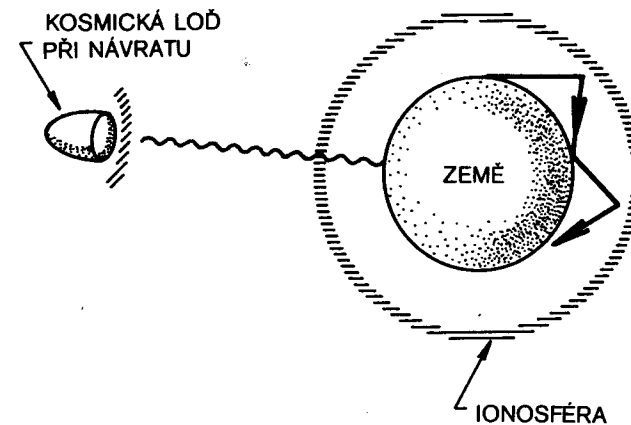
a na výstupu detektoru bude nenulová hodnota. Jak poroste hustota, projde signál na výstupu maximem a minimem pokaždé, když se fáze posune o 360° . Průměrná hustota plazmatu se vypočte z počtu interferenčních posuvů. Nejčastěji se užívá dostatečně vysoká frekvence, aby tento počet byl malý; potom je mezi ním a hledanou hustotou přímá úměrnost (úloha 4-11). Citlivost této metody je při nízkých hustotách omezena stabilitou referenčního ramene vůči vibracím a tepelné roztažnosti. Rovněž se musí započítat korekce na útlum v důsledku srážek a na ohyb a odraz mikrovlnného svazku v plazmatu konečných rozměrů.

Skutečnost, že index lomu plazmatu je menší než jedna, má některé zajímavé důsledky. Konvexní plazmatická čočka (obr. 4-31) je rozptylka a nikoliv spojka. Tento efekt se ukázal jako důležitý mechanismus při činnosti impulsních plyných laserů. Na obr. 4-32 je znázorněn laser v HCN excitovaný impulsním výbojem mezi prstencovými elektrodami. Plazma, jež je v blízkosti osy husté a při stěnách řidší, vytváří zápornou čočku. Zakřivená zrcadla mají zadržovat světelné paprsky v oblasti vyznačené na obr. 4-32, ale defokusační efekt plazmatu, je-li jeho hustota příliš vysoká, poruší optické vlastnosti této soustavy. Laser nezačne pracovat, dokud hustota plazmatu neklesne pod kritickou hodnotu. Tímto jevem můžeme vysvětlit zpoždění mezi elektrickým a optickým impulsem v takových lasech. HCN laser pracuje na vlnové délce $\lambda = 337 \mu\text{m}$, což odpovídá frekvenci

$$f = \frac{c}{\lambda} \approx \frac{3 \times 10^8}{3 \times 10^{-4}} = 10^{12} \text{ Hz.}$$

Kritická hustota podle rov. [4-88] je

$$n_k = \varepsilon_0 m (2\pi f)^2 / e^2 = 10^{22} \text{ m}^{-3}.$$



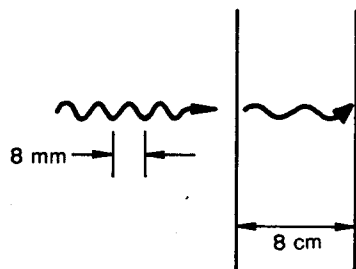
Přehnané znázornění zemské ionosféry, ilustrující vliv plazmatu na rádiové spojení. OBR. 4-33

V důsledku dlouhé dráhy paprsků plazmatem je však defokusační efekt patrný dokonce při $n = 10^{18} \text{ m}^{-3}$, což je řádově rovnou počáteční hustotě plazmatu. U CO_2 laserů, pracujících na $10,6 \mu\text{m}$, kde $n_e \approx 10^{25} \text{ m}^{-3}$, se podobné potíže nevyskytují.

Snad nejnámějším důsledkem efektu mezní frekvence v plazmatu je jeho vliv na krátkovlnné rádiové spojení. Dojde-li rádiová vlna až k ionosféře, kde je hustota plazmatu dostatečně vysoká, odrazí se (obr. 4-33); tak je možno vyslat signál kolem Země. Je-li maximální hustota 10^{12} m^{-3} , je kritická frekvence řádově 10 MHz (srv. rov. [4-26]). Abychom mohli udržovat spojení s kosmickými loděmi a družicemi, musíme užít vyšších frekvencí, které ionosférou pronikají. Vstupuje-li však vracející se kosmická loď znovu do atmosféry, vzniká při intenzivním zahřátí plazma, které způsobí výpadek spojení (obr. 4-33).

ÚLOHY 4-8. Hannes Alfvén, který jako první z oboru fyziky plazmatu obdržel Nobelovou cenu, vyslovil domněnku, že vesmír ve svém prapůvodním stavu se symetricky skládal z hmoty a antihmoty. Předpokládejte, že vesmír byl v jistém okamžiku homogenní směsí protonů, antiprotonů, elektronů a pozitronů, přičemž hustota každého druhu částic byla n_0 .

- (a) Najděte disperzní vztah pro vysokofrekvenční elektromagnetické vlny v takovém plazmatu. Můžete zanedbat srážky, anihilace a tepelné efekty.
 - (b) S použitím Poissonovy rovnice najděte disperzní vztah pro iontové vlny. Můžete zanedbat T_i (ale nikoliv T_e) a předpokládejte, že všechny leptony* se řídí Boltzmannovým zákonem.
- 4-9. Ukažte, že pro elektromagnetické vlny se index lomu rovná druhé odmocnině příslušné dielektrické konstanty plazmatu (srv. úlohu 4-4).
- 4-10. V draslíkovém plazmatu Q-systému můžeme část x elektronů nahradit zápornými Cl ionty. V 1 m^3 plazmatu potom je n_0 iontů K^+ , $x n_0$ iontů Cl^- a $(1-x)n_0$ elektronů. Pro $x = 0,6$ vypočtěte kritickou hodnotu n_0 , jestliže svazek mikrovln s vlnovou délkou 3 cm má právě mezní frekvenci.
- 4-11. Pro vyšetřování nekonečné planparalelní vrstvy plazmatu tloušťky 8 cm je užít 8-milimetrový mikrovlnný interferometr (obr. 4-34).



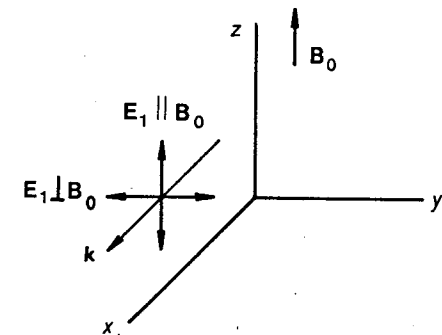
OBR. 4-34

* tj. elektrony i pozitrony – pozn. překl.

- (a) Jaká je hustota plazmatu, jestliže plazma je homogenní a na výstupu byl odečten fázový posuv $1/10$ vzdálenosti min–min, a ozn.: vzdálenost min–min odpovídá fázovému posuvu o 360° .)
- (b) Dokažte, že pro malý fázový posuv je hustota úměrná velikosti tohoto posuvu.

ELEKTROMAGNETICKÉ VLNY KOLMÉ NA B_0 4.14

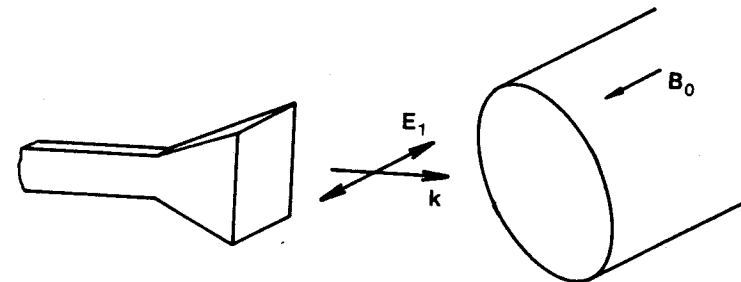
Nyní se budeme zabývat šířením elektromagnetických vln v přítomnosti magnetického pole. Probereme nejprve případ, kdy se vlna šíří kolmo na B_0 , $k \perp B_0$. Vezmeme-li příčné vlny, $k \perp E_1$, máme ještě dvě možnosti: E_1 může být rovnoběžné s B_0 nebo kolmé na B_0 (obr. 4-35).



Geometrické schéma elektromagnetických vln šířících se kolmo na B_0 . OBR. 4-35

Řádná vlna, $E_1 \parallel B_0$ 4.14.1

Je-li E_1 rovnoběžné s B_0 , můžeme položit $B_0 = B_0 \hat{x}$, $E_1 = E_1 \hat{x}$ a $k = k \hat{y}$. V reálném experimentu této konfiguraci přibližně odpovídá svazek mikrovln, dopadajících na sloupec plazmatu, kdy delší strana průřezu vlnovodu je rovnoběžná s B_0 (obr. 4-36).



Řádná vlna vyzařovaná z antény na konci vlnovodu do sloupce plazmatu s magnetickým polem. OBR. 4-36

Vlnovou rovnicí pro tento případ je opět vztah [4-81]

$$(\omega^2 - c^2 k^2) \mathbf{E}_1 = -\frac{i\omega}{\epsilon_0} \mathbf{j}_1 = \frac{in_0}{\epsilon_0} e\omega \mathbf{v}_{e1}. \quad [4-92]$$

Protože $\mathbf{E}_1 = E_1 \hat{\mathbf{z}}$, je na pravé straně jenom složka v_{ez} . Ta je dána pohybovou rovnicí

$$m \partial v_{ez} / \partial t = -e E_z. \quad [4-93]$$

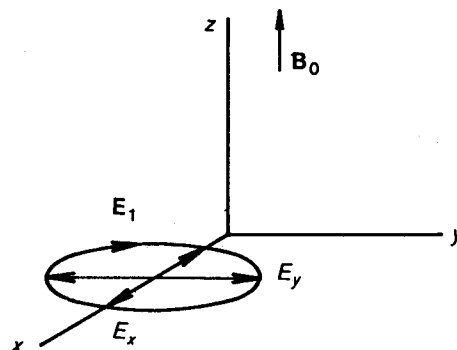
Protože to je týž vztah jako v případě $\mathbf{B}_0 = 0$, je i konečný výsledek týž jako předcházející

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2 \quad [4-94]$$

Tato vlna, v níž $\mathbf{E}_1 \parallel \mathbf{B}_0$, se nazývá *řádnou* vlnou. Termíny „řádný“ a „mimořádný“ jsou převzaty z krystalové optiky, byly však zaměněny. Ve fyzice plazmatu je rozumnější nazývat „řádnou“ vlnou tu, která není ovlivněna magnetickým polem. Přísná analogie s krystalovou optikou by vyžadovala nazývat ji „mimořádnou“ vlnou.

4.14.2 Mimořádná vlna, $\mathbf{E}_1 \perp \mathbf{B}_0$

Je-li \mathbf{E}_1 kolmé na \mathbf{B}_0 , bude pohyb elektronů ovlivněn polem \mathbf{B}_0 a disperzní vztah se změní. Při rozboru tohoto případu jsme v pokusu položit $\mathbf{E}_1 = E_1 \hat{\mathbf{y}}$ a $\mathbf{k} = k \hat{\mathbf{x}}$ (obr. 4-35), ukazuje se ale, že vlny s $\mathbf{E}_1 \perp \mathbf{B}_0$ mají sklon být elipticky polarizované, namísto rovinně polarizované. To znamená, když taková vlna vstupuje do plazmatu, vzniká složka E_x ve směru \mathbf{k} , a tak se vlna stává částečně podélnou a částečně příčnou. Abychom mohli



OBR. 4-37 Vektor \mathbf{E} mimořádné vlny je elipticky polarizován. Složky E_x a E_y jsou při oscilaci fázově posunuty o 90° , takže koncový bod výsledného vektoru elektrického pole \mathbf{E}_1 opíše elipsu během každé periody vlny.

tento mod správně probrat, musíme připustit, že \mathbf{E}_1 má jak x-ovou, tak y-ovou složku (obr. 4-37)

$$\mathbf{E}_1 = E_x \hat{\mathbf{x}} + E_y \hat{\mathbf{y}}. \quad [4-95]$$

Linearizovaná pohybová rovnice pro elektrony (pro $KT_e = 0$) je nyní

$$-i m \omega \mathbf{v}_{e1} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v}_{e1} \times \mathbf{B}_0). \quad [4-96]$$

Pouze složky x a y jsou netriviální

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{-ie}{m\omega} (E_x + v_y B_0), \\ v_y &= \frac{-ie}{m\omega} (E_y - v_x B_0). \end{aligned} \quad [4-97]$$

Indexy 1 a e jsme vynechali. Obvyklým postupem nacházíme pro v_x a v_y výrazy

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{e}{m\omega} \left(-iE_x - \frac{\omega_c}{\omega} E_y \right) \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right)^{-1}, \\ v_y &= \frac{e}{m\omega} \left(-iE_y + \frac{\omega_c}{\omega} E_x \right) \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad [4-98]$$

Rov. [4-80] je vlnová rovnice, v níž nyní musíme zachovat podélný člen $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_1 = k E_x$

$$(\omega^2 - c^2 k^2) \mathbf{E}_1 + c^2 k E_x \mathbf{k} = -\frac{i\omega}{\epsilon_0} \mathbf{j}_1 = in_0 \frac{\omega e}{\epsilon_0} \mathbf{v}_{e1}. \quad [4-99]$$

Rozepíšeme tuto rovnici do složek a s použitím rov. [4-98] dostáváme

$$\begin{aligned} \omega^2 E_x &= -\frac{i\omega n_0 e}{\epsilon_0} \frac{e}{m\omega} \left(iE_x + \frac{\omega_c}{\omega} E_y \right) \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right)^{-1}, \\ (\omega^2 - c^2 k^2) E_y &= -\frac{i\omega n_0 e}{\epsilon_0} \frac{e}{m\omega} \left(iE_y - \frac{\omega_c}{\omega} E_x \right) \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad [4-100]$$

Použijeme definici pro ω_p a můžeme tuto soustavu zapsat

$$\begin{aligned} \left[\omega^2 \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right) - \omega_p^2 \right] E_x + i \frac{\omega_p^2 \omega_c}{\omega} E_y &= 0, \quad \text{(A)} \\ \left[(\omega^2 - c^2 k^2) \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right) - \omega_p^2 \right] E_y - i \frac{\omega_p^2 \omega_c}{\omega} E_x &= 0. \quad \text{(B)} \end{aligned} \quad [4-101]$$

To je soustava lineárních rovnic pro E_x a E_y , která bude mít nenulové řešení jenom tehdy, je-li nulový determinant z koeficientů

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = 0. \quad (4-102)$$

Poněvadž koeficient A je $\omega^2 - \omega_h^2$, kde ω_h je horní hybridní frekvence definovaná rovnicí [4-60], můžeme podmínku $AD = BC$ zapsat

$$\begin{aligned} (\omega^2 - \omega_h^2) \left[\omega^2 - \omega_h^2 - c^2 k^2 \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right) \right] &= \left(\frac{\omega_p^2 \omega_c}{\omega} \right)^2, \\ \frac{c^2 k^2}{\omega^2} &= \frac{\omega^2 - \omega_h^2 - [(\omega_p^2 \omega_c / \omega)^2 / (\omega^2 - \omega_h^2)]}{\omega^2 - \omega_c^2}. \end{aligned} \quad (4-103)$$

To lze několika úpravami zjednodušit. Nejprve nahradíme ω_h^2 na pravé straně výrazem $\omega_c^2 + \omega_p^2$ a vynásobíme $\omega^2 - \omega_h^2$; dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{c^2 k^2}{\omega^2} &= 1 - \frac{\omega_p^2 (\omega^2 - \omega_h^2) + (\omega_p^4 \omega_c^2 / \omega^2)}{(\omega^2 - \omega_c^2) (\omega^2 - \omega_h^2)} = \\ &= 1 - \frac{\omega_p^2 \omega^2 (\omega^2 - \omega_h^2) + \omega_p^2 \omega_c^2}{\omega^2 (\omega^2 - \omega_c^2) (\omega^2 - \omega_h^2)} = \\ &= 1 - \frac{\omega_p^2 \omega^2 (\omega^2 - \omega_c^2) - \omega_p^2 (\omega^2 - \omega_c^2)}{\omega^2 (\omega^2 - \omega_c^2) (\omega^2 - \omega_h^2)}, \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = \frac{c^2}{v_\phi^2} = 1 - \frac{\omega_p^2 \omega^2 - \omega_p^2}{\omega^2 \omega^2 - \omega_h^2}} \quad (4-104)$$

To je disperzní vztah pro *mimořádnou* vlnu. Je to elektromagnetická vlna, částečně příčná a částečně podélná, která se šíří kolmo na \mathbf{B}_0 s \mathbf{E}_1 kolmým na \mathbf{B}_0 .

4.15 MEZNÍ FREKVENCE A REZONANCE

Disperzní vztah pro mimořádnou vlnu je podstatně složitější než kterýkoliv z těch, s nimiž jsme se doposud setkali. Než začneme analyzovat jeho význam, bude užitečné, zavedeme-li termíny *mezní frekvence* a *rezonance*. O *mezní frekvenci* v plazmatu hovoříme, když index lomu klesá k nule, tzn. když se vlnová délka stává nekonečnou, neboť $\bar{n} = ck/\omega$. *Rezonance* označuje ten případ, kdy index lomu roste do nekonečna, tzn. kdy vlnová délka jde k nule. Šíří-li se vlna oblastí, v níž se mění ω_p a ω_c , může dojít k oběma jevům. Obecně lze říci, že při mezní frekvenci se vlna odráží, při rezonanci je absorbována.

Rezonanci mimořádné vlny nalezneme tak, že v rov. [4-104] položíme k rovno nekonečnu. Je-li ω konečné a $k \rightarrow \infty$, plyne z toho $\omega \rightarrow \omega_h$, takže k rezonanci dojde v takovém místě plazmatu, kde

$$\omega_h^2 = \omega_p^2 + \omega_c^2 = \omega^2. \quad (4-105)$$

V tom snadno poznáváme disperzní vztah pro elektrostatičnou vlnu šířící se napříč \mathbf{B}_0 (rov. [4-60]). Bliží-li se vlna s daným ω k místu rezonance, blíží se fázová i grupová rychlost nule a energie vlny se přemění v energii oscilací s horní hybridní frekvencí. Mimořádná vlna je částečně elektromagnetická a částečně elektrostatičká. Dá se snadno ukázat (úloha 4-12), že při rezonanci ztrácí tato vlna svůj elektromagnetický charakter a přechází v elektrostatičké oscilace.

Mezní frekvence mimořádné vlny nalezneme, položíme-li k v rov. [4-104] rovno nule. Po vydělení dvojitelnem $\omega^2 - \omega_p^2$ můžeme výslednou rovnici pro ω napsat

$$1 = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{1}{1 - [\omega_c^2 / (\omega^2 - \omega_p^2)]}. \quad (4-106)$$

Několika vhodnými algebraickými úpravami získáme jednoduchý výraz pro ω

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2 - \omega_p^2} &= \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \\ 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} &= \frac{\omega_c^2 / \omega^2}{1 - (\omega_p^2 / \omega^2)}, \\ \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)^2 &= \frac{\omega_c^2}{\omega^2}, \\ 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} &= \pm \frac{\omega_c}{\omega}, \end{aligned}$$

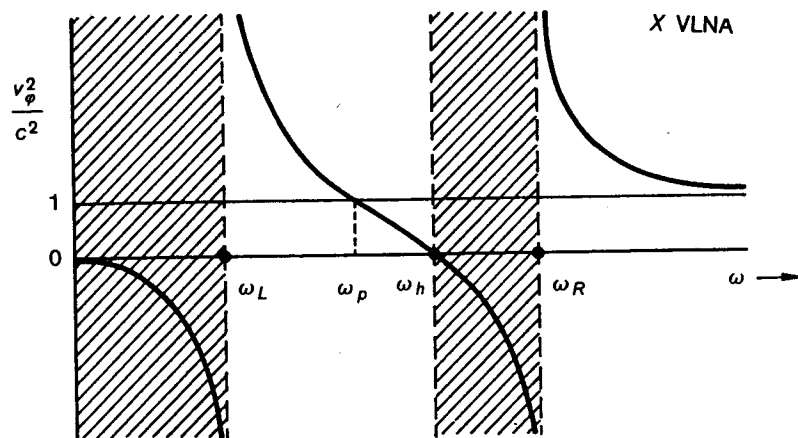
$$\omega^2 \mp \omega \omega_c - \omega_p^2 = 0. \quad (4-107)$$

Každé ze znamének nám dá jinou mezní frekvenci, nazveme je ω_R a ω_L . Kořeny těchto dvou kvadratických rovnic jsou

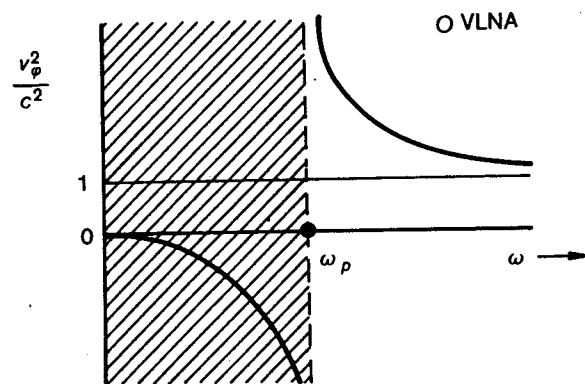
$$\begin{aligned} \omega_R &= \frac{1}{2} [\omega_c + (\omega_c^2 + 4\omega_p^2)^{1/2}], \\ \omega_L &= \frac{1}{2} [-\omega_c + (\omega_c^2 + 4\omega_p^2)^{1/2}]. \end{aligned} \quad (4-108)$$

Před odmocninami jsme nechali znaménka plus, protože se držíme úmluvy, že ω je vždycky kladné, vlny postupující ve směru $-x$ budou mít záporné k . Z důvodů, které objasníme v následujícím oddíle, nazveme ω_R a ω_L *pravotočivá* a *levotočivá mezní frekvence*.

Mezní a rezonanční frekvence rozdělují disperzní diagram na oblasti, v nichž se vlna buď může nebo nemůže šířit. Je názornější namísto obvyklého grafu $\omega = \omega(k)$ vynést závislost fázové rychlosti na frekvenci, či přesněji



OBR. 4-38 Disperze mimořádné vlny znázorněná jako změna fázové rychlosti v závislosti na frekvenci. Ve vyčárkovaných oblastech se vlna nešíří.



OBR. 4-39 Podobný disperzní diagram pro řádnou vlnu.

řečeno, závislost $\omega^2/c^2k^2 = 1/\bar{n}^2$ na ω (obr. 4-38). Při interpretaci této závislosti si představme, že ω_c je pevné a že do plazmatu je zvnějšku vyslána vlna s pevnou frekvencí ω . Když vlna postupně prochází oblastmi s rostoucí hustotou, narůstají všechny frekvence ω_L , ω_p , ω_h a ω_R a posunují se na grafu doprava. To je totéž, jako kdyby se hustota plazmatu neměnila a frekvence ω by se postupně snižovala. Použijeme druhou představu: při velkém ω (čili malých hustotách) se fázová rychlost blíží rychlosti světla. Když vlna postupuje dále, vzrůstá v_ϕ , dokud není dosaženo pravoúhelné mezní frekvence $\omega = \omega_R$, kdy je v_ϕ nekonečné. Mezi $\omega = \omega_R$ a $\omega = \omega_h$ je ω^2/k^2 záporné, vlna se nemůže šířit. Při $\omega = \omega_h$ nastává rezonance, v_ϕ jde k nule. Šíření je opět možné v oblasti mezi $\omega = \omega_h$ a $\omega = \omega_L$, kdy

vlna podle toho, zda je ω menší nebo větší než ω_p , postupuje rychlostí větší nebo menší než c . Z rovnice [4-104] je zřejmé, že při $\omega = \omega_p$ postupuje vlna rychlostí c . Pak následuje další oblast $\omega < \omega_L$, kdy se vlna nemůže šířit. Mimořádná vlna má tedy dvě oblasti šíření, oddělené zakázaným frekvenčním pásmem.

Pro srovnání je na obr. 4-39 stejný druh závislosti pro řádnou vlnu. Tento disperzní vztah má jenom jednu mezní frekvenci a žádnou rezonanci.

ELEKTROMAGNETICKÉ VLNY ROVNOBĚŽNĚ S B_0 4.16

Položme nyní k ve směru osy z a pro E_1 ponecháme obě příčné složky E_x a E_y

$$k = k\hat{z}, \quad E_1 = E_x\hat{x} + E_y\hat{y}. \quad [4-109]$$

Můžeme použít vlnovou rovnici [4-99] pro mimořádnou vlnu, změníme-li jednoduše k z $k\hat{x}$ na $k\hat{z}$. Tak z rov. [4-100] dostaneme nyní složky

$$\begin{aligned} (\omega^2 - c^2k^2) E_x &= \frac{\omega_p^2}{1 - \omega_c^2/\omega^2} \left(E_x - \frac{i\omega_c}{\omega} E_y \right), \\ (\omega^2 - c^2k^2) E_y &= \frac{\omega_p^2}{1 - \omega_c^2/\omega^2} \left(E_x + \frac{i\omega_c}{\omega} E_x \right). \end{aligned} \quad [4-110]$$

Pro stručnost uijeme označení

$$\alpha \equiv \frac{\omega_p^2}{1 - \omega_c^2/\omega^2} \quad [4-111]$$

a spřažené rovnice pro E_x a E_y můžeme přepsat

$$\begin{aligned} (\omega^2 - c^2k^2 - \alpha) E_x + i\alpha \frac{\omega_c}{\omega} E_y &= 0, \\ (\omega^2 - c^2k^2 - \alpha) E_y - i\alpha \frac{\omega_c}{\omega} E_x &= 0. \end{aligned} \quad [4-112]$$

Položíme-li determinant z koeficientů rovný nule, dostáváme

$$\begin{aligned} (\omega^2 - c^2k^2 - \alpha)^2 &= (\alpha\omega_c/\omega)^2, \\ \omega^2 - c^2k^2 - \alpha &= \pm \alpha\omega_c/\omega. \end{aligned} \quad [4-113]$$

Tedy

$$\begin{aligned} \omega^2 - c^2k^2 &= \alpha \left(1 \pm \frac{\omega_c}{\omega} \right) = \frac{\omega_p^2}{1 - (\omega_c^2/\omega^2)} \left(1 \pm \frac{\omega_c}{\omega} \right) = \\ &= \omega_p^2 \frac{1 \pm (\omega_c/\omega)}{[1 + (\omega_c/\omega)][1 - (\omega_c/\omega)]} = \frac{\omega_p^2}{1 \mp (\omega_c/\omega)}. \end{aligned} \quad [4-115]$$

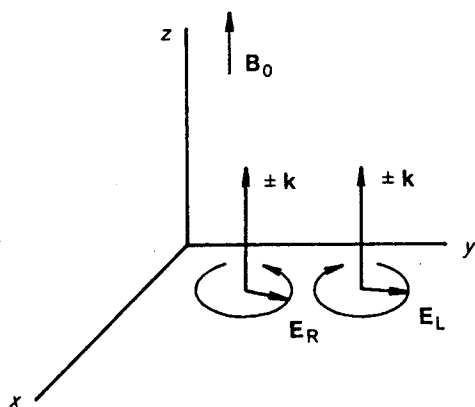
Znaménko \mp ukazuje, že existují dvě možná řešení rovnice [4-112], odpovídající dvěma různým vlnám, jež se mohou šířit rovnoběžně s B_0 .

Disperzní vztahy jsou

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2 / \omega^2}{1 - (\omega_c / \omega)} \quad (\text{R vlna}) \quad [4-116]$$

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2 / \omega^2}{1 + (\omega_c / \omega)} \quad (\text{L vlna}) \quad [4-117]$$

Ukazuje se, že R a L vlny jsou kruhově polarizovány a symboly R a L znamenají, že jde o *pravotočivou kruhovou polarizaci** a *levotočivou kruhovou polarizaci* (úloha 4-14). Geometrické uspořádání ukazuje obr. 4-40.



OBR. 4-40 Geometrické schéma pravo a levotočivých kruhově polarizovaných vln, šířících se ve směru B_0 .

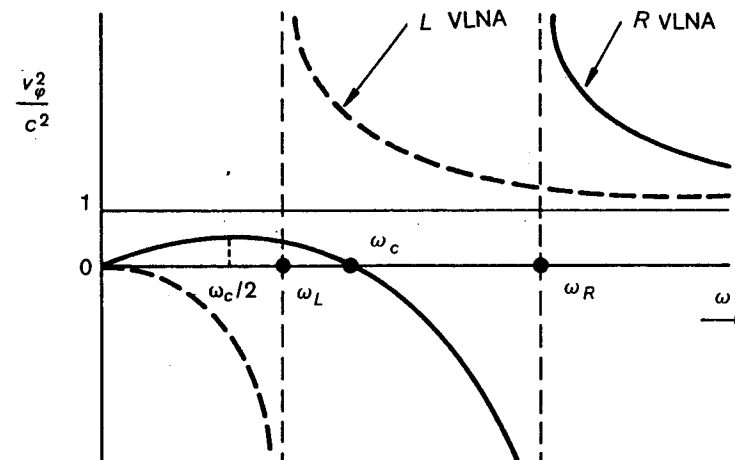
V R vlně se při pohledu ve směru B_0 vektor elektrického pole s časem otáčí ve směru hodinových ručiček a u L vlny je to naopak. Protože rov. [4-116] a [4-117] závisí pouze na k^2 , je směr rotace vektoru E_1 nezávislý na znaménku k , vlny šířící se v opačném směru jsou polarizovány tímž způsobem. Shrňme: Hlavní elektromagnetické vlny šířící se *rovnoběžně* s B_0 jsou pravotočivě (R) a levotočivě (L) kruhově polarizovaná vlna; hlavní vlny šířící se *napříč* B_0 jsou rovinně polarizovaná vlna (O vlna)** a elipticky polarizovaná vlna (X vlna)**.

Nejprve se zabýváme mezními frekvencemi a rezonancemi vln R a L. U R vlny se při $\omega = \omega_c$ stává k nekonečným, dochází k rezonanci s cyklotronním pohybem elektronů. Rovina polarizace se otáčí tímž směrem jako

* Pro pravotočivou vlnu jsme ponechali podle angličtiny označení R (namísto P), aby u označení frekvence nedocházelo k záměně s ω_p , frekvencí plazmových oscilací – pozn. překl.

** O—X: zkratka pro ordinarius (řádny) a extraordinarius (mimořádný) – pozn. překl.

rotující elektrony, vlna stále zrychluje jejich pohyb, ztrácí svou energii a nemůže se šířit. L vlna ovšem nemá rezonanci při cyklotronní frekvenci elektronů, protože se otáčí v opačném směru. Jak snadno poznáme z rov. [4-117], pro kladné ω nemá L vlna rezonanci. Kdybychom byli do našich výpočtů zahrnuli pohyb iontů, zjistili bychom, že L vlna má rezonanci při $\omega = \Omega_c$, neboť by se pak otáčela stejně jako rotující ionty.



v_ϕ^2/c^2 jako funkce ω pro L a R vlny. Oblasti, kde se vlna nešíří (zakázaná pásma, $v_\phi^2/c^2 < 0$) nejsou vyčárkovány, protože nejsou oběma vlnám společné.

OBR. 4-41

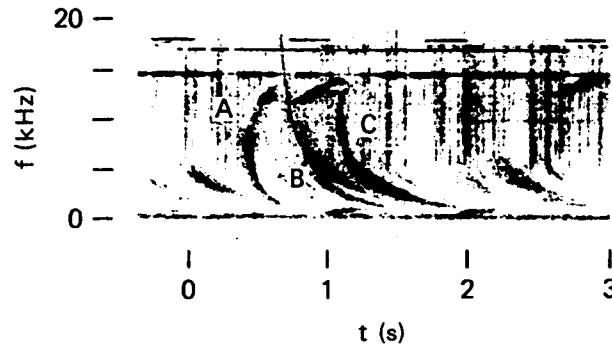
Mezní frekvence získáme, položíme-li v rov. [4-116] a [4-117] $k = 0$. Tím dostaneme tytéž rovnice, jako byla rovnice pro X vlnu (rov. [4-107]), tedy i mezní frekvence jsou tytéž. R vlna, s minus znaménkem v rov. [4-116] a [4-117], má vyšší mezní frekvenci ω_R danou rovnicí [4-118], L vlna, s plus znaménkem, má nižší mezní frekvenci ω_L . Z toho důvodu jsme již dříve zvolili označení ω_R , ω_L . Disperzní diagram pro R a L vlny je na obr. 4-41. L vlna se chová jako O vlna, zakázané pásmo má při nízkých frekvencích, avšak mezní frekvenci je ω_L a nikoliv ω_p . Zakázané pásmo pro R vlnu je mezi ω_R a ω_c , ale pod ω_L je druhé pásmo šíření, v němž $v_\phi < c$. Vlny v této nízkofrekvenční oblasti nazýváme *hvizdy* a jsou mimořádně důležité pro studium jevů v ionosféře.

EXPERIMENTÁLNÍ DŮSLEDKY 4.17

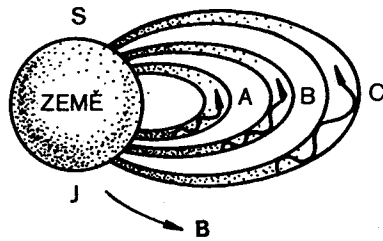
Hvizdy 4.17.1

Již prvé výzkumy vyzařování rádiových vln z ionosféry byly odměněny objevem různých hvizdavých zvuků v oblasti slyšitelných frekvencí. Obrázek 4-42 ukazuje spektrogram zachycených frekvencí jako funkci času.

Vidíme několik typických klesajících klouzavých tónů, které můžeme slyšet přes reproduktor. Tento jev můžeme snadno vysvětlit pomocí disperzních charakteristik R vlny. Při úderu blesku na jižní zemské polokouli vznikne rádiový šum na všech frekvencích. V plazmatu ionosféry a magnetosféry vzniknou různé vlny, z nichž R vlny postupují podél zemského magnetického pole, jsou vedeny siločarami a zachyceny pozorovateli v Kanadě.



OBR. 4-42 Skutečný spektrogram hvězdoých signálů. Zakřivení je způsobeno nízkofrekvenční větví disperzního vztahu pro R vlnu (obr. 4-41). Frekvence přijímače je rozmitána mezi 0 a 20 kHz a na stínítku vytváří vertikální stopu. Zčernání skvrn na záznamu je úměrné intenzitě signálu při příslušné frekvenci. Pohyb tmavé skvrny dolů představuje klouzavě klesající tón. [S laskavým svolením p. D. L. Carpentera, J. Geophys. Res. 71, 693 (1966).]



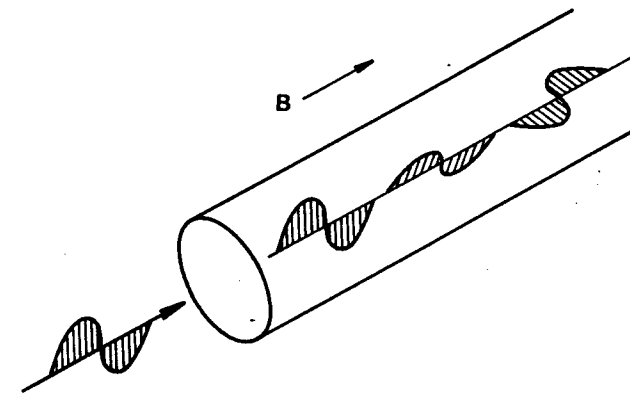
OBR. 4-43 Schematické znázornění vzniku hvízdů. Dráhy A, B, C odpovídají signálům označeným stejně na obr. 4-42.

Rozdílné frekvence však dorazí v rozdílných časech. Z obr. 4-41 vidíme, že pro $\omega < \omega_c/2$ fázová rychlost roste s frekvencí (úloha 4-15). Dá se rovněž ukázat (úloha 4-16), že s frekvencí roste grupová rychlost. Nízké frekvence tedy dorazí později, a tím vzniká klesající tón. Jediným bleskem může vzniknout několik hvízdů, neboť vlny se mohou šířit podél různých siločar A, B, C (obr. 4-43). Jelikož vlny mají $\omega < \omega_c$, musí mít frekvenci

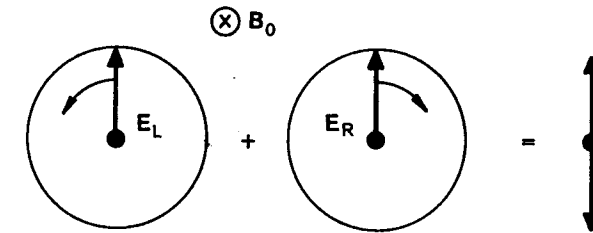
nižší než nejnižší cyklotronní frekvence podél siločary, tj. okolo 100 kHz. Hvězdy leží buď přímo ve slyšitelné oblasti, nebo mohou být snadno v slyšitelné signály přeměněny heterodynovým přijímačem.

Faradayova rotace 4.17.2

Bude-li rovinně polarizovaná vlna vysílána plazmatem podél magnetického pole, bude se její rovina polarizace otáčet (obr. 4-44). Tomu porozumíme na základě rozdílných fázových rychlostí R a L vln. Z obr. 4-41 je



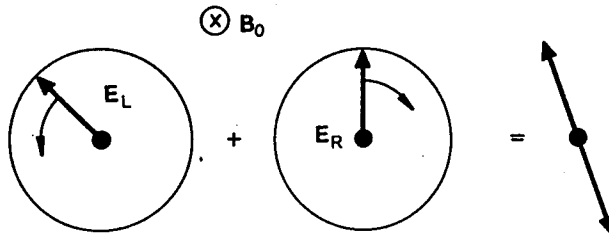
Faradayova rotace polarizační roviny elektromagnetické vlny postupující rovnoběžně s B_0 . OBR. 4-44



Rovinně polarizovaná vlna jako součet levo a pravotočivých kruhově polarizovaných vln. OBR. 4-45

zřejmé, že pro velké ω postupuje R vlna rychleji než L vlna. Představme si, že rovinně polarizovaná vlna je součtem R vlny a L vlny (obr. 4-45). Obě vlny mají ovšem tutéž frekvenci. Po N cyklech se vektory E_L a E_R vrátí do svých počátečních poloh. Na dané vzdálenosti d však R a L vlny vykonají různý počet cyklů, protože každá z nich potřebuje jinou dobu na její proběhnutí. Jelikož L vlna postupuje pomaleji, bude mít za sebou $N + \epsilon$ cyklů v místě, kde R vlna má N cyklů. Vektory pak budou v poloze

naznačené na obr. 4-46. Je vidět, že rovina polarizace se otočila. Měření tohoto otáčení mikrovlnnou trychtýřovou anténou můžeme získat hodnotu ω_p^2 , a tudíž hustotu (úloha 4-18). Faradayova rotace byla ověřována experimentálně, ale tato metoda není pro měření hustoty tak užitečná jako mikrovlnná interferometrie, protože ke koncům plazmatického sloupce bývá obyčejně obtížný přístup.



OBR. 4-46 Po projití určité dráhy plazmatem je fáze L vlny pokročilejší než R vlny, polarizační rovina se pootočila.

V mezihvězdném prostoru je Faradayova rotace důležitým efektem i při velmi nízkých hustotách, neboť probíhané vzdálenosti jsou obrovské. Tímto jevem byla vysvětlena polarizace mikrovlnného záření vznikajícího maserovou činností oblaků molekul OH nebo H_2O během utváření nových hvězd.

ÚLOHY 4-12. Dokažte, že mimořádná vlna je v rezonanci čistě elektrostatická. Návod: Vyjádřete E_y/E_x jako funkci ω a položte ω rovno ω_h .

4-13. Dokažte, že vyznačené body na obr. 4-38 jsou správně uspořádány, tj. že $\omega_L < \omega_p < \omega_h < \omega_R$.

4-14. Dokažte, že R a L vlny jsou pravotočivě a levotočivě polarizovány, a to takto:

(a) Ukažte, že soustava rovnic pro E_x a E_y může být zapsána ve tvaru

$$F(\omega)(E_x - iE_y) = 0, \quad G(\omega)(E_x + iE_y) = 0,$$

kde $F(\omega) = 0$ pro R vlnu a $G(\omega) = 0$ pro L vlnu.

(b) Pro R vlnu je $G(\omega) \neq 0$ a tudíž $E_x = -iE_y$. Vraťte se k exponenciální časové závislosti \mathbf{E} a ukažte, že se \mathbf{E} otáčí ve směru elektronové rotace. Přesvědčte se, že v L vlně se \mathbf{E} otáčí opačným směrem.

(c) Nakreslete pro R vlnu šroubovici, která v daném okamžiku v prostoru spojuje konce vektoru \mathbf{E} pro (i) $k_x > 0$ a (ii) $k_x < 0$. Všimněte si, že stojíme-li na pevném místě a pozorujeme míjející závity šroubovice, otáčí se \mathbf{E} v obou případech ve stejném směru.

4-15. Ukažte, že hvězdivé vlny mají maximální fázovou rychlost při $\omega = \omega_c/2$ a že toto maximum je menší než rychlost světla.

4-16. Ukažte, že grupová rychlost hvězdivé je úměrná $\omega^{1/2}$, jestliže $\omega \ll \omega_c$.

4-17. Ukažte, že v pozitronovém plazmatu nedochází k Faradayově rotaci (stejný počet pozitronů a elektronů).

4-18. Je měřena Faradayova rotace mikrovlnného svazku s 8 mm vlnovou délkou v homogenním plazmatu v magnetickém poli 0,1 T. Po projití 1 m vzdálenosti se rovina polarizace otočila o 90° . Jaká je hustota?

4-19. Mikrovlnný interferometr pracující s řádnou vlnou nemůžeme užít při hustotě vyšší než n_{kx} , která odpovídá mezní frekvenci. K měření vyšších hustot lze použít mimořádnou vlnu.

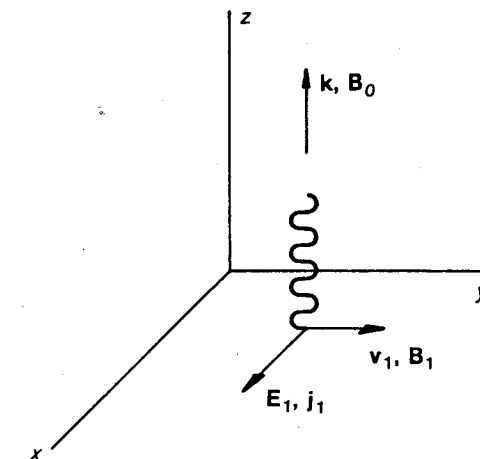
(a) Napište výraz pro hustotu n_{kx} odpovídající mezní frekvenci X vlny.

(b) Na grafu $v_g^2/c^2 = f(\omega)$ ukažte tu větev disperzní křivky X vlny, na níž by takový interferometr pracoval.

HYDROMAGNETICKÉ VLNY 4.18

Poslední část našeho přehledu základních vln v plazmatu se bude týkat nízkofrekvenčních iontových oscilací v magnetickém poli. Z mnoha možných modů se budeme zabývat jenom dvěma: hydromagnetickou vlnou rovnoběžnou s \mathbf{B}_0 , neboli *Alfvénovou vlnou* a magneto-zvukovou vlnou. Alfvénova vlna má v rovinné geometrii \mathbf{k} rovnoběžné s \mathbf{B}_0 ; \mathbf{E}_1 a \mathbf{j}_1 kolmé na \mathbf{B}_0 ; \mathbf{B}_1 a \mathbf{v}_1 kolmé na \mathbf{B}_0 i na \mathbf{E}_1 (obr. 4-47). Z Maxwellových rovnic dostáváme jako obvykle (rov. [4-80])

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_1 = -k(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_1) + k^2 \mathbf{E}_1 = \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}_1 + \frac{i\omega}{\epsilon_0 c^2} \mathbf{j}_1. \quad [4-118]$$



Geometrické schéma Alfvénovy vlny šířící se rovnoběžně s \mathbf{B}_0 .

OBR. 4-47

Poněvadž podle předpokladu $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{z}}$ a $\mathbf{E}_1 = E_1\hat{\mathbf{x}}$, je pouze x -ová složka této rovnice netriviální. Protože se jedná o nízké frekvence, přispívají k proudu \mathbf{j}_1 i ionty i elektrony. x -ová složka rovnice [4-118] je

$$(\omega^2 - c^2k^2)E_1 = -\frac{i\omega}{\varepsilon_0c^2}n_0e(v_{ix} - v_{ex}). \quad [4-119]$$

Tepelné pohyby nejsou pro tuto vlnu důležité, můžeme tudíž užít řešení pohybové rovnice iontů s $T_i = 0$, jež jsme již odvodili v rov. [4-63]. Pro úplnost zde uvedeme složku v_{iy} , kterou jsme předtím explicitně nenapsali

$$\begin{aligned} v_{ix} &= \frac{ie}{M\omega} \left(1 - \frac{\Omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1} E_1, \\ v_{iy} &= \frac{e}{M\omega} \frac{\Omega_c}{\omega} \left(1 - \frac{\Omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1} E_1. \end{aligned} \quad [4-120]$$

Odpovídající řešení pohybové rovnice elektronů nalezneme, zaměníme-li $M \rightarrow m$, $e \rightarrow -e$, $\Omega_c \rightarrow -\omega_c$ a vezmeme-li limitu pro $\omega_c^2 \gg \omega^2$

$$\begin{aligned} v_{ex} &= \frac{ie}{m\omega} \frac{\omega^2}{\omega_c^2} E_1 \rightarrow 0, \\ v_{ey} &= -\frac{e}{m} \frac{\omega_c}{\omega^2} \frac{\omega^2}{\omega_c^2} E_1 = -\frac{E_1}{B_0}. \end{aligned} \quad [4-121]$$

V této limitě je Larmorova rotace elektronů zanedbána, elektrony se prostě pohybují $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ driftem ve směru y . Dosazením těchto řešení do rov. [4-119] dostáváme

$$(\omega^2 - c^2k^2)E_1 = -\frac{i\omega}{\varepsilon_0}n_0e \frac{ie}{M\omega} \left(1 - \frac{\Omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1} E_1. \quad [4-122]$$

y -ové složky v_1 potřebujeme pouze pro fyzikální model, který uvedeme později. Užijeme definici plazmové frekvence iontů Ω_p (rov. [4-49]) a máme

$$\omega^2 - c^2k^2 = \Omega_p^2 \left(1 - \frac{\Omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1}. \quad [4-123]$$

Musíme nyní učinit další předpoklad $\omega^2 \ll \Omega_c^2$; frekvence hydromagnetické vlny je mnohem nižší než cyklotronní rezonance iontů. V této limitě dostává rov. [4-123] tvar

$$\begin{aligned} \omega^2 - c^2k^2 &= -\omega^2 \frac{\Omega_p^2}{\Omega_c^2} = -\omega^2 \frac{n_0e^2}{\varepsilon_0M} \frac{M^2}{e^2B_0^2} = -\omega^2 \frac{\rho}{\varepsilon_0B_0^2}, \\ \frac{\omega^2}{k^2} &= \frac{c^2}{1 + (\rho/\varepsilon_0B_0^2)}, \end{aligned} \quad [4-124]$$

kde ρ je měrná hmotnost n_0M . Tato odpověď nepřekvapuje, neboť ve jmenovateli poznáváme poměrnou dielektrickou konstantu $\varepsilon_r = \varepsilon/\varepsilon_0$ pro níž-

kofrekvenční pohyby kolmé na \mathbf{B}_0 (rov. [3-28]). Rovnice [4-124] prostě uvádí fázovou rychlost elektromagnetické vlny v dielektrickém prostředí

$$\frac{\omega}{k} = \frac{c}{(\varepsilon_r\mu_r)^{1/2}} = \frac{c}{\varepsilon_r^{1/2}} \quad \text{pro } \mu_r = 1.$$

Jak jsme již viděli, je v laboratorním plazmatu ε_r zpravidla mnohem větší než jedna a rov. [4-124] můžeme přibližně zapsat

$$\frac{\omega}{k} = v_\phi = \frac{cB_0}{(\rho/\varepsilon_0)^{1/2}} \equiv v_A. \quad [4-125]$$

Tyto hydrodynamické vlny postupují podél \mathbf{B}_0 s konstantní rychlostí v_A , kterou nazýváme *Alfvénova rychlost*

$$v_A \equiv cB(\varepsilon_0/\rho)^{1/2} \quad [4-126]$$

a v Gaussových jednotkách

$$v_A \equiv \frac{B \text{ (Gauss)} \text{ cm}}{4\pi\rho \text{ (g. cm}^{-3}\text{)} \text{ s}}$$

Je to charakteristická rychlost, již postupují poruchy siločar. Poměrnou dielektrickou konstantu v rov. [3-28] můžeme nyní zapsat

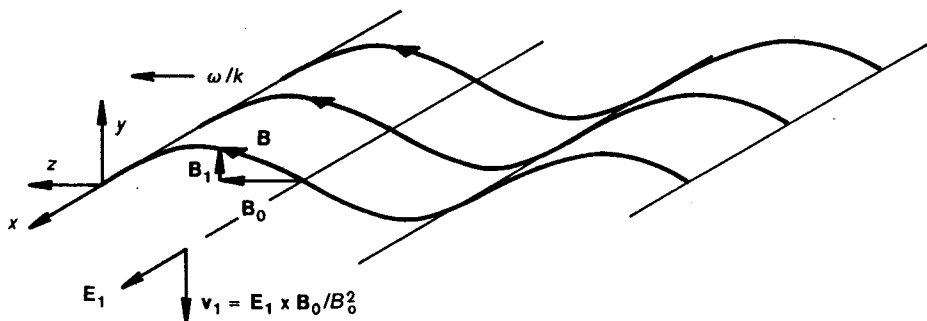
$$\varepsilon_r = 1 + (c^2/v_A^2). \quad [4-127]$$

Všimněte si, že v dobře rozvinutém plazmatu se značnou hustotou je v_A malé, a tudíž ε_r je velké.

Abychom pochopili, co se v Alfvénově vlně fyzikálně děje, připomeňme si, že je to elektromagnetická vlna s vlnícím se magnetickým polem \mathbf{B}_1 , daným rovnicí

$$\nabla \times \mathbf{E}_1 = -\dot{\mathbf{B}}_1; \quad E_x = (\omega/k)B_y. \quad [4-128]$$

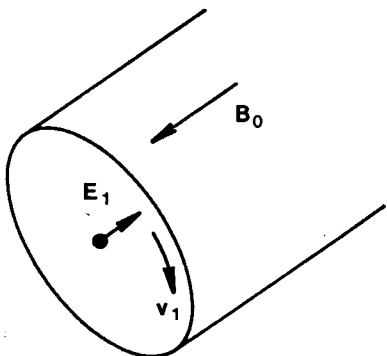
Přidáme-li k \mathbf{B}_0 malou složku B_y , dostaneme siločáry se sinusovým zvlněním, jež je přehnaně znázorněno na obr. 4-48. V zobrazeném bodě je B_y v kladném y -ovém směru, podle rov. [4-128] je tedy E_x v kladném x -ovém směru, je-li ω/k ve směru z . Elektrické pole E_x způsobí $\mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}_0$ drift plazmatu v záporném y -ovém směru. Protože jsme použili limitu $\omega^2 \ll \Omega_c^2$, budou se podle rov. [4-120] a [4-121] ionty i elektrony pohybovat toutéž driftovou rychlostí v_d . Tekutina se tedy pohybuje nahoru a dolů ve směru y , jak jsme už předem naznačili na obr. 4-47. Velikost této rychlosti je $|E_x/B_0|$. Protože zvlnění pole se pohybuje spolu s vlnou fázovou rychlostí ω/k , v naznačeném bodě na obr. 4-48 se siločára rovněž pohybuje směrem dolů. Rychlost tohoto pohybu siločáry směrem dolů je $(\omega/k)|B_y/B_0|$, což se podle rov. [4-128] rovná právě rychlosti tekutiny $|E_x/B_0|$. Tak tekutina i siločáry



OBR. 4-48 Vztah mezi oscilujícími veličinami v Alfvénové vlně a (přehnaným) pokřivením siločar.

oscilují společně, jako kdyby částice byly na siločáry navléknuty. Siločáry se chovají, jako kdyby to byly napjaté hmotné struny a na Alfvénovu vlnu se můžeme dívat jako na šířící se rozruch po brnknutí na strunu. Tato představa plazmatu jakoby přimrzlého k siločárám a pohybujícího se s nimi je užitečná pro porozumění mnoha nízkofrekvenčním jevům v plazmatu a dá se ukázat, že je přesná potud, pokud neexistuje elektrické pole ve směru B_0 .

Zbývá nám ještě podívat se, jak vzniká elektrické pole E_x , jehož existenci od počátku předpokládáme. Při měnicím se E_1 zpoždují se ionty v důsledku své setrvačnosti za elektrony, vzniká polarizační drift s rychlostí v_p ve směru E_1 . Tato driftová rychlost v_{ix} je dána rovnicí [4-120] a způsobuje proud j_1 ve směru x . Výsledná síla $j_1 \times B_0$ působící na tekutinu má směr y a je proti rychlosti v_1 fázově posunuta o 90° . Tato síla stále udržuje oscilace podobně jako v kterémkoliv oscilátoru, kde je síla fázově posunutá proti



OBR. 4-49 Geometrické schéma torzní (či střížné*) Alfvénovy vlny v cylindrickém sloupci.

* označuje případ $B_1 \perp B_0$, anglicky označovaná jako shear Alfvén wave — pozn. překl.

rychlosti. Přeběhnutí iontů je ovšem způsobeno jejich setrvačností, která tak udržuje oscilace, jenomže v plazmatu se hybnost přenáší složitým způsobem prostřednictvím elektromagnetických sil.

V experimentálně realističtější geometrii by E_1 bylo v radiálním a v_1 v azimutálním směru (obr. 4-49). Plazma se pak pohybuje jako nestlačitelná tekutina, a to je důvod, proč mohl být v pohybové rovnici zanedbán člen ∇p . Tento mod se nazývá *torzní Alfvénova vlna*. Poprvé ji vybudil v kapalně rtuti B. Lehnert.

Alfvénovy vlny v plazmatu vyvolali a detegovali jako první Allen, Baker, Pyle a Wilcox v Berkeley v Kalifornii a Jephcott v Anglii v r. 1959. Tento experiment uskutečnili ve vodíkovém plazmatu vytvořeném v „po-

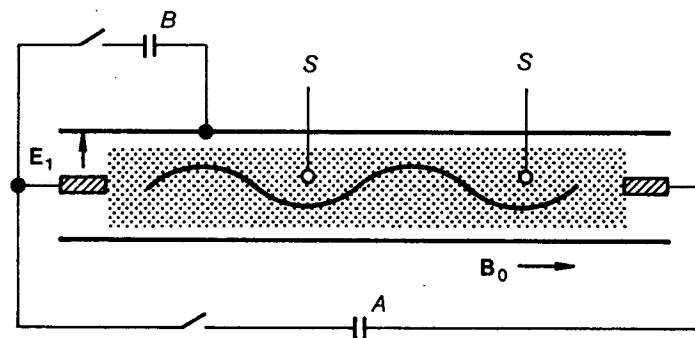
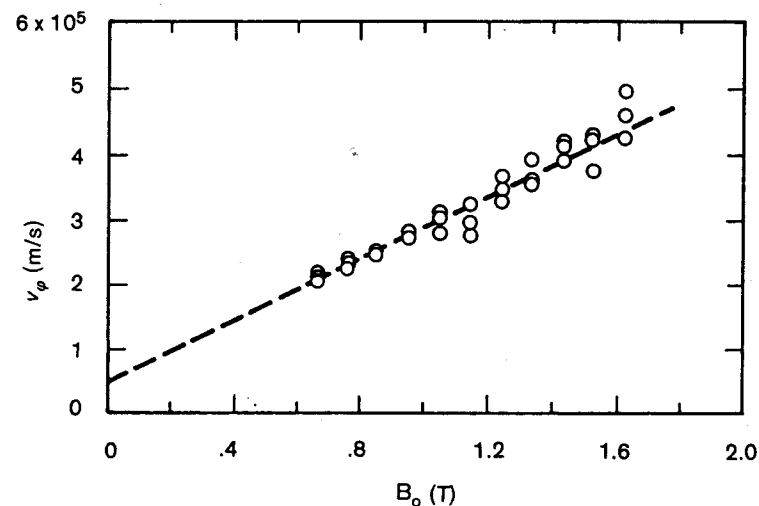


Schéma experimentálního zařízení pro detekci Alfvénových vln. [Převzato z J. M. Wilcox, F. I. Boley a A. W. DeSilva, Phys. Fluids 3, 15 (1960).]

OBR. 4-50



Změřená závislost fázové rychlosti Alfvénových vln na magnetickém poli. [Převzato z Wilcox, Boley a DeSilva, citovaná práce.]

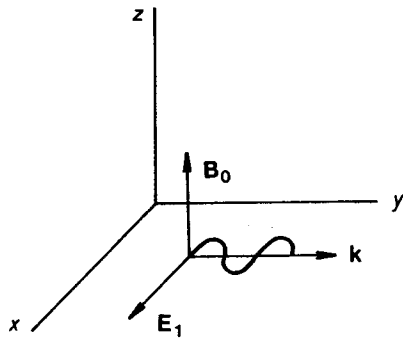
OBR. 4-51

malém pinči“, výboji mezi dvěma elektrodami ve směru magnetického pole (obr. 4-50). Plazma se vytvořilo vybitím soustavy pomalých kondenzátorů A, pak byl zapnut rychlý kondenzátor B, spojený s kovovou stěnou, tím vzniklo elektrické pole E_1 kolmé na B_0 . Zákřivky kondenzátoru vybudily vlnu, jejíž přibližné časové zpoždění bylo detegováno sondou S. Na obr. 4-51 je změřená fázová rychlost v závislosti na magnetickém poli. Závislost je lineární, jak předpovídá rov. [4-126].

Byl to obtížný experiment, protože k překonání útlumu bylo potřeba vytvořit silné magnetické pole 1 T. Velkým B_0 se stává nepohodlně velkou hodnota v_A a tudíž i vlnová délka, pokud není i hustota vysoká. Při experimentu Wilcoxově a jeho spolupracovníků byla vytvořena hustota $6 \times 10^{21} \text{ m}^{-3}$, aby se tak dosáhlo nízké Alfvénovy rychlosti $2,8 \times 10^5 \text{ m/s}$. Všimněme si, že není možné zvýšit ρ užitím těžších atomů. Frekvence $\omega = kv_A$ je úměrná $M^{1/2}$, zatímco cyklotronní frekvence ω_c je úměrná M^{-1} , poměr ω/ω_c je tedy úměrný $M^{1/2}$. S těžšími atomy není možné vyhovět podmínce $\omega^2 \ll \omega_c^2$.

4.19 MAGNETOZVUKOVÉ VLNY

Věnujme se konečně nízkofrekvenčním vlnám šířícím se kolmo na B_0 . Opět můžeme vzít $B_0 = B_0 \hat{z}$ a $E_1 = E_1 \hat{x}$, ale nyní položíme $k = k \hat{y}$ (obr. 4-52).



OBR. 4-52 Geometrické schéma magnetozvukové vlny šířící se kolmo na B_0 .

Rychlost $E_1 \times B_0$ driftu bude mít směr vektoru k , takže plazma se bude při oscilacích stlačovat a rozpínat. Je tudíž nezbytné zachovat v pohybové rovnici člen ∇p . Pro ionty máme

$$Mn_0 \frac{\partial v_{i1}}{\partial t} = en_0(E_1 + v_{i1} \times B_0) - \gamma_i K T_i \nabla n_1. \quad [4-129]$$

Při naší volbě E_1 a k je to

$$v_{ix} = \frac{ie}{M\omega}(E_x + v_{iy}B_0), \quad [4-130]$$

$$v_{iy} = \frac{ie}{M\omega}(-v_{ix}B_0) + \frac{k}{\omega} \frac{\gamma_i K T_i}{M} \frac{n_1}{n_0}. \quad [4-131]$$

Rovnice kontinuity dává

$$\frac{n_1}{n_0} = \frac{k}{\omega} v_{iy}, \quad [4-132]$$

takže rov. [4-131] přechází v

$$v_{iy} = -\frac{ie}{M\omega} v_{ix} B_0 + \frac{k^2}{\omega^2} \frac{\gamma_i K T_i}{M} v_{iy}. \quad [4-133]$$

Zápis zjednodušíme označením

$$A \equiv \frac{k^2}{\omega^2} \frac{\gamma_i K T_i}{M}$$

a dostáváme

$$v_{iy}(1 - A) = -\frac{i\Omega_c}{\omega} v_{ix}. \quad [4-134]$$

Použijeme-li rov. [4-134], máme

$$v_{ix} = \frac{ie}{M\omega} E_x + \frac{i\Omega_c}{\omega} \left(-\frac{i\Omega_c}{\omega} \right) (1 - A)^{-1} v_{ix},$$

$$v_{ix} \left(1 - \frac{\Omega_c^2/\omega^2}{1 - A} \right) = \frac{ie}{M\omega} E_x. \quad [4-135]$$

To je jediná složka v_{i1} , kterou budeme potřebovat, neboť jediná netriviální složka vlnové rovnice [4-81] je

$$(\omega^2 - c^2 k^2) E_x = -\frac{i\omega}{\epsilon_0} n_0 e (v_{ix} - v_{ex}). \quad [4-136]$$

Abychom získali v_{ex} , potřebujeme pouze udělat vhodné záměny v rov. [4-135] a vzít limitu s ohledem na malou hmotnost elektronů, takže $\omega^2 \ll \omega_c^2$ a $\omega^2 \ll k^2 v_{te}^2$

$$v_{ex} = \frac{ie}{m\omega} \frac{\omega^2}{\omega_c^2} \left(1 - \frac{k^2}{\omega^2} \frac{\gamma_e K T_e}{m} \right) E_x \rightarrow -\frac{ik^2}{\omega B_0^2} \frac{\gamma_e K T_e}{e} E_x. \quad [4-137]$$

Ze tří posledních rovnic dostáváme

$$(\omega^2 - c^2 k^2) E_x = -\frac{i\omega}{\epsilon_0} n_0 e \left[\frac{ie}{M\omega} E_x \left(\frac{1 - A}{1 - A - (\Omega_c^2/\omega^2)} \right) + \frac{ik^2 M}{\omega B_0^2} \frac{\gamma_e K T_e}{eM} E_x \right]. \quad [4-138]$$

Opět budeme předpokládat $\omega^2 \ll \Omega_c^2$, takže $1 - A$ můžeme zanedbat vzhledem k Ω_c^2/ω^2 . Ujijeme definic pro Ω_p a v_A a máme

$$(\omega^2 - c^2 k^2) = -\frac{\Omega_p^2}{\Omega_c^2} \omega^2 (1 - A) + \frac{k^2 c^2}{v_A^2} \frac{\gamma_e K T_e}{M},$$

$$\omega^2 - c^2 k^2 \left(1 + \frac{\gamma_e K T_e}{M v_A^2}\right) + \frac{\Omega_p^2}{\Omega_c^2} \left(\omega^2 - k^2 \frac{\gamma_i K T_i}{M}\right) = 0. \quad [4-139]$$

Poněvadž

$$\Omega_p^2/\Omega_c^2 = c^2/v_A^2, \quad [4-140]$$

dostává rov. [4-139] tvar

$$\omega^2 \left(1 + \frac{c^2}{v_A^2}\right) = c^2 k^2 \left(1 + \frac{\gamma_e K T_e + \gamma_i K T_i}{M v_A^2}\right) = c^2 k^2 \left(1 + \frac{v_z^2}{v_A^2}\right), \quad [4-141]$$

kde v_z je akustická rychlost. Konečně dostáváme

$$\frac{\omega^2}{k^2} = c^2 \frac{v_z^2 + v_A^2}{c^2 + v_A^2} \quad [4-142]$$

To je disperzní vztah pro *magnetozvukovou vlnu* šířící se kolmo na \mathbf{B}_0 . Je to akustická vlna, v níž stlačení a zředění nevzniká pohyby ve směru \mathbf{E} , nýbrž ve směru $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$, tj. driftovými pohyby kolmo na \mathbf{E} . V limitě $\mathbf{B}_0 \rightarrow 0$, $v_A \rightarrow 0$ přechází magnetozvuková vlna v obyčejnou iontově akustickou vlnu. V limitě $KT \rightarrow 0$, $v_z \rightarrow 0$ vymizí síly gradientu tlaku a vlna se stává modifikovanou Alfvénovou vlnou. Fázová rychlost magnetozvukové vlny je skoro vždycky větší než v_A , proto se často nazývá jednoduše „rychlá“ hydromagnetická vlna.

4.20 STRUČNÝ PŘEHLED ELEMENTÁRNÍCH VLN V PLAZMATU

Elektronové vlny (elektrostatické)

$\mathbf{B}_0 = 0$ nebo $\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_0$:

$$\omega^2 = \omega_p^2 + \frac{3}{2} k^2 v_i^2 \quad (\text{Plazmové oscilace}) \quad [4-143]$$

$\mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0$:

$$\omega^2 = \omega_p^2 + \omega_c^2 = \omega_h^2 \quad (\text{Horní hybridní oscilace}) \quad [4-144]$$

Iontové vlny (elektrostatické)

$\mathbf{B}_0 = 0$ nebo $\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_0$:

$$\omega^2 = k^2 v_z^2 = k^2 \frac{\gamma_e K T_e + \gamma_i K T_i}{M} \quad (\text{Akustické vlny}) \quad [4-145]$$

$\mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0$:

$$\omega^2 = \Omega_c^2 + k^2 v_z^2 \quad (\text{Elektrostatické iontové cyklotronní vlny}) \quad [4-146]$$

nebo

$$\omega^2 = \omega_d^2 = \Omega_c \omega_c \quad (\text{Dolní hybridní oscilace}) \quad [4-147]$$

Elektronové vlny (elektromagnetické)

$\mathbf{B}_0 = 0$:

$$\omega^2 = \omega_p^2 + k^2 c^2 \quad (\text{Světelné vlny}) \quad [4-148]$$

$\mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0$, $\mathbf{E}_1 \parallel \mathbf{B}_0$:

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (\text{O vlna}) \quad [4-149]$$

$\mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0$, $\mathbf{E}_1 \perp \mathbf{B}_0$:

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{\omega^2 - \omega_h^2} \quad (\text{X vlna}) \quad [4-150]$$

$\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_0$:

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2/\omega^2}{1 - (\omega_c/\omega)} \quad (\text{R vlna}) \quad [4-151]$$

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2/\omega^2}{1 + (\omega_c/\omega)} \quad (\text{L vlna}) \quad [4-152]$$

Iontové vlny (elektromagnetické)

$\mathbf{B}_0 = 0$: žádné

$\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_0$:

$$\omega^2 = k^2 v_A^2 \quad (\text{Alfvénova vlna}) \quad [4-153]$$

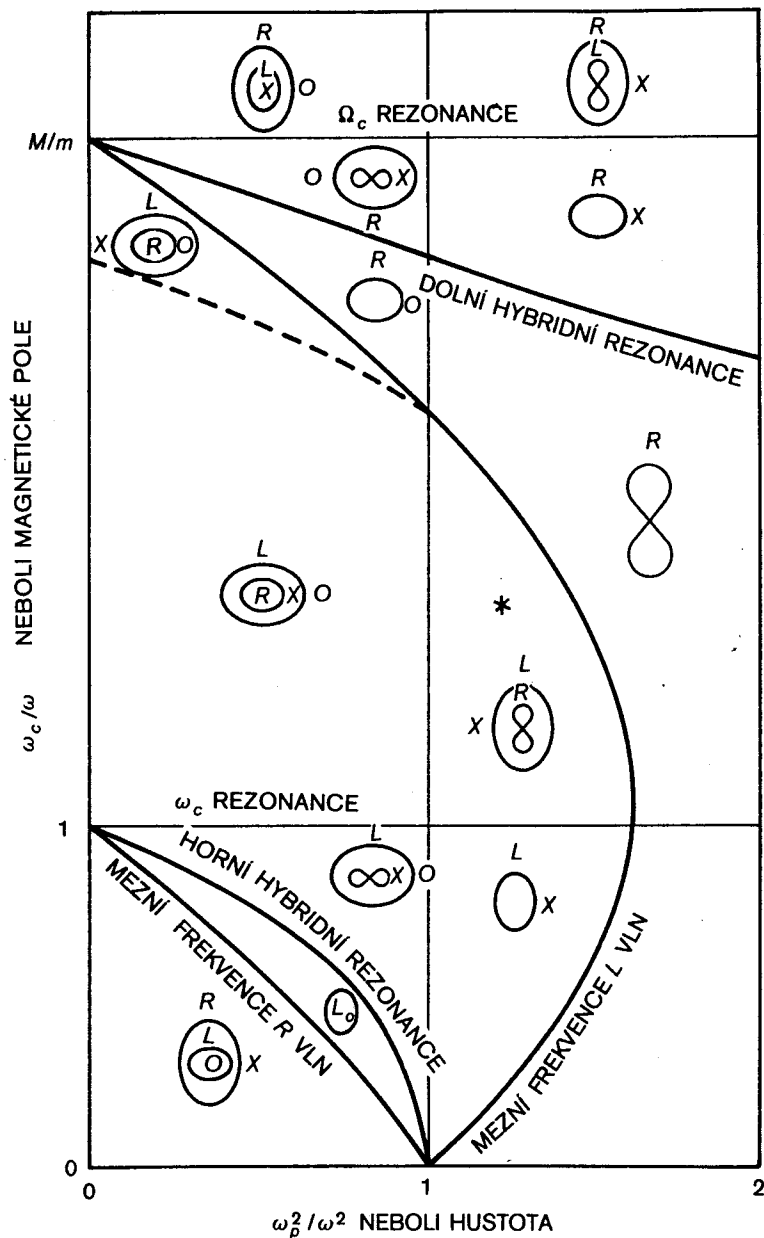
$\mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0$:

$$\frac{\omega^2}{k^2} = c^2 \frac{v_z^2 + v_A^2}{c^2 + v_A^2} \quad (\text{Magnetozvuková vlna}) \quad [4-154]$$

Tento soubor disperzních vztahů je velice zjednodušen a zahrnuje pouze hlavní směry šíření. Přesto přese všechno je velmi užitečné mít tento soubor rovnic v paměti jako základní pomůcku při rozboru složitějších vlnových pohybů. Často je možné vyložit složitý případ jako pozměněný typ některé z těchto základních oscilací nebo jako jejich superpozici.

4.21 CMA DIAGRAM

Mění-li se úhel mezi směrem šíření a magnetickým polem, mění se i fázová rychlost. Některé z typů vln uvedených v předchozím odstavci pod $\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_0$ a $\mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0$ přitom spojitě přecházejí jeden v druhý, jiné typy při určitém



OBR. 4-53 CMA (Clemmow–Mullaly–Allis) diagram pro klasifikaci vln ve studeném plazmatu.

kritickém úhlu prostě zmizí. Toto složité spektrum změn dobře objasňuje CMA diagram, jež takto podle jeho spoluvůrců (Clemmow–Mullaly–Allis) nazval T. H. Stix. Takový diagram je na obrázku 4-53. CMA diagram však platí pouze pro studené plazma $T_i = T_e = 0$. Rozšířením na nenulové teploty se stane tak složitým, že přestává být užitečný.

Na obrázku 4-53 je na jedné ose ω_c/ω neboli magnetické pole a na druhé ω_p^2/ω^2 neboli hustota. Při dané frekvenci ω se každý experimentální případ charakterizovaný veličinami ω_p a ω_c promítne do nějakého bodu v diagramu. Mezními frekvencemi a rezonancemi, s nimiž jsme se setkali, je celá plocha rozdělena na oblasti. Například mezní frekvence mimořádné vlny $\omega^2 = \omega_c^2 + \omega_p^2$ je vyjádřena kvadratickým vztahem mezi ω_c/ω a ω_p^2/ω^2 a touto parabolou je na obrázku 4-53 křivka označená „horní hybridní rezonance“. Tyto křivky mezních frekvencí a rezonancí pro různé vlny oddělují od sebe oblasti šíření a oblasti, v nichž se šířit nemohou. Jednotlivé oblasti se tedy od sebe liší souborem vln, které v nich mohou existovat.

Malé grafy namalované v každé oblasti označují nejen vlny v té oblasti existující, ale i kvalitativní změnu fázové rychlosti podle úhlu šíření. V těchto grafech si musíme magnetické pole představovat vertikálně, potom je vzdálenost ze středu pod úhlem ϑ do bodu na patřičné křivce (elipse či osmičce) úměrná fázové rychlosti při šíření pod tímto úhlem vzhledem k magnetickému poli. Například v trojúhelníkové oblasti označené na obr. 4-53 hvězdičkou * vidíme, že při změně ϑ z nuly na $\pi/2$ se L vlna stává X vlnou, R vlna má menší rychlost než L vlna a při téže změně úhlu zmizí. Nezmění se v O vlnu, protože v této oblasti je $\omega^2 < \omega_p^2$ a O vlna zde neexistuje.

V horní oblasti CMA diagramu je $\omega \ll \omega_c$, zde nalezneme nízkofrekvenční iontové vlny. Protože jsme v tomto diagramu zanedbali tepelné rychlosti, nedostaneme elektrostatické iontové vlny, které se šíří jenom v teplém plazmatu. Na CMA diagram se můžeme dívat jako na „plazmatický rybníček“: oblézky vhozené do jednotlivých oblastí vyvolá vlnky toho typu, který je v té oblasti naznačen.

4-20. Představte si, že jste v laboratoři vytvořili plazma s $n = 10^{15} \text{ m}^{-3}$ a $B = 10^{-2} \text{ T}$; k sondě zasahující do plazmatu připojíte signální generátor pracující na frekvenci 160 MHz.

ÚLOHY

- Nakreslete CMA diagram a ukažte oblast, do níž tento experiment patří.
- Jaké elektromagnetické vlny mohou být v tomto plazmatu vybuzeny a šířit se v něm?

4-21. Představte si, že máte navrhout experiment, v němž budou v cylindrickém sloupci plazmatu generovány stojaté torzní Alfvénovy vlny tak, aby stojatá vlna měla kmitnu ve středové rovině a uzly na koncích. Abyste vyhověli podmínce $\omega \ll \Omega_c$, nastavte $\omega = 0,1\Omega_c$.

- Kdybyste mohli vytvořit vodíkové plazma s $n = 10^{19} \text{ m}^{-3}$ a $B = 1 \text{ T}$, jak dlouhý by musel být sloupec?

(b) Kdybyste se snažili dosáhnout toho v Q-systému s 0,31 T a jednou ionizovanými Cs atomovými ionty s atomovým číslem 133 při hustotě $n = 10^{18} \text{ m}^{-3}$, jak dlouhý by musel být sloupec plazmatu? Návod: Vypočítejte charakteristické délky a použijte výsledky z části (a).

4-22. Pulsar emituje široké spektrum elektromagnetického záření, které je detegováno přijímačem naladěným přibližně na $f = 80 \text{ MHz}$. Poněvadž v mezihvězdném plazmatu dochází k disperzi grupové rychlosti, posouvá se pozorovaná frekvence během každého impulsu rychlostí $df/dt = -5 \text{ MHz/s}$.

(a) Jestliže je v mezihvězdném prostoru magnetické pole zanedbatelné a $\omega^2 \gg \omega_p^2$, ukažte, že

$$\frac{df}{dt} \approx -\frac{c}{x} \frac{f^3}{f_p^2}$$

kde f_p je plazmová frekvence a x je vzdálenost pulsaru.

(b) Je-li střední elektronová hustota v prostoru $2 \times 10^{-7} \text{ m}^{-3}$, jak daleko je pulsar? (1 parsec = $3 \times 10^{16} \text{ m}$.)

4-23. V tříložkovém plazmatu mají elektrony hustotu n_0 , ionty o hmotnosti M_1 mají hustotu $(1 - \nu)n_0$ a νn_0 je hustota iontů o hmotnosti M_2 . Nechť $T_{i1} = T_{i2} = 0$, $T_e \neq 0$.

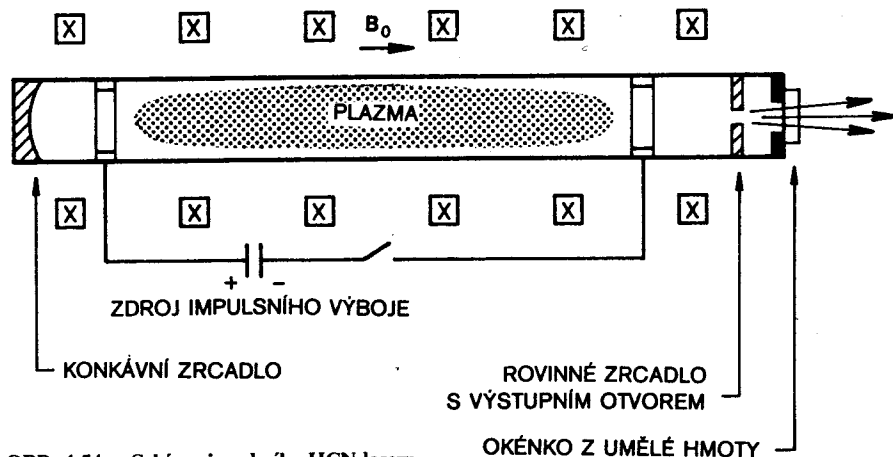
(a) Odvoďte disperzní vztah pro elektrostatické iontové cyklotronní vlny.

(b) Najděte jednoduchý výraz pro ω^2 , jestliže ν je malé.

4-24. Ukažte, že při Langmuírových plazmových oscilacích se časově průměrná kinetická energie elektronů v m^3 rovná hustotě energie elektrického pole $\epsilon_0 \langle E^2 \rangle / 2$.

4-25. Ukažte, že pro Alfvénovu vlnu se časově průměrná kinetická energie iontů v m^3 rovná energii magnetické vlny $\epsilon_0 c^2 \langle B_1^2 \rangle / 2$.

4-26. Na obr. 4-54 je nakreslen laser pracující v daleké infračervené oblasti $\lambda = 337 \mu\text{m}$. Je-li $B_0 = 0$, prochází toto záření snadno plazmatem, pokud $\omega_p < \omega$



OBR. 4-54 Schéma impulsního HCN laseru.

neboli $n < n_k = 10^{22} \text{ m}^{-3}$. Protože však probíhané vzdálenosti jsou dlouhé, defokusační efekt plazmatu (srv. obr. 4-31) zhorší optické vlastnosti dutiny, takže hustota je omezena podmínkami $\omega_p^2 < \nu \omega^2$, kde $\nu \ll 1$. Chceme zvýšit mezní hustotu, a tedy i výstupní výkon laseru, přidáme magnetické pole B_0 .

(a) Jestliže ν zůstává nezměněno, ukažte, že mezní hustota může být zvýšena, prochází-li plazmatem levotočivě kruhově polarizované vlny.

(b) Má-li být n zdvojnásobeno, jak velké musí být B_0 ?

(c) Ukažte, že plazma je pro hvězdy čočkou s fokusačními účinky.

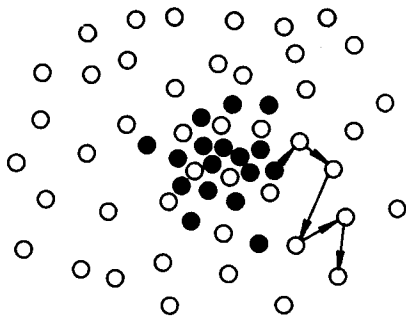
(d) Dá se užít hvězdů a dosáhnout tak daleko vyšších hustot?

Kapitola pátá

DIFÚZE A ODPOR

5.1 DIFÚZE A POHYBLIVOST VE SLABĚ IONIZOVANÝCH PLYNECH

Nekonečné homogenní plazma, jež jsme v předchozí kapitole v našich úvahách zavedli jako výchozí rovnovážný stav, je ovšem velmi idealizované. V každém reálném plazmatu existuje gradient hustoty a plazma má tendenci difundovat do oblastí s nízkou hustotou. Ústředním problémem řízených termonukleárních reakcí je, jak tuto difúzi zbrzdít magnetickým polem. Než se však do tohoto problému pustíme, probereme případ difúze bez přítomnosti magnetických polí. Dalšího zjednodušení dosáhneme, předpokládáme-li, že plazma je slabě ionizované, takže nabitě částice se daleko více srážejí s neutrálními atomy než mezi sebou. Případ plně ionizovaného plazmatu odložíme do pozdějšího oddílu, protože vede k nelineární rovnici, pro niž existuje málo jednoduchých ilustrativních řešení.



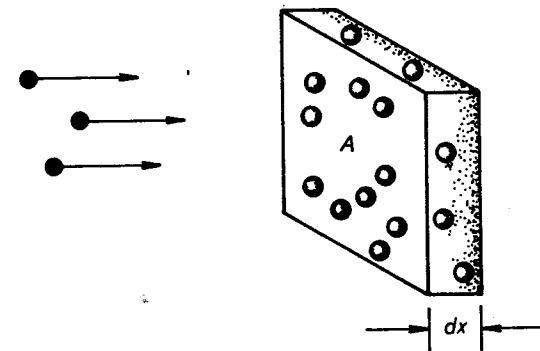
OBR. 5-1 Difúze atomů plynu způsobená náhodnými srážkami.

Částečně ionizované plyny ale nejsou žádným výjimečným případem: Vysokotlaký obloukový výboj i ionosférické plazma patří do této kategorie a většina raných výzkumů výbojů v plynech se týká prostředí, v němž stupeň ionizace je mezi 10^{-3} a 10^{-6} a rozhodující roli hrají neutrální částice.

Tak dostáváme obraz plazmatu, v němž jsou na hustém pozadí neutrálních částic nerovnoměrně rozloženy ionty a elektrony (obr. 5-1). Přitom, jak se plazma působením gradientu tlaku a elektrických sil rozptyluje, jednotlivé částice se chaoticky pohybují a často se s neutrálními atomy srážejí. Začneme krátkým přehledem definic z kinetické teorie.

Veličiny charakterizující srážku 5.1.1

Jestliže se např. elektron sráží s neutrálním atomem, může ztratit jistou část své původní hybnosti; jak velká tato část bude, závisí na úhlu, v kterém se odrazí. Při čelné srážce s těžkým atomem může elektron ztratit dvojnásobek své původní hybnosti, protože jeho rychlost po srážce změní znaménko. Pravděpodobnost ztráty hybnosti lze vyjádřit pomocí odpovídajícího průřezu σ , který by atomy měly, kdyby dokonale pohlcovaly hybnost. σ nazýváme *účinný průřez*.



Huštěrce k definici účinného průřezu. OBR. 5-2

Na obr. 5-2 elektrony dopadají na desku o ploše A a tloušťce dx , obsahující v 1 m^3 n_n neutrálních atomů. Atomy si představíme jako neprostupné kuličky, jejichž průřez má velikost σ ; tzn. vždycky když elektron přijde do místa obsazeného atomem, ztratí všechnu svoji hybnost. Počet atomů v desce je

$$n_n A dx.$$

Relativní část plochy A , jež je zakryta atomy, je

$$n_n A \sigma dx / A = n_n \sigma dx.$$

Dopadá-li na desku tok elektronů Γ , na druhé straně z ní vystupuje

$$\Gamma' = \Gamma(1 - n_n \sigma dx).$$

Změna toku Γ připadající na jednotku délky tedy je

$$d\Gamma/dx = -n_n \sigma \Gamma$$

neboli

$$\Gamma = \Gamma_0 e^{-n_n \sigma x} \equiv \Gamma_0 e^{-x/\lambda_s}. \quad [5-1]$$

Ve vzdálenosti λ_s by se tok zmenšil na $1/e$ své původní hodnoty. Veličina λ_s je *střední volná dráha* mezi srážkami:

$$\lambda_s = 1/n_n \sigma \quad [5-2]$$

Má-li částice proběhnout vzdálenost λ_s , je dost pravděpodobné, že se při tom srazí. Střední doba mezi srážkami je pro částice s rychlostí v dána výrazem

$$\tau = \lambda_s/v$$

a střední frekvence srážek je

$$\tau^{-1} = v/\lambda_s = n_n \sigma v. \quad [5-3]$$

Budeme-li nyní středovat přes částice všech rychlostí v při Maxwellově rozdělení, dostaneme veličinu, která se obecně nazývá srážková frekvence ν

$$\nu = n_n \overline{\sigma v}. \quad [5-4]$$

5.1.2 Veličiny charakterizující difúzi

Pohybovou rovnicí zahrnující srážky můžeme pro kterýkoliv druh částic v tekutině napsat

$$m n \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m n \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = \pm en\mathbf{E} - \nabla p - mn\nu\mathbf{v}, \quad [5-5]$$

kde \pm opět představuje znaménko náboje. Při výpočtu ν jsme užili právě takový způsob středování, aby rov. [5-5] byla v pořádku; není třeba, abychom se podrobnostmi tohoto výpočtu zabývali. Veličinu ν však musíme považovat za konstantní, má-li nám být rov. [5-5] užitečná. Budeme se zabývat ustáleným stavem, při němž $\partial v/\partial t = 0$. Je-li ν dostatečně malé (nebo ν dostatečně velké), element tekutiny se nestáčí během srážkové doby posunout do oblastí, kde \mathbf{E} a ∇p mají jinou hodnotu, a konvektivní derivace rovněž zmizí. Dosadíme-li na levou stranu rovnice [5-5] nulu, dostáváme pro izotermní plazma

$$\mathbf{v} = \frac{1}{m\nu} (\pm en\mathbf{E} - KT \nabla n) = \pm \frac{e}{m\nu} \mathbf{E} - \frac{KT}{m\nu} \frac{\nabla n}{n}. \quad [5-6]$$

Tyto výrazy se nazývají *pohyblivost* a *koeficient difúze*

$$\mu \equiv |q|/m\nu \quad \text{Pohyblivost} \quad [5-7]$$

$$D \equiv KT/m\nu \quad \text{Koeficient difúze} \quad [5-8]$$

Pro každý druh částic budou mít jinou hodnotu. Všimněme si, že D má rozměr m^2/s . Transportní koeficienty μ a D jsou svázány *Einsteinovým vztahem*

$$\mu = |q| D/KT \quad [5-9]$$

Pomocí těchto definic můžeme tok Γ_j , j -tého druhu částic zapsat

$$\Gamma_j = n v_j = \pm \mu_j n \mathbf{E} - D_j \nabla n \quad [5-10]$$

Fickův zákon difúze je zvláštním případem obecnější rovnice [5-10], kdy $\mathbf{E} = 0$, nebo částice jsou nenabitě, takže $\mu = 0$, potom

$$\Gamma = -D \nabla n. \quad \text{Fickův zákon} \quad [5-11]$$

Tato rovnice vyjadřuje pouze tu skutečnost, že difúze je výsledkem chaotických pohybů, přičemž výsledný tok z oblastí s větší hustotou do řídkých oblastí vzniká prostě proto, že v místech větší hustoty začíná svou cestu více částic. Tento tok je zřejmě úměrný gradientu hustoty. V plazmatu nemusí Fickův zákon vždycky plátit. Poněvadž může docházet k organizovaným pohybům (vlny v plazmatu), může se plazma rozpínat způsobem, který není svou podstatou chaotický.

ROZPAD PLAZMATU DIFÚZÍ 5.2

Ambipolární difúze 5.2.1

Budeme nyní zkoumat, jak se plazma vytvořené v nějaké nádobě rozpadá difúzí ke stěnám. Jakmile ionty a elektrony dosáhnou stěny, rekombinují na ní, takže hustota je v blízkosti stěny prakticky nulová. Chování plazmatu je popsáno pohybovou rovnicí pro tekutinu a rovnicí kontinuity, je-li ale rozpad pomalý, je nutno časovou derivaci ponechat jenom v rovnici kontinuity. Časová derivace v pohybové rovnici [5-5] je zanedbatelná, je-li srážková frekvence ν veliká. Tak dostáváme

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot \Gamma_j = 0, \quad [5-12]$$

kde Γ_i je dáno rovnicí [5-10]. Je zřejmé, že kdyby se Γ_i a Γ_e sobě nerovnali, náboje by se v krátké době výrazně oddělily. Jsou-li rozměry plazmatu velké ve srovnání s Debyeovou délkou, musí být plazma kvazineutrální. Proto lze očekávat, že difúze iontů a elektronů se nějakým způsobem nastaví tak, že obojí částice mizí stejnou měrou. Snadno nahlédneme, jak k tomu dojde. Elektronů mají vyšší tepelné rychlosti, protože jsou lehčí a snaží se opustit plazma jako první. Zůstává za nimi kladný náboj a vzniká elektrické pole takové polaroty, že brzdí ztráty elektronů a zvětšuje ztráty iontů. Potřebné elektrické pole E nalezneme z podmínky $\Gamma_i = \Gamma_e = \Gamma$. Podle rovnice [5-10] můžeme psát

$$\Gamma = \mu_i n E - D_i \nabla n = -\mu_e n E - D_e \nabla n, \quad [5-13]$$

$$E = \frac{D_i - D_e}{\mu_i + \mu_e} \frac{\nabla n}{n}. \quad [5-14]$$

Společný tok Γ je potom

$$\begin{aligned} \Gamma &= \mu_i \frac{D_i - D_e}{\mu_i + \mu_e} \nabla n - D_i \nabla n = \\ &= \frac{\mu_i D_i - \mu_i D_e - \mu_i D_i - \mu_e D_i}{\mu_i + \mu_e} \nabla n = \\ &= -\frac{\mu_i D_e + \mu_e D_i}{\mu_i + \mu_e} \nabla n. \end{aligned} \quad [5-15]$$

To je Fickův zákon s novým koeficientem difúze

$$D_a \equiv \frac{\mu_i D_e + \mu_e D_i}{\mu_i + \mu_e} \quad [5-16]$$

nazyvaným koeficient ambipolární difúze. Je-li konstantní, přechází rov. [5-12] jednoduše v

$$\partial n / \partial t = D_a \nabla^2 n. \quad [5-17]$$

Velikost D_a můžeme odhadnout, vezmeme-li $\mu_e \gg \mu_i$. Že tomu tak je, můžeme vidět z rov. [5-7]. Poněvadž v je úměrné tepelné rychlosti, která je zase úměrná $m^{-1/2}$, je μ úměrné $m^{-1/2}$. Rovnice [5-16] a [5-9] potom dávají

$$D_a \approx D_i + \frac{\mu_i}{\mu_e} D_e = D_i + \frac{T_e}{T_i} D_i \quad [5-18]$$

Pro $T_e = T_i$ dostáváme

$$D_a \approx 2D_i. \quad [5-19]$$

Ambipolární elektrické pole zvyšuje difúzi iontů o faktor 2, avšak rychlost difúze obou těchto druhů částic dohromady je určována v první řadě částicemi pomalejšími.

Difúze mezi rovnoběžnými stěnami 5.2.2

Difúzní rovnici můžeme snadno řešit separací proměnných. Nechť

$$n(r, t) = T(t) S(r), \quad [5-20]$$

potom z rov. [5-17] dostáváme

$$S \frac{dT}{dt} = DT \nabla^2 S, \quad [5-21]$$

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = \frac{D}{S} \nabla^2 S. \quad [5-22]$$

Poněvadž levá strana je funkcí pouze času a pravá strana funkcí pouze prostorových proměnných, musí se obě rovnat téže konstantě, kterou označíme $-1/\tau$. Pro funkci T pak máme rovnici

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{T}{\tau} \quad [5-23]$$

s řešením

$$T = T_0 e^{-t/\tau}. \quad [5-24]$$

Prostorová část S je dána rovnicí

$$\nabla^2 S = -\frac{1}{D\tau} S. \quad [5-25]$$

Pro rovinnou geometrii našeho příkladu to znamená

$$\frac{d^2 S}{dx^2} = -\frac{1}{D\tau} S \quad [5-26]$$

s řešením

$$S = A \cos \frac{x}{(D\tau)^{1/2}} + B \sin \frac{x}{(D\tau)^{1/2}}. \quad [5-27]$$

Chceme, aby u stěn byla hustota skoro nulová (obr. 5-3) a mezi nimi aby měla jedno nebo více maxim. Nejjednodušším řešením bude jedno maximum. V důsledku symetrie můžeme škrtnout v rov. [5-27] lichou funkci sinus. Z okrajové podmínky $S = 0$ pro $x = \pm L$ pak plyne

$$\frac{L}{(D\tau)^{1/2}} = \frac{\pi}{2}$$

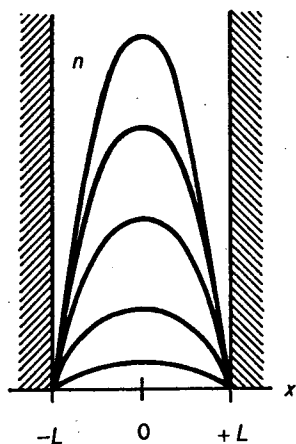
neboli

$$\tau = \left(\frac{2L}{\pi}\right)^2 \frac{1}{D}. \quad [5-28]$$

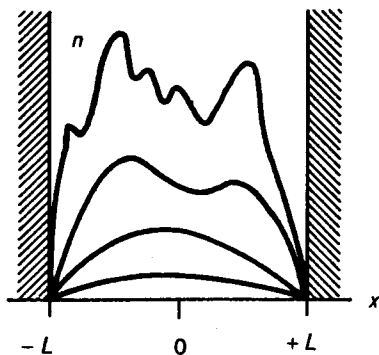
Z rovnic [5-20], [5-24], [5-27] a [5-28] dostáváme

$$n = n_0 e^{-t/\tau} \cos \frac{\pi x}{2L}. \quad [5-29]$$

To se nazývá *nejnižší difúzní mod*. Rozdělení hustoty je dáno kosinem a s časem ubývá hustota exponenciálně. Časová konstanta τ narůstá s L a mění se s převrácenou hodnotou D , jak lze očekávat.



OBR. 5-3 Hustota plazmatu v různých časových okamžicích při rozpadu plazmatu ke stěnám.



OBR. 5-4 Rozpad nehomogenního plazmatu. Vyšší difúzní módy mizí rychleji.

Existují ovšem vyšší difúzní módy s více než jedním maximem. Předpokládejme, že počáteční rozložení hustoty je zobrazeno nejhorší křivkou na obr. 5-4. Takové libovolné rozložení můžeme rozvinout do Fourierovy řady

$$n = n_0 \left(\sum_l a_l \cos \frac{(l + \frac{1}{2}) \pi x}{L} + \sum_m b_m \sin \frac{m \pi x}{L} \right). \quad [5-30]$$

Indexy jsme zvolili tak, aby okrajová podmínka pro $x = \pm L$ byla automaticky splněna. Při hledání časové závislosti zkusme řešení ve tvaru

$$n = n_0 \left(\sum_l a_l e^{-t/\tau_l} \cos \frac{(l + \frac{1}{2}) \pi x}{L} + \sum_m b_m e^{-t/\tau_m} \sin \frac{m \pi x}{L} \right). \quad [5-31]$$

Dosadíme-li do rovnice difúze [5-17], vidíme, že z každého kosinového členu dostáváme vztah

$$-\frac{1}{\tau_l} = -D \left[\left(l + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{L} \right]^2 \quad [5-32]$$

a podobně ze sinových členů. Časová konstanta pro zánik l -tého modu je tedy

$$\tau_l = \left[\frac{L}{(l + \frac{1}{2}) \pi} \right]^2 \frac{1}{D}. \quad [5-33]$$

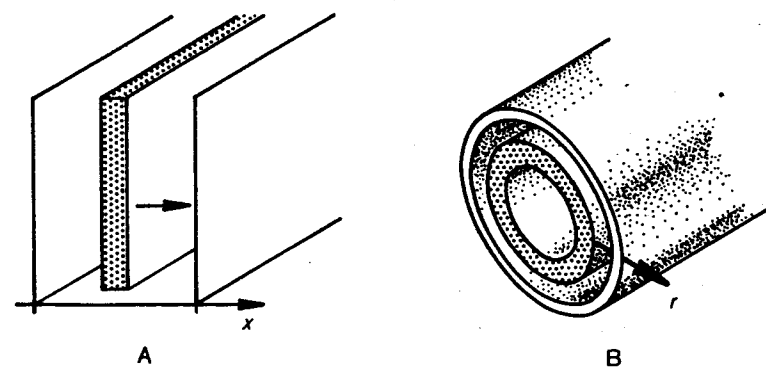
Jemná struktura hustotního profilu, odpovídající velkým hodnotám l , zaniká rychleji, s menší časovou konstantou τ_l . Rozpad plazmatu bude pokračovat tak, jak ukazuje obr. 5-4. Nejprve se bude difúzí rozplývat jemná struktura, až se vytvoří nejnižší difúzní mod, prosté kosinové rozložení z obr. 5-3, jež se bude dále snižovat a profil hustoty plazmatu bude už zachovávat svůj charakter.

Difúze ve válci 5.2.3

Prostorová část rovnice difúze [5-25] se v cylindrické geometrii změní takto

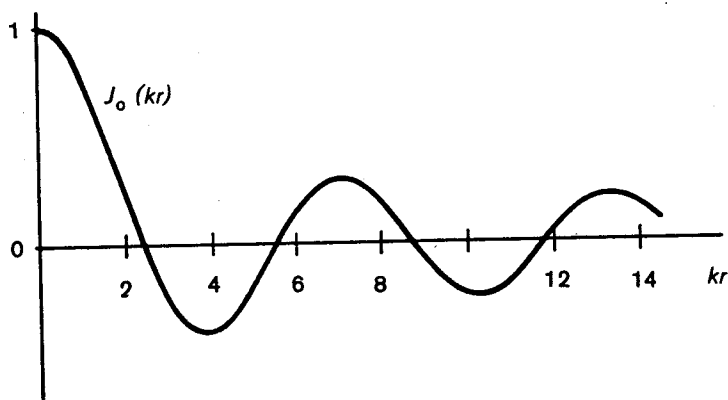
$$\frac{d^2 S}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dS}{dr} + \frac{1}{D\tau} S = 0. \quad [5-34]$$

Od rovnice [5-26] je liší přidáním prostředním členem, který je důsledkem změny souřadnicového systému. Potřeba zvláštního členu je jednoduše znázorněna na obr. 5-5. Jestliže se vrstva plazmatu v případě (A) pohybuje



OBR. 5-5 Pohyb plazmatické vrstvy při rovině a cylindrické konfiguraci. Obrázek slouží k ilustraci rozdílu mezi kosinem a Besselovou funkcí.

směrem většího x , aniž by se směla rozpínat, zůstane hustota konstantní. Bude-li se však pohybovat obdenná vrstva v případě (B) k většímu r a tloušťka se nebude měnit, bude hustota klesat jako $1/r$. Můžeme tudíž očekávat, že řešení rov. [5-34] se bude podobat tlumenému kosinu (obr. 5-6). Tato funkce se nazývá *Besselova funkce nultého řádu* a rov. [5-34] se nazývá Besselova rovnice (nultého řádu). Místo symbolu \cos stojí symbol J_0 . Funkce $J_0(r/[D\tau]^{1/2})$ je řešením rov. [5-34] právě tak, jako $\cos [x/(D\tau)^{1/2}]$ je řešením rov. [5-26]. Obě funkce, $\cos kx$ i $J_0(kr)$ lze vyjádřit nekonečnými řadami a lze je nalézt v matematických tabulkách.



OBR. 5-6 Besselova funkce nultého řádu.

Abychom splnili okrajovou podmínku $n = 0$ pro $r = a$, musíme $a/(D\tau)^{1/2}$ položit rovno prvému kořenu funkce J_0 , tj. 2,4. Tím dostaneme časovou konstantu zániku τ . Hustota plazmatu opět ubývá exponenciálně, protože časová část rovnice difúze [5-23] zůstává nezměněna. Popsali jsme nejnižší difúzní mod ve válci. Vyšší difúzní mody s více než jedním maximem ve válci budou obsahovat Besselovy funkce vyššího řádu, v přesné analogii k případu rovinné geometrie.

5.3 STACIONÁRNÍ STAV

Při mnoha experimentech plazma zůstává v ustáleném stavu, přičemž ztráty jsou nahrazovány stále probíhající ionizací nebo vstřikováním plazmatu. Pro výpočet profilu hustoty musíme v takovém případě do rovnice kontinuity přidat zdrojový člen

$$\frac{\partial n}{\partial t} - D \nabla^2 n = Q(r). \quad [5-35]$$

Znaménko určíme takto: kladné Q představuje zdroj částic, $\partial n/\partial t$ je kladné. Pro ustálený (stacionární) stav položíme $\partial n/\partial t = 0$ a dostáváme rovnici Poissonova typu pro $n(r)$.

Konstantní ionizační funkce 5.3.1

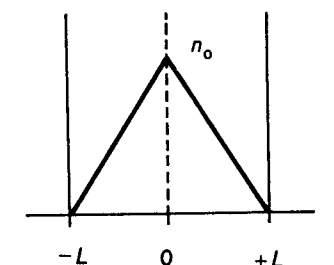
Ve slabě ionizovaných plynech ionizaci často obstarávají elektrony s vyššími energiemi, tj. z konce Maxwellova rozdělení. Zdrojový člen Q je pak úměrný elektronové hustotě n , $Q = Zn$, kde Z je „ionizační funkce“. Tak dostáváme

$$\nabla^2 n = -(Z/D)n. \quad [5-36]$$

To je táž rovnice jako rov. [5-25] pro S . Profil hustoty je tedy kosinus nebo Besselova funkce, stejně jako v případě rozpadajícího se plazmatu, jenom se v tomto případě hustota nezměňuje s časem. Difúzní ztráty jsou vyrovnávány nějakým tepelným zdrojem, který udržuje elektronovou teplotu na konstantní hodnotě, a zdrojem neutrálních atomů v náhradu za ty, jež byly ionizovány.

Rovinný zdroj 5.3.2

Nejprve vyšetříme, jaký profil hustoty bychom dostali v rovinné geometrii, kdyby zdroj částic byl lokalizován do roviny $x = 0$. Takovým zdrojem by mohl být například štěrbinami vymezený svazek ultrafialového záření



OBR. 5-7 Při rovinném zdroji částic je výsledkem difúze trojúhelníkový profil hustoty.

s energií dostačující na ionizaci neutrálního plynu. Rovnice difúze pro stacionární případ je potom

$$\frac{d^2 n}{dx^2} = -\frac{Q}{D} \delta(0). \quad [5-37]$$

S výjimkou $x = 0$ musí hustota splňovat rovnici $\partial^2 n/\partial x^2 = 0$. Je zřejmé, že řešením je (obr. 5-7)

$$n = n_0 \left(1 - \frac{|x|}{L}\right). \quad [5-38]$$

Profil hustoty plazmatu je lineární; nespojitost derivace v místě zdroje je charakteristická pro zdroje s δ -funkcí.

5.3.3 Zdroj v ose

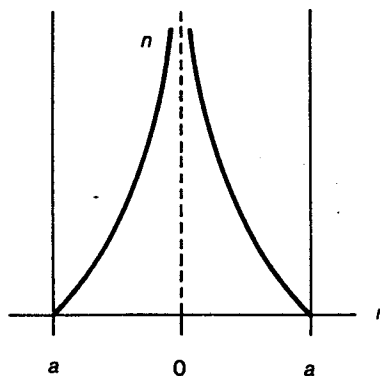
A konečně mějme v cylindrickém plazmatu zdroj lokalizovaný do osy. Takovým zdrojem může být třeba svazek elektronů s dostatečnou energií, který bude podél osy ionizovat. S výjimkou $r = 0$ musí hustota splňovat rovnici

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial n}{\partial r} \right) = 0. \quad [5-39]$$

Řešení, jež dává pro $r = a$ nulovou hodnotu, je

$$n = n_0 \ln(a/r). \quad [5-40]$$

Hustota se pro $r = 0$ stává nekonečnou (obr. 5-8); v blízkosti osy není možno hustotu určit přesně, aniž bychom vzali v úvahu konečnou šířku zdroje.



OBR. 5-8 Je-li zdroj částic v ose válce, je výsledkem difúze logaritmický profil hustoty.

5.4 REKOMBINACE

Sraží-li se ion s elektronem, mají zejména při nízké relativní rychlosti konečnou pravděpodobnost, že budou rekombinovat a vznikne neutrální atom. Aby byl splněn zákon zachování hybnosti, musí se na srážce podílet ještě třetí těleso. Je-li tímto třetím tělesem emitovaný foton, nazýváme tento proces radiativní rekombinace, je-li jím částice, mluvíme o třítělesové rekombinaci. Ztráty plazmatu způsobené rekombinací můžeme v rovnici kontinuity započítat záporným zdrojovým členem. Tento člen bude úměrný $n_e n_i = n^2$. Bez difúzního členu má rovnice kontinuity tvar

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\alpha n^2. \quad [5-41]$$

Konstantu úměrnosti α nazýváme koeficient rekombinace a má rozměr m^3/s . Rovnice [5-41] je nelineární v n , tzn. že jednoduchou metodou lineární

superpozice řešení se nám nepodaří vyhovět počátečním a okrajovým podmínkám. Rov. [5-41] je naštěstí tak jednoduchá kvadratická rovnice, že řešení můžeme přímo nahlédnout. Je to

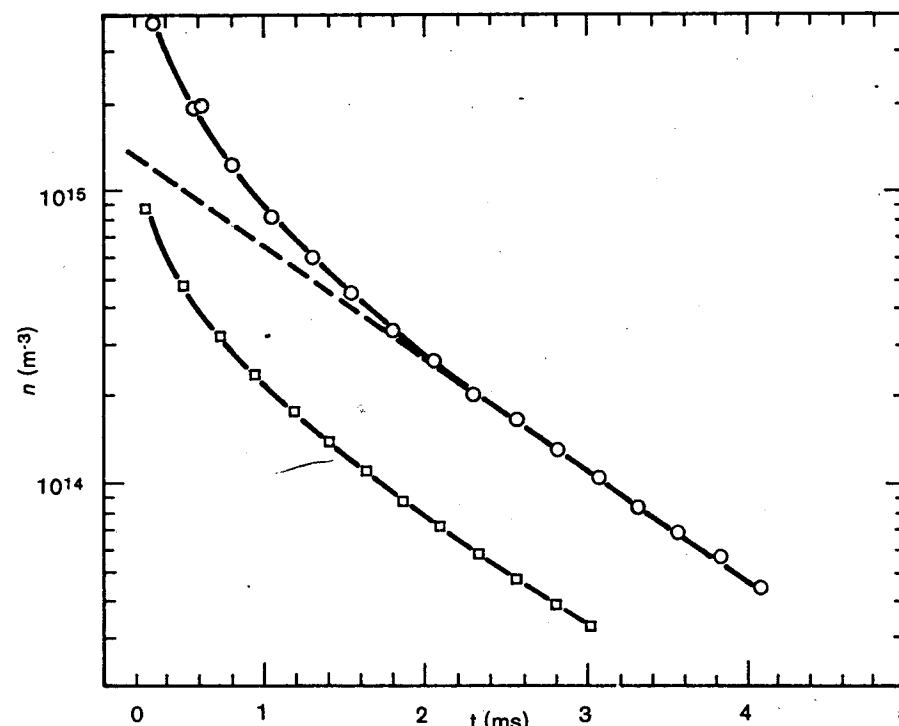
$$\frac{1}{n(r, t)} = \frac{1}{n_0(r)} + \alpha t, \quad [5-42]$$

kde $n_0(r)$ je počáteční rozložení hustoty. Snadno si ověříme, že toto řešení splňuje rovnici [5-41]. Poté, co hustota klesne hluboko pod svou počáteční hodnotu, klesá nepřímo úměrně s časem

$$n \sim 1/\alpha t. \quad [5-43]$$

To je zásadně odlišná závislost než v případě difúze, kdy je časová změna exponenciální.

Na obr. 5-9 jsou výsledky měření hustoty ve vyhasínajícím slabě ionizovaném vodíkovém plazmatu. Při velkých hustotách převládá rekombinace, která je úměrná n^2 , a hustota ubývá s $1/t$. Když hustota klesne na nízkou hodnotu, převládne difúze a další snižování už je exponenciální.

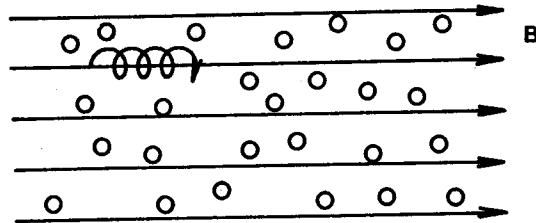


OBR. 5-9 Klesající hustota slabě ionizovaného plazmatu zanikajícího difúzí a rekombinací. [Převzato z S. C. Brown, Basic Data of Plasma Physics, John Wiley and Sons, New York, 1959.]

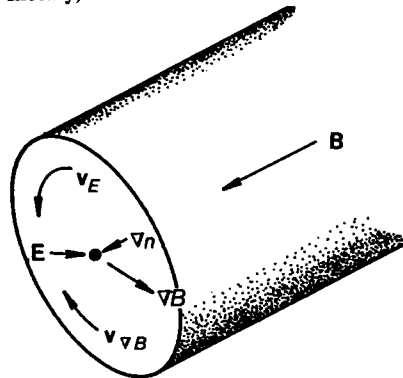
5.5 DIFÚZE NAPŘÍČ MAGNETICKÝM POLEM

Ztráty plazmatu difúzí můžeme snížit magnetickým polem; to je základní problém, s nímž se potýká výzkum udržení plazmatu při řízené termojaderné syntéze. Představme si *slabě ionizované* plazma v magnetickém poli (obr. 5-10). Ve směru rovnoběžném s \mathbf{B} se budou nabitě částice pohybovat difúzí a pohyblivostí podle rov. [5-10], neboť \mathbf{B} nebude mít na jejich pohyb v tomto směru žádný vliv. Pro každý druh částic tedy máme

$$\Gamma_z = \pm \mu n E_z - D \frac{\partial n}{\partial z}. \quad [5-44]$$



OBR. 5-10 Nabitá částice bude v magnetickém poli rotovat okolo jedné siločáry, dokud se nesrazí.

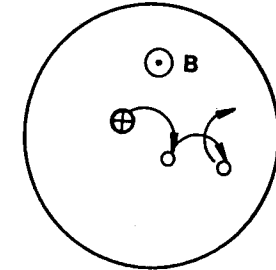


OBR. 5-11 Drifty částic v cylindricky symetrickém sloupci plazmatu nevedou ke ztrátám.

Kdyby nedocházelo ke srážkám, částice by v kolmém směru vůbec nedifundovaly – stále by kroužily kolem stejné siločáry. Vznikají ovšem driftové pohyby částic napříč \mathbf{B} v důsledku přítomnosti elektrických polí nebo gradientů \mathbf{B} , ale ty lze uspořádat tak, aby byly rovnoběžné se stěnami. Například v dokonale symetrickém válci (obr. 5-11) mají všechny gradienty radiální směr, takže driftы gyračních středů mají směr azimutální. Takto by byly driftы neškodné.

Dochází-li ke srážkám, posouvají se částice chaotickým pohybem ke stěnám ve směru gradientů, napříč \mathbf{B} (obr. 5-12). Srazí-li se řekněme ion

s neutrálním atomem, opouští místo srážky v jiném směru, než se k němu blížil. Opět bude stejným způsobem kroužit okolo magnetické siločáry, ale jeho fáze se nespojitě změnila. (Může se měnit také Larmorův poloměr, ale předpokládáme, že ion v průměru ani nezíská, ani neztratí energii.) Gyrační střed tedy mění při srážce svoji polohu, a tak vzniká jeho chaotický pohyb.



OBR. 5-12 Difúze rotujících částic při srážkách s neutrálními atomy.

Částice budou difundovat proti směru ∇n . Délka kroku náhodného pohybu už není λ_s , jako při difúzi bez magnetického pole, nýbrž má velikost Larmorova poloměru r_L . Difúze napříč \mathbf{B} tedy může být zpomalena tím, že zmenšíme r_L , tj. zvětšíme B .

Abychom viděli, jak k tomu dochází, napíšeme kolmé složky pohybové rovnice pro tekutinu pro kterýkoliv z druhů částic

$$m n \frac{d\mathbf{v}_\perp}{dt} = \pm en(\mathbf{E} + \mathbf{v}_\perp \times \mathbf{B}) - KT \nabla n - mn \mathbf{v} = 0. \quad [5-45]$$

Opět předpokládáme, že plazma je izotermní a že v je tak velké, že můžeme člen $d\mathbf{v}_\perp/dt$ zanedbat. x -ová a y -ová složka je

$$\begin{aligned} mnv_x &= \pm enE_x - KT \frac{\partial n}{\partial x} \pm env_y B, \\ mnv_y &= \pm enE_y - KT \frac{\partial n}{\partial x} \mp env_x B. \end{aligned} \quad [5-46]$$

Užijeme definiční výrazy pro μ a D a dostáváme

$$\begin{aligned} v_x &= \pm \mu E_x - \frac{D}{n} \frac{\partial n}{\partial x} \pm \frac{\omega_c}{v} v_y, \\ v_y &= \pm \mu E_y - \frac{D}{n} \frac{\partial n}{\partial x} \mp \frac{\omega_c}{v} v_x. \end{aligned} \quad [5-47]$$

Dosadíme za v_x a vyjádříme v_y

$$v_y(1 + \omega_c^2 \tau^2) = \pm \mu E_y - \frac{D}{n} \frac{\partial n}{\partial y} - \omega_c^2 \tau^2 \frac{E_x}{B} \pm \omega_c^2 \tau^2 \frac{KT}{eB} \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial x}, \quad [5-48]$$

kde $\tau = \nu^{-1}$. Podobně v_x je dáno výrazem

$$v_x(1 + \omega_c^2 \tau^2) = \pm \mu E_x - \frac{D}{n} \frac{\partial n}{\partial x} - \omega_c^2 \tau^2 \frac{E_y}{B} \mp \omega_c^2 \tau^2 \frac{KT}{eB} \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial y} \quad [5-49]$$

V posledních dvou členech těchto rovnic vystupují driftы $E \times B$ a diamagnetický

$$\begin{aligned} v_{Ex} &= \frac{E_y}{B}, & v_{Ey} &= -\frac{E_x}{B}, \\ v_{Dx} &= \mp \frac{KT}{eB} \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial y}, & v_{Dy} &= \pm \frac{KT}{eB} \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial x}. \end{aligned} \quad [5-50]$$

Prvé dva členy mohou být zjednodušeny, definujeme-li pohyblivost a koeficient difúze pro kolmý směr

$$\mu_{\perp} = \frac{\mu}{1 + \omega_c^2 \tau^2}, \quad \boxed{D_{\perp} = \frac{D}{1 + \omega_c^2 \tau^2}} \quad [5-51]$$

Pomocí rovnic [5-50] a [5-51] můžeme rovnice [5-48] a [5-49] přepsat

$$v_{\perp} = \pm \mu_{\perp} E - D_{\perp} \frac{\nabla n}{n} + \frac{v_E + v_D}{1 + (\nu^2/\omega_c^2)}. \quad [5-52]$$

Z tohoto výrazu je zřejmé, že kolmá rychlost toho či onoho druhu částic se skládá ze dvou částí. Za prvé jsou to obyčejné driftové rychlosti v_E a v_D kolmé na gradienty potenciálu a hustoty. Tyto driftы jsou zpomaleny srážkami s neutrálními částicemi; brzdící faktor $1 + (\nu^2/\omega_c^2)$ se v limitě $\nu \rightarrow 0$ rovná jedničce. Za druhé jsou to driftы způsobené pohyblivostí a difúzí, rovnoběžné s gradienty potenciálu a hustoty. Tyto driftы jsou vyjádřeny stejným způsobem jako v případě $B = 0$, ale koeficienty μ a D jsou zmenšeny faktorem $1 + \omega_c^2 \tau^2$.

Součin $\omega_c \tau$ je důležitou veličinou pro magnetické udržení plazmatu. Je-li $\omega_c^2 \tau^2 \ll 1$, má magnetické pole malý vliv na difúzi, je-li naopak $\omega_c^2 \tau^2 \gg 1$, snižuje výrazně difúzní rychlost napříč B . Snadno si lze ověřit alternativní výraz pro $\omega_c \tau$

$$\omega_c \tau = \omega_c / \nu = \mu B \cong \lambda_s / r_L. \quad [5-53]$$

V limitě $\omega_c^2 \tau^2 \gg 1$ dostáváme

$$D_{\perp} = \frac{KT}{m\nu} \frac{1}{\omega_c^2 \tau^2} = \frac{KT\nu}{m\omega_c^2}. \quad [5-54]$$

Při srovnání s rov. [5-8] pozorujeme, že role srážkové frekvence se obrátila. Při difúzi ve směru rovnoběžném s B je D úměrné ν^{-1} , protože srážky zpomalují pohyb. Při difúzi kolmo na B je D_{\perp} úměrné ν , protože srážky jsou nezbytné pro přecházení částic přes siločáry. Závislost na m se rovněž

obrátila. Uvědomíme-li si, že ν je úměrné $m^{-1/2}$, pak je zřejmé, že $D \sim m^{-1/2}$, zatímco $D_{\perp} \sim m^{1/2}$. Při rovnoběžné difúzi se elektrony pohybují rychleji než ionty, protože jejich tepelná rychlost je větší; při difúzi v kolmém směru elektrony unikají pomaleji, protože mají menší Larmorův poloměr.

Pomineme-li číselné faktory řádu jednotky, můžeme rov. [5-8] psát

$$D = KT/m\nu \sim v_i^2 \tau \sim \lambda_s / \tau. \quad [5-55]$$

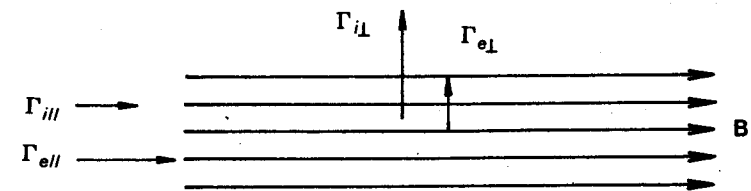
Tento tvar, čtverec délky dělený časem, ukazuje, že základem difúze je chaotický pohyb s délkou kroku λ_s . Rovnici [5-54] lze napsat

$$D_{\perp} = \frac{KT\nu}{m\omega_c^2} \sim v_i \frac{r_L^2}{v_i^2} \nu \sim \frac{r_L^2}{\tau}. \quad [5-56]$$

To ukazuje, že difúze v kolmém směru spočívá v chaotickém pohybu s krokem r_L a nikoliv λ_s .

5.5.1 Ambipolární difúze napříč B

Jelikož v magnetickém poli jsou pohyblivost i koeficient difúze anizotropní, není ambipolární difúze tak prostým problémem, jako v případě $B = 0$. Necht' toky částic jsou kolmé na B (obr. 5-13). Protože $\Gamma_{e\perp}$ je menší než $\Gamma_{i\perp}$, obvykle vznikne napříč magnetickým polem pole elektrické, které bude podporovat difúzi elektronů a brzdit difúzi iontů. Toto elektrické pole však může být zkratováno nevyváženými toky *podél* B . To znamená, záporný náboj, vznikající v důsledku $\Gamma_{e\perp} < \Gamma_{i\perp}$, se může rozplynout únikem elektronů podél siločar. Ačkoliv úhrnná difúze musí být ambipolární, nemusí být ambipolární ta část difúzních ztrát, k nimž dochází v kolmém směru. Ionty difundují z plazmatu především radiálně, kdežto elektrony rovnoběžně s B . Zda to ve skutečnosti takto probíhá či nikoliv, záleží na tom kterém pokusu. V krátkém sloupci plazmatu, kde siločáry končí na vodivých deskách, lze očekávat, že ambipolární elektrické pole bude zkratováno. Každý druh částic pak radiálně difunduje nesterjně rychle. V dlouhých a tenkých sloupcích plazmatu, ukončených izolujícími deskami, bude radiální difúze ambipolární, protože únik podél B je obtížný.



OBR. 5-13 Toky částic rovnoběžné s magnetickým polem a kolmé na něj.

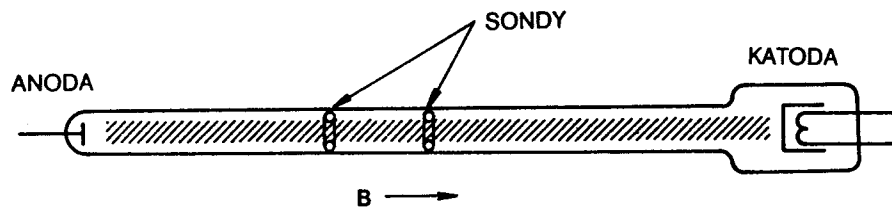
Při matematickém postupu je nutno řešit současně rovnici kontinuity [5-12] pro ionty a pro elektrony. Přitom podmínkou je rovnost nikoliv mezi toky Γ_j , ale mezi jejich divergencemi $\nabla \cdot \Gamma_j$. Separujeme kolmou a rovnoběžnou složku $\nabla \cdot \Gamma_j$ a dostáváme

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \Gamma_i &= \nabla_{\perp} \cdot (\mu_{i\perp} n \mathbf{E}_{\perp} - D_{i\perp} \nabla n) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_i n E_z - D_i \frac{\partial n}{\partial z} \right), \\ \nabla \cdot \Gamma_e &= \nabla_{\perp} \cdot (-\mu_{e\perp} n \mathbf{E}_{\perp} - D_{e\perp} \nabla n) + \frac{\partial}{\partial z} \left(-\mu_e n E_z - D_e \frac{\partial n}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad [5-57]$$

Rovnici, kterou získáme z podmínky $\nabla \cdot \Gamma_i = \nabla \cdot \Gamma_e$, nelze snadno separovat na jednorozměrné rovnice a navíc odpověď je velmi citlivá na okrajové podmínky na koncích siločar. Pokud plazmatický sloupec není tak dlouhý, že by bylo možno podélnou difúzi zcela zanedbat, neexistuje na problém ambipolární difúze napříč magnetickým polem jednoduchá odpověď.

5.5.2 Experimentální ověření

Otázka, zda magnetické pole zmenšuje příčnou difúzi v souhlase s rov. [5-51], se stala předmětem četných zkoumání. Prvý experiment uskutečněný v dostatečně dlouhé trubici, takže difúzi ke koncům bylo možno zanedbat, provedli Lehnert a Hoh ve Švédsku. Kladný sloupec héliového výboje měl průměr 1 cm a byl dlouhý 3,5 m (obr. 5-14). V takovém plazmatu elektrony plynule unikají radiální difúzí ke stěnám a jsou nahrazovány ionizací neutrálního plynu elektrony z konce rychlostního rozdělení. Tyto rychlé elektrony jsou zase nahrazovány urychlením v podélném elektrickém poli.

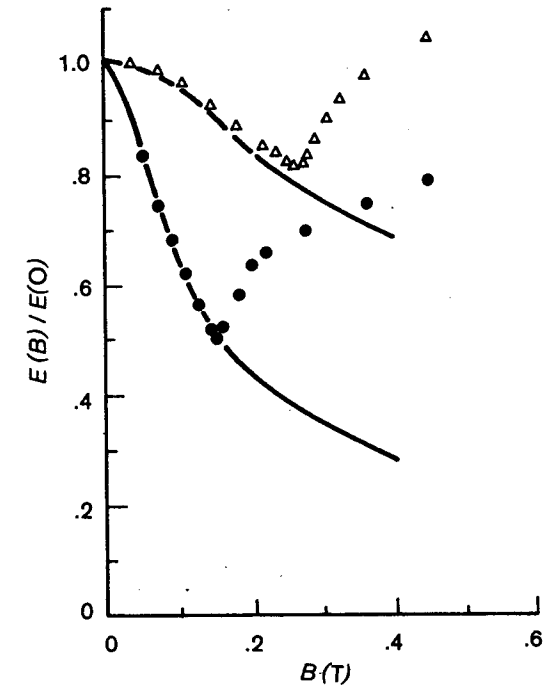


OBR. 5-14 Lehnertův-Hohův experiment ověřující vliv magnetického pole na difúzi v slabě ionizovaném plynu.

Můžeme proto očekávat, že E_z bude zhruba úměrné velikosti příčné difúze. Dvěma sondami u stěn výbojové trubice měřili E_z při různém B . Na obr. 5-15 je vyneseno poměr $E_z(B)$ ku $E_z(0)$ jako funkce B . Pro malé B experimentální body velmi dobře sledují předpovězenou křivku vypočtenou na základě rovnice [5-52]. Při určitém kritickém poli B_k okolo 0,1 T se však experimentální body vzdalují od teorie a vykazují ve skutečnosti *vzrůst* difúze

s B . Kritické pole B_k narůstá s tlakem, což dává tušit, že je ve hře kritická hodnota $\omega_c \tau$ a že pro příliš vysoké hodnoty $\omega_c \tau$ v „klasické“ teorii difúze něco přestává platit.

Příčinu těchto potíží brzo našli Kadomcev a Nedospasov ze Sovětského svazu. Tito teoretici objevili, že při velkých magnetických polích by



OBR. 5-15 Relativní změna podélného elektrického pole v závislosti na B při dvou různých tlacích. Pro srovnání jsou uvedeny teoretické křivky. [Převzato z F. C. Hoh a B. Lehnert, Phys. Fluids 3, 600 (1960).]

se měla rozvinout nestabilita, tj. že polem E_z by měla být vzbuzena plazmatická vlna, která by měla zvětšit radiální ztráty. Teorie správně předpověděla hodnotu B_k . Tuto vlnu, mající podobu šroubovicového zkroucení plazmatického sloupce, později přímo pozorovali Allen, Paulikas a Pyle v Berkeley. Tato spirálová nestabilita pozitivního sloupce byla prvním případem, při němž byla definitivně vysvětlena „anomální difúze“ napříč magnetickým polem, avšak toto vysvětlení bylo použitelné jenom pro slabě ionizované plyny. V plně ionizovaném plazmatu, s nímž pracuje výzkum jaderné syntézy, se řešení anomální difúze jeví jako daleko svízelnější problém.

ÚLOHY

5-1. Účinný průřez pro srážku elektron–neutrální atom He je při energii elektronů 2 eV přibližně $6\pi a_0^2$, kde $a_0 = 0,53 \times 10^{-10}$ m je poloměr prvního Bohrova orbity vodíkového atomu. V kladném sloupci bez magnetického pole je tlak $p = 1$ Torr = 133 Pa hélia při pokojové teplotě a $KT_e = 2$ eV.

(a) Vypočítejte koeficient difúze elektronů v m^2/s , za předpokladu, že \bar{v} středované přes rychlostní rozdělení se rovná hodnotě σv pro elektrony s energií 2 eV.

(b) Je-li proudová hustota ve směru osy sloupce $200 \text{ mA}/\text{cm}^2$ a hustota plazmatu je 10^{16} m^{-3} , jak velká je intenzita podélného elektrického pole?

5-2. V rovinné geometrii má slabě ionizovaná vrstva plazmatu toto rozložení hustoty

$$n(x) = n_0 \cos(\pi x/2L), \quad -L \leq x \leq L.$$

Plazma se rozpadá difúzí i rekombinací. Při jaké hustotě se budou ztráty difúzí rovnat rekombinačním ztrátám, je-li $L = \pi$ cm, $D = 0,4 \text{ m}^2/\text{s}$ a $\alpha = 10^{-15} \text{ m}^3/\text{s}$?

5-3. V dlouhém kladném sloupci s válcovou geometrií je $B = 0,2$ T, $KT_i = 0,1$ eV, ostatní parametry jsou tytéž jako v úloze 5-1. Profil hustoty je

$$n(r) = n_0 J_0(r/[D\tau]^{1/2})$$

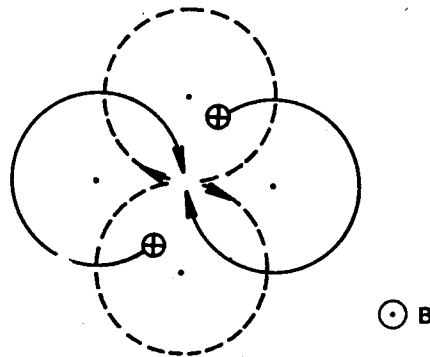
s okrajovou podmínkou $n = 0$ pro $r = a = 1$ cm. Pozn.: $J_0(z) = 0$ pro $z = 2,4$.

(a) Ukažte, že koeficient ambipolární difúze v uvedeném výrazu může být aproximován pomocí $D_{\perp e}$.

(b) Zanedbejte rekombinaci a ztráty na koncích sloupce a vypočítejte dobu udržení τ .

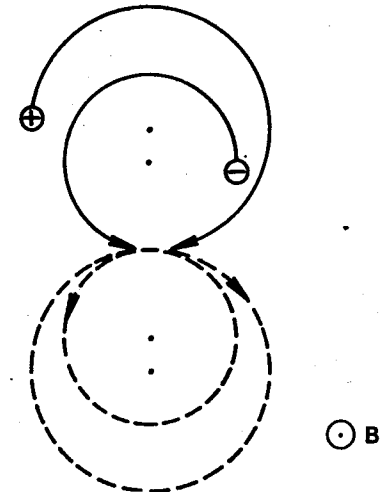
5.6 SRÁŽKY V PLNĚ IONIZOVANÉM PLAZMATU

Skládá-li se plazma jenom z iontů a elektronů, jsou všechny srážky mezi nabitými částicemi coulombovské. Existuje však zřetelný rozdíl mezi (a) srážkami mezi stejnými částicemi (ion–ion nebo elektron–elektron) a (b) srážkami mezi nestejnými částicemi (ion–elektron nebo elektron–ion). Necht se srážejí dvě stejné částice (obr. 5-16). Jde-li o čelnou srážku, vy-



OBR. 5-16 Posunutí gyračních středů při srážce dvou stejných částic, dochází-li při tom ke změně směrů rychlostí o 90° .

stoupí z ní částice s obrácenými rychlostmi; prostě si vymění svoje orbity a oba gyrační středy zůstanou na stejných místech. Výsledek je týž, jako když se částice těsně minou, takže se trajektorie sotva změni. To „nejhorší“, k čemu může dojít, je srážka, při níž se směr rychlosti změní o 90° . Čárkované kroužky jsou orbity po takové srážce, gyrační středy se posunou. Je ovšem zřejmé, že „společné těžiště“ obou gyračních středů se nezmění. Z toho důvodu srážky mezi stejnými částicemi způsobují velmi slabou difúzi.



OBR. 5-17 Posunutí gyračních středů při srážce dvou částic s opačnými náboji, dochází-li při tom ke změně směrů rychlostí o 180° .

Musíme zdůraznit rozdíl mezi tímto případem a srážkou iontu s neutrálním atomem. Při ní výsledná rychlost neutrální částice není pro difúzi důležitá a ion se chaoticky posune o náhodný krok ze své původní pozice. Avšak pro každou srážku iontu s iontem platí detailní rovnováha, neboť ke každému iontu, který se pohybuje směrem ven, existuje jiný, který se v důsledku srážky pohybuje směrem dovnitř.

Srážejí-li se však dvě částice opačného znaménka, je to situace celkově odlišná (obr. 5-17). To „nejhorší“, k čemu nyní může dojít, je srážka, z níž částice vystoupí s obrácenými rychlostmi, jejich směr se změní o 180° . Protože musí pokračovat v rotaci okolo siločar v původním smyslu, oba gyrační středy postoupí týmž směrem. Srážky mezi nestejnými částicemi způsobují difúzi. Fyzikální obraz pro ionty a elektrony je poněkud odlišný v důsledku velké rozdílnosti jejich hmotnosti. Elektrony odskakují od celkem nehybných iontů a prostě se chaoticky pohybují. Ionty jsou při každé srážce postrčeny a jejich pohyb je výsledkem častých nárazů elektronů. Nicméně v důsledku zachování hybnosti při každé srážce jsou rychlosti difúze iontů i elektronů stejné, jak ukážeme v dalším.

5.6.1 Odpor plazmatu

Pohybovou rovnicí tekutiny včetně efektů způsobených srážkami nabitých částic můžeme zapsat takto (srv. rov. [3-47]):

$$Mn \frac{dv_i}{dt} = en(\mathbf{E} + \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}) - \nabla p_i - \nabla \cdot \boldsymbol{\pi}_i + \mathbf{P}_{ie},$$

$$mn \frac{dv_e}{dt} = -en(\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}) - \nabla p_e - \nabla \cdot \boldsymbol{\pi}_e + \mathbf{P}_{ei}. \quad [5-58]$$

Člen \mathbf{P}_{ie} představuje přírůstek hybnosti iontové tekutiny ve srážkách s elektrony, podobně \mathbf{P}_{ei} v rovnici pro elektrony. Tenzor napětí \mathbf{P}_j je rozdělen na izotropní část p_j a anizotropní tenzor viskozity $\boldsymbol{\pi}_j$. Srážky mezi stejnými částicemi, jimiž vzniká uvnitř každé jednotlivé tekutiny napětí, jsou obsaženy v $\boldsymbol{\pi}_j$. Protože tyto srážky nezpůsobují výraznou difúzi, členy $\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}_j$ vynecháme. Pro členy \mathbf{P}_{ei} a \mathbf{P}_{ie} , které představují tření mezi oběma tekutinami, dostáváme ze zákona zachování hybnosti

$$\mathbf{P}_{ie} = -\mathbf{P}_{ei}. \quad [5-59]$$

\mathbf{P}_{ei} můžeme vyjádřit obvyklým způsobem pomocí srážkové frekvence

$$\mathbf{P}_{ei} = mn(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e) \nu_{ei} \quad [5-60]$$

a podobně i \mathbf{P}_{ie} . Jelikož se jedná o coulombovské srážky, lze očekávat, že \mathbf{P}_{ei} bude úměrné Coulombově síle, která je úměrná e^2 (pro jednu nabitou iontu). Dále \mathbf{P}_{ei} musí být úměrné hustotě elektronů n_e a hustotě rozptýlených center n_i , která se ovšem rovná n_e . Konečně by \mathbf{P}_{ei} mělo být úměrné relativní rychlosti obou tekutin. Z fyzikálních důvodů můžeme tedy \mathbf{P}_{ei} zapsat

$$\mathbf{P}_{ei} = \eta e^2 n^2 (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e), \quad [5-61]$$

kde η je konstanta úměrnosti. Porovnáním s rovnicí [5-60] vidíme, že

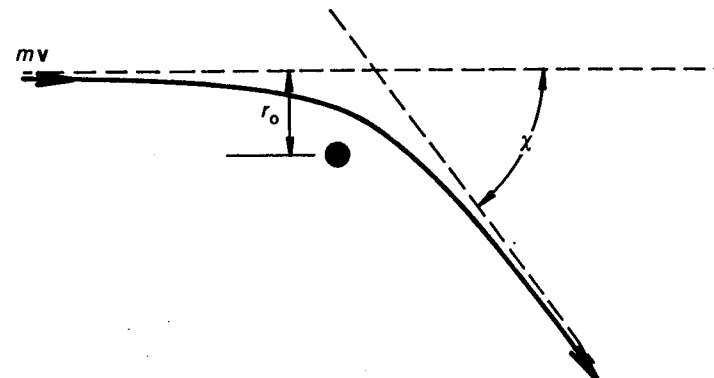
$$\nu_{ei} = \frac{ne^2}{m} \eta = \omega_p^2 \epsilon_0 \eta \quad [5-62]$$

Konstanta η je specifický odpor plazmatu; záhy se ozřejmí, že se shoduje s běžným významem odporu.

5.6.2 Mechanismus coulombovských srážek

Sráží-li se elektron s neutrálním atomem, nepocituje žádnou sílu, dokud se k sobě nepřiblíží na velmi malou vzdálenost měřeno rozměry atomu; srážky se podobají srážkám kulečnickových koulí. Sráží-li se elektron

s iontem, je postupně odchylován daleko sahajícím coulombovským polem iontu. Nicméně lze odvodit efektivní účinný průřez pro tento druh srážek. Pro náš účel bude postačovat, odhadneme-li řádovou velikost účinného průřezu. Na obr. 5-18 se elektron přibližuje rychlostí v k pevnému iontu s nábojem e . Kdyby na elektron nepůsobila Coulombova síla, přiblížil by se k iontu na nejbližší vzdálenost r_0 , kterou nazýváme srážkový parametr.



Dráha elektronu při coulombovské srážce s iontem. OBR. 5-18

Coulombovou silou je však elektron přitahován a odchýlí se o úhel χ , jehož velikost závisí na r_0 . Coulombova síla je

$$F = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad [5-63]$$

Tuto sílu pocituje elektron během doby, kdy je v blízkosti iontu; tato doba je zhruba

$$T \approx r_0/v. \quad [5-64]$$

Hybnost elektronu se tedy změní přibližně o

$$\Delta(mv) = |FT| \approx \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0 v}. \quad [5-65]$$

Chceme odhadnout účinný průřez pro srážky, při nichž se směr rychlosti změni o veliký úhel, $\chi \geq 90^\circ$. Změni-li se úhel χ o 90° , je změna hybnosti mv řádově samo mv . Tedy

$$\Delta(mv) \cong mv \cong \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0 v}, \quad r_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m v^2}. \quad [5-66]$$

Účinný průřez je potom

$$\sigma = \pi r_0^2 = \frac{e^4}{16\pi\epsilon_0^2 m^2 v^4}. \quad [5-67]$$

Srážková frekvence je tedy

$$v_{ei} = n\sigma v = \frac{ne^4}{16\pi\epsilon_0^2 m^2 v^3} \quad [5-68]$$

a specifický odpor

$$\eta = \frac{m}{ne^2} v_{ei} = \frac{e^2}{16\pi\epsilon_0^2 m v^3} \quad [5-69]$$

Pro maxwellovské rozdělení elektronů můžeme v^2 v našem řádovém odhadu nahradit výrazem KT_e/m

$$\eta \approx \frac{e^2 m^{1/2}}{16\pi\epsilon_0^2 (KT_e)^{3/2}} \quad [5-70]$$

Výraz [5-70] představuje specifický odpor způsobený pouze srážkami s velkou změnou úhlu. Ukazuje se ale, že úhrnný efekt srážek s malou změnou úhlu je větší než efekt srážek s velkou změnou úhlu, poněvadž srážky s malou změnou jsou v důsledku velkého dosahu Coulombovy síly daleko častější. Spitzer ukázal, že výraz [5-70] se má vynásobit faktorem $\ln A$

$$\eta \approx \frac{e^2 m^{1/2}}{16\pi\epsilon_0^2 (KT_e)^{3/2}} \ln A \quad [5-71]$$

kde

$$A = \frac{r_0}{\lambda_D} \quad [5-72]$$

Tento faktor představuje maximální srážkový parametr v jednotkách r_0 , jež je dáno rovnicí [5-66], zprůměrovaný přes Maxwellovo rozdělení. Za maximální srážkový parametr se bere λ_D , protože Debyeovo stínění potlačí ve velkých vzdálenostech coulombovské pole. Ačkoliv A závisí na n a KT_e , je jeho logaritmus na přesné hodnoty parametrů plazmatu jen málo citlivý. Typické hodnoty $\ln A$ jsou tyto:

KT_e (eV)	n (m^{-3})	$\ln A$	
10^{-1}	10^{18}	6	Q-systém
10^2	10^{19}	15	typický torus
10^4	10^{21}	17	reaktor jaderné syntézy

Je zřejmé, že změní-li se parametry plazmatu o mnoho řádů, $\ln A$ se sotva změní o faktor tři. Většinou je dostatečně přesné položit $\ln A = 10$ bez ohledu na typ plazmatu.

5.6.3 Fyzikální význam η

Předpokládejme, že v plazmatu existuje elektrické pole E a že všichni proud je nesen elektrony, které jsou daleko pohyblivější než ionty. Necht

$B = 0$ a $KT_e = 0$, takže $\nabla \cdot P_e = 0$. Potom v ustáleném stavu se pohybová rovnice pro elektrony redukuje na

$$enE = P_{ei} \quad [5-73]$$

Poněvadž $j = en(v_i - v_e)$, můžeme rovnici [5-61] psát

$$P_{ei} = \eta nj, \quad [5-74]$$

takže rov. [5-73] dostává tvar

$$E = \eta j. \quad [5-75]$$

To je obyčejný Ohmův zákon a konstanta η je právě specifický odpor. Výraz pro η , jak je dán formulí [5-71] nebo [5-69], má několik rysů, které bychom měli zdůraznit.

(A) V rov. [5-71] vidíme, že η je *nezávislé na hustotě* (s výjimkou slabé závislosti $\ln A$). Je to dost překvapující výsledek, protože to znamená, že vytvoříme-li v plazmatu pole E , je proud j , daný rovnicí [5-75], nezávislý na počtu nosičů náboje. Tomu je třeba rozumět takto: ačkoliv j vzrůstá s n_e , s rostoucím n_i se přibrzdí pohyb „třením“ s ionty. Protože $n_e = n_i$, tyto dva vlivy se navzájem zruší. To lze pozorovat v rovnicích [5-68] a [5-69]. Srážková frekvence v_{ei} je skutečně úměrná n , ale ve výrazu pro η se n zkrátí. V tomto ohledu se plně ionizované plazma chová naprosto jinak než slabě ionizované plazma. V slabě ionizovaném plazmatu máme $j = -nev_e$, $v_e = -\mu_e E$, takže $j = n\mu_e E$. Protože μ_e závisí pouze na hustotě *neutrálních* částic, je proud úměrný hustotě plazmatu n .

(B) Rovnice [5-71] říká, že η je úměrné $(KT_e)^{-3/2}$. Zahřívá-li se plazma, zmenšuje se účinný průřez coulombovských srážek a odpor klesá dosti rychle s rostoucí teplotou. Při teplotách, při nichž probíhají termionukleární reakce (desítky keV) je plazma v podstatě bezsrážkové; to je důvod, proč se teoretický výzkum tak velice soustřeďuje na bezsrážkové plazma. K nějakým srážkám ovšem vždycky musí docházet, jinak by nedošlo ani k reakcím jaderné syntézy. Jednoduchý způsob, jak zahřát plazma, je, nechat jím prostě procházet proud. Ztráty I^2R (či $j^2\eta$) se pak projeví vzrůstem elektronové teploty. Tato metoda se nazývá *ohmický ohřev*. Ale závislost $(KT_e)^{-3/2}$, kterou η vykazuje, nedovoluje užít tuto metodu až do termionukleárních teplot. Při teplotách nad 1 keV se plazma stává tak dobrým vodičem, že ohmický ohřev je velmi pomalým procesem.

(C) Rovnice [5-68] říká, že v_{ei} se mění jako v^{-3} . Rychlé elektrony z konce rychlostního rozdělení se velmi málo srážejí. Proud je tudíž nesen těmito elektrony daleko větší měrou než všemi ostatními elektrony z hlavní části rychlostního rozdělení. Silná závislost na v má jiný zajímavý důsledek. Je-li na plazma náhle vloženo elektrické pole, můžeme pozorovat jev zvaný „únik elektronů“. Několik elektronů, které se v okamžiku zapnutí pole právě rychle pohybují ve směru $-E$, dříve než potká ion, získá takové množství energie, že pak při srážce o sebe jenom „lehce zavádí“, tj. impuls

změní jenom nepatrně. To jim umožňuje nabrat v elektrickém poli víc energie a ještě dále zmenšit svůj účinný průřez. Je-li E dost velké, zmenší se účinný průřez tak rychle, že unikající elektrony se vůbec nesrazí. Vytvářejí urychlený elektronový svazek „vytažený“ z hlavní části rychlostního rozdělení.

5.6.4 Číselné hodnoty η

Přesné výpočty η , v nichž se bere v úvahu zpětný ráz iontu při každé srážce a při nichž se správně střeďuje přes elektronové rozdělení, poprvé provedl Spitzer. Výsledek pro vodík, který uvádíme v různých jednotkách, se někdy nazývá Spitzerův specifický odpor

$$\begin{aligned}\eta_{\parallel} &= 65 \frac{Z \ln \Lambda}{T^{3/2} \text{ (K)}} \Omega \cdot \text{m} \\ &= 5,2 \times 10^{-5} \frac{Z \ln \Lambda}{T^{3/2} \text{ (eV)}} \Omega \cdot \text{m} \\ &= 5,8 \times 10^{-15} \frac{Z \ln \Lambda}{T^{3/2} \text{ (eV)}} \text{ elstat.} \quad [5-76]\end{aligned}$$

Z je počet nábojů iontu, který jinak všude v této knize pokládáme za rovný jedné. Protože závislost na M je slabá, můžeme tyto hodnoty užít i pro jiné plyny. Index \parallel znamená, že tato hodnota platí pro pohyby rovnoběžné s \mathbf{B} . Pro pohyby kolmé na \mathbf{B} je nutno použít η_{\perp} , dané vztahem

$$\eta_{\perp} = 3,3\eta_{\parallel}. \quad [5-77]$$

To neznamena, že vodivost rovnoběžně s \mathbf{B} je jenom třikrát lepší než vodivost napříč \mathbf{B} . Ještě se musí vzít v úvahu faktor $\omega_c^2 \tau^2$. Faktor 3,3 vychází ze zvážení vlivu různých rychlostí v elektronovém rozdělení. Při kolmých pohybech přispívají pomalé elektrony, jež mají malý Larmorův poloměr, k odporu více než při rovnoběžných pohybech.

Pro $KT_e = 100 \text{ eV}$ dává rov. [5-76]

$$\eta = 5 \times 10^{-7} \text{ Ohm} \cdot \text{m}$$

Porovnejte tuto hodnotu s několika kovovými vodiči:

$$\begin{aligned}\text{měď} & \dots \dots \dots = 2 \times 10^{-8} \text{ Ohm} \cdot \text{m} \\ \text{nerozavějící ocel} & \dots = 7 \times 10^{-7} \text{ Ohm} \cdot \text{m} \\ \text{rtuť} & \dots \dots \dots = 10^{-6} \text{ Ohm} \cdot \text{m}\end{aligned}$$

Plazma s teplotou 100 eV má tedy vodivost stejnou jako nerozavějící ocel.

MHD ROVNICE V JEDNOTEKUTINOVÉM MODELU 5.7

Nyní se dostáváme k problému difúze v plně ionizovaném plazmatu. Poněvadž disipativní* člen \mathbf{P}_{ei} obsahuje rozdíl rychlostí $\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e$, je jednodušší pracovat s lineární kombinací rovnic pro ionty a pro elektrony, takže neznámou je $\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e$ a nikoliv \mathbf{v}_i nebo \mathbf{v}_e odděleně. Doposavad jsme plazma považovali za složené ze dvou prostupujících se tekutin. Lineární kombinace, již máme v úmyslu zvolit, popíše plazma jako jedinou tekutinu, jako je rtuť, s měrnou hmotností ρ a elektrickou vodivostí $1/\eta$. To jsou rovnice magnetohydrodynamiky (MHD).

Pro kvazineutrální plazma s jednou nabitými ionty můžeme definovat měrnou hmotnost ρ , rychlost pohybu hmoty \mathbf{v} a hustotu proudu \mathbf{j} takto:

$$\rho \equiv n_i M + n_e m \approx n(M + m), \quad [5-78]$$

$$\mathbf{v} \equiv \frac{1}{\rho} (n_i M \mathbf{v}_i + n_e m \mathbf{v}_e) \approx \frac{M \mathbf{v}_i + m \mathbf{v}_e}{M + m}, \quad [5-79]$$

$$\mathbf{j} \equiv e(n_i \mathbf{v}_i - n_e \mathbf{v}_e) \approx ne(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e). \quad [5-80]$$

V pohybové rovnici přidáme člen Mng pro gravitační sílu. Tento člen může představovat jakoukoliv sílu, jež není elektromagnetického původu, působící na plazma. Rovnici pro ionty a pro elektrony můžeme psát

$$Mn \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} = en(\mathbf{E} + \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}) - \nabla p_i + Mng + \mathbf{P}_{ie}, \quad [5-81]$$

$$mn \frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} = -en(\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}) - \nabla p_e + mng + \mathbf{P}_{ei}. \quad [5-82]$$

Pro jednoduchost jsme stejně jako již dříve zanedbali tenzor viskozity π . Tímto zanedbáním se nedopustíme žádné větší chyby, pokud Larmorův poloměr je mnohem menší než charakteristická délka pro změnu různých veličin plazmatu. Zanedbali jsme i člen $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$, protože jinak by odvozování bylo zbytečně komplikované. Ospravedlnit toto zjednodušení je již složitější. Abychom se vyhnuli zdlouhavým diskusím, budeme prostě předpokládat, že \mathbf{v} je tak malé, že tento kvadratický člen můžeme zanedbat.

Sečteme teď rovnice [5-81] a [5-82] a dostaneme

$$n \frac{\partial}{\partial t} (M \mathbf{v}_i + m \mathbf{v}_e) = en(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e) \times \mathbf{B} - \nabla p + n(M + m) \mathbf{g}. \quad [5-83]$$

Člen s elektrickým polem se vyloučil podobně jako srážkové členy $\mathbf{P}_{ei} = -\mathbf{P}_{ie}$. Pro celkový tlak jsme zavedli označení

$$p = p_i + p_e. \quad [5-84]$$

* dissipare = (lat.) rozsypávat, rozptylovat – pozn. překl.

Pomocí rovnic [5-78]–[5-80] můžeme rovnici [5-83] přepsat jednoduše

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p + \rho \mathbf{g}. \quad [5-85]$$

To je pohybová rovnice pro jedinou tekutinu, popisující tok hmoty. Elektrické pole se v ní explicitně nevyskytuje, protože tato tekutina je neutrální. Na pravé straně jsou právě ty tři objemové síly, jež bylo možno očekávat.

Méně zřejmou rovnici získáme, vezmeme-li jinou lineární kombinaci rovnic pro dvě tekutiny. Rovnici [5-81] vynásobíme m a odečteme od ní rovnici [5-82] vynásobenou M . Výsledkem je

$$\begin{aligned} Mmn \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e) = \\ = en(M + m)\mathbf{E} + en(m\mathbf{v}_i + M\mathbf{v}_e) \times \mathbf{B} - m \nabla p_i + M \nabla p_e - (M + m)\mathbf{P}_{ei}. \end{aligned} \quad [5-86]$$

Pomocí rovnic [5-78], [5-80] a [5-61] dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{Mmn}{e} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{j}}{n} \right) = \\ = e\mathbf{g} - (M + m)n\mathbf{e}j - m \nabla p_i + M \nabla p_e + en(m\mathbf{v}_i + M\mathbf{v}_e) \times \mathbf{B}. \end{aligned} \quad [5-87]$$

Poslední člen můžeme zjednodušit takto:

$$\begin{aligned} m\mathbf{v}_i + M\mathbf{v}_e = M\mathbf{v}_i + m\mathbf{v}_e + M(\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i) + m(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e) = \\ = \frac{\rho}{n} \mathbf{v} - (M - m) \frac{\mathbf{j}}{ne}. \end{aligned} \quad [5-88]$$

Rovnici [5-87] dělíme $e\mathbf{g}$

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \eta \mathbf{j} = \frac{1}{e\mathbf{g}} \left[\frac{Mmn}{e} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{j}}{n} \right) + (M - m)\mathbf{j} \times \mathbf{B} + m \nabla p_i - M \nabla p_e \right]. \quad [5-89]$$

V limitě $m/M \rightarrow 0$ odtud plyne

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{j} + \frac{1}{en} (\mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p_e). \quad [5-90]$$

To je naše druhá rovnice, která se nazývá *zobecněný Ohmův zákon* a popisuje elektrické vlastnosti vodivé tekutiny. Člen $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ se nazývá *Hallův proud*. Často se stává, že tento a poslední člen jsou natolik malé, že mohou být zanedbány, Ohmův zákon pak prostě zní

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{j}. \quad [5-91]$$

Rovnice kontinuity pro měrnou hmotnost ρ a pro hustotu náboje σ získáme snadno sečtením a odečtením rovnic kontinuity pro ionty a pro elektrony.

Soustava MHD rovnic je pak:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p + \rho \mathbf{g}, \quad [5-85]$$

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{j}, \quad [5-91]$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad [5-92]$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \quad [5-93]$$

Spolu s Maxwellovými rovnicemi se tato soustava často používá k popisu rovnovážného stavu plazmatu. Dá se užít i pro odvození plazmatických vln, ale takový postup je mnohem nepřesnější, než byl náš pomocí rovnic pro dvě tekutiny. Při řešení problémů spojených s odporem převáží jednoduchost MHD rovnic nad jejich nevýhodami. Hojně je užívají astrofyzikové u problémů kosmické elektrodynamiky, teoretici pracující se složitou geometrií magnetického pole při jaderné syntéze, nebo se užívají při výzkumu MHD generátorů.

DIFÚZE V PLNĚ IONIZOVANÉM PLAZMATU 5.8

Bez gravitace dostávají rov. [5-85] a [5-91] pro ustálený stav plazmatu tvar

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \nabla p, \quad [5-94]$$

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{j}. \quad [5-95]$$

Druhá z těchto rovnic pro směr rovnoběžný s magnetickým polem zní prostě

$$E_{\parallel} = \eta j_{\parallel},$$

což je obyčejný Ohmův zákon. Kolmou složku nalezneme, vynásobíme-li rovnici vektorově \mathbf{B}

$$\mathbf{E} \times \mathbf{B} + (\mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \eta_{\perp} \mathbf{j} \times \mathbf{B} = \eta_{\perp} \nabla p,$$

$$\mathbf{E} \times \mathbf{B} - v_{\perp} B^2 = \eta_{\perp} \nabla p,$$

$$\mathbf{v}_{\perp} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} - \frac{\eta_{\perp}}{B^2} \nabla p. \quad [5-96]$$

První člen je $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ drift společný oběma druhům částic. Druhý člen je difúzní rychlost ve směru $-\nabla p$. Například v osově symetrickém cylindrickém plazmatu, v němž \mathbf{E} a ∇p mají radiální směr, bychom měli

$$v_{\theta} = -\frac{E_r}{B}, \quad v_r = -\frac{\eta_{\perp}}{B^2} \frac{\partial p}{\partial r}. \quad [5-97]$$

Tok způsobený difúzí je

$$\Gamma_{\perp} = n\mathbf{v}_{\perp} = -\frac{\eta_{\perp}n(KT_i + KT_e)}{B^2}\nabla n. \quad [5-98]$$

Tato rovnice má tvar Fickova zákona (rov. [5-11]) s difúzním koeficientem

$$D_{\perp} = \frac{\eta_{\perp}n \sum KT}{B^2} \quad [5-99]$$

To je tzv. „klasický“ difúzní koeficient pro plně ionizovaný plyn. Při vyhodnocování D_{\perp} musíme pamatovat na to, že η_{\perp} , B i KT musí být ve stejném systému jednotek.

Všimněme si, že D_{\perp} je úměrné $1/B^2$ stejně jako ve slabě ionizovaných plynech. Tato závislost je charakteristická pro klasickou difúzi a pochází z modelu chaotického pohybu s délkou kroku r_L . Rovnice [5-99] se však od rov. [5-54] pro částečně ionizovaný plyn liší ve třech podstatných bodech. Za prvé v plně ionizovaném plynu D_{\perp} není konstanta, ale je úměrné n , a to proto, že hustota rozptylových center není pevně dána hustotou neutrálních atomů, ale je to sama hustota plazmatu. Za druhé, protože je η úměrné $(KT)^{-3/2}$, D_{\perp} v plně ionizovaném plynu s rostoucí teplotou klesá. V částečně ionizovaném plynu je tomu naopak. Příčinou této rozdílnosti je rychlostní závislost Coulombova účinného průřezu. Za třetí, v plně ionizovaném plynu je difúze automaticky ambipolární (pokud zanedbáváme srážky mezi stejnými částicemi). D_{\perp} v rov. [5-99] je koeficient pro tekutinu jako celek; ambipolární elektrické pole nevzniká, protože oba druhy částic difundují stejnou rychlostí, což je důsledek zachování hybnosti ve srážkách mezi iontem a elektronem. Tento bod se poněkud ozřejmí, užitíme-li rovnice pro dvě tekutiny (viz úlohu 5-7).

Chtěli bychom ještě zdůraznit, že v plně ionizovaném plynu *neexistuje pohyblivost napříč magnetickým polem*. Rovnice [5-96] pro \mathbf{v}_{\perp} neobsahuje složku ve směru \mathbf{E} , která by závisela na \mathbf{E} . Je-li na homogenní plazma vloženo příčné elektrické pole, pohybují se oba druhy částic společně rychlostí $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ driftu. Protože neexistuje mezi nimi relativní driftový pohyb, nesrážejí se a nevznikne drift ve směru \mathbf{E} . Samozřejmě že ke srážkám dochází v důsledku tepelných pohybů, tento náš jednoduchý výsledek je tedy jenom přibližný. Dostali jsme jej za tu cenu, že jsme zanedbali (a) srážky mezi stejnými částicemi, (b) hmotnost elektronů a (c) poslední dva členy v Ohmově zákonu (rov. [5-90]).

5.9 ŘEŠENÍ DIFÚZNÍ ROVNICE

Protože v plně ionizovaném plynu není D_{\perp} konstantní, definujeme veličinu A , která je konstantní

$$A \equiv \eta KT/B^2. \quad [5-100]$$

Předpokládali jsme, že KT a B jsou homogenní a že můžeme zanedbat závislost η na n , zprostředkovanou faktorem $\ln A$. Pro případ $T_i = T_e$ potom máme

$$D_{\perp} = 2nA. \quad [5-101]$$

Rovnici kontinuity [5-92] můžeme nyní napsat

$$\begin{aligned} \partial n/\partial t &= \nabla \cdot (D_{\perp} \nabla n) = A \nabla \cdot (2n \nabla n), \\ \partial n/\partial t &= A \nabla^2 n^2. \end{aligned} \quad [5-102]$$

To je nelineární rovnice pro n , pro niž existuje jen velmi málo jednoduchých řešení.

Časová závislost 5.9.1

Separujeme-li proměnné pomocí substituce

$$n = T(t)S(r),$$

můžeme rov. [5-102] zapsat

$$\frac{1}{T^2} \frac{dT}{dt} = \frac{A}{S} \nabla^2 S^2 = -\frac{1}{\tau}, \quad [5-103]$$

kde $-1/\tau$ je separační konstanta. Řešit prostorovou část této rovnice je obtížné, ale pro časovou část máme tutéž rovnici, s jakou jsme se setkali při rekombinaci (rov. [5-41]). Řešení je tedy

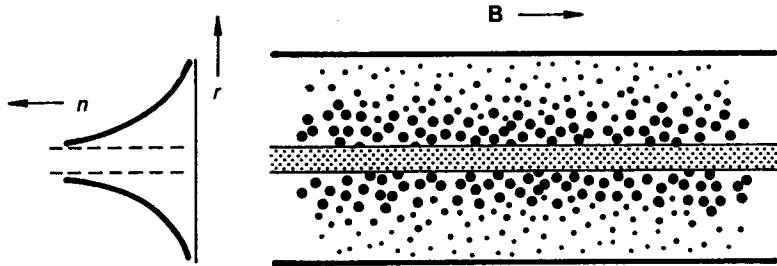
$$\frac{1}{T} = \frac{1}{T_0} + \frac{t}{\tau}. \quad [5-104]$$

Pro velké t hustota klesá jako $1/t$, stejně jako v případě rekombinace. Bude-li plně ionizované plazma klasicky difundovat, lze očekávat tento pokles hustoty nepřímo úměrný času. Exponenciální ubývání hustoty slabě ionizovaného plynu je zřetelně odlišná závislost.

Řešení nezávislá na čase 5.9.2

Existuje jeden případ, kdy lze tuto rovnici řešit jednoduše. Představte si dlouhý sloupec plazmatu (obr. 5-19), v jehož ose je zdroj, který vyrovnává ztráty plazmatu difúzí a rekombinací a udržuje tak stacionární stav. Mimo oblast zdroje je profil hustoty výsledkem soupeření mezi difúzí a rekombinací. Je-li difúze malá a rekombinační ztráty velké, hustota se výrazně sníží již v malé vzdálenosti od zdroje, v opačném případě klesá pomalu. Mimo oblast zdroje má rovnice kontinuity tvar

$$-A \nabla^2 n^2 = -\alpha n^2. \quad [5-105]$$



Obr. 5-19 Difúze plně ionizovaného cylindrického plazmatu napříč magnetickým polem.

Tato rovnice je lineární v n^2 a můžeme ji snadno řešit. V cylindrické geometrii je řešením Besselova funkce. V rovinné geometrii má rov. [5-105] tvar

$$\frac{\partial^2 n^2}{\partial x^2} = \frac{\alpha}{A} n^2 \quad [5-106]$$

s řešením

$$n^2 = n_0^2 \exp [-(\alpha/A)^{1/2} x]. \quad [5-107]$$

Charakteristická vzdálenost je

$$l = (A/\alpha)^{1/2}. \quad [5-108]$$

A se mění s magnetickým polem, zatímco α zůstává konstantní; tím je dána závislost l na B umožňující experimentální ověření klasické difúze. Takový experiment byl skutečně proveden v Q-systému s plně ionizovaným plazmatem, bohužel výsledky nebyly přesvědčivé, neboť asymetrické $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ drifts vedly k jinému typu ztrát, ke ztrátám konvekci.

Ještě bychom se chtěli zmínit o pravidle podobnosti, které platí v plně ionizovaném stacionárním plazmatu v homogenním poli a udržovaném konstantním zdrojem Q . V takovém případě rovnice kontinuity je

$$-A \nabla^2 n^2 = -\eta K T \nabla^2 (n^2/B^2) = Q. \quad [5-109]$$

Protože n a B vystupují jenom v kombinaci n/B , zůstane při změně B profil hustoty zachován a hustota poroste lineárně s B

$$n \sim B. \quad [5-110]$$

Snad bychom očekávali, že rovnovážná hustota se bude měnit jako B^2 , protože $D_{\perp} \sim B^{-2}$, ale nesmíme zapomenout, že samo D_{\perp} je úměrné n .

5.10 BOHMOVA A NEOKLASICKÁ DIFÚZE

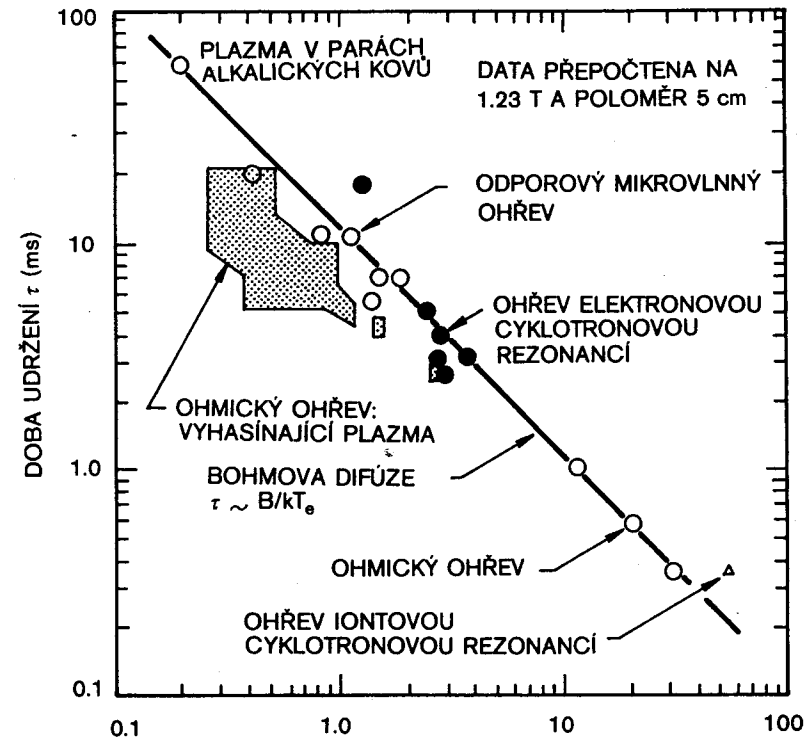
Ačkoliv byla teorie difúze spočívající na coulombovských srážkách už dlouho známa, až do nedávných let vzdorovalo ověření závislosti koeficientu difúze D_{\perp} v plně ionizovaném plazmatu na $1/B^2$ všem experimentům. Ve všech dřívějších experimentech jevílo D_{\perp} závislost B^{-1} a nikoliv B^{-2}

a úbytek hustoty plazmatu byl exponenciální a nikoliv nepřímo úměrný času. Krom toho absolutní hodnota D_{\perp} byla mnohem větší, než jak ji udávala rov. [5-99]. Toto mimořádně slabé držení plazmatu magnetickým polem poprvé zaznamenali v roce 1946 Bohm, Burhop a Massey, když pracovali na vývoji oblouku v magnetickém poli, který měl sloužit k separaci izotopů uranu. Bohm stanovil poloempirický vzorec

$$D_{\perp} = \frac{1}{16} \frac{KT_e}{eB} \equiv D_B. \quad [5-111]$$

Tato formule vyhovovala překvapivému množství různých experimentů. Difúze probíhající podle tohoto zákona se nazývá *Bohmova difúze*. Protože D_B nezávisí na hustotě, klesá hustota s časem exponenciálně. Časová konstanta v cylindrickém sloupci o poloměru R a délce L může být odhadnuta takto:

$$\tau \approx \frac{N}{dN/dt} = \frac{n\pi R^2 L}{\Gamma_r \cdot 2\pi R L} = \frac{nR}{2\Gamma_r},$$



Souhrn naměřených dob udržení plazmatu, získaných v různých typech výboje ve Stellarátorech Model C. Obrázek ilustruje výstižnost Bohmovy difúzní formule. [Otištěno s laskavým svolením p. D. J. Grove, Princeton University Plasma Physics Laboratory. Financováno U. S. Atomic Energy Commission.]

OBR. 5-20

kde N je celkový počet iontově-elektronových párů v plazmatu. Vyjádříme-li Γ , Fickovým zákonem a použijeme-li Bohmovu formuli, dostáváme

$$\tau \approx \frac{nR}{2D_B \partial n / \partial r} \approx \frac{nR}{2D_B n / R} = \frac{R^2}{2D_B} \equiv \tau_B. \quad [5-112]$$

Veličina τ_B se někdy nazývá *Bohmova časová konstanta*.

V Princetonu byla na půltuctu experimentálních zařízení nazývaných stellarátor provedena snad nejrozsáhlejší měření ověřující Bohmovu formuli. Stellarátor je toroidální magnetická nádoba, v níž jsou silokřivky tak stočeny, aby se po vystředování zrušily účinky grad- B driftu a driftu zakřivení. O těchto driftových pohybech jsme hovořili v odd. 2.3. Na obr. 5-20 jsou sestavena data shromážděná za deset let z mnoha různých typů výbojů ve stellarátoru model C. Měřené hodnoty τ leží blízko přímky představující Bohmovu časovou konstantu τ_B . Pro výzkum řízené termojaderné syntézy by ovšem taková všeobecná platnost Bohmovy formule měla vážné důsledky. Rovnice [5-111] říká, že D_B s teplotou neklesá, nýbrž roste, a ačkoliv klesá s B , je to pokles mnohem pomalejší, než se očekávalo. Absolutní velikost D_B je rovněž mnohem větší než D_{\perp} . Například pro 100 eV plazma v magnetickém poli 1 T dostáváme

$$D_B = \frac{1}{16} \frac{(KT_e)_{eV}}{B} = \frac{1}{16} \frac{100}{1} = 6 \frac{\text{m}^2}{\text{s}}.$$

Je-li hustota plazmatu 10^{19} m^{-3} , vychází koeficient klasické difúze

$$D_{\perp} = \frac{2nKT\eta_{\perp}}{B^2} = (2)(10^{19})(10^2)(1,6 \times 10^{-19})(3,3)(5,2 \times 10^{-7}) = 5,5 \times 10^{-4} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

Rozdíl tedy činí čtyři řády.

Pro Bohmovu difúzi bylo navrženo několik vysvětlení. Za prvé existuje možnost, že jsou nějaké závady v magnetickém poli. Při složitých geometriích, s nimiž se v tomto výzkumu pracuje, není vždycky zcela jisté, zda siločáry tvoří uzavřené křivky, či zda dokonce zůstávají všude uvnitř vakuové komory. Jelikož jsou střední volné dráhy velmi dlouhé, stačí jenom nepatrná nepravidelnost v konstrukci magnetické cívky k tomu, aby elektrony mohly bez jediné srážky uletět ke stěnám a takto vzniklé ambipolární elektrické pole potom vytáhne ionty. Za druhé může být nesymetrické elektrické pole. Takovou asymetrii mohou způsobit nějaké překážky umístěné do plazmatu, asymetrie vakuové komory nebo nějaká asymetrie při vytváření či ohřevu plazmatu. $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ drifts pak nemusí být rovnoběžné se stěnami a ionty s elektrony mohou být touto konvekcí společně vyneseny ke stěnám. Při experimentu se skutečně takové driftové struktury, nazvané *konvektivní cely*, pozorovaly. Konečně existuje ještě ta možnost, že vznikají nestabilní plazmatické vlny, které způsobí oscilaci

elektrického pole. Jsou-li tyto fluktuace pole chaotické, představují $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ drifts bezsrážkový chaotický proces. Dokonce i tehdy, je-li oscilující pole čistou sinusovou vlnou, může to vést ke zvýšeným ztrátám, neboť fáze $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ driftů může být taková, že driftová rychlost bude směřovat ven z plazmatu, pokud bude porucha hustoty kladná. V modelu si můžeme tuto situaci představit jako pohybující se konvektivní cely. Fluktuující elektrické pole se při anomální difúzi pozoruje často, ale v mnoha případech se dá ukázat, že nemůže způsobovat všechny ztráty. V experimentech s plně ionizovaným plazmatem mohou působit všechny tři mechanismy anomálních ztrát současně.

Snadno lze ukázat, že závislost D_B na KT_e a B je zcela přirozená, jsou-li ztráty způsobeny $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ drifts, ať už stacionárními či oscilujícími. Nechť je tok unikajících částic úměrný rychlosti $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ driftu

$$\Gamma_{\perp} = nv_{\perp} \sim nE/B. \quad [5-113]$$

V důsledku Debyeova stínění je maximální potenciál v plazmatu dán vztahem

$$e\phi_{\text{max}} \approx KT_e. \quad [5-114]$$

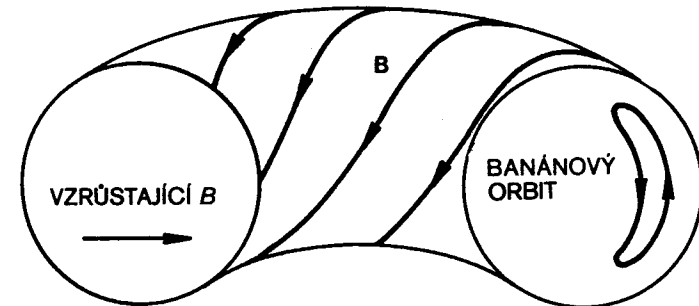
Je-li R charakteristický rozměr plazmatu řádově stejný jako jeho poloměr, vychází pro maximální elektrické pole

$$E_{\text{max}} \approx \frac{\phi_{\text{max}}}{R} \approx \frac{KT_e}{eR}. \quad [5-115]$$

Odtud dostáváme výraz pro tok Γ_{\perp}

$$\Gamma_{\perp} \approx \gamma \frac{n}{R} \frac{KT_e}{eB} \approx -\gamma \frac{KT_e}{eB} \nabla n = -D_B \nabla n, \quad [5-116]$$

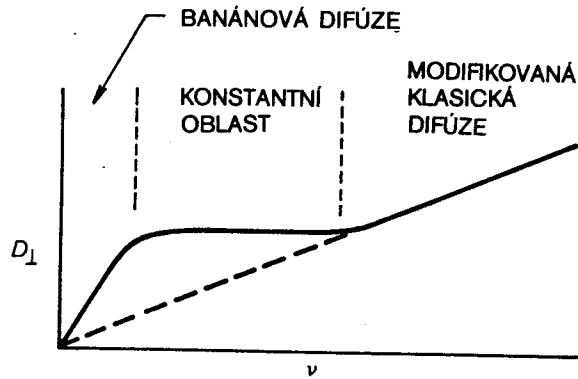
kde γ je nějaký zlomek menší než jednotka. Skutečnost, že D_B je úměrné KT_e/eB , není tedy překvapující. Pro hodnotu $\gamma = \frac{1}{16}$ nenajdeme žádné



Banánový orbit částic držených zkrouceným magnetickým polem toroidálního systému. „Orbitem“ se rozumí souhrn bodů, v nichž částice prochází rovínou nákrese.

teoretické vysvětlení, je to empirické číslo, které v rozmezí faktoru dvou až tří souhlasí s většinou experimentů.

Při experimentech na toroidálních nádobách se nedávno dosáhlo toho, že doby udržení byly řádově $100\tau_B$. Docílilo se toho pečlivým odstraněním všech asymetrií a oscilací. V toroidálních nádobách však vznikají jiné efekty, jež zvyšují srážkový difúzní proces. Na obr. 5-21 je torus se šroubovicovými silokřivkami. Takovým zkroucením se odstraní účinky grad-B driftu a driftu zakřivení, které by měly stále stejný směr. Částice při svém pohybu postupují podél silokřivky; v blízkosti vnitřní stěny torusu se dostávají do oblasti většího $|B|$ a v blízkosti vnější stěny do oblasti menšího $|B|$. Některé částice se zachytí podobně jako v magnetickém zrcadle a neobíhají celým torusem kolem dokola. Gyrální středy těchto zachycených částic při svých opakovaných průchodech daným průřezem (obr. 5-21) vykreslují křivky tvaru banánu. Přitom v důsledku srážek se částice stává postupně zachycenou a nezachycenou a přechází z jednoho banánového „orbitu“ do druhého. Délkou kroku tohoto chaotického pohybu už tudíž není r_L , ale šířka banánového orbitu a koeficient „klasické“ difúze tak vzroste. Tomu se říká *neoklasická difúze*. Na obr. 5-22 je závislost D_{\perp} na ν .



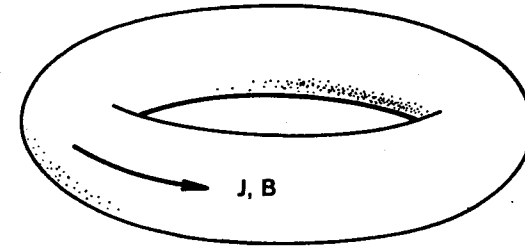
OBR. 5-22 Koeficient neoklasické difúze v závislosti na srážkové frekvenci ν .

V oblasti malých ν je „banánová difúze“ větší než klasická. V oblasti velkých ν převažuje klasická difúze, ale je modifikována proudy podél \mathbf{B} . Teoretickou křivku pro neoklasickou difúzi experimentálně ověřoval Ohkawa v La Jolla v Kalifornii.

ÚLOHY 5-4. Ukažte, že střední volná dráha pro srážky elektron-ion je úměrná T_e^2 .

5-5. Tokamak je toroidální plazmatická nádoba, v níž elektrické pole stejného směru jako \mathbf{B} vyvolává v plně ionizovaném plazmatu proud (obr. 5-23). Jak velká musí být

intenzita pole (V/m), aby celkový proud byl 200 kA? Teplota plazmatu je $KT_e = 500$ eV a plocha průřezu je 75 cm^2 .



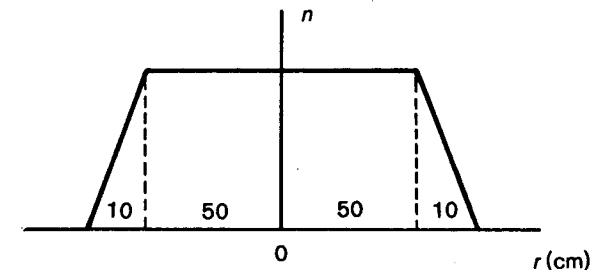
OBR. 5-23

5-6. Předpokládejme, že plazma v reaktoru termojaderné syntézy má tvar válce o průměru 1,2 m a délce 100 m. Magnetické pole 5 T je homogenní až na krátké oblasti magnetických zrcadel na koncích, jež můžeme zanedbat. Ostatní parametry jsou: $KT_i = 20$ keV, $KT_e = 10$ keV a $n = 10^{21} \text{ m}^{-3}$. Profil hustoty je stanoven experimentálně a má přibližně tvar jako na obr. 5-24.

(a) Spočítejte D_{\perp} pro $r = 50$ cm, je-li difúze klasická.

(b) Vypočítejte dN/dt , celkový počet párů ion-elektron opouštějících v jedné vteřině v radiálním směru střední oblast.

(c) Odhadněte τ podle $\tau \approx -N/(dN/dt)$. Pozn.: víc než hrubý odhad nelze u takovýchto problémů očekávat. Profil hustoty je zřejmě ovlivněn jinými procesy než klasickou difúzí.



OBR. 5-24

5-7. Mějme osově symetrické cylindrické plazma, $\mathbf{E} = E_r \hat{r}$, $\mathbf{B} = B_z \hat{z}$ a $\nabla p_i = \nabla p_e = -r \partial p / \partial r$. Zanedbáme-li člen $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$, což odpovídá zanedbání odstředivé síly, můžeme rovnice pro dvě kapaliny v stacionárním stavu napsat ve tvaru

$$\begin{aligned} en(\mathbf{E} + \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}) - \nabla p_i - e^2 n^2 \eta (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e) &= 0 \\ -en(\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}) - \nabla p_e + e^2 n^2 \eta (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e) &= 0 \end{aligned}$$

(a) Z azimutální složky těchto rovnic ukažte, že $v_{i\theta} = v_{e\theta}$.

(b) Z radiální složky ukažte, že $v_{jR} = v_E + v_{Dj}$ ($j = i, e$).

(c) Nalezněte výraz pro $v_{i\theta}$, a to tak, že ukážete, že nezávisí na E_r .

5-8. Plazma v toroidálním stellarátoru je ohmicky zahříváno proudem 10^5 A/m^2 , tekoucím ve směru \mathbf{B} . Hustota plazmatu je homogenní $n = 10^{19} \text{ m}^{-3}$ a nemění se. Jouleovo teplo je předáváno elektronům. Vypočítejte rychlost, jakou se zvyšuje KT_e (eV/ μs) v okamžiku, kdy $KT_e = 10$ eV.

5-9. Vypočítejte odporový útlum Alfvénových vln tak, že odvodíte jejich disperzní vztah z jednotekutinových rovnic (rov. [5-85] a [5-91]) a z Maxwellových rovnic [4-72] a [4-77]. Linearizujte je, zanedbejte gravitaci, posuvný proud a ∇p .

(a) Ukažte, že

$$\frac{\omega^2}{k^2} = c^2 \epsilon_0 \left(\frac{B_0^2}{\rho_0} - i\omega\eta \right).$$

(b) Najděte explicitní výraz pro $\text{Im}(k)$, když ω je reálné a η je malé.

Kapitola šestá

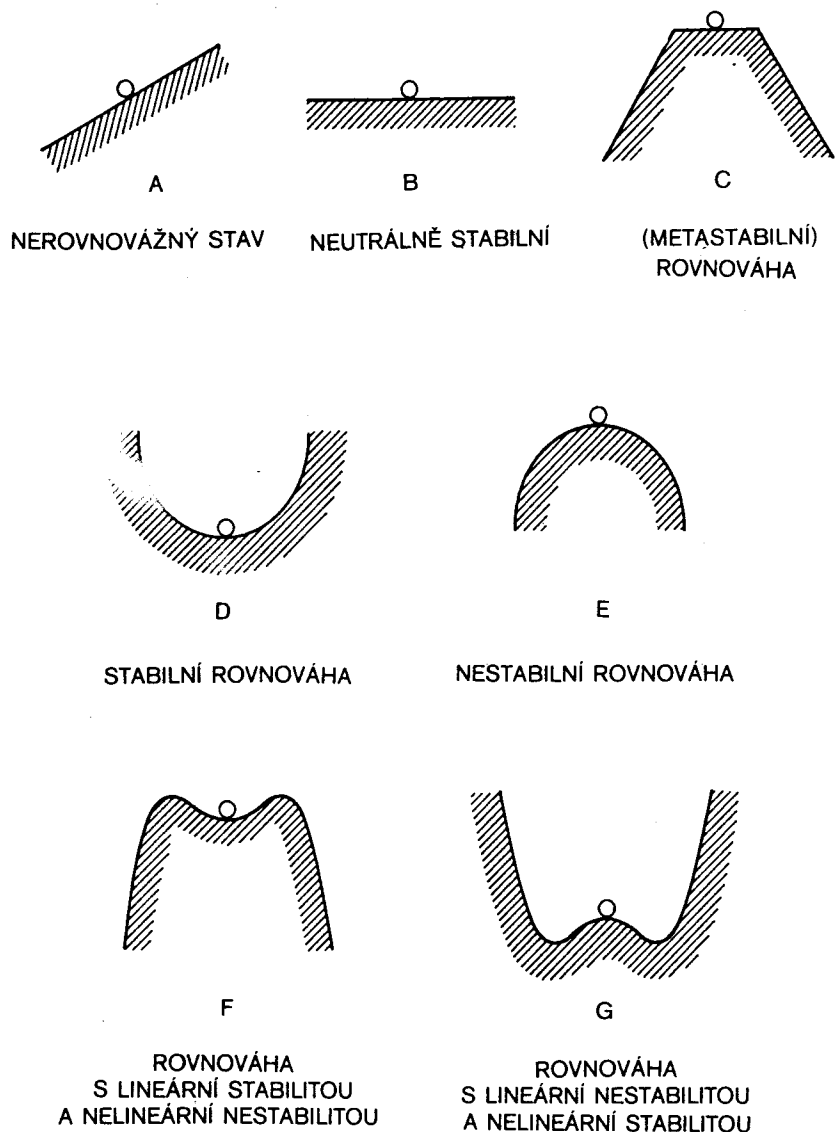
ROVNOVÁHA A STABILITA

ÚVOD 6.1

Kdyby se jednalo jenom o pohyby jednotlivých částic, bylo by snadné určit magnetické pole, jež by bezsrážkové plazma udrželo. Potřebovali bychom pouze zajistit, aby se siločáry neprotínaly se stěnami vakuové komory, a zvolit takovou symetrii systému, aby všechny drifts částic, v_E , v_{VB} a další, byly rovnoběžné se stěnami. Není však vůbec snadné rozhodnout, zda magnetické pole určené pro udržení jednotlivých částic udrží plazma jakožto makroskopickou tekutinu. Ať jsou vnější pole jakkoliv uzpůsobena, plazma může vytvářet vnitřní pole, jež ovlivňuje jeho pohyb. Například shluky nábojů mohou vytvořit \mathbf{E} pole, jež způsobí $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ drift směrem ke stěnám. Proudů v plazmatu vyvolají \mathbf{B} pole, jež může být příčinou grad- B driftu směrem ven z plazmatu.

Rozdělme si problém udržení plazmatu na dvě části: na problém rovnováhy a problém stability. Rozdíl mezi rovnováhou a stabilitou nejlépe vysvětlíme mechanickou analogií. Na obr. 6-1 je nakreslena kulička spočívající na různě tvarovaných pevných plochách. Rovnováha je takový stav, v němž jsou všechny síly navzájem vyváženy, takže existuje časově nezávislé řešení. Podle toho, zda se malá odchylka od tohoto stavu utlumí nebo zesílí, jedná se o rovnováhu stabilní nebo nestabilní. V případě (F) je kulička ve stabilní rovnováze, pokud není vychýlena příliš daleko. Jakmile se dostane za práh, je ve stavu nestabilním. Tomu se říká „explosivní nestabilita“. V případě (G) je kulička v nestabilním stavu, ale nemůže se dostat příliš daleko. Taková nestabilita není příliš nebezpečná, je-li nelineární omezení amplitudy pohybu dosti nízké. Je snadnější vyšetřovat stabilitu systému než jeho rovnováhu. Pohybové rovnice lze linearizovat

pro malé odchylky od rovnovážného stavu, čímž dostaneme lineární rovnice stejně jako v případě plazmatických vln. Otázka rovnováhy je však nelineárním problémem, podobně jako difúze. Výpočet rovnováhy je při složitém geometrickém uspořádání magnetického pole únavnou záležitostí.



OBR. 6-1 Mechanická analogie různých typů rovnováhy.

HYDROMAGNETICKÁ ROVNOVÁHA 6.2

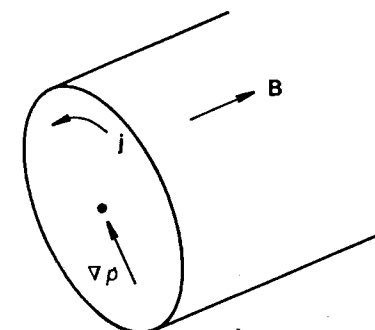
Obecný problém rovnováhy je složitý; z MHD rovnic lze však snadno získat několik fyzikálních kritérií. V ustáleném stavu s $\partial/\partial t = 0$ a $\mathbf{g} = 0$ musí plazma splňovat rovnice (srv. rov. [5-85])

$$\nabla p = \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad [6-1]$$

a

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j}/\epsilon_0. \quad [6-2]$$

Už z jednoduché rovnice [6-1] můžeme udělat několik závěrů.



OBR. 6-2 Síla $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ diamagnetického proudu v ustáleném stavu vyrovnává sílu způsobenou gradientem tlaku.

OBR. 6-2

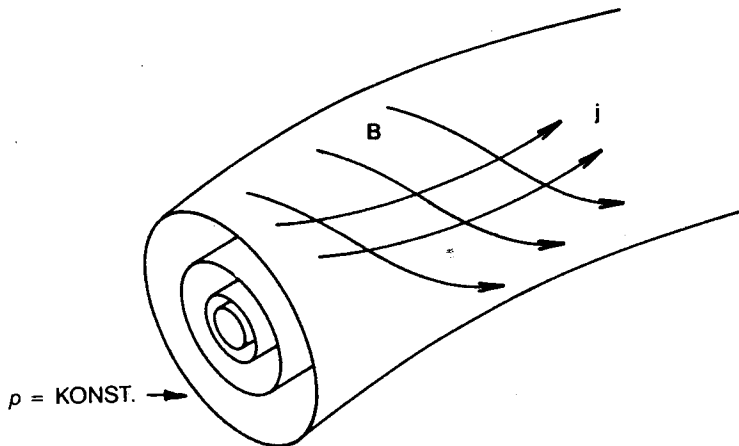
(A) Rovnice [6-1] říká, že síla způsobená gradientem tlaku a Lorentzova síla jsou vyvážené. Jak k tomu dojde? Představme si sloupec plazmatu, v němž ∇p směřuje k ose (obr. 6-2). Abychom rozpínavou sílu, jež je tím dána, vyvážili, musí plazmatem protékat azimutální proud v nanačteném směru. Velikost tohoto proudu nalezneme, vynásobíme-li rovnici [6-1] vektorově \mathbf{B}

$$\mathbf{j}_\perp = \frac{\mathbf{B} \times \nabla p}{B^2} = (KT_i + KT_e) \frac{\mathbf{B} \times \nabla n}{B^2}. \quad [6-3]$$

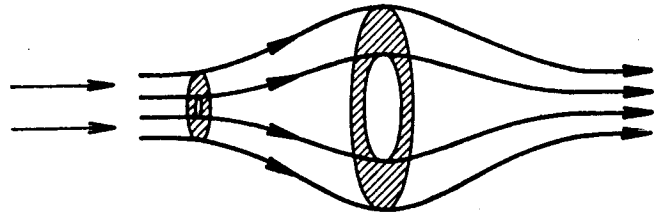
To je však výraz pro diamagnetický proud, který jsme odvodili již v rov. [3-69]! Z hlediska pohybu jednotlivých částic diamagnetický proud vzniká Larmorovou rotací při nenulovém hustotním gradientu, neboť rychlost středovaná přes jeden oběh není nulová. Z hlediska magnetohydrodynamického je diamagnetický proud vytvářen silou ∇p působící napříč \mathbf{B} ; výsledný proud právě stačí vyvážit síly působící na každý element tekutiny a zabránit pohybu.

(B) Rovnice [6-1] nám zřetelně říká, že \mathbf{j} i \mathbf{B} jsou kolmé na ∇p . To ovšem není žádný triviální výrok, vždyť geometrie může někdy být velmi složitá. Představte si toroidální plazma s hladkým radiálním gradientem

hustoty, v němž plochy s konstantní hustotou (vlastně s konstantním p) vytvářejí soustavu do sebe zasunutých torusů (obr. 6-3). Protože \mathbf{j} a \mathbf{B} jsou kolmé na ∇p , musí ležet na plochách konstantního p . Obecně mohou být silokřivky i proudové linie tak či onak pokriveny, nesmí však protínat plochy konstantního p .



OBR. 6-3 Vektory \mathbf{j} i \mathbf{B} leží na plochách konstantního tlaku.



OBR. 6-4 Rozpínání plazmatu procházejícího zrcadlovým systémem.

(C) Vezměme si složku rovnice [6-1] ve směru \mathbf{B} . Ta říká, že

$$\partial p / \partial s = 0, \quad [6-4]$$

kde s je souřadnice podél silokřivky. Při konstantním KT to znamená, že v hydromagnetické rovnováze je hustota podél siločáry konstantní. Na první pohled se zdá, že tento závěr musí být chybný. Vezměme např. plazma vstříknuté do soustavy magnetických zrcadel (obr. 6-4). Plazma proudící systémem podél siločar se rozpíná a opět kontrahuje; hustota zcela zřejmě nezůstává podél siločar konstantní. Tato situace však nespĺňuje podmínky statické rovnováhy. Člen $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$, který jsme už předtím zanedbali, by zde hrál svoji úlohu. My musíme mít na mysli statické plazma s $\mathbf{v} = 0$. Tomu odpovídá případ, kdy částice jsou zachyceny v systému

zrcadel, potom také v blízkosti středové roviny je zachyceno více částic než na koncích, protože zrcadlový poměr je tam větší. Ve středové rovině je ale větší i průřez. To se navzájem právě vykompenzuje a konečným výsledkem je konstantní hustota podél siločar.

PARAMETR β 6.3

Dosadíme nyní rov. [6-2] do rov. [6-1] a obdržíme

$$\nabla p = \epsilon_0 c^2 (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \epsilon_0 c^2 [(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \frac{1}{2} \nabla B^2] \quad [6-5]$$

neboli

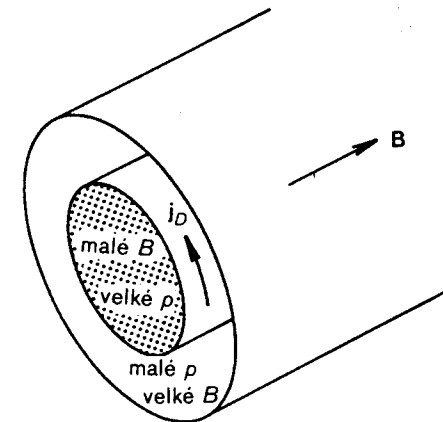
$$\nabla(p + \epsilon_0 c^2 B^2 / 2) = \epsilon_0 c^2 (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}. \quad [6-6]$$

V mnoha zajímavých případech, jako je např. přímý sloupec, je pravá strana nulová; \mathbf{B} se nemění ve směru rovnoběžném s \mathbf{B} . V mnoha jiných případech je pravá strana malá. Rovnice [6-6] pak říká, že

$$p + \epsilon_0 c^2 B^2 / 2 = \text{konstanta}. \quad [6-7]$$

$\epsilon_0 c^2 B^2 / 2$ je tlak magnetického pole; součet tlaku částic a tlaku magnetického pole je konstanta. V plazmatu s gradientem hustoty (obr. 6-5) musí být slabé magnetické pole tam, kde je vysoká hustota částic, a naopak. Toto oslabení magnetického pole uvnitř plazmatu je ovšem způsobeno diamagnetickým proudem. Velikost tohoto diamagnetického efektu vyjadřuje poměr obou členů v rov. [6-7]; obvykle jej označujeme β :

$$\beta = \frac{n \sum KT}{\epsilon_0 c^2 B^2 / 2} = \frac{\text{tlak částic}}{\text{tlak magnetického pole}} \quad [6-8]$$



V plazmatu s konečnou hodnotou β diamagnetický proud výrazně zmenšuje magnetické pole a udržuje tak součet magnetického tlaku a tlaku částic konstantní.

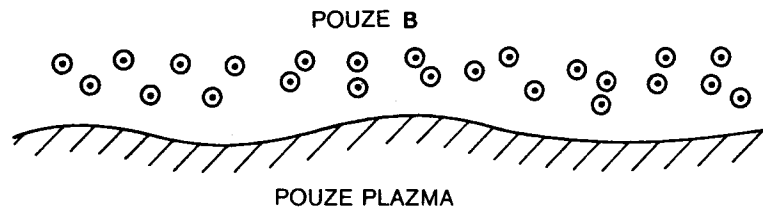
OBR. 6-5

Ve všech případech, jimiž jsme se dosud zabývali, jsme mlčky předpokládali, že se jedná o plazma s malým β , mezi 10^{-3} a 10^{-6} . Diamagnetický efekt je tedy velmi slabý. Proto jsme také mohli při studiu plazmatických vln předpokládat homogenní pole B_0 . V plazmatu s velkým β by rovnováha byla mnohem složitější. Plazma s velkým β je běžné v kosmickém prostoru a v MHD generátorech. V reaktorech termojaderné syntézy bude muset být β z ekonomických důvodů podstatně větší než 1%, neboť uvolněná energie je úměrná n^2 , kdežto konstrukční výdaje na magnetickou nádobu narůstají se zvětšujícím se B .

V principu je možno mít plazma s hodnotou $\beta = 1$, v němž diamagnetický proud vytváří stejně velké a opačně orientované pole vzhledem k vnějšímu homogennímu poli. Potom existují dvě oblasti: oblast plazmatu bez pole a oblast pole bez plazmatu. Jsou-li silokřivky vnějšího pole přímé, bude taková rovnováha nejspíš nestabilní, neboť takový případ se bude podobat kouli kaše držené pohromadě napnutými gumovými pásy. Nedá se zatím říci, je-li vůbec možné vytvořit plazma tohoto typu s hodnotou $\beta = 1$. U některých konfigurací magnetického pole je původní (vakuové) pole uvnitř plazmatu nulové; lokální hodnota β by tam pak byla nekonečná. K tomu dochází např. tehdy, je-li magnetické pole vytvořeno jenom při povrchu velkého plazmatického objektu. Pak bývá zvykem definovat β jako poměr maximálního tlaku částic k maximálnímu magnetickému tlaku; v tomto smyslu není možné, aby pro magneticky držené plazma platilo $\beta > 1$.

6.4 DIFÚZE MAGNETICKÉHO POLE DO PLAZMATU

V astrofyzice se často objevuje problém difúze magnetického pole do plazmatu. Existuje-li rozhraní mezi oblastí s plazmatem bez pole a oblastí s polem bez plazmatu (obr. 6-6) a má-li plazma nulový odpor, zůstanou tyto oblasti odděleny, a to ze stejného důvodu, který brání magnetickému toku vniknout do supravodiče. Elektromotorická síla vyvolaná jakýmkoliv pohybem siločar by vytvořila nekonečně velký proud, a to není možné.



OBR. 6-6 Je-li plazma dokonale vodivé, může být oblast jím vyplněná oddělena ostrým rozhraním od prostoru s magnetickým polem. Proudů na povrchu vytlačují pole z plazmatu.

Plazma tedy při svém pohybu tlačí na siločary, může je ohýbat a kroutit. To může být příčinou vláknité struktury plynu v Krabí mlhovině. Je-li však vodivost plazmatu konečná, může plazma pronikat polem a naopak. Takové difúzní proniknutí trvá vždy jistou dobu a jsou-li tyto pohyby dostatečně pomalé, siločary nemusí být pohybujícím se plynem deformovány. Difúzní dobu snadno vypočteme z rovnic (srv. rov. [5-91])

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}, \quad [6-9]$$

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{j}. \quad [6-10]$$

Pro jednoduchost předpokládejme, že plazma se nachází v klidu a siločary se v něm pohybují. Pak $\mathbf{v} = 0$ a dostáváme

$$\partial \mathbf{B} / \partial t = -\nabla \times \eta \mathbf{j}. \quad [6-11]$$

Poněvadž \mathbf{j} je dáno rovnicí [6-2], vychází

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\eta \epsilon_0 c^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = -\eta \epsilon_0 c^2 [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B}]. \quad [6-12]$$

Jelikož $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, dostáváme rovnici difúze stejného typu, s jakou jsme se setkali v kapitole 5.

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \eta \epsilon_0 c^2 \nabla^2 \mathbf{B}. \quad [6-13]$$

Lze ji jako obvykle řešit separací proměnných. Pro hrubý odhad vezměme L jako charakteristickou délku prostorové změny \mathbf{B} . Potom

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\eta \epsilon_0 c^2}{L^2} \mathbf{B}, \quad [6-14]$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{\pm t/\tau}, \quad [6-15]$$

kde

$$\tau = L^2 / \eta \epsilon_0 c^2. \quad [6-16]$$

To je charakteristická doba pronikání magnetického pole do plazmatu.

Veličinu τ můžeme rovněž vyložit jako dobu, během níž dojde k anihilaci magnetického pole. Když se siločary pohybují plazmatem, indukované proudy plazma ohmicky zahřívají. Tato energie má svůj zdroj v energii magnetického pole. Za dobu τ se v jednotkovém objemu ztratí $\eta j^2 \tau$ energie. Protože z Maxwellových rovnic se zanedbaným posuvným proudem je

$$\mathbf{j} = \epsilon_0 c^2 \nabla \times \mathbf{B} \approx \epsilon_0 c^2 B / L, \quad [6-17]$$

dostáváme pro disipovanou energii výraz

$$\eta j^2 \tau = \eta \left(\frac{\epsilon_0 c^2 B}{L} \right)^2 \frac{L^2}{\eta \epsilon_0 c^2} = \epsilon_0 c^2 B^2 = 2(\epsilon_0 c^2 B^2 / 2). \quad [6-18]$$

Je tedy τ v podstatě doba, za kterou se energie pole rozplyne v Jouleovo teplo.

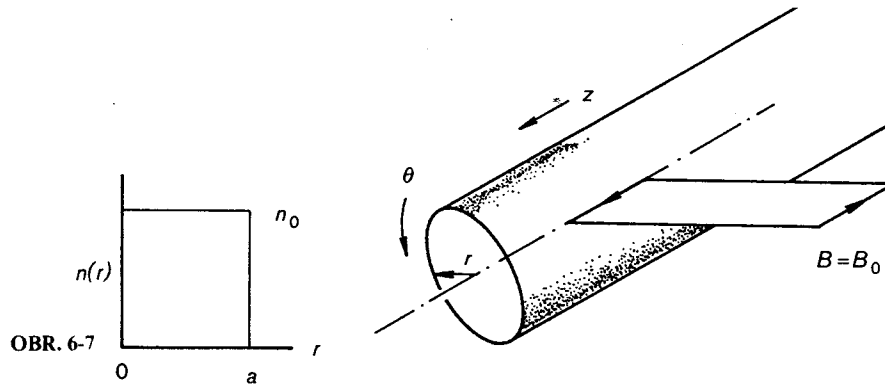
ÚLOHY 6-1. V homogenním poli B_0 je nekonečný přímý sloupec plazmatu, jehož profil hustoty je dán skokovou funkcí (obr. 6-7). Ukažte, že pro $\beta = 1$ na ose vymizí B . Postupujte takto:

(a) Z MHD rovnic nalezněte j pro stacionární stav a pro $KT = \text{konstanta}$.

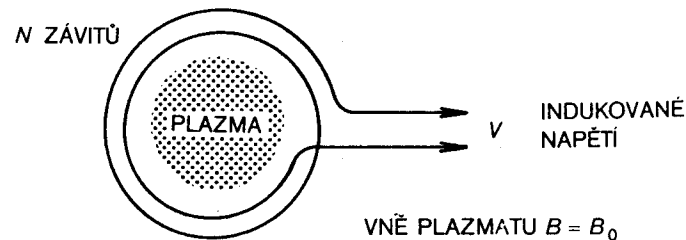
(b) Užijte vztah $c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j}/\epsilon_0$ Stokesův teorém, integrujte přes oblast naznačené smyčky, abyste obdrželi

$$B_{\text{osa}} - B_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \sum KT \int_0^\infty \frac{\partial n / \partial r}{B(r)} dr, \quad B_{\text{osa}} \equiv B_{r=0}.$$

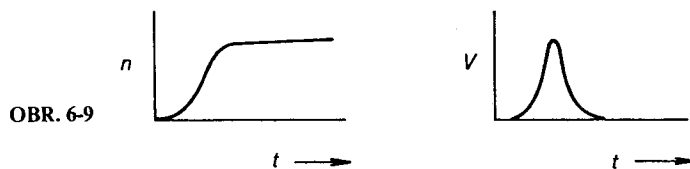
(c) Vypočítejte integrál; uvědomte si při tom, že $\partial n / \partial r$ je δ -funkce, takže $B(r)$ pro $r = a$ je střední hodnota mezi B_{osa} a B_0 .



OBR. 6-7



OBR. 6-8



OBR. 6-9

6-2. Diamagnetická smyčka je zařízení, jež se užívá k měření tlaku plazmatu prostřednictvím detekce diamagnetického efektu (obr. 6-8). Při vzniku plazmatu vzrůstá diamagnetický proud, B se uvnitř plazmatu zmenšuje, zmenšuje se tok Φ smyčkou, tím je indukováno napětí, jež je pak RC obvodem časově integrováno (obr. 6-9).

(a) Ukažte, že

$$\int_{\text{smyčka}} V dt = -N \Delta \phi = -N \int \mathbf{B}_d \cdot d\mathbf{S}, \quad B_d \equiv B - B_0.$$

(b) Pro nalezení $B_d(r)$ užijte stejný postup jako u předcházející úlohy, ale nyní předpokládejte $n(r) = n_0 \exp[-(r/r_0)^2]$. Abyste integrál vypočetli, předpokládejte $\beta \ll 1$, takže B můžete v integrálu aproximovat hodnotou B_0 .

(c) Ukažte, že $\int V dt = \frac{1}{2} N \pi r_0^2 \beta B_0$, kde β je definováno jako v rov. [6-8].

KLASIFIKACE NESTABILIT 6.5

Když jsme se zabývali plazmatickými vlnami, předpokládali jsme neporušený stav, což byl stav dokonalé termodynamické rovnováhy: částice měly Maxwellovo rychlostní rozdělení, hustota i magnetické pole byly homogenní. V takovém stavu, jemuž odpovídá nejvyšší entropie, neexistuje volná energie, která by mohla vybudit vlny, a my jsme museli předpokládat, že vlny jsou buzeny zvnějšku. Nyní se budeme zabývat stavy, jež nejsou v dokonalé termodynamické rovnováze, i když jsou v rovnováze v tom smyslu, že všechny síly jsou vyvážené a časově nezávislé řešení je možné. Protože v systému je nyní volná energie, mohou být vlny samobuzené, rovnováha je nestabilní. Nestabilitou vždycky rozumíme změnu, která zmenšuje volnou energii a přivádí plazma blíže ke skutečné termodynamické rovnováze.

Nestability můžeme klasifikovat podle typu volné energie, jež je může vyvolat. Existují čtyři hlavní kategorie.

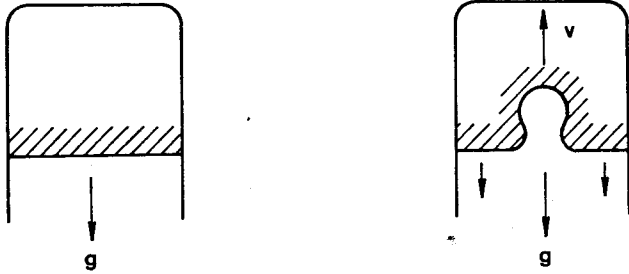
1. *Svazková nestabilita.* V tomto případě prochází plazmatem buď svazek částic s vysokou energií, nebo elektrický proud, takže různé druhy částic se vůči sobě pohybují nějakou rychlostí. Energie tohoto proudění excituje vlny, oscilace získávají energii na účet energie proudění v původním neporušeném stavu.

2. *Rayleighova - Taylorova nestabilita.* V tomto případě existuje hustotní gradient nebo je plazma ostře ohraničeno, takže není homogenní. Krom toho působí na plazma vnější síla jiná než elektromagnetická. Tato síla vyvolává nestabilitu. Analogickým případem je sklenice vody obrácená dnem vzhůru (obr. 6-10). I když je styčná plocha mezi vzduchem a vodou ve stavu rovnováhy, neboť váha vody je podpírána tlakem vzduchu, není to stabilní rovnováha. Každá vlnka na povrchu bude narůstat, na účet potenciální energie v gravitačním poli. K tomu dochází vždy, když je těžká tekutina podpírána lehčí tekutinou, jak je známo z hydrodynamiky.

3. *Univerzální nestabilita.* Dokud je plazma prostorově omezené, nebude nikdy v úplné termodynamické rovnováze, a to ani tehdy, nepůsobí-li žádné zřejmé vnější síly, jako jsou síly v elektrickém nebo gravitačním poli.

* Rayleigh - vyslov: Rejli - pozn. překl.

Plazmatický tlak rozpíná plazma a tato energie rozpínání může vyvolat nestabilitu. Tento typ energie existuje v plazmatu vždycky a vlny, jež tím vznikají, nazýváme *univerzální nestabilita*.



OBR. 6-10 Rayleighova–Taylorova hydrodynamická nestabilita těžké tekutiny podírané lehkou tekutinou.

4. *Kinetická nestabilita*. V tekutinové teorii se předpokládá Maxwellovo rozdělení rychlostí. Není-li rozdělení rychlostí vskutku maxwellovské, představuje to odchylku od termodynamické rovnováhy; nestabilitu může vyvolat anizotropie rychlostního rozdělení. Například různí-li se T_{\parallel} a T_{\perp} , může vzniknout tzv. modifikovaná Harrisova nestabilita. V zrcadlovém systému chybí částice s velkým v_{\parallel}/v_{\perp} , neboť odcházejí únikovým kuželem; tato anizotropie vede ke vzniku nestability*.

V následujících oddílech uvedeme jednoduché příklady každé z prvních tří typů nestabilit. Nestability způsobené anizotropií nemohou být popsány tekutinovou teorií a přesahují rámec této knihy.

Ne všechny nestability jsou pro udržení plazmatu stejně nebezpečné. Vysokofrekvenční nestabilita s frekvencí v blízkosti ω_p nemůže např. ovlivnit pohyb těžkých iontů. Nízkofrekvenční nestability s $\omega \ll \Omega_c$ však mohou způsobit anomální ambipolární ztráty přes $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ drifty. Nestability s $\omega \approx \Omega_c$ nezpůsobí významný transport částic napříč \mathbf{B} , ale jsou nebezpečné v zrcadlových systémech, kde se částice ztrácejí difúzí v rychlostním prostoru do únikového kuželu.

6.6 DVOUSVAZKOVÁ NESTABILITA

Jako jednoduchý příklad svazkové nestability vezměme homogenní plazma, v němž ionty jsou stacionární a elektrony mají vzhledem k iontům rychlost \mathbf{v}_0 . To jest, pozorovatel se nachází v soustavě pohybující se s „proudem“

* angl.: „loss cone instability“ – pozn. překl.

iontů. Nechť plazma je studené $KT_e = KT_i = 0$ a bez magnetického pole ($B_0 = 0$). Linearizované pohybové rovnice potom jsou

$$Mn_0 \frac{\partial \mathbf{v}_{i1}}{\partial t} = en_0 \mathbf{E}_1, \quad [6-19]$$

$$mn_0 \left[\frac{\partial \mathbf{v}_{e1}}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_{e1} \right] = -en_0 \mathbf{E}_1. \quad [6-20]$$

Člen $(\mathbf{v}_{e1} \cdot \nabla) \mathbf{v}_0$ jsme v rov. [6-20] vypustili, protože předpokládáme, že \mathbf{v}_0 je v každém místě plazmatu stejné. V rov. [6-19] se neobjeví člen $(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_1$, protože jsme položili $\mathbf{v}_{i0} = 0$. Hledáme elektrostatické vlny tvaru

$$\mathbf{E}_1 = E e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t)} \hat{\mathbf{x}}, \quad [6-21]$$

kde $\hat{\mathbf{x}}$ je směr \mathbf{v}_0 a \mathbf{k} . Rovnice [6-19] a [6-20] dostávají podobu

$$-i\omega Mn_0 \mathbf{v}_{i1} = en_0 \mathbf{E}_1, \quad \mathbf{v}_{i1} = \frac{ie}{M\omega} E \hat{\mathbf{x}}, \quad [6-22]$$

$$mn_0 (-i\omega + ikv_0) \mathbf{v}_{e1} = -en_0 \mathbf{E}_1, \quad \mathbf{v}_{e1} = -\frac{ie}{m} \frac{E \hat{\mathbf{x}}}{\omega - kv_0}. \quad [6-23]$$

Rychlosti \mathbf{v}_{j1} mají obě směr x , můžeme tedy index x vypustit. Rovnice kontinuity pro ionty dává

$$\frac{\partial n_{i1}}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_{i1} = 0, \quad n_{i1} = \frac{k}{\omega} n_0 v_{i1} = \frac{ien_0 k}{M\omega^2} E. \quad [6-24]$$

Všimněme si, že ostatní členy z $\nabla \cdot (n\mathbf{v}_j)$ vymizí, protože $\nabla n_0 = \mathbf{v}_{0i} = 0$. Rovnice kontinuity pro elektrony je

$$\frac{\partial n_{e1}}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_{e1} + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) n_{e1} = 0, \quad [6-25]$$

$$(-i\omega + ikv_0) n_{e1} + ikn_0 v_{e1} = 0, \quad [6-26]$$

$$n_{e1} = \frac{kn_0}{\omega - kv_0} v_{e1} = -\frac{iekn_0}{m(\omega - kv_0)^2} E. \quad [6-27]$$

Poněvadž nestabilní vlny jsou vysokofrekvenční plazmové oscilace, nemůžeme užít plazmatické přiblížení, ale musíme použít Poissonovu rovnici

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_1 = \frac{e}{\epsilon_0} (n_{i1} - n_{e1}), \quad [6-28]$$

$$ikE = \frac{e}{\epsilon_0} (ien_0 k E) \left[\frac{1}{M\omega^2} + \frac{1}{m(\omega - kv_0)^2} \right]. \quad [6-29]$$

Po dělení výrazem ikE nalézáme disperzní vztah

$$1 = \omega_p^2 \left[\frac{m/M}{\omega^2} + \frac{1}{(\omega - kv_0)^2} \right]. \quad [6-30]$$

Podívejme se, zda jsou oscilace s reálným k stabilní či nestabilní. Po vynásobení společným jmenovatelem bychom dostali rovnici 4. stupně pro ω . Kdyby byly všechny kořeny ω_j reálné, každý z nich by představoval možné oscilace

$$E_1 = E e^{i(kx - \omega t)} \hat{x}.$$

Jsou-li některé z kořenů komplexní, budou vystupovat v komplexně sdružených párech. Tyto komplexní kořeny zapišme

$$\omega_j = \alpha_j + i\gamma_j, \quad [6-31]$$

kde α je $\text{Re}(\omega)$ a γ je $\text{Im}(\omega)$. Časová závislost je nyní

$$E_1 = E e^{i(kx - \alpha t)} e^{\gamma t} \hat{x}. \quad [6-32]$$

Kladné $\text{Im}(\omega)$ znamená vlnu exponenciálně rostoucí, záporné $\text{Im}(\omega)$ vlnu tlumenou. Protože kořeny ω_j vystupují ve sdružených párech, bude jeden z nich vždycky nestabilní, pokud nejsou všechny reálné. Kořeny patřící tlumené vlně nás nezajímají, neboť takové vlny nejsou samobuzené.

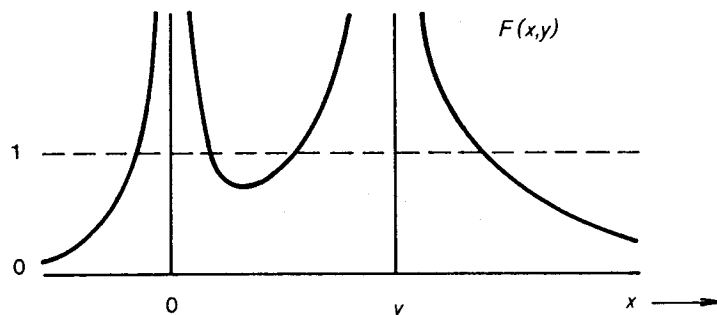
Disperzní vztah [6-30] můžeme analyzovat, aniž bychom onu rovnici čtvrtého řádu řešili. Definujme

$$x \equiv \omega/\omega_p, \quad y \equiv kv_0/\omega_p. \quad [6-33]$$

Rovnice [6-30] nabývá tvar

$$1 = \frac{m/M}{x^2} + \frac{1}{(x-y)^2} \equiv F(x, y). \quad [6-34]$$

Pro kteroukoliv danou hodnotu y můžeme $F(x, y)$ vynést jako funkci x . Tato funkce bude mít v bodech $x = 0$ a $x = y$ (obr. 6-11) singularity, její průsečíky s přímkou $F(x, y) = 1$ udávají hodnoty x , jež vyhovují disperznímu vztahu. Na obr. 6-11 jsou čtyři průsečíky, takže v tomto případě existují čtyři reálné kořeny ω_j . Zvolíme-li však menší hodnotu y , dostaneme takový graf, jako je na obr. 6-12. Zde jsou jenom dva průsečíky, a tedy jenom

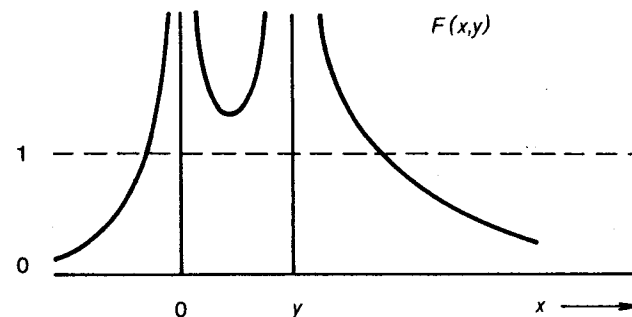


OBR. 6-11 Funkce $F(x, y)$ pro dvousvazkovou nestabilitu v případě, kdy je plazma stabilní.

dva reálné kořeny. Ostatní dva musí být komplexní a jeden z nich musí odpovídat nestabilní vlně. Pro dostatečně malé kv_0 je tedy plazma nestabilní. Při libovolném daném v_0 je plazma vždycky nestabilní vzhledem k oscilacím s dlouhou vlnovou délkou. Podle rov. [6-30] maximální rychlost růstu (inkrement) bude

$$\text{Im}\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right) \approx \left(\frac{m}{M}\right)^{1/3}. \quad [6-35]$$

Protože pro vznik nestability je nezbytné, aby kv_0 bylo malé, mohlo by se také říci, že při daném k musí být v_0 dostatečně malé, aby vznikla nestabilita. To však nemá valný fyzikální smysl, neboť v_0 představuje zdroj



OBR. 6-12 Funkce $F(x, y)$ pro dvousvazkovou nestabilitu v případě, kdy je plazma nestabilní.

energie způsobující nestabilitu. Tato potíž vzniká z toho, že jsme použili rovnice pro tekutinu. Každé reálné plazma má konečnou teplotu a tepelné efekty by měly být započteny prostřednictvím kinetické teorie. Pak by se pro $v_0 \lesssim v_i$ objevil jev známý jako Landauův útlum (kapitola 7) a pro příliš malé hodnoty v_0 by žádná nestabilita nevyšla.

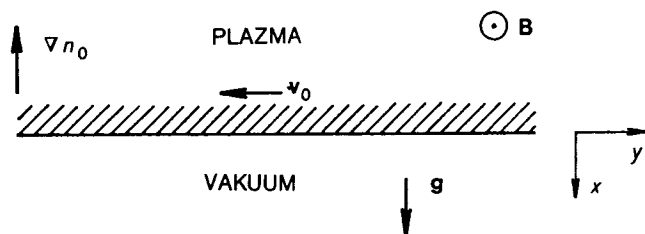
Fyzikálně můžeme tuto svazkovou nestabilitu vysvětlit takto. Oscilace elektronové tekutiny mají přirozenou frekvenci ω_p a oscilace iontové tekutiny mají přirozenou frekvenci $\Omega_p = (m/M)^{1/2} \omega_p$. Protože však oscilace v pohybující se elektronové tekutině mají ω_p posunutý Dopplerovým jevem, mohou se tyto dvě frekvence v laboratorní souřadné soustavě shodovat, má-li kv_0 odpovídající hodnotu. Fluktuace hustoty iontů a elektronů pak mohou splňovat Poissonovu rovnici. Lze dokonce ukázat, že elektronové oscilace mají zápornou energii, tj. že celková kinetická energie elektronů je menší při oscilacích než bez oscilací. Kinetická energie v jednotkovém objemu v klidném, neporušeném svazku je $\frac{1}{2}mn_0v_0^2$, při oscilacích je $\frac{1}{2}m(n_0 + n_1)(v_0 + v_1)^2$. Při prostorovém vystředování se ukáže, že je tato hodnota menší než $\frac{1}{2}mn_0v_0^2$ následkem fázových vztahů mezi n_1 a v_1 , jež musí splňovat rovnici kontinuity. Elektronové oscilace mají tedy zápornou

energii a iontové oscilace kladnou energii. Obojí vlny mohou narůstat zároveň a přitom udržovat úhrnnou energii systému konstantní. Nestability tohoto typu se užívá v klystronech ke generaci mikrovln. E_1 moduluje rychlost elektronů, které tak vytvářejí shluky. Tyto shluky procházejí mikrovlnným rezonátorem a lze je uzpůsobit tak, že excitují jeho vlastní módy a produkují mikrovlnnou energii.

ÚLOHA 6-3. Odvodte disperzní vztah dvousvazkové nestability pro případ dvou chladných elektronových svazků se stejně velkým v_0 , ale opačného směru, proudících mezi pevnými ionty. Hustota každého svazku je $\frac{1}{2}n_0$.

6.7 „GRAVITAČNÍ“ NESTABILITA

Protože magnetické pole působí na plazma podobně jako lehká tekutina podírající těžkou tekutinu, může se v plazmatu objevit Rayleighova–Taylorova nestabilita. V zakřiveném magnetickém poli vzniká při pohybu částice podél zakřivených siločar odstředivá síla, která působí na plazma stejným způsobem jako ekvivalentní „gravitační“ síla. Proberme nejjednodušší případ; nechť rozhraní mezi plazmatem a vakuem leží v rovině y – z (obr. 6-13).



OBR. 6-13 Povrch plazmatu se sklonek ke gravitační nestabilitě.

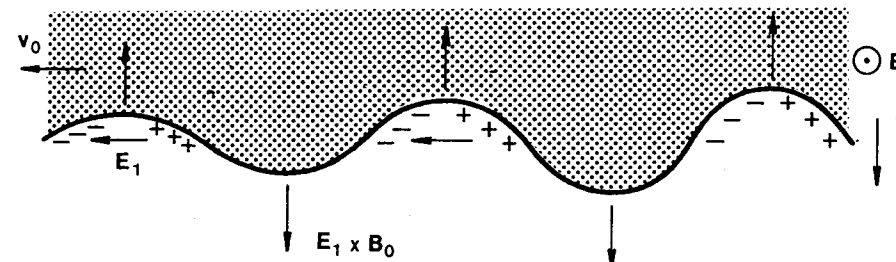
Gradient hustoty ∇n_0 nechť má směr $-x$ a gravitační pole \mathbf{g} směr x . Pro jednoduchost můžeme ponechat $KT_i = KT_e = 0$ a probrat případ, kdy β je malé a \mathbf{B}_0 homogenní.

V rovnovážném stavu lze ionty popsat rovnicí

$$Mn_0(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla)\mathbf{v}_0 = en_0\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}_0 + Mn_0\mathbf{g}. \quad (6-36)$$

Je-li \mathbf{g} konstantní, bude i \mathbf{v}_0 konstantní a $(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla)\mathbf{v}_0$ vymizí. Rovnici [6-36] vynásobíme vektorově \mathbf{B}_0 a dostaneme podobně jako v odd. 2.2

$$\mathbf{v}_0 = \frac{M}{e} \frac{\mathbf{g} \times \mathbf{B}_0}{B_0^2} = -\frac{g}{\Omega_c} \hat{\mathbf{y}}. \quad (6-37)$$



Fyzikální mechanismus gravitační nestability. OBR. 6-14

Drift elektronů, mající obrácený směr, můžeme v limitě $m/M \rightarrow 0$ zanedbat. Diamagnetický drift nevzniká, protože $KT = 0$, nevznikne ani $\mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0$ drift, neboť $\mathbf{E}_0 = 0$.

Jestliže se v důsledku chaotických tepelných fluktuací zvlní styčná plocha, drift \mathbf{v}_0 způsobí, že toto zvlnění poroste (obr. 6-14). Driftem iontů se na bocích vlnek vytvoří náboj, vznikne elektrické pole, jež má na hřebenu vlny opačné znaménko než v důlu vlny. Jak je patrné z obrázku 6-14, drift $\mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}_0$ směřuje vzhůru v těch místech, kde se povrch prohnul nahoru, dolů směřuje tam, kde se povrch prohnul dolů. Růst zvlnění je výsledkem správného sfázování $\mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}_0$ driftů.

Abychom našli inkrement, budeme obvyklým způsobem analyzovat linearizovanou vlnu šířící se ve směru y : $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{y}}$. Pohybová rovnice pro iontovou poruchu je

$$M(n_0 + n_1) \left[\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1) + (\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1) \cdot \nabla (\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1) \right] = e(n_0 + n_1) [\mathbf{E}_1 + (\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1) \times \mathbf{B}_0] + M(n_0 + n_1) \mathbf{g}. \quad (6-38)$$

Nyní vynásobíme rovnici [6-36] výrazem $1 + (n_1/n_0)$ a dostaneme

$$M(n_0 + n_1) (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 = e(n_0 + n_1) \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}_0 + M(n_0 + n_1) \mathbf{g}. \quad (6-39)$$

Toto odečteme od rov. [6-38] a zanedbáme-li členy druhého řádu, máme

$$Mn_0 \left[\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_1 \right] = en_0 (\mathbf{E}_1 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0). \quad (6-40)$$

Všimněme si, že \mathbf{g} se vyrušilo, informace o něm se však stále zachovává ve \mathbf{v}_0 . Pro poruchy ve tvaru $\exp[i(ky - \omega t)]$ dostáváme

$$M(\omega - kv_0) \mathbf{v}_1 = ie(\mathbf{E}_1 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0). \quad (6-41)$$

To je též vztah jako rovnice [4-96] až na to, že ω je nahrazeno $\omega - kv_0$ a elektronové veličiny jsou nahrazeny iontovými. Řešení je tedy dáno rovnicí [4-98] s patričnými záměnami. Pro $E_x = 0$ a

$$\Omega_c^2 \gg (\omega - kv_0)^2 \quad (6-42)$$

je řešením

$$v_{ix} = \frac{E_y}{B_0}, \quad v_{iy} = -i \frac{\omega - kv_0}{\Omega_c} \frac{E_y}{B_0}. \quad [6-43]$$

Druhý výraz je polarizační drift v souřadnicové soustavě spojené s ionty. Odpovídající veličina pro elektrony vymizí v limitě $m/M \rightarrow 0$, máme tedy

$$v_{ex} = E_y/B_0, \quad v_{ey} = 0. \quad [6-44]$$

Rovnice kontinuity pro poruchu iontů je

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + \nabla \cdot (n_0 v_0) + (v_0 \cdot \nabla) n_1 + n_1 \nabla \cdot v_0 + (v_1 \cdot \nabla) n_0 + n_0 \nabla \cdot v_1 + \nabla \cdot (n_1 v_1) = 0. \quad [6-45]$$

Člen nultého řádu vymizí, protože v_0 je kolmé na ∇n_0 , a člen $n_1 \nabla \cdot v_0$ vymizí, je-li v_0 konstantní. Rovnice prvního řádu tedy je

$$-i\omega n_1 + ikv_0 n_1 + v_{ix} n'_0 + ikn_0 v_{iy} = 0, \quad [6-46]$$

kde $n'_0 = \partial n_0 / \partial x$. Pro elektrony platí jednodušší rovnice, neboť $v_{e0} = 0$ a $v_{ey} = 0$

$$-i\omega n_1 + v_{ex} n'_0 = 0. \quad [6-47]$$

Všimněme si, že jsme použili plazmatické přiblížení a předpokládali jsme $n_{i1} = n_{e1}$. Takto lze postupovat, protože nestabilní vlny jsou nízkofrekvenční (oprávněnost může být dokázána *dodatečně*). Rovnice [6-43] a [6-46] dávají

$$(\omega - kv_0) n_1 + i \frac{E_y}{B_0} n'_0 + ikn_0 \frac{\omega - kv_0}{\Omega_c} \frac{E_y}{B_0} = 0. \quad [6-48]$$

Rovnice [6-44] a [6-47] dávají

$$\omega n_1 + i \frac{E_y}{B_0} n'_0 = 0, \quad \frac{E_y}{B_0} = \frac{i\omega n_1}{n'_0}. \quad [6-49]$$

Dosazením tohoto do rovnice [6-48] máme

$$(\omega - kv_0) n_1 - \left(n'_0 + kn_0 \frac{\omega - kv_0}{\Omega_c} \right) \frac{\omega n_1}{n'_0} = 0,$$

$$\omega - kv_0 - \left(1 + \frac{kn_0}{\Omega_c} \frac{\omega - kv_0}{n'_0} \right) \omega = 0, \quad [6-50]$$

$$\omega(\omega - kv_0) = -v_0 \Omega_c n'_0 / n_0. \quad [6-51]$$

Za v_0 dosadíme z rov. [6-37] a dostaneme kvadratickou rovnici pro ω

$$\omega^2 - kv_0 \omega - g(n'_0/n_0) = 0. \quad [6-52]$$

Řešení jsou

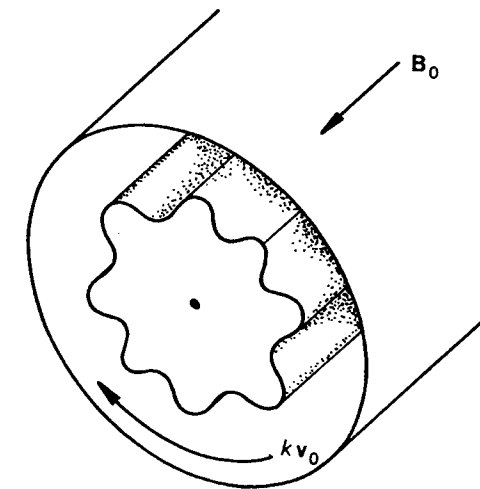
$$\omega = \frac{1}{2} kv_0 \pm \left[\frac{1}{4} k^2 v_0^2 + g(n'_0/n_0) \right]^{1/2}. \quad [6-53]$$

Nestabilita vznikne tehdy, je-li ω komplexní, tj. jestliže

$$-gn'_0/n_0 > \frac{1}{4} k^2 v_0^2. \quad [6-54]$$

Z toho je patrné, že pro nestabilitu je nezbytné, aby g a n'_0/n_0 měly opačná znaménka. To je právě ono tvrzení, že lehká tekutina podpira těžkou tekutinou; v opačném případě je ω reálné a plazma je stabilní. Pro dostatečně malé k (dlouhé vlny), je inkrement nestability dán výrazem

$$\gamma = \text{Im}(\omega) \approx [-gn'_0/n_0]^{1/2} \quad [6-55]$$



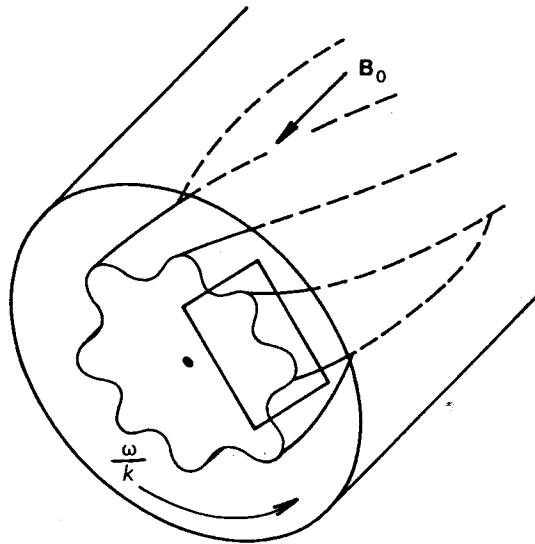
„Žlábková“ nestabilita. OBR. 6-15

Tato nestabilita, pro niž platí $k \perp B_0$, se někdy nazývá žlábková nestabilita, a to z následujícího důvodu. Ve válci postupují vlny ve směru \mathcal{B} , působí-li síly ve směru r . Plochy konstantní hustoty pak připomínají řecké sloupy zdobené podélnými žlábkami (obr. 6-15).

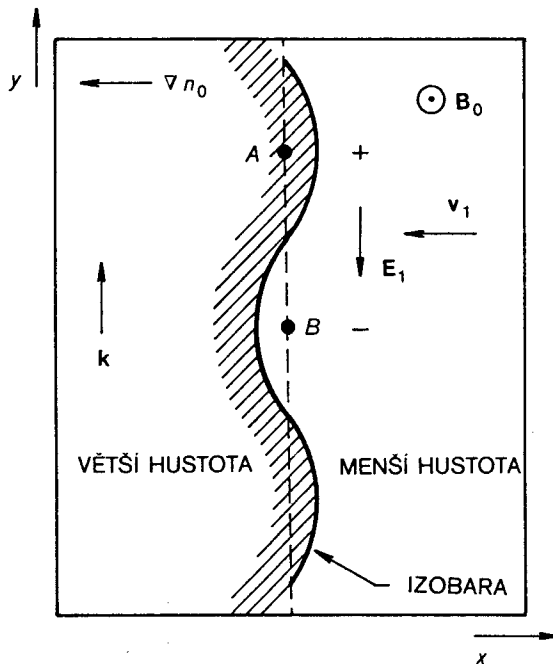
REZISTIVNÍ* DRIFTOVÉ VLNY 6.8

Jednoduchým příkladem univerzální nestability jsou rezistivní driftové vlny. Na rozdíl od gravitační žlábkové nestability mají driftové vlny sice jen malou, ale přece nenulovou složku k ve směru B_0 . Plochy konstantní hustoty se proto podobají sloupovým žlábkům s mírným spirálovým stočením (obr. 6-16). Kdybychom plochu vyznačenou rámečkem na obr. 6-16

* resistere = (lat.) odporovat, vzdorovat – pozn. překl.



OBR. 6-16 Geometrické schéma driftové nestability ve válci. Oblast ohraničená obdélníkem je ve zvětšení na obr. 6-17.



OBR. 6-17 Fyzikální mechanismus driftové vlny.

zvětšili a napřímili do kartézských souřadnic, vypadala by jako na obr. 6-17. Jediná síla vyvolávající nestabilitu je gradient tlaku $KT \nabla n_0$ (pro jednoduchost volíme $KT = \text{konst.}$). V takovém případě drifts nultého řádu ($E_0 = 0$) jsou

$$\mathbf{v}_{i0} = \mathbf{v}_{Di} = \frac{KT_i n'_0}{eB_0 n_0} \hat{\mathbf{y}}. \quad [6-56]$$

$$\mathbf{v}_{e0} = \mathbf{v}_{De} = -\frac{KT_e n'_0}{eB_0 n_0} \hat{\mathbf{y}}. \quad [6-57]$$

Podle zkušenosti se žlábkovou nestabilitou můžeme očekávat, že fázová rychlost driftových vln se bude řádově rovnat v_{Di} či v_{De} . Ukážeme, že ω/k_y se rovná přibližně v_{De} .

Poněvadž driftové vlny mají konečné k_z , mohou se elektrony pohybovat ve směru B_0 a udržovat tak mezi sebou termodynamickou rovnováhu (srv. diskusi v odd. 4.10). Budou se tedy řídit Boltzmannovým vztahem (oddíl 3.5)

$$n_1/n_0 = e\phi_1/KT_e. \quad [6-58]$$

V bodě A na obr. 6-17 je hustota větší než v rovnovážném stavu, n_1 je kladné, je tedy i ϕ_1 kladné. Podobně v bodě B jsou n_1 i ϕ_1 záporné. Rozdíl potenciálů znamená, že mezi body A a B je elektrické pole E_1 . Právě tak jako při žlábkové nestabilitě E_1 vyvolává drift $\mathbf{v}_1 = \mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}_0/B_0^2$ ve směru x. Při pohybu vlny ve směru y se pozorovateli v bodě A jeví n_1 a ϕ_1 jako oscilující v čase. Drift \mathbf{v}_1 rovněž osciluje v čase; oscilaci hustoty vlastně způsobuje právě \mathbf{v}_1 . Protože v plazmatu existuje gradient ∇n_0 ve směru $-x$, bude drift \mathbf{v}_1 k pevnému pozorovateli v bodě A přinášet plazma s rozdílnou hustotou. V driftové vlně se tedy pohybuje tekutina tam a zpět ve směru x, ačkoliv vlna sama postupuje ve směru y.

Budme přesnější z kvantitativního hlediska. Velikost v_{1x} je

$$v_{1x} = E_y/B_0 = -ik_y\phi_1/B_0. \quad [6-59]$$

Budeme předpokládat, že v_{1x} se nemění s x a že k_z je mnohem menší než k_y , tzn. že tekutina nestlačitelně osciluje ve směru x. Spočítejme nyní, kolik gyračních středů je v pevném bodě A přinášeno do objemové jednotky; to je zřejmá

$$\hat{\partial} n_1 / \hat{\partial} t = -v_{1x} \partial n_0 / \partial x. \quad [6-60]$$

A to je rovnice kontinuity pro gyrační středů, jež se ovšem nepohybují driftovým pohybem tekutiny \mathbf{v}_D . Člen $n_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_1$ vymizí v důsledku našeho předpokladu. Hustota gyračních středů se liší od hustoty částic n_1 , což vede ke korekci rov. [6-60]. Takový korekční člen je však vyššího řádu a může zde být zanedbán. Ujijme rovnice [6-59] a [6-58] a můžeme rov. [6-60] zapsat

$$-i\omega n_1 = \frac{ik_y\phi_1}{B_0} n'_0 = -i\omega \frac{e\phi_1}{KT_e} n_0. \quad [6-61]$$

Tak máme

$$\frac{\omega}{k_y} = - \frac{KT_e}{eB_0} \frac{n'_0}{n_0} = v_{De} \quad [6-62]$$

Tyto vlny tedy postupují rychlostí diamagnetického driftu *elektronů* a nazývají se *driftové vlny*. Výraz [6-62] je rychlost ve směru *y* neboli ve směru azimutálním. Krom toho existuje složka *k* ve směru *z* důvodů, které zde nejsou uvedeny, musí tato složka splňovat podmínky

$$k_z \ll k_y, \quad v_{ti} \ll \omega/k_z \ll v_{te}. \quad [6-63]$$

Abychom pochopili, proč jsou driftové vlny nestabilní, musíme si uvědomit, že v_{ix} pro ionty není přesně E_y/B_0 . Existují korekční členy vyjadřující vliv polarizačního driftu (rov. [2-66]) a driftu v nehomogenním **E** poli (rov. [2-59]). Tyto driftы působí vždycky tak, že průběh potenciálu ϕ_1 se zpožďuje za hustotou n_1 (úloha 4-1). Tento fázový posuv způsobí, že tam, kde už je plazma ven vychýleno, směřuje v_1 ven a naopak; porucha tedy narůstá. Bez tohoto fázového posuvu by se fáze n_1 a fáze ϕ_1 lišily o 90°, jak ukazuje obr. 6-17, a driftová vlna by pouze oscillovala.

A konečně, proč se nazývají tyto vlny rezistivní? Elektrické pole E_1 nesmí být tokem elektronů podél B_0 zcela zkratováno. Srážky elektron-ion a krom toho velká vzdálenost $\frac{1}{2}\lambda_z$ mezi hřebenem a důlem vlny vedou k tomu, že může vzniknout odporový spád potenciálu a konečná hodnota E_1 . Disperzní vztah pro rezistivní driftové vlny je přibližně

$$\omega^2 + i\sigma_{||}(\omega - \omega^*) = 0 \quad [6-64]$$

kde

$$\omega^* \equiv k_y v_{De} \quad [6-65]$$

a

$$\sigma_{||} \equiv \frac{k_z^2}{k_y^2} \Omega_e(\omega_c \tau_{ei}). \quad [6-66]$$

Je-li $\sigma_{||}$ velké ve srovnání s ω , může být rov. [6-64] splněna jenom pro $\omega \approx \omega^*$. V tom případě můžeme v prvním členu ω nahradit ω^* a pro ω pak dostáváme.

$$\omega \approx \omega^* + (i\omega^{*2}/\sigma_{||}) \quad [6-67]$$

To ukazuje, že $\text{Im}(\omega)$ je vždycky kladné a je úměrné měrnému odporu η . Driftové vlny jsou tedy nestabilní a mohou se objevit v jakémkoli plazmatu s gradientem hustoty. Inkrement nestability je naštěstí dosti malý a existují způsoby, jak lze růst nestability zcela zastavit vytvořením nehomogenního pole B_0 .

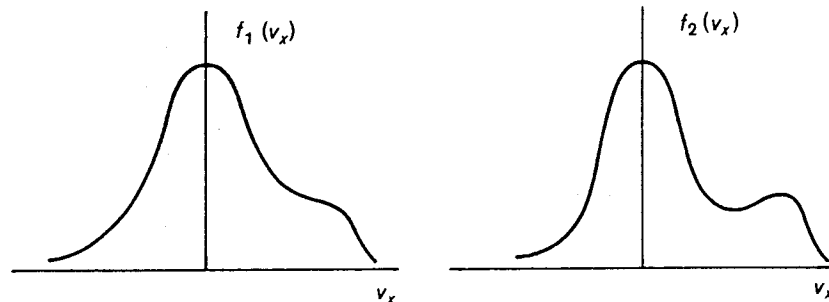
Všimněme si, že rov. [6-52] pro žlábkovou nestabilitu a rov. [6-64] pro driftovou nestabilitu se liší svou strukturou. Prvá má reálné koeficienty a ω je komplexní, je-li diskriminant kvadratické rovnice záporný; to je příznačné pro *reaktivní* nestabilitu. Koeficienty druhé rovnice jsou komplexní, takže ω je komplexní vždycky; to je příznačné pro *disipativní* nestabilitu.

Kapitola sedmá

ÚVOD DO KINETICKÉ TEORIE

7.1 FYZIKÁLNÍ SMYSL $f(\mathbf{v})$

Tekutinová teorie, kterou jsme tolik používali, je nejjednodušším popisem plazmatu; je skutečně štěstí, že toto přiblížení je dostatečně přesné pro popis většiny pozorovaných jevů. Existují však některé jevy, pro něž je takový přístup nedostačující. V takových případech je třeba brát v úvahu rychlostní rozdělení $f(\mathbf{v})$ pro každý druh částic; tento přístup se nazývá kinetická teorie. V tekutinové teorii jsou závislé proměnné veličiny funkcí pouze čtyř nezávisle proměnných: x, y, z a t . To je možné jenom proto, že o rychlostním rozdělení každého druhu částic předpokládáme, že je v každém místě maxwellovské, a může tudíž být jednoznačně specifikováno jediným číslem, teplotou T . Protože ve vysokoteplotním plazmatu může ke srážkám docházet velmi zřídka, mohou se odchylky od tepelné rovno-



OBR. 7-1 Příklady nemaxwellovských rozdělovacích funkcí.

váhy udržovat po relativně dlouhou dobu. Jako příklad si představme dvě rychlostní rozdělení $f_1(v_x)$ a $f_2(v_x)$ v jednorozměrném systému (obr. 7-1). Tato dvě rozdělení se budou chovat zcela odlišně, avšak pokud plochy pod křivkami jsou stejné, tekutinová teorie je nerozliší.

Hustota je funkcí čtyř skalárních proměnných $n = n(\mathbf{r}, t)$. Při úvahách o rychlostním rozdělení budeme mít sedm nezávisle proměnných: $f = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$. Pod výrazem $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ rozumíme, že počet částic v objemové jednotce v místě \mathbf{r} a v čase t se složkami rychlosti mezi v_x a $v_x + dv_x$, v_y a $v_y + dv_y$, a v_z a $v_z + dv_z$ je

$$f(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t) dv_x dv_y dv_z.$$

Integrál tohoto výrazu se píše několika ekvivalentními způsoby

$$\begin{aligned} n(\mathbf{r}, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \int_{-\infty}^{\infty} dv_z f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}. \end{aligned} \quad (7-1)$$

Všimněme si, že $d\mathbf{v}$ není vektor; představuje trojrozměrný objemový element v rychlostním prostoru. Je-li f normalizováno tak, že

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} = 1, \quad (7-2)$$

pak má význam pravděpodobnosti a označujeme je \hat{f} . Potom

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = n(\mathbf{r}, t) \hat{f}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t). \quad (7-3)$$

Všimněme si, že \hat{f} je stále funkcí sedmi proměnných, neboť tvar rozdělení stejně jako hustota se mohou měnit s prostorem i časem. Z rov. [7-2] je zřejmé, že rozměr \hat{f} je $(\text{m/s})^{-3}$ a tudíž podle rov. [7-3] f má rozměr $\text{s}^3 \text{m}^{-6}$.

Zvlášť důležitá je maxwellovská rozdělovací funkce

$$\hat{f}_m = (m/2\pi KT)^{3/2} \exp(-v^2/v_t^2), \quad (7-4)$$

kde

$$v \equiv (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)^{1/2} \quad \text{a} \quad v_t \equiv (2KT/m)^{1/2}. \quad (7-5)$$

Užijeme-li určitý integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi}, \quad (7-6)$$

snadno ověříme, že integrál funkce \hat{f}_m přes $dv_x dv_y dv_z$ je jednotka.

Existuje několik „středních rychlostí“ maxwellovského rozdělení, jež se obecně užívají. V odd. 1.3 jsme viděli, že střední kvadratická rychlost je dána výrazem

$$(\overline{v^2})^{1/2} = (3KT/m)^{1/2}. \quad (7-7)$$

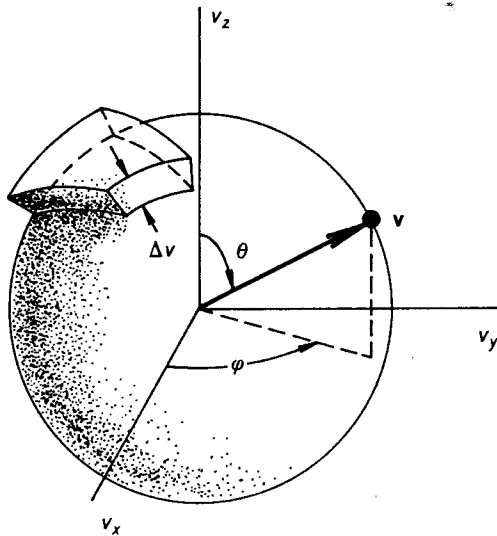
Střední velikost rychlosti \bar{v} je prostě \bar{v} a nalezneme ji takto:

$$\bar{v} = \int_{-\infty}^{\infty} v \hat{f}_m(\mathbf{v}) d^3v. \quad [7-8]$$

Protože \hat{f}_m je izotropní, vyčíslíme integrál nejsnadněji ve sférických souřadnicích ve v prostoru (obr. 7-2). Poněvadž objem každé sférické slupky je $4\pi v^2 dv$, dostáváme

$$\bar{v} = (m/2\pi KT)^{3/2} \int_0^{\infty} v [\exp(-v^2/v_t^2)] \cdot 4\pi v^2 dv = \quad [7-9]$$

$$= (\pi v_t^2)^{-3/2} \cdot 4\pi v_t^4 \int_0^{\infty} [\exp(-y^2)] y^3 dy. \quad [7-10]$$



OBR. 7-2 Trojrozměrný rychlostní prostor.

Určitý integrál, integrovaný per partes, dává hodnotu $\frac{1}{2}$. Tedy

$$\bar{v} = 2\pi^{-1/2} v_t = 2(2KT/\pi m)^{1/2}. \quad [7-11]$$

Složka rychlosti v v jednom směru, např. v_x , má jinou střední hodnotu. \bar{v}_x je ovšem pro izotropní rozdělení nulové, nikoliv ale $|\bar{v}_x|$:

$$|\bar{v}_x| = \int |v_x| \hat{f}_m(\mathbf{v}) d^3v = \quad [7-12]$$

$$= \left(\frac{m}{2\pi KT}\right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \exp\left(\frac{-v_y^2}{v_t^2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} dv_z \exp\left(\frac{-v_z^2}{v_t^2}\right) \times \int_0^{\infty} 2v_x \exp\left(\frac{-v_x^2}{v_t^2}\right) dv_x. \quad [7-13]$$

Každý z prvních dvou integrálů má podle [7-6] hodnotu $\pi^{1/2} v_t$. Poslední integrál je jednoduchý a má hodnotu v_t^2 . Tak máme

$$|\bar{v}_x| = (\pi v_t^2)^{-3/2} \pi v_t^4 = \pi^{-1/2} v_t = (2KT/\pi m)^{1/2}. \quad [7-14]$$

Tok částic, vznikající jejich náhodným pohybem a procházející myšlenou rovinou z jedné strany na druhou, je dán výrazem

$$\Gamma_{\text{náh}} = \frac{1}{2} n |\bar{v}_x| = \frac{1}{4} n \bar{v}. \quad [7-15]$$

Zde jsme použili rovnici [7-11] a započítali jsme tu skutečnost, že jenom polovina částic prochází myšlenou rovinou v tom kterém směru. Shrňme: Pro maxwellovské rozdělení je

$$v_{s.kv.} = (3KT/m)^{1/2}, \quad [7-7]$$

$$|\bar{v}| = 2(2KT/\pi m)^{1/2}, \quad [7-11]$$

$$|\bar{v}_x| = (2KT/\pi m)^{1/2}, \quad [7-14]$$

$$\bar{v}_x = 0. \quad [7-16]$$

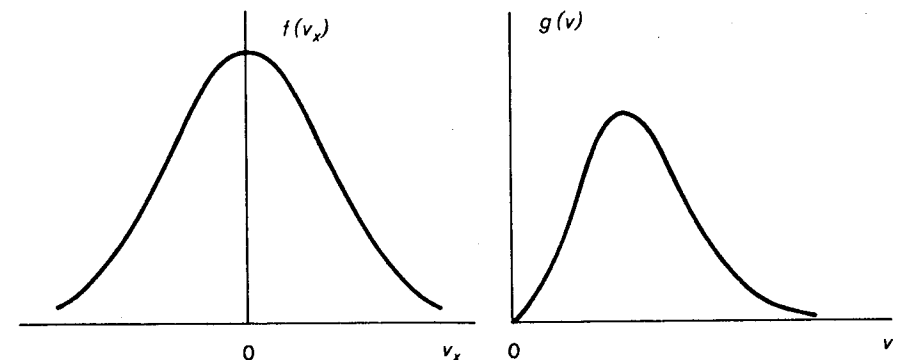
Pro izotropní rozdělení, jako je maxwellovské, můžeme definovat jinou funkci $g(v)$, která je funkcí skalární proměnné – velikosti v , takže

$$\int_0^{\infty} g(v) dv = \int_{-\infty}^{\infty} f(v) d^3v. \quad [7-17]$$

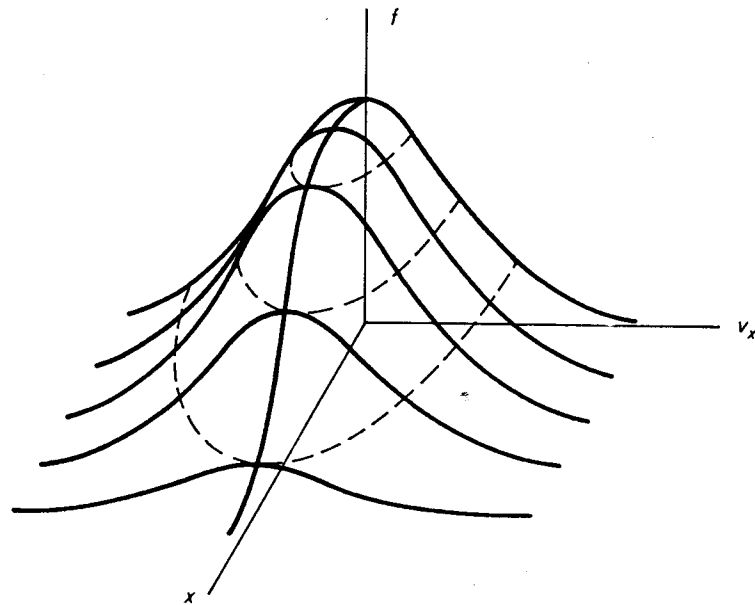
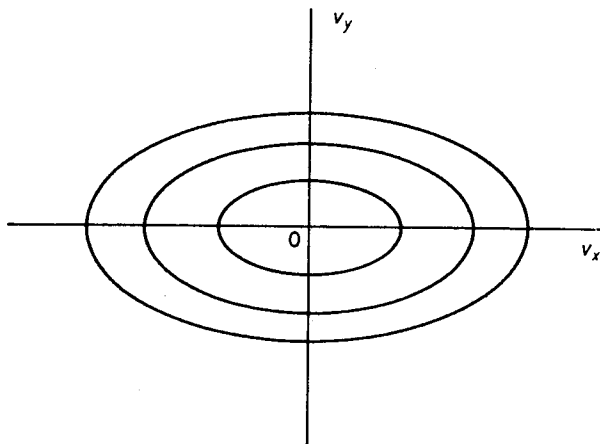
Z rov. [7-9] je vidět, že pro maxwellovské rozdělení

$$g(v) = 4\pi n (m/2\pi KT)^{3/2} v^2 \exp(-v^2/v_t^2). \quad [7-18]$$

Obrázek 7-3 ukazuje rozdíl mezi $g(v)$ a jednorozměrným maxwellovským rozdělením $f(v_x)$. $f(v_x)$ má v bodě $v_x = 0$ maximum, ale $g(v)$ je pro $v = 0$ rovno nule. To je důsledkem toho, že pro $v = 0$ je objem ve fázovém prostoru nulový (obr. 7-2). Někdy je $g(v)$ nedbale označováno jako $f(v)$ na

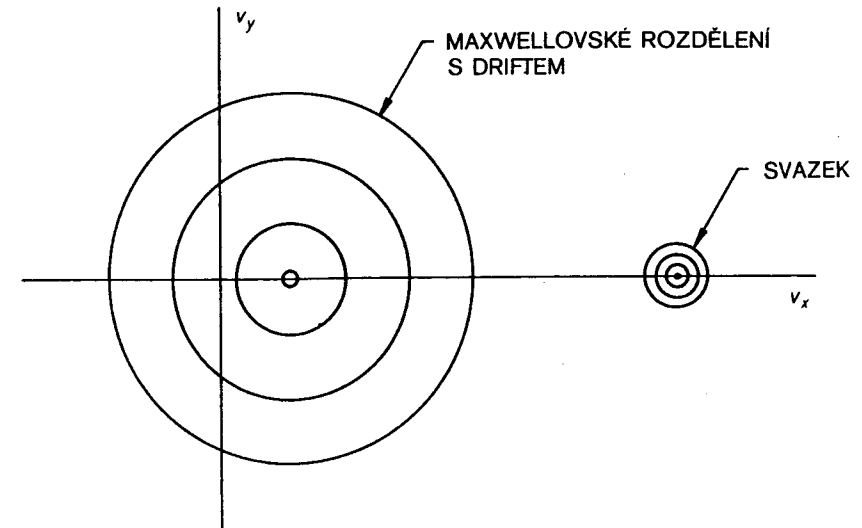
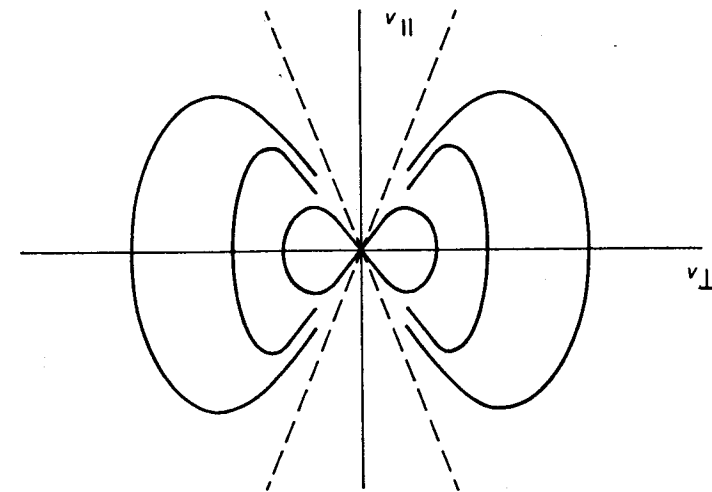


Jedno a trojrozměrné maxwellovské rozdělení. OBR. 7-3

OBR. 7-4 V prostoru se měnící jednorozměrné rozdělení $f(x, v_x)$.OBR. 7-5 Křivky konstantního f pro dvojrozměrné anizotropní rozdělení.

rozdíl od $f(\mathbf{v})$; ale $g(v)$ je jinou funkcí svého argumentu než $f(\mathbf{v})$. Z rov. [7-18] je zřejmé, že $g(v)$ má rozměr s/m^4 .

Funkci $f(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ pro daný čas nelze nakreslit, pokud nesnížíme počet dimenzí. V jednorozměrném systému je možno $f(x, v_x)$ zobrazit jako zakřivenou plochu (obr. 7-4). Průřezky této plochy s rovinami $x = \text{konstanta}$

Křivky konstantního f pro driftující maxwellovské rozdělení a „svazek“ v dvojrozměrném prostoru. OBR. 7-6Křivky konstantního f pro rozdělení s únikovým kuzelem. $v_{||}$ a v_{\perp} znamenají rovnoběžnou a kolmou složku \mathbf{v} vzhledem k magnetickému poli. OBR. 7-7

dávají rychlostní rozdělení $f(v_x)$. Průřezky s rovinami $v_x = \text{konstanta}$ dávají hustotní profil částic s daným v_x . Stane-li se, že všechny křivky $f(v_x)$ mají tvarově tentýž charakter, bude křivka proložená maximy představovat profil hustoty. Čárkované křivky na obr. 7-4 jsou průřeznice s rovinami $f = \text{konstanta}$; jsou to vrstevnice neboli křivky konstantní hodnoty f .

Promítnutím těchto křivek do roviny $x - v_x$ dostaneme topografickou mapu funkce f . Takové mapy jsou velice užitečné pro získání předběžné představy o tom, jak se plazma chová; příklad uvedeme v následujícím oddílu.

Jiný typ vrstevnicové mapy funkce f vytvoříme, vezmeme-li $f(\mathbf{v})$ v daném bodě v prostoru. Je-li například pohyb dvojrozměrný, bude funkce $f(v_x, v_y)$ zobrazena kruhy při izotropním f ve v_x, v_y . Anizotropní rozdělení by se zobrazilo jako elipsy (obr. 7-5). Maxwelllovské rozdělení s driftovým pohybem by se zobrazilo kruhy, jejichž střed leží mimo počátek, a svazek částic postupující ve směru x by se zobrazil jako oddělená špička (obr. 7-6).

Rozdělení s únikovým kuzelem v plazmatu drženém v zrcadlovém systému lze znázornit vrstevnicemi f v prostoru v_{\perp}, v_{\parallel} . Obrázek 7-7 ukazuje, jak takové zobrazení vypadá.

7.2 ROVNICE KINETICKÉ TEORIE

Základní rovnicí, kterou $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ musí splňovat, je rovnice Boltzmannova

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_s \quad [7-19]$$

\mathbf{F} je síla působící na částici a $(\partial f / \partial t)_s$ je změna f za jednotku času v důsledku srážek. Symbol ∇ představuje jako obvykle gradient v prostoru (x, y, z) . Symbol $\partial / \partial \mathbf{v}$ čili ∇_v představuje gradient v rychlostním prostoru

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} = \hat{x} \frac{\partial}{\partial v_x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial v_y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial v_z} \quad [7-20]$$

Význam Boltzmannovy rovnice se ozřejmí, připomeneme-li si, že f je funkcí sedmi nezávislých proměnných. Totální derivace f podle času je tedy

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v_x} \frac{dv_x}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v_y} \frac{dv_y}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v_z} \frac{dv_z}{dt} \quad [7-21]$$

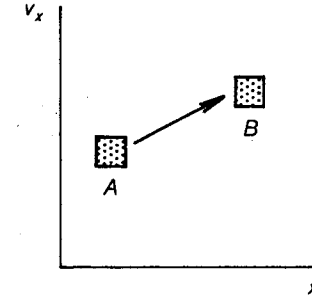
$\partial f / \partial t$ vyjadřuje explicitní závislost na čase. Následující tři členy nejsou nic jiného než právě $\mathbf{v} \cdot \nabla f$. Prostřednictvím Newtonova třetího zákona

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} \quad [7-22]$$

poznáváme v posledních třech členech $(\mathbf{F}/m) \cdot (\partial f / \partial \mathbf{v})$. Již dříve, v oddílu 3.3, jsme hovořili o tom, že totální derivaci df/dt lze rozumět jako rychlosti změny, jak je viděna v souřadnicovém systému pohybujícím se s částicemi. Rozdíl je v tom, že nyní musíme mít na mysli částice pohybující se v šesti-rozměrném prostoru (\mathbf{r}, \mathbf{v}) ; df/dt je konvektivní derivace ve fázovém

prostoru. Boltzmannova rovnice [7-19] prostě říká, že df/dt je nulová, dokud nedochází ke srážkám. Že by to tak mělo být, je vidět z jednorozměrného příkladu na obr. 7-8.

V infinitesimálním objemovém elementu $dx dv_x$ v bodě A je několik částic; všechny mají rychlost v_x a polohu x . Hustota částic v tomto fázovém prostoru je právě $f(x, v_x)$. Po nějaké době se částice posunou k jinému x



OBR. 7-8 Skupina bodů ve fázovém prostoru, zobrazující souřadnice polohy a rychlosti skupiny částic, zachovává při svém pohybu ve fázovém prostoru hustotu.

v důsledku své rychlosti v_x a zároveň změni svoji rychlost v důsledku sil na ně působících. Protože tyto síly závisí jenom na x a v_x , budou všechny částice v bodě A stejně zrychleny. Po určité době t dospějí všechny částice ve fázovém prostoru do bodu B. Protože se všechny částice pohybovaly společně, bude hustota v bodě B též jako v A. Dochází-li však ke srážkám, mohou být částice rozptýleny; f se může měnit členem $(\partial f / \partial t)_s$.

V dostatečně horkém plazmatu lze srážky zanedbat. Je-li kromě toho síla \mathbf{F} výhradně elektromagnetická, dostává rov. [7-19] speciální tvar

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad [7-23]$$

To je *Vlasovova rovnice*. Pro její poměrnou jednoduchost pracuje s ní kinetická teorie nejčastěji. Dochází-li ke srážkám s neutrálními atomy, může být srážkový člen v rov. [7-19] přibližně vyjádřen

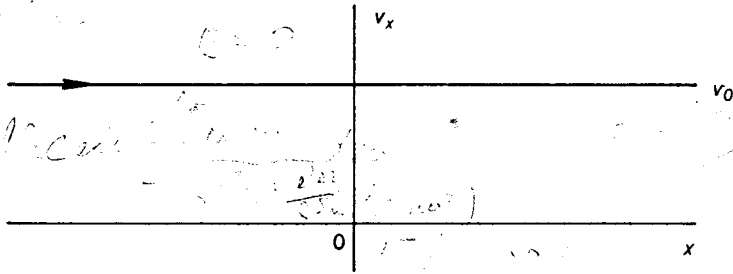
$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_s = \frac{f_n - f}{\tau} \quad [7-24]$$

kde f_n je rozdělovací funkce neutrálních atomů a τ je časová konstanta srážek. Tento výraz nazýváme *Krookův srážkový člen*. Je to kinetické zobec-

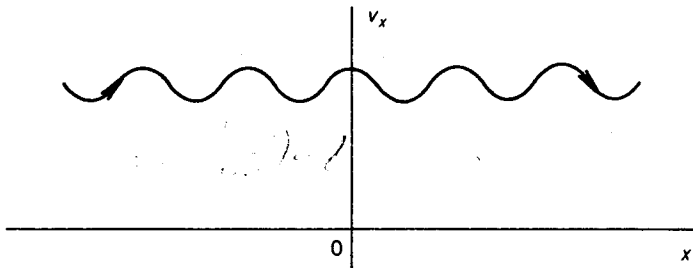
nění srážkového členu v rov. [5-5]. Dochází-li ke coulombovským srážkám, může být rov. [7-19] vyjádřena přibližně

$$\frac{df}{dt} = -\frac{\partial}{\partial v} \cdot (f \langle \Delta v \rangle) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v \partial v} : (f \langle \Delta v \Delta v \rangle). \quad [7-25]$$

To je *Fokkerova-Planckova rovnice*; započítává jenom dvojně coulombovské srážky. Δv znamená změnu rychlosti při srážce; rovnice [7-25] je zkrácený způsob zápisu dosti složitěho výrazu.



OBR. 7-9 Znárodnění elektronového svazku v jednorozměrném fázovém prostoru; všechny elektrony mají tutěž rychlost v_0 . Rozdělovací funkce $f(x, v_x)$ je na zakreslené linii nekonečná a všude jinde je nulová. Tato linie je zároveň trajektorií jednotlivých elektronů, jež se pohybují ve směru šipky.

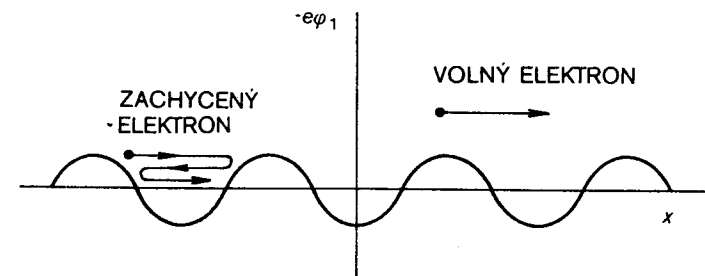


OBR. 7-10 Takto vypadá graf z obr. 7-9, vznikne-li v elektronovém svazku plazmová vlna. Celá tato struktura se pohybuje doprava fázovou rychlostí vlny. Kdyby pozorovatel přešel do souřadného systému spojeného s vlnou, tato struktura by setrvala v klidu a elektrony by po této křivce probíhaly rychlostí $v_0 - v_\phi$.

Ze skutečnosti, že bez působení srážek je df/dt konstantní, plyne, že částice při svém pohybu fázovým prostorem sledují „vrstevnice“ – křivky konstantního f . Jak lze těchto vrstevnic užít, ukážeme na dvou-svazkové nestabilitě z oddílu 6.6 V neporušeném plazmatu mají všechny elektrony rychlost v_0 a vrstevnice konstantního f je přímka (obr. 7-9). Funkce $f(x, v_x)$ se podobá stěně vystupující z roviny obrázku v místě přímky $v_x = v_0$. Elektrony se pohybují podél naznačené trajektorie. Roz-

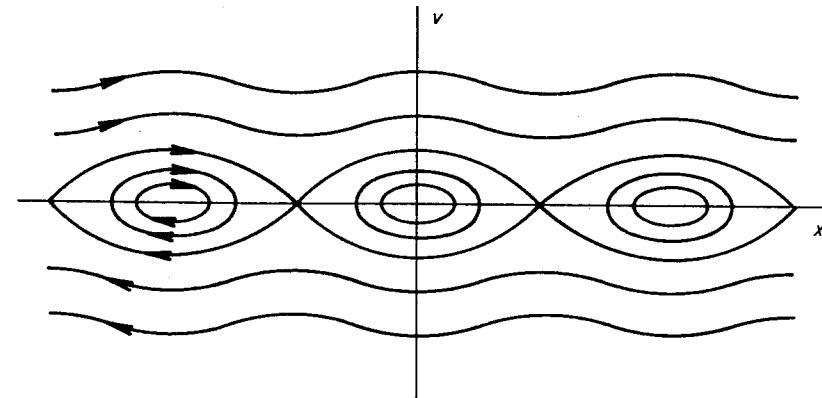
vine-li se vlna, elektrické pole E_1 způsobí, že elektrony při svém pohybu mění rychlost v_x . Trajektorie se tak sinusově zvlíní (obr. 7-10); toto zvlínění postupuje fázovou rychlostí, nikoliv rychlostí částic. Částice se při svém pohybu vzhledem k vlně této křivky přidržují. Stává-li se E_1 , jak vlna roste, velkým a dochází-li v menší míře ke srážkám, budou některé elektrony zachyceny v elektrostatickém potenciálu vlny. V souřadnicovém prostoru vypadá potenciál vlny jako na obr. 7-11. Ve fázovém prostoru bude mít $f(x, v_x)$ vrcholy všude tam, kde je potenciálový důl (obr. 7-12). Protože vrstevnice f jsou zároveň trajektoriemi elektronů, je vidět, že některé elektrony se ve fázovém prostoru pohybují po uzavřených drahách; to právě jsou zachycené elektrony.

Zachycení elektronů je nelineárním jevem, který nelze zvládnout prostým řešením Vlasovovy rovnice. Trajektorie elektronů však mohou být



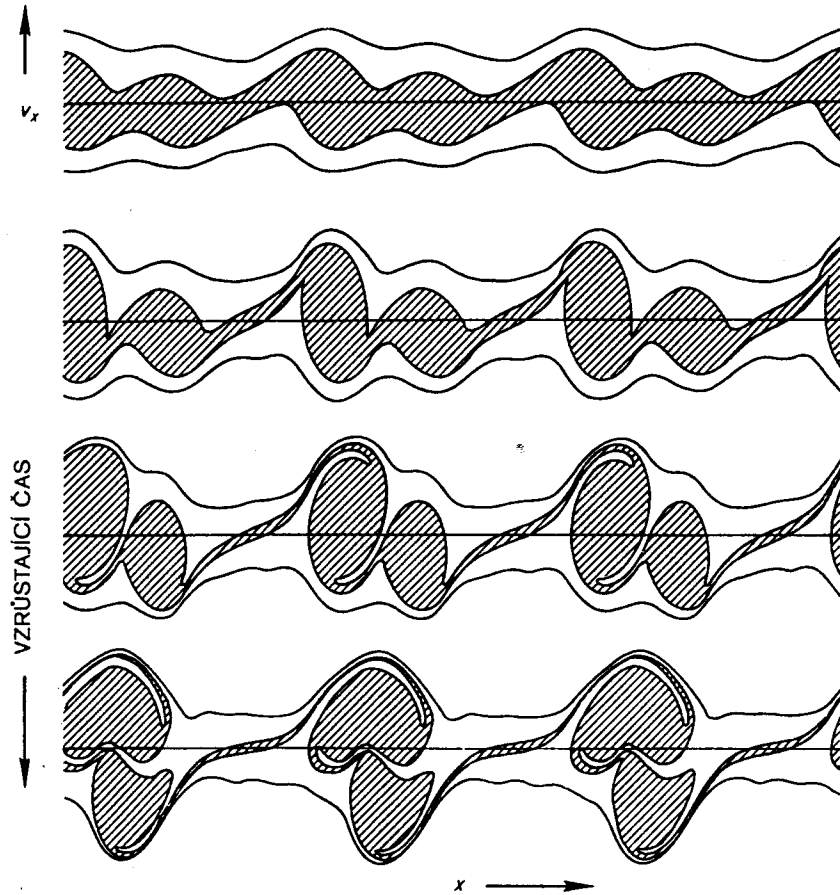
Potenciál plazmové vlny, jak se jeví elektronům. Tato struktura se pohybuje rychlostí v_ϕ . Elektron, který má vůči vlně malou rychlost, se zachytí v potenciálové jámě vlny a je vlnou unášen.

OBR. 7-11



Trajektorie elektronů neboli křivky konstantního f v souřadnicové soustavě spojené s vlnou, v níž se tato struktura nepohybuje. Tomuto typu diagramů, který je pro konečnou rozdělovací funkci $f(v)$ vhodnější, lze snadněji porozumět než rozdělení ve tvaru δ -funkce na obr. 7-10.

OBR. 7-12



OBR. 7-13 Vrstevnice funkce f ve fázovém prostoru při dvousvazkové nestabilitě. Vystínovaná oblast, původně představující malé rychlosti v laboratorním systému, je bez elektronů. S vyvíjející se nestabilitou deformují se tyto prázdné oblasti ve fázovém prostoru po počátečním lineárním stadiu do tvarů připomínajících měch na vodě. [Převzato z H. L. Berk, C. E. Nielson a K. V. Roberts, Phys. Fluids 13, 986 (1970).]

počítány na samočinných počítačích a výsledky jsou často předkládány ve tvaru podobném obrázku 7-12. Příklad numerického výsledku je na obr. 7-13. Zobrazuje dvousvazkovou nestabilitu, v níž vrstevnice funkce f spočátku ukazují v okolí $v_x = 0$ prázdný příkop, který odděluje elektrony pohybující se v opačných směrech. Časový vývoj této částicemi nezaplněné mezery ilustrují vystínované plochy na obr. 7-13. Tento obrázek ukazuje, že nestabilita postupně deformuje $f(\mathbf{v})$ způsobem, který by stěží bylo možno popsat analyticky.

ODVOZENÍ ROVNIC PRO TEKUTINU 7.3

Rovnice pro tekutinu, které jsme už užívali, jsou vlastně jenom „momenty“ Boltzmannovy rovnice. Nejnižší moment získáme integrací rovnice [7-19], v níž F nahradíme výrazem pro Lorentzovu sílu

$$\int \frac{\partial f}{\partial t} d\mathbf{v} + \int \mathbf{v} \cdot \nabla f d\mathbf{v} + \frac{q}{m} \int (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} d\mathbf{v} = \int \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_s d\mathbf{v}. \quad [7-26]$$

První člen dává

$$\int \frac{\partial f}{\partial t} d\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial t} \int f d\mathbf{v} = \frac{\partial n}{\partial t}. \quad [7-27]$$

Jelikož \mathbf{v} je nezávisle proměnná, a tedy na ně nepůsobí operátor ∇ , dává druhý člen

$$\int \mathbf{v} \cdot \nabla f d\mathbf{v} = \nabla \cdot \int \mathbf{v} f d\mathbf{v} = \nabla \cdot (n\bar{\mathbf{v}}) \equiv \nabla \cdot (n\mathbf{u}), \quad [7-28]$$

kde střední rychlost \mathbf{u} je podle definice rychlost tekutiny. Člen s \mathbf{E} vymizí z následujícího důvodu

$$\int \mathbf{E} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} d\mathbf{v} = \int \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot (f\mathbf{E}) d\mathbf{v} = \int_{S_\infty} f\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad [7-29]$$

Úplnou divergenci integrujeme, dostáváme tak hodnotu $f\mathbf{E}$ na ploše $v = \infty$. Ta vymizí tehdy, jestliže $f \rightarrow 0$ rychleji než v^{-2} pro $v \rightarrow \infty$, což musí být splněno pro každé rozdělení s konečnou energií. Člen $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ můžeme zapsat takto:

$$\int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} d\mathbf{v} = \int \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot (f\mathbf{v} \times \mathbf{B}) d\mathbf{v} - \int f \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) d\mathbf{v} = 0. \quad [7-30]$$

Prvý integrál opět můžeme převést na plošný integrál. V Maxwellovu rozdělení klesá f pro $v \rightarrow \infty$ rychleji než kterákoliv mocnina v , integrál tedy vymizí. Druhý integrál vymizí proto, že $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ je kolmé na $\partial/\partial \mathbf{v}$. Konečně vymizí i čtvrtý člen v rov. [7-26], protože srážkami se nemění celkový počet částic (rekombinaci zde neuvažujeme). Z rovnic [7-27]–[7-30] vychází rovnice kontinuity

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{u}) = 0. \quad [7-31]$$

Další moment Boltzmannovy rovnice dostaneme, vynásobíme-li rov. [7-19] $m\mathbf{v}$ a integrujeme přes $d\mathbf{v}$. Dostáváme

$$m \int \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial t} d\mathbf{v} + m \int \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \nabla) f d\mathbf{v} + q \int \mathbf{v} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} d\mathbf{v} = \int m\mathbf{v} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_s d\mathbf{v}. \quad [7-32]$$

Pravá strana vyjadřuje změnu hybnosti vlivem srážek a výsledkem je člen \mathbf{P}_{ij} v rov. [5-58]. Prvý člen v rov. [7-32] dává

$$m \int \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial t} d\mathbf{v} = m \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{v} f d\mathbf{v} \equiv m \frac{\partial}{\partial t} (n\mathbf{u}). \quad [7-33]$$

Třetí integrál v rov. [7-32] můžeme zapsat

$$\int \mathbf{v}(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} d\mathbf{v} = \int \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot [f\mathbf{v}(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})] d\mathbf{v} - \\ - \int f\mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) d\mathbf{v} - \int f(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{v} d\mathbf{v}. \quad [7-34]$$

Prvé dva integrály na pravé straně vymizí ze stejných důvodů jako již dříve, $\partial \mathbf{v} / \partial \mathbf{v}$ je jen jednotkový tenzor \mathbf{I} . Máme tudíž

$$q \int \mathbf{v}(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} d\mathbf{v} = -q \int (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) f d\mathbf{v} = -qn(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad [7-35]$$

Abychom konečně vyjádřili druhý integrál v rov. [7-32], využijeme především tu skutečnost, že \mathbf{v} je nezávisle proměnná bez vztahu k operátoru ∇ , a přepíšeme

$$\int \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \nabla) f d\mathbf{v} = \int \nabla \cdot (f\mathbf{v}\mathbf{v}) d\mathbf{v} = \nabla \cdot \int f\mathbf{v}\mathbf{v} d\mathbf{v}. \quad [7-36]$$

Protože střední hodnota veličiny je středovací integrál přes \mathbf{v} krát $1/n$, máme

$$\nabla \cdot \int f\mathbf{v}\mathbf{v} d\mathbf{v} = \nabla \cdot n\overline{\mathbf{v}\mathbf{v}}. \quad [7-37]$$

Nyní můžeme rozdělit \mathbf{v} na střední (tekutinovou) rychlost \mathbf{u} a tepelnou rychlost \mathbf{w}

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}. \quad [7-38]$$

Protože \mathbf{u} již je střední veličina, dostáváme

$$\nabla \cdot (n\overline{\mathbf{v}\mathbf{v}}) = \nabla \cdot (n\mathbf{u}\mathbf{u}) + \nabla \cdot (n\overline{\mathbf{w}\mathbf{w}}) + 2\nabla \cdot (n\mathbf{u}\overline{\mathbf{w}}). \quad [7-39]$$

Je zřejmé, že střední hodnota $\overline{\mathbf{w}}$ je nula. Veličina $n\overline{\mathbf{w}\mathbf{w}}$ je přesně to, co označujeme jako tenzor napětí \mathbf{P}

$$\mathbf{P} \equiv n\overline{\mathbf{w}\mathbf{w}}. \quad [7-40]$$

Zbývající člen v rov. [7-39] můžeme zapsat

$$\nabla \cdot (n\mathbf{u}\mathbf{u}) = n\mathbf{u} \cdot \nabla (n\mathbf{u}) + n(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}. \quad [7-41]$$

Shrneme-li všechny výsledky z rovnic [7-33], [7-35], [7-40] a [7-41], můžeme rov. [7-32] napsat

$$m \frac{\partial}{\partial t} (n\mathbf{u}) + m\mathbf{u} \cdot \nabla (n\mathbf{u}) + mn(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{P} - qn(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) = \mathbf{P}_{ij}. \quad [7-42]$$

Sloučíme prvé dva členy pomocí rov. [7-31] a získáme konečně *pohybovou rovnici pro tekutinu*

$$mn \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = qn(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \nabla \cdot \mathbf{P} + \mathbf{P}_{ij}. \quad [7-43]$$

Tato rovnice popisuje tok hybnosti. Pro popis toku energie můžeme vzít následující moment Boltzmannovy rovnice, tj. vynásobíme ji $\frac{1}{2}m\mathbf{v}\mathbf{v}$ a zintegrujeme. Tak bychom získali rovnici pro tok tepla, v níž koeficient tepelné vodivosti κ vystoupí týmž způsobem, jako tomu bylo u tenzoru napětí \mathbf{P} . Stavová rovnice $p \sim p^{\gamma}$ představuje jednoduchý tvar rovnice pro tok tepla při $\kappa = 0$.

PLAZMOVÉ OSCILACE A LANDAUŮV ÚTLUM 7.4

Jako jednoduchý příklad použití Vlasovy rovnice odvodíme disperzní vztah pro elektronové plazmové oscilace, které jsme z hlediska tekutinové teorie probírali v oddíle 4.3. Toto odvození bude vyžadovat znalost integrálu komplexní proměnné. Ti, kdo tuto teorii neovládají, mohou přeskóčit na odd. 7.5. Jednodušší, ale delší odvození, které neuzívá teorii komplexní proměnné, je v odd. 7.6.

V přiblížení nultého řádu bereme plazma jako homogenní s rozdělním $f_0(\mathbf{v})$ a položíme $\mathbf{B}_0 = \mathbf{E}_0 = 0$. V přiblížení prvního řádu poruchu funkce $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ označíme $f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = f_0(\mathbf{v}) + f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t). \quad [7-44]$$

Protože \mathbf{v} je nezávisle proměnná a nelinearizuje se, zní Vlasova rovnice prvního řádu pro elektrony takto:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_1 - \frac{e}{m} \mathbf{E}_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad [7-45]$$

Stejně jako již dříve považujeme ionty za těžké a nepohyblivé a vlny bereme jako rovinně šířící se ve směru x

$$f_1 \sim e^{i(kx - \omega t)}. \quad [7-46]$$

Potom rov. [7-45] dostává tvar

$$-i\omega f_1 + ikv_x f_1 = \frac{e}{m} E_x \frac{\partial f_0}{\partial v_x}, \quad [7-47]$$

$$f_1 = \frac{ieE_x}{m} \frac{\partial f_0 / \partial v_x}{\omega - kv_x}. \quad [7-48]$$

Poissonova rovnice má tvar

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_1 = ikE_x = -\frac{en_1}{\epsilon_0} = -\frac{e}{\epsilon_0} \iiint f_1 d^3v. \quad [7-49]$$

Dosadíme za f_1 , dělíme výrazem ikE_x a dostáváme

$$1 = -\frac{e^2}{\epsilon_0 km} \iiint \frac{\partial f_0 / \partial v_x}{\omega - kv_x} d^3v. \quad (7-50)$$

Faktor n_0 můžeme vytknout, nahradíme-li f_0 normalizovanou funkcí \hat{f}_0

$$1 = -\frac{\omega_p^2}{k} \int_{-\infty}^{\infty} dv_z \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \hat{f}_0(v_x, v_y, v_z) / \partial v_x}{\omega - kv_x} dv_x. \quad (7-51)$$

Je-li f_0 maxwellovská nebo nějaká jiná rozdělovací funkce vytvořená ze součinitelů, integrace přes v_y a v_z se provede snadno a zbývá jednorozměrná rozdělovací funkce $\hat{f}_0(v_x)$. Například jednorozměrné Maxwellovo rozdělení je

$$\hat{f}_m(v_x) = (m/2\pi KT)^{1/2} \exp(-mv_x^2/2KT). \quad (7-52)$$

Disperzní vztah tedy je

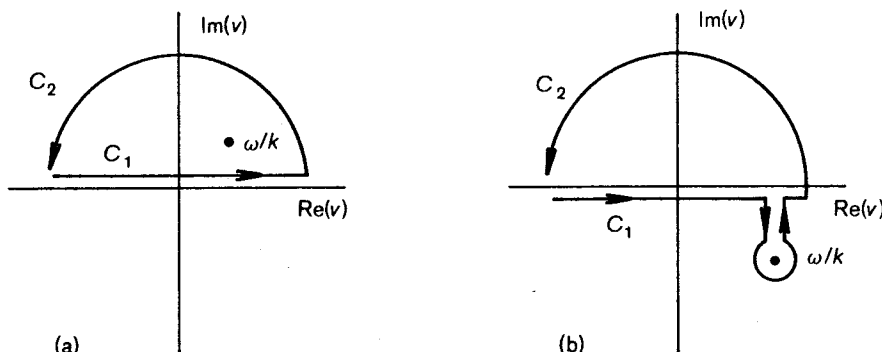
$$1 = \frac{\omega_p^2}{k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \hat{f}_0(v_x) / \partial v_x}{v_x - (\omega/k)} dv_x. \quad (7-53)$$

Protože máme co činit s jednorozměrným problémem, můžeme vypustit index x , ale musíme stále pamatovat na to, že nesmíme zaměnit v (což je ve skutečnosti v_x) za celkovou rychlost v , kterou jsme užívali výše

$$1 = \frac{\omega_p^2}{k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \hat{f}_0 / \partial v}{v - (\omega/k)} dv. \quad (7-54)$$

Symbolu \hat{f}_0 je zde nutno rozumět jako jednorozměrné rozdělovací funkci již zintegrované přes proměnné v_y a v_z . Rovnice [7-54] platí pro kterékoliv rovnovážné rozdělení $\hat{f}_0(v)$; v případě maxwellovského rozdělení se za \hat{f}_0 užije výraz [7-52].

Výpočet integrálu v rov. [7-54] není jednoduchý, a to kvůli singularitě v bodě $v = \omega/k$. Někdo by si mohl myslet, že tato singularita nebude tak



OBR. 7-14 Integrovaná dráha Landauova problému pro (a) $\text{Im}(\omega) > 0$ a (b) $\text{Im}(\omega) < 0$.

závažná, protože ve skutečnosti ω není skoro nikdy reálné; vlny jsou obvykle slabě tlumeny srážkami nebo zesíleny mechanismem nějaké nestability. Poněvadž rychlost v je reálnou veličinou, jmenovatel v rov. [7-54] se nikdy nevynuluje. Landau byl první, kdo zacházel s touto rovnicí správným způsobem a objevil, že i když singularita leží mimo integrační cestu, její přítomnost vnáší do disperzního vztahu plazmové vlny důležitou změnu – jev, který tekutinová teorie nepředpověděla.

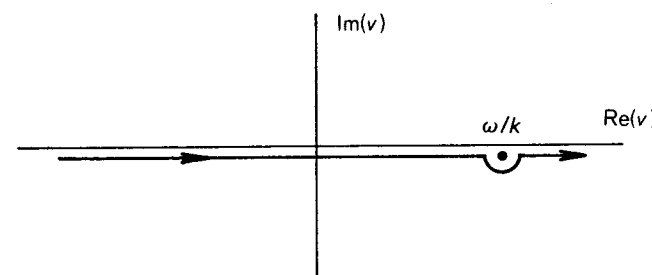
Vezmeme sinusovou poruchu jako počáteční podmínku, k je tedy reálné. Bude-li porucha narůstat nebo se zmenšovat, je ω komplexní. S integrálem v rov. [7-54] musíme zacházet jako s integrálem v rovině komplexního v . Křivky na obr. 7-14 jsou integrační dráhy (a) pro nestabilní vlnu s $\text{Im}(\omega) > 0$ a (b) pro tlumenou vlnu s $\text{Im}(\omega) < 0$. Normálně bychom počítali tento křivkový integrál podél osy reálného v reziduovou větou

$$\int_{C_1} G dv + \int_{C_2} G dv = 2\pi i R(\omega/k), \quad (7-55)$$

kde G je integrand, C_1 je integrační cesta podél reálné osy, C_2 je polokružnice v nekonečnu a $R(\omega/k)$ je reziduum v bodě ω/k . Takto lze postupovat, je-li integrál přes C_2 nulový. Žel, není tomu tak v případě maxwellovského rozdělení, které obsahuje faktor

$$\exp(-v^2/v_t^2),$$

ten je pro $v \rightarrow \pm i\infty$ velký a příspěvek z křivky C_2 nemůžeme zanedbat. Landau ukázal, že řeší-li se tento problém důsledně jako problém s počáteční podmínkou, správná integrační cesta, která se musí užít, je křivka C_1 procházející pod singularitou. Tento integrál se obecně musí počítat numericky a Fried a Conte ho tabelovali pro případ maxwellovského \hat{f}_0 .



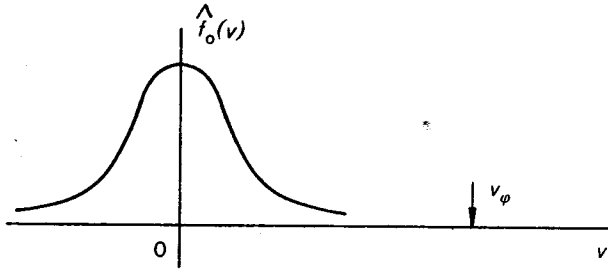
OBR. 7-15 Integrovaná dráha v rovině komplexního v pro případ, kdy $\text{Im}(\omega)$ je malé.

Přesná analýza tohoto problému je složitá, můžeme však získat přibližný disperzní vztah pro případ, kdy fázová rychlost je velká a útlum malý. Potom ω/k leží blízko osy reálného v (obr. 7-15) a integrační cesta předepsaná Landauem je pak přímka podél osy $\text{Re}(v)$ s malou polokružnicí

okolo pólu. Při obcházení okolo pólu dostaneme $2\pi i$ krát polovina rezidua v tomto bodě. Potom rov. [7-54] dostává tvar

$$1 = \frac{\omega_p^2}{k^2} \left[P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \hat{f}_0 / \partial v}{v - (\omega/k)} dv + i\pi \frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v} \Big|_{v=\omega/k} \right], \quad [7-56]$$

kde P představuje Cauchyho hlavní hodnotu. Při výpočtu integrujeme podél osy reálného v , ale zastavíme se těsně před pólem. Je-li fázová rychlost $v_\phi = \omega/k$ dostatečně velká, jak předpokládáme, příspěvek ze zanedbané



OBR. 7-16 Normalizované Maxwellovo rozdělení pro případ $v_\phi \gg v_t$.

části integrační cesty není velký, neboť \hat{f}_0 v rov. [7-56] i $\partial \hat{f}_0 / \partial v$ jsou tam velmi malé (obr. 7-16). Integrál v rov. [7-56] můžeme vypočítat integrací per partes

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v} \frac{dv}{v - v_\phi} = \left[\frac{\hat{f}_0}{v - v_\phi} \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-\hat{f}_0 dv}{(v - v_\phi)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{f}_0 dv}{(v - v_\phi)^2}. \quad [7-57]$$

Protože toto je právě střední hodnota výrazu $(v - v_\phi)^{-2}$ integrovaného přes celé rozdělení, můžeme reálnou část disperzního vztahu zapsat

$$1 = \frac{\omega_p^2}{k^2} \overline{(v - v_\phi)^{-2}}. \quad [7-58]$$

Předpokládali jsme, že $v_\phi \gg v$, můžeme tedy $(v - v_\phi)^{-2}$ rozvinout v řadu

$$(v - v_\phi)^{-2} = v_\phi^{-2} \left(1 - \frac{v}{v_\phi} \right)^{-2} = v_\phi^{-2} \left(1 + \frac{2v}{v_\phi} + \frac{3v^2}{v_\phi^2} + \frac{4v^3}{v_\phi^3} + \dots \right). \quad [7-59]$$

Při středování liché členy vypadnou a dostaneme

$$\overline{(v - v_\phi)^{-2}} \approx v_\phi^{-2} \left(1 + \frac{3v^2}{v_\phi^2} \right). \quad [7-60]$$

Vzmešme nyní maxwellovské \hat{f}_0 a vypočteme $\overline{v^2}$. Připomeňme si, že v je zkrácené označení pro v_x , platí tedy

$$\frac{1}{2} m \overline{v_x^2} = \frac{1}{2} K T_e, \quad [7-61]$$

neboť jde jen o jeden stupeň volnosti. Disperzní vztah tak dostává tvar

$$1 = \frac{\omega_p^2}{k^2} \frac{k^2}{\omega^2} \left(1 + 3 \frac{k^2}{\omega^2} \frac{K T_e}{m} \right), \quad [7-62]$$

$$\omega^2 = \omega_p^2 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{3K T_e}{m} k^2. \quad [7-63]$$

Je-li druhý člen (tepelná korekce) malý, můžeme v něm za ω^2 psát ω_p^2 a dostáváme

$$\omega^2 = \omega_p^2 + \frac{3K T_e}{m} k^2, \quad [7-64]$$

což je též vztah jako rov. [4-30], kterou jsme získali z rovnic pro tekutinu při hodnotě $\gamma = 3$.

Vrátíme se nyní k imaginárnímu členu rovnice [7-56]. Při výpočtu tohoto malého členu vystačíme s takovou přesností, kdy zanedbáme tepelnou korekci reálné části ω a položíme $\omega^2 \approx \omega_p^2$. Z rovnic [7-57] a [7-60] vidíme, že hlavní hodnota integrálu v rov. [7-56] je přibližně rovna k^2/ω^2 . Rovnice [7-56] nyní dostává tvar

$$1 = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + i\pi \frac{\omega_p^2}{k^2} \frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v} \Big|_{v=v_\phi}, \quad [7-65]$$

$$\omega^2 \left(1 - i\pi \frac{\omega_p^2}{k^2} \left[\frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v} \right]_{v=v_\phi} \right) = \omega_p^2. \quad [7-66]$$

Imaginární člen můžeme považovat za malý, převedeme jej na pravou stranu, položíme $\omega^2 \approx \omega_p^2$ a odmocníme pomocí Taylorova rozvoje. Potom obdržíme

$$\omega = \omega_p \left(1 + i \frac{\pi}{2} \frac{\omega_p^2}{k^2} \left[\frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v} \right]_{v=v_\phi} \right) \quad [7-67]$$

Je-li \hat{f}_0 jednorozměrné maxwellovské rozdělení, potom

$$\frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v} = (\pi v_t^2)^{-1/2} \left(\frac{-2v}{v_t^2} \right) \exp \left(\frac{-v^2}{v_t^2} \right) = -\frac{2v}{\sqrt{\pi} v_t^3} \exp \left(\frac{-v^2}{v_t^2} \right). \quad [7-68]$$

V koeficientu můžeme v_ϕ aproximovat výrazem ω_p/k , ale v exponentu musíme zachovat tepelnou korekci z rov. [7-64]. Útlum potom je

$$\begin{aligned} \text{Im}(\omega) &= -\frac{\pi}{2} \frac{\omega_p^3}{k^2} \frac{2\omega_p}{k} \frac{1}{\sqrt{\pi} v_t^3} \exp \left(\frac{-\omega^2}{k^2 v_t^2} \right) = \\ &= -\sqrt{\pi} \omega_p \left(\frac{\omega_p}{k v_t} \right)^3 \exp \left(\frac{\omega_p^2}{k^2 v_t^2} \right) \exp \left(\frac{-3}{2} \right), \end{aligned} \quad [7-69]$$

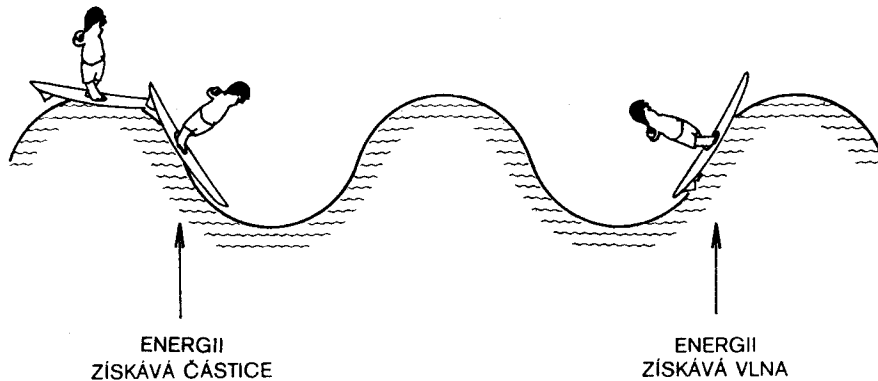
$$\text{Im} \left(\frac{\omega}{\omega_p} \right) = -0,22 \sqrt{\pi} \left(\frac{\omega_p}{k v_t} \right)^3 \exp \left(\frac{-1}{2k^2 \lambda_D^2} \right). \quad [7-70]$$

Poněvadž $\text{Im}(\omega)$ je záporné, dochází k bezsrážkovému útlumu plazmových vln; nazývá se *Landauův útlum*. Z rov. [7-70] je zřejmé, že pro malé hodnoty $k\lambda_D$ je tento útlum nepatrný, stává se ale důležitým pro $k\lambda_D = O(1)$. Tento jev je spojen s funkcí f_1 , deformací rozdělovací funkce způsobené vlnou.

7.5 FYZIKÁLNÍ VÝZNAM LANDAUOVA ÚTLUMU

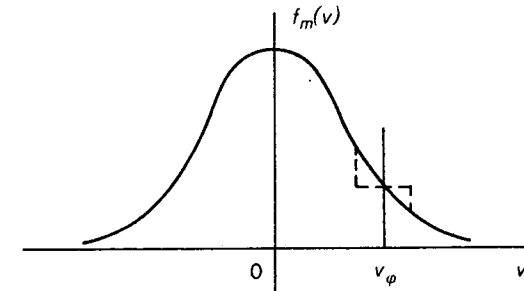
Teoretický objev útlumu vln, při němž nedochází k rozptylu energie ve srážkách, je asi nejpřekvapivějším výsledkem fyziky plazmatu. Že to je reálný efekt, bylo už v laboratoři dokázáno. I když dnes známe jednoduché fyzikální vysvětlení tohoto útlumu, je triumfem aplikované matematiky, že tento neočekávaný jev byl ponejprv objeven čistě matematicky pečlivou analýzou integrálu komplexní proměnné. Landauův útlum je význačným rysem bezsrážkového plazmatu, ale může být aplikován i v jiných oborech. Například při studiu kinetiky formace galaxií můžeme hvězdy považovat za atomy plazmatu se vzájemným působením prostřednictvím gravitačních namísto elektromagnetických sil. Nestability „hvězdného plynu“ mohou vést k vytváření spirálových ramen, ale tento proces je omezen Landauovým útlumem.

Abychom pochopili, čím je Landauův útlum způsoben, všimneme si nejprve, že $\text{Im}(\omega)$ vzniká v důsledku pólu v bodě $v = v_\phi$. Je tedy tento efekt spojen s těmi částicemi rozdělení, jejichž rychlost se přibližně rovná fázové rychlosti – s tzv. „rezonančními částicemi“. Tyto částice postupují společně s vlnou a nepozorují rychlé změny elektrického pole, mohou si proto s vlnou účinně vyměňovat energii. Nejsnadněji porozumíme této výměně energie na příkladu surfingu, jezdce na mořských vlnách, který se snaží zachytit mořskou vlnu (obr. 7-17). (Výhrada: Tento obrázek nevy světluje správně rovnici [7-70], má pouze vést naše myšlení správným směrem.) Jestliže se jeho plavidlo po hladině nepohybuje, pohupuje se

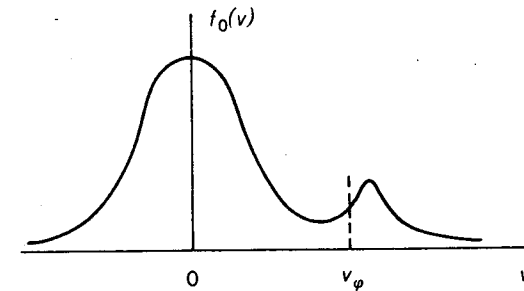


OBR. 7-17 Obvyklé fyzikální znázornění Landauova útlumu.

pouze na míjejících vlnách nahoru a dolů a v průměru nezíská žádnou energii. Podobně člun hnaný mnohem rychleji než vlna nemůže vyměnit s vlnou mnoho energie. Má-li však surfboard přibližně stejnou rychlost jako vlna, může být vlnou zachycen a strkán dopředu; to je vlastně také hlavní smysl tohoto sportu. V tom případě plavidlo získá energii, vlna musí proto energii ztrácet a je tlumená. Kdyby se naopak surfboard pohyboval o trochu rychleji než vlna, při svém pohybu vzhůru by vlnu urychloval,



OBR. 7-18 Deformace maxwellovského rozdělení v oblasti $v \approx v_\phi$ způsobená Landauovým útlumem.



OBR. 7-19 Rozdělení se dvěma vrcholy a oblast, kde se vyvine nestabilita.

vlna by pak mohla energii získat. V plazmatu jsou jak rychlejší, tak i pomalejší elektrony než vlna. V maxwellovském rozdělení je však víc pomalých elektronů než rychlých (obr. 7-18), proto více částic přijímá energii od vlny než naopak, a vlna je tlumená. Poněvadž částice s $v \approx v_\phi$ jsou ve vlně zachyceny, $f(v)$ se v blízkosti fázové rychlosti zplošťuje a touto deformací je funkce $f_1(v)$, kterou jsme počítali. Na obrázku 7-18 vidíme, že porušená rozdělovací funkce obsahuje též počet částic jako neporušená, ale celková získala energii na účet vlny.

Z toho, co bylo řečeno, lze vytušit, že kdyby $f_0(v)$ obsahovala víc rychlých částic než pomalých, mohla by být vybudena vlna. Z rov. [7-67] je vskutku zřejmé, že $\text{Im}(\omega)$ je kladné, je-li kladné $\partial f_0 / \partial v$ pro $v = v_\phi$.

Takové rozdělení je na obr. 7-19. Vlny, jejichž v_ϕ leží v oblasti kladného sklonu rozdělovací funkce, budou nestabilní, jejich energie se bude zvyšovat na účet částic. To je přesná analogie dvousvazkové nestability s konečnou teplotou. Máme-li dva studené ($KT = 0$) proudící elektronové svazky, skládá se $f_0(v)$ ze dvou δ -funkcí. Ta je bezesporu nestabilní, protože $\partial f_0/\partial v$ je konečné; z tekutinové teorie jsme vskutku našli nestabilitu. Mají-li svazky konečnou teplotu, pak podle kinetické teorie musí být relativní hustoty a teploty obou svazků takové, aby mezi nimi vznikla oblast s kladným $\partial f_0/\partial v$; přesněji řečeno, pro vznik nestability je nezbytné, aby celková rozdělovací funkce měla minimum.

Analogie jezdce na mořských vlnách je velmi přitažlivá, není ale pro správné porozumění Landauovu útlumu dost přesná. Existují totiž dva druhy Landauova útlumu: lineární Landauův útlum a nelineární Landauův útlum, žádný z nich nesouvisí s disipativními srážkovými procesy. Uvázne-li částice v potenciálovém důlu vlny, nazýváme tento jev „zachycením“. Podobně jako jezdec na vlnách může částice při zachycení skutečně získat nebo ztratit energii. Zachycení však překračuje meze lineární teorie, což lze poznat z pohybové rovnice

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = q E(x). \quad [7-71]$$

Dosadíme-li do $E(x)$ přesnou hodnotu x , bude tato rovnice nelineární, neboť funkce $E(x)$ má průběh asi jako $\sin kx$. V lineární teorii se za x dosazuje neporušený orbit, tj. $x = x_0 + v_0t$, potom je rov. [7-71] lineární. Tato aproximace však přestává platit, je-li částice zachycena. Jestliže je potenciální val vlny, na nějž částice narazí, tak vysoký, že se od něj odrazí, jsou její rychlost i poloha silně ovlivněny vlnou a výrazně se liší od hodnot neporušeného orbitu. V tekutinové teorii má pohybová rovnice tvar

$$m \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = q \mathbf{E}(x), \quad [7-72]$$

kde $\mathbf{E}(x)$ se rozumí v souřadné soustavě spojené s laboratorním systémem; s tím nebudou žádné potíže, ale vynahradí nám je člen $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$. Zanedbat v lineární teorii $(\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) \mathbf{v}_1$ znamená totéž jako užít neporušené dráhy částic. V kinetické teorii v rov. [7-45] je zanedbaným nelineárním členem

$$\frac{q}{m} E_1 \frac{\partial f_1}{\partial v}. \quad [7-73]$$

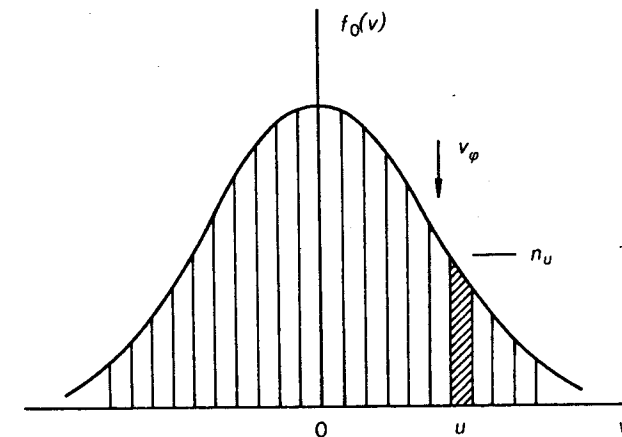
Je-li částice zachycena, obrátí vzhledem k vlně směr svého pohybu, takže rozdělovací funkce $f(v)$ je v blízkosti $v = \omega/k$ silně porušena. To znamená, že $\partial f_1/\partial v$ je srovnatelné s $\partial f_0/\partial v$ a člen [7-73] nelze zanedbat. Zachycení nelze popsat lineární teorii.

Vyroste-li vlna do velkých amplitud, dojde k bezsrážkovému útlumu se zachycováním. Pak zjistíme, že vlna se nezmenšuje monotónně, ale její amplituda v průběhu klesání fluktuuje, jak zachycené částice v potenciálo-

vých důlech narážejí dozadu a dopředu. To je *nelineární* Landauův útlum. Protože výsledek vyjádřený rovnicí [7-67] byl odvozen z *lineární* teorie, musí vyrůstat z jiného fyzikálního procesu. Otázka zní: Mohou si nezachycené elektrony pohybující se rychlostí blízkou fázové rychlosti vlny vyměňovat s vlnou energii? Dříve než odpovíme, všimněme si blíže energie takových elektronů.

7.5.1 Kinetická energie elektronového svazku

Rozdělovací funkci elektronů $f_0(v)$ můžeme „rozkrájet“ na velký počet monoenergetických svazků (obr. 7-20). Vezměme jeden z nich: jeho neporušená rychlost a hustota jsou u a n_u . Rychlost u nechť je blízká v_ϕ ,



Rozdělení $f_0(v)$ „rozkrájené“ na velký počet monoenergetických svazků s rychlostí u a hustotou n_u .

OBR. 7-20

takže svazek sestává z rezonančních elektronů. Zapněme nyní plazmové oscilace $E(x, t)$ a sledujme kinetickou energii svazku při jeho pohybu přes hřebeny a důly vlny. Vlna je způsobena self-konzistentním pohybem všech svazků dohromady. Je-li n_u dostatečně malé (počet svazků dostatečně velký), má vyšetřovaný svazek zanedbatelný vliv na vlnu a můžeme se na něj dívat jako na svazek pohybující se v daném poli $E(x, t)$. Nechť

$$E = E_0(\sin kx - \omega t) = -d\phi/dx, \quad [7-74]$$

$$\phi = (E_0/k) \cos(kx - \omega t). \quad [7-75]$$

Podle tekutinové teorie máme pro svazek linearizovanou rovnici

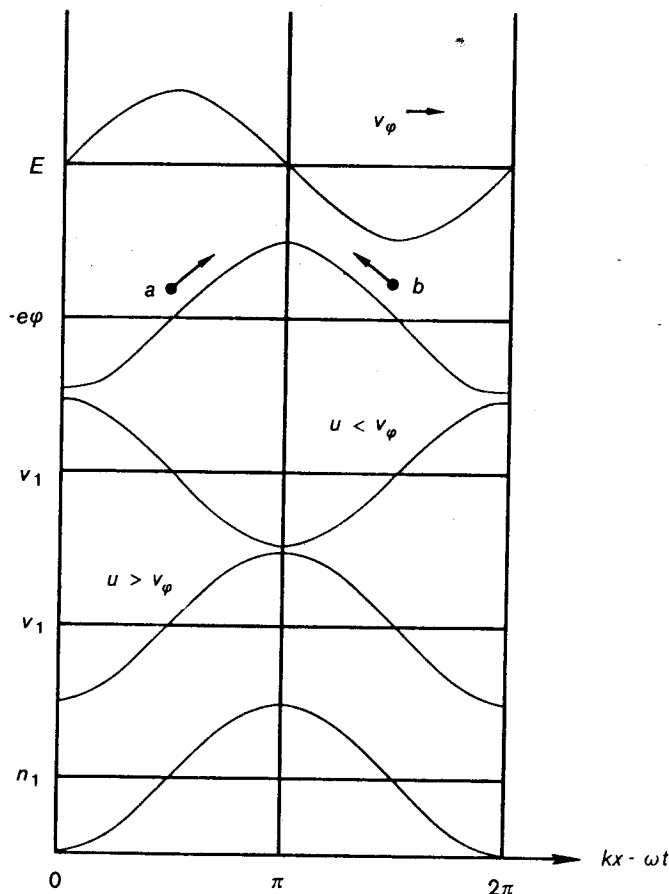
$$m \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + u \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) = -e E_0 \sin(kx - \omega t). \quad [7-76]$$

Možným řešením je

$$v_1 = -\frac{eE_0 \cos(kx - \omega t)}{m(\omega - ku)}. \quad [7-77]$$

To je modulace rychlosti způsobená vlnou při pohybu svazku podél ní. Aby byl zachován tok částic, osciluje i hustota odpovídajícím způsobem, jak vyžaduje linearizovaná rovnice kontinuity

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + u \frac{\partial n_1}{\partial x} = -n_u \frac{\partial v_1}{\partial x}. \quad [7-78]$$



OBR. 7-21 Fázové vztahy mezi rychlostí a hustotou pro elektrony pohybující se v elektrostatické vlně.

Poněvadž v_1 je úměrné $\cos(kx - \omega t)$, můžeme zkusit položit $n_1 = \overline{n}_1 \cos(kx - \omega t)$; po dosazení do rov. [7-78] dostaneme

$$n_1 = -n_u \frac{eE_0 k \cos(kx - \omega t)}{m(\omega - ku)^2}. \quad [7-79]$$

Obrázek 7-21 ukazuje výsledky podle rovnic [7-77] a [7-79]. Prvé dvě křivky představují pole E a potenciál $-e\phi$ v rozmezí jedné vlnové délky, jak se jeví elektronům svazku. Rov. [7-77] pro $\omega - ku < 0$ čili $u > v_\phi$ je znázorněna třetí křivkou. Snadno jí porozumíme: Vyšplhal-li elektron a na potenciálový vrch, je jeho rychlost malá, po sestoupení je naopak velká. Čtvrtá křivka je v_1 pro případ $u < v_\phi$; je vidět, že znaménko se změnilo, a to proto, že elektron b , pohybující se v souřadnicovém systému spojeném s vlnou doleva, je při výstupu na vrchol potenciálového valu zpomalován, ale protože se ve skutečnosti pohybuje v obráceném směru, jeho rychlost v_1 v kladném x směru je tam maximální. Pohybující se potenciálový val urychluje elektron b směrem doprava, takže v okamžiku, kdy dosáhne vrcholu, má maximální v_1 . Poslední křivka na obr. 7-21 ukazuje hustotu n_1 , jak je dána rovnicí [7-79]. Hustota nemění znaménko s $u - v_\phi$, protože v souřadnicovém systému spojeném s vlnou jsou elektrony a i b nejpomalejší na vrcholu potenciálového valu a hustota je tam proto největší. Podstatné je, že se znaménkem $u - v_\phi$ se mění znaménko relativní fáze mezi n_1 a v_1 .

Nyní můžeme vypočítat kinetickou energii W_k svazku

$$\begin{aligned} W_k &= \frac{1}{2}m(n_u + n_1)(u + v_1)^2 = \\ &= \frac{1}{2}m(n_u u^2 + n_u v_1^2 + 2n_1 v_1 + n_1 u^2 + 2n_u u v_1 + n_1 v_1^2). \end{aligned} \quad [7-80]$$

Poslední tři členy obsahují liché mocniny oscilujících veličin, takže při středování přes celou vlnovou délku vymizí. Jak se změní W_k působením vlny, vypočítáme, odečteme-li první člen, tj. původní energii. Střední změna energie pak je

$$\langle \Delta W_k \rangle = \frac{1}{2}m \langle n_u v_1^2 + 2n_1 v_1 \rangle. \quad [7-81]$$

Z rovnice [7-77] dostáváme

$$n_u \langle v_1^2 \rangle = \frac{1}{2} n_u \frac{e^2 E_0^2}{m^2 (\omega - ku)^2}. \quad [7-82]$$

Faktor $\frac{1}{2}$ představuje $\langle \cos^2(kx - \omega t) \rangle$. Podobně z rov. [7-79] máme

$$2u \langle n_1 v_1 \rangle = n_u \frac{e^2 E_0^2 k u}{m^2 (\omega - ku)^3} \quad [7-83]$$

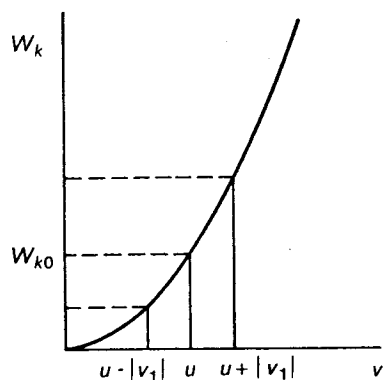
a odtud

$$\langle \Delta W_k \rangle = \frac{1}{4} m n_u \frac{e^2 E_0^2}{m^2 (\omega - ku)^2} \left[1 + \frac{2ku}{(\omega - ku)} \right] = \frac{n_u}{4} \frac{e^2 E_0^2}{m} \frac{\omega + ku}{(\omega - ku)^3}. \quad [7-84]$$

Tento výsledek říká, že $\langle \Delta W_k \rangle$ závisí na souřadnicové soustavě pozorovatele a dlouhodobě (sekulárně) se s časem nemění. Představme si, že nějaká hladká kostka klouže bez tření po povrchu zvlněného plechu (obr. 7-22). V souřadnicové soustavě spojené s touto plochou je ΔW_k úměrné $-(ku)^2$, jak lze vidět z rov. [7-84] při položení $\omega = 0$. Intuitivně



OBR. 7-22 Mechanická analogie pohybu elektronu v pohybujícím se potenciálu.



OBR. 7-23 Kvadratický vztah mezi kinetickou energií a rychlostí způsobuje, že symetrická porucha rychlosti vede ke zvýšení střední energie.

je nám jasné, že (1) $\langle \Delta W_k \rangle$ je záporné, protože kostka je delší dobu na vrcholech než v důlech a (2) jakmile již jsou oscilace spuštěny, kostka neztratí ani nezíská v průměru žádnou energii. Přejdeme-li nyní do souřadnicové soustavy, v níž se vlnitý plech pohybuje konstantní rychlostí ω/k (to je rychlost neovlivněná pohybem kostky, neboť jsme předpokládali, že n_u je zanedbatelně malé ve srovnání s celkovou hustotou plazmatu), zůstává v platnosti, že jakmile jsou již oscilace spuštěny, kostka nezíská ani neztratí v průměru žádnou energii. Ale rov. [7-84] nám říká, že $\langle \Delta W_k \rangle$ závisí na rychlosti ω/k a tudíž na souřadnicové soustavě pozorovatele. Čtème pozorněji: Říká nám, že svazek má v přítomnosti vlny menší energii než v její nepřítomnosti, je-li $\omega - ku < 0$ čili $u > v_\phi$ a že má větší energii, je-li $\omega - ku > 0$ čili $u < v_\phi$. Příčinu tohoto výsledku můžeme vystopovat až k fázovým posuvům mezi n_1 a v_1 . Obr. 7-23 ukazuje, že W_k je parabolickou funkcí v . v osciluje mezi hodnotami $u - |v_1|$ a $u + |v_1|$, přitom W_k dosáhne průměrné hodnoty větší, než je rovnovážná hodnota W_{k0} , ovšem

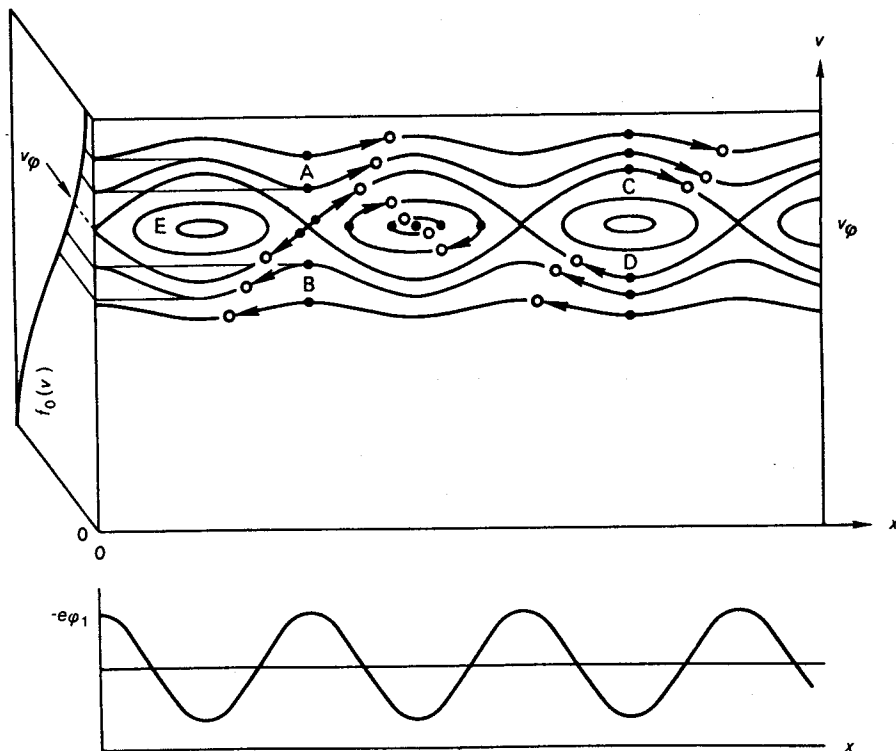
za předpokladu, že částice se zdržuje stejně dlouhou dobu v každé půlvlně. To je význam prvního členu v rov. [7-81], který je pozitivně definitní. Druhý člen v této rovnici je korekce vystihující tu skutečnost, že částice nerozloží svoji dráhu v čase rovnoměrně. Na obr. 7-21 je vidět, že elektrony a i b stráví delší dobu na vrcholu potenciálového valu než na dně, avšak elektron a dosáhne tohoto bodu po časovém úseku, v němž byl zpomalován, takže v_1 je tam záporné, zatímco b dosáhne tohoto bodu po časovém úseku, v němž byl urychlován (doprava), takže v_1 je tam kladné. Tento jev způsobuje, že (ΔW_k) mění při $u = v_\phi$ znaménko.

Vliv počátečních podmínek 7.5.2

Výsledek, který jsme právě odvodili, však stále ještě nemá nic společného s lineárním Landauovým útlumem. O útlumu lze hovořit, jestliže spojitě narůstá W_k na účet energie vlny, my jsme však zjistili, že $\langle \Delta W_k \rangle$ pro nezachycené částice je časově konstantní. Jestliže lineární Landauův útlum nezpůsobují ani nezachycené částice ani zachycené částice, co jej tedy způsobuje? Odpověď lze sestavit z těchto úvah: Je-li $\langle \Delta W_k \rangle$ např. kladné, musel tu být nějaký časový interval, kdy tato hodnota narůstala. Vskutku, v původním rychlostním rozdělení existují částice, jež mají rychlosti tak blízké v_ϕ , že během času t se vzhledem k vlně dosud neposunuly o polovinu vlnové délky. Pro tyto částice nelze vzít střední veličinu $\langle \Delta W_k \rangle$. Tyto částice mohou absorbovat energii vlny a zcela výstižně se nazývají „rezonanční“. S postupem času počet rezonančních elektronů ubývá, neboť stále víc jich bude posunuto o více než $\frac{1}{2}\lambda$ ze své počáteční polohy. Rychlost útlumu však může zůstat konstantní, neboť amplituda je nyní menší a na zachování konstantní rychlosti útlumu stačí méně elektronů.

Význam počátečních podmínek je nejlépe vidět na zobrazení fázového prostoru (obr. 7-24). Nakreslili jsme zde trajektorie elektronů ve fázovém prostoru a elektrostatický potenciál $-\epsilon\phi_1$, v němž se elektrony pohybují. Předpokládali jsme, že tato elektrostatická vlna existuje v čase $t = 0$ a že rozdělovací funkce $f_0(v)$, nakreslená v rovině kolmé k ploše stránky, je v prostoru homogenní a pro daný čas klesá monotonně s $|v|$. Kvůli zřetelnosti je velikost vlny silně nadsazena. Existence vlny ovšem implikuje existenci $f_1(v)$ pro $t = 0$; útlum, jež způsobuje, je však efektem vyššího řádu, který lineární teorie zanedbává. Přejdeme nyní k souřadnicové soustavě spojené s vlnou, takže struktura vyznačená na obr. 7-24 se nepohybuje, a všimněme si pohybu elektronů. Elektrony nacházející se zpočátku v místě A se vydávají na cestu z vrcholu potenciálového valu a pohybují se doprava, protože jejich $v > v_\phi$. Elektrony nacházející se zpočátku v B se pohybují doleva, protože jejich $v < v_\phi$. Elektrony v místě C a D vycházejí z potenciálové jámy a jedny se pohybují doprava, druhé doleva. Elektrony vydávající se na cestu po uzavřených křivkách E nemají dostatek energie k překonání potenciálového valu a jsou zachyceny. Limitním přechodem

k malým vlnovým amplitudám můžeme dosáhnout toho, že počet zachycených elektronů je libovolně malý. Po jisté době t , která je tak krátká, že žádný z elektronů A, B, C, D neprošel vzdálenost větší než polovina vlnové délky, se budou elektrony nacházet v místech označených prázdnými kroužky. Vidíme, že elektrony A a D získaly energii, zatímco B a C ji ztratily. Nyní si uvědomme: Bylo-li zpočátku $f_0(v)$ prostorově homogenní, bylo původně v místě A více elektronů než v C a více elektronů bylo v D než v B. Výsledkem je tedy čistý zisk energie na straně elektronů, tudíž ztráta energie vlny. To je lineární Landauův útlum a je zcela závislý na předpokládaných počátečních podmínkách. Po delší době budou elektrony fázově tak „rozmazané“, že původní rychlostní rozdělení bude zapomenuto a elektrony už nebudou v průměru získávat žádnou energii, jak jsme zjistili v předcházejícím oddíle. V tomto modelu po vystředování přes vlnovou délku zjistíme, že jak elektrony s $v > v_\phi$, tak i ty, jež mají $v < v_\phi$, získaly energii na účet vlny. Tato zřejmá nesrovnalost s tím, k čemu jsme došli při úvahách o unášení na mořských vlnách, bude záhy vysvětlena.



OBR. 7-24 Fázové trajektorie (nahore) elektronů pohybujících se v potenciálu vlny (dole). Celá struktura se pohybuje doprava. Šipky naznačují směr pohybu elektronů vůči vlně. Rovnovážné rozdělení $f_0(v)$ je naznačeno v rovině kolmé k ploše obrázku.

FYZIKÁLNÍ ODVOZENÍ LANDAUOVA ÚTLUMU 7.6

Nyní jsme s to odvodit velikost Landauova útlumu, aniž bychom použili integrál komplexní proměnné. Stejně jako dříve rozdělíme plazma na svazky o rychlosti u a hustotě n_u a vyšetříme jejich pohyb ve vlně

$$E = E_1 \sin(kx - \omega t). \quad [7-85]$$

Podle rov. [7-77] je rychlost každého ze svazků

$$v_1 = -\frac{eE_1 \cos(kx - \omega t)}{m(\omega - ku)}. \quad [7-86]$$

Toto řešení splňuje pohybovou rovnici [7-76], ale nevyhovuje počáteční podmínce $v_1 = 0$ pro $t = 0$. Je zřejmé, že tato počáteční podmínka musí být zajištěna, jinak by v_1 v těsné blízkosti $u = \omega/k$ bylo velké a plazma by bylo zpočátku ve stavu předem upraveném nějakým zvláštním způsobem. K rov. [7-86] můžeme přičíst libovolnou funkci argumentu $(kx - kut)$, a tím ji upravit tak, aby splňovala počáteční podmínky. Toto složené řešení bude přitom stále splňovat rovnici [7-76], protože operátor na levé straně rov. [7-76] aplikovaný na $f(kx - kut)$ dává nulu. Abychom dostali $v_1 = 0$ pro $t = 0$, musíme zřejmě za funkci $f(kx - kut)$ zvolit $-\cos(kx - kut)$. Tak místo rov. [7-86] máme

$$v_1 = \frac{-eE_1 \cos(kx - \omega t) - \cos(kx - kut)}{m(\omega - ku)}. \quad [7-87]$$

Nyní musíme rovnici kontinuity [7-78] řešit pro n_1 , na něž se rovněž vztahuje počáteční podmínka $n_1 = 0$ pro $t = 0$. Protože jsme už o mnoho chytřejší než předtím, zkusíme zvolit řešení ve tvaru

$$n_1 = \bar{n}_1 [\cos(kx - \omega t) - \cos(kx - kut)]. \quad [7-88]$$

Dosadíme-li tento výraz do rovnice [7-78] a pro v_1 užijeme rov. [7-87], dostáváme

$$\bar{n}_1 \sin(kx - \omega t) = -n_u \frac{eE_1 k \sin(kx - \omega t) - \sin(kx - kut)}{m(\omega - ku)^2}. \quad [7-89]$$

Zřejmě jsme ještě nebyli dost chytří, protože faktor $\sin(kx - \omega t)$ se nezkrátí. Abychom dostali člen ve tvaru $\sin(kx - kut)$, jenž vychází z přidaného členu ve v_1 , můžeme k n_1 přičíst člen tvaru $At \sin(kx - kut)$, ten zřejmě pro $t = 0$ vymizí a operátor na levé straně rov. [7-78] aplikovaný na součinitel t dá $\sin(kx - kut)$ a aplikovaný na součinitel $\sin(kx - kut)$ dá nulu. Koeficient A musí být úměrný $(\omega - ku)^{-1}$, protože musí odpovídat téměř faktoru v $\partial v_1 / \partial x$. Máme tedy

$$n_1 = -n_u \frac{eE_1 k}{m(\omega - ku)^2} \times [\cos(kx - \omega t) - \cos(kx - kut) - (\omega - ku)t \sin(kx - kut)]. \quad [7-90]$$

Je zřejmé, že tento výraz vymizí pro $t = 0$ a snadno se můžeme přesvědčit, že splňuje rov. [7-78].

Práce vykonaná na každém svazku je síla krát dráha. Síla působící na jednotkový objem každého ze svazků je

$$F_u = -eE(n_u + n_1). \quad [7-91]$$

Prvý člen vymizí po prostorovém vystředování. Máme tedy

$$F_u = n_u \frac{e^2 E_1^2 k}{m} \frac{\sin(kx - \omega t)}{(\omega - ku)^2} \times \\ \times [\cos(kx - \omega t) - \cos(kx - kut) - (\omega - ku)t \sin(kx - kut)]. \quad [7-92]$$

Tento výraz nyní vystředujeme přes vlnovou délku. Prvý člen

$$\langle \sin(kx - \omega t) \cos(kx - \omega t) \rangle$$

neprispívá ničím; to je stejný výsledek, jaký jsme obdrželi v odd. 7.5.1. Poslední dva členy mají původ v počátečních podmínkách a je to jediná část, která přispívá k výsledku. Užijme platné vztahy

$$\langle \sin(kx - \omega t) \cos(kx - kut) \rangle = -\frac{1}{2} \sin(\omega t - kut), \\ \langle \sin(kx - \omega t) \sin(kx - kut) \rangle = \frac{1}{2} \cos(\omega t - kut) \quad [7-93]$$

a dostáváme

$$F_u = n_u \frac{e^2 E_1^2 k}{2m} \frac{1}{(\omega - ku)^2} [\sin(\omega t - kut) - (\omega - ku)t \cos(\omega t - kut)]. \quad [7-94]$$

Přírůstek práce vykonané na každém svazku za jednotku času je tedy

$$\langle dW_k/dt \rangle_u = \langle F_u \rangle_u. \quad [7-95]$$

Celkovou práci vykonanou na částicích nalezneme sumací přes všechny svazky

$$\sum_u \langle F_u \rangle_u = \int f_0(u) \frac{\langle F_u \rangle_u}{n_u} u du = n_0 \int \hat{f}_0(u) \frac{\langle F_u \rangle_u}{n_u} u du. \quad [7-96]$$

Poslední tři rovnice spolu s definicí ω_p dávají

$$\left\langle \frac{dW_k}{dt} \right\rangle = \frac{\varepsilon_0 E_1^2}{2} \omega_p^2 \int_{-\infty}^{\infty} u \hat{f}_0(u) du \times \\ \times \left[k \frac{\sin(\omega t - kut) - (\omega - ku)t \cos(\omega t - kut)}{(\omega - ku)^2} \right] \quad [7-97]$$

neboli

$$\left\langle \frac{dW_k}{dt} \right\rangle = \frac{\varepsilon_0 E_1^2}{2} \omega_p^2 \int_{-\infty}^{\infty} u \hat{f}_0(u) \frac{d}{du} \left[\frac{\sin(\omega - ku)t}{\omega - ku} \right] du. \quad [7-98]$$

Tato veličina se rovná rychlosti, s kterou vlna ztrácí hustotu energie W_v .

Energie vlny sestává ze dvou částí. První částí je hustota energie elektrostatického pole

$$\langle W_E \rangle = \varepsilon_0 \langle E^2 \rangle / 2 = \varepsilon_0 E_1^2 / 4. \quad [7-99]$$

Druhou částí je kinetická energie oscilací částic. Rozdělíme-li opět plazma na svazky, pak podle rov. [7-84] energie připadající na svazek je

$$\langle \Delta W_k \rangle = \frac{1}{4} \frac{n_u}{m} \frac{e^2 E_1^2}{(\omega - ku)^2} \left[1 + \frac{2ku}{\omega - ku} \right]. \quad [7-100]$$

Při odvozování tohoto výsledku jsme nepoužili takové počáteční podmínky, které by platily pro rezonanční částice; příspěvek těchto částic k celkové energii vlny je však velmi malý. Sečtením přes všechny svazky dostáváme

$$\langle \Delta W_k \rangle = \frac{1}{4} \frac{e^2 E_1^2}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_0(u)}{(\omega - ku)^2} \left[1 + \frac{2ku}{\omega - ku} \right] du. \quad [7-101]$$

Druhý člen v závorce můžeme zanedbat v limitním případě $\omega/k \gg v$; použijeme toho, abychom mohli porovnat výsledek s tím, k čemu jsme dospěli již dříve. Disperzní vztah nalezneme z Poissonovy rovnice

$$kE_1 \cos(kx - \omega t) = -\frac{e}{\varepsilon_0} \sum_u n_1. \quad [7-102]$$

Pro n_1 užijeme výraz [7-79] a dostáváme

$$1 = \frac{e^2}{\varepsilon_0 m} \sum_u \frac{n_u}{(\omega - ku)^2} = \frac{e^2}{\varepsilon_0 m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_0(u) du}{(\omega - ku)^2}. \quad [7-103]$$

Porovnáním s rovnicí [7-101] vychází

$$\langle \Delta W_k \rangle = \frac{1}{4} \frac{e^2 E_1^2}{m} \frac{\varepsilon_0 m}{e^2} = \frac{\varepsilon_0 E_1^2}{4} = \langle W_E \rangle. \quad [7-104]$$

Tedy

$$W_v = \varepsilon_0 E_1^2 / 2. \quad [7-105]$$

Rychlost změny této veličiny je dána záporně vztatou rovnicí [7-98]

$$\frac{dW_v}{dt} = -W_v \omega_p^2 \int_{-\infty}^{\infty} u \hat{f}_0(u) \frac{d}{du} \left[\frac{\sin(\omega - ku)t}{\omega - ku} \right] du. \quad [7-106]$$

Integrace per partes dává

$$\frac{dW_v}{dt} = -W_v \omega_p^2 \left\{ \left[u \hat{f}_0(u) \frac{\sin(\omega - ku)t}{\omega - ku} \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{du} (u \hat{f}_0) \frac{\sin(\omega - ku)t}{\omega - ku} du \right\}.$$

Zintegrovaná část pro rozumné funkce $\hat{f}_0(u)$ vymizí a máme

$$\frac{dW_v}{dt} = W_v \frac{\omega}{k} \omega_p^2 \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_0(u) \left[\frac{\sin(\omega - ku)t}{\omega - ku} \right] du, \quad [7-107]$$

kde u jsme nahradili výrazem ω/k (konstanta), protože jenom rychlosti velmi blízké této hodnotě budou k integrálu přispívat. Vskutku pro dostatečně velká t může být hranatá závorka nahrazena delta funkcí

$$\delta\left(u - \frac{\omega}{k}\right) = \frac{k}{\pi} \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{\sin(\omega - ku)t}{\omega - ku} \right]. \quad [7-108]$$

Tedy

$$\frac{dW_v}{dt} = W_v \omega_p^2 \frac{\pi}{k} \frac{\omega}{k} \hat{f}_0\left(\frac{\omega}{k}\right) = W_v \pi \omega \frac{\omega_p^2}{k^2} \hat{f}_0\left(\frac{\omega}{k}\right). \quad [7-109]$$

Protože $\text{Im}(\omega)$ je rychlost růstu E_1 a W_v je úměrné E_1^2 , musí být

$$dW_v/dt = 2[\text{Im}(\omega)] W_v. \quad [7-110]$$

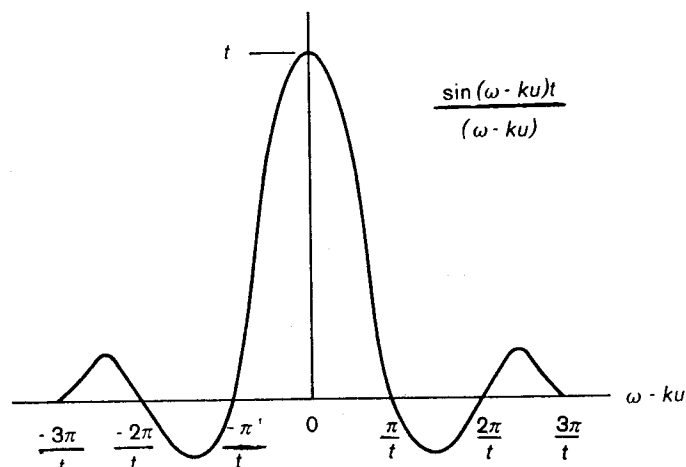
Tudíž

$$\text{Im}(\omega) = \frac{\pi}{2} \omega \frac{\omega_p^2}{k^2} \hat{f}_0\left(\frac{\omega}{k}\right), \quad [7-111]$$

což je v souladu s předchozím výsledkem [7-67] pro $\omega = \omega_p$.

7.6.1 Rezonanční částice

Nyní musíme přesněji určit, které rezonanční částice přispívají k lineárnímu Landauovu útlumu. Na obr. 7-25 je nakreslen faktor, jímž je funkce $\hat{f}_0(u)$ v intergrandu výrazu [7-107] vynásobena. Vidíme, že nejvíc přispívají částice s $|\omega - ku| < \pi/t$, čili $|v - v_\phi|t < \pi/k = \lambda/2$, tzn. ty částice původního rozdělení, které vzhledem k vlně ještě neproběhly vzdálenost poloviční vlnové



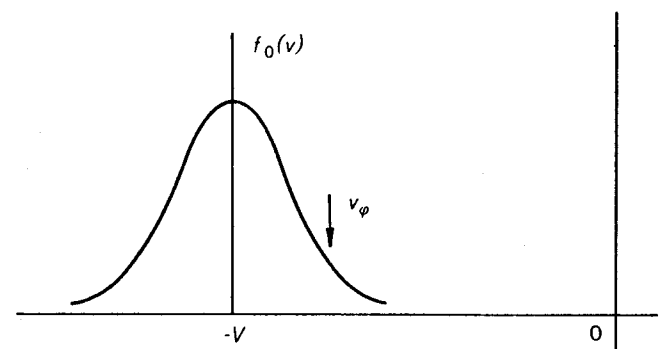
OBR. 7-25 Funkce, která udává relativní příspěvek různých rychlostí k Landauovu útlumu.

délky. Šířka prostředního maxima se s časem zužuje, jak lze očekávat. Vedlejší maxima v této „difrakční struktuře“ na obr. 7-25 pocházejí od částic, které už proběhly do sousedních půlvln vlnového potenciálu. Tyto částice se velmi rychle fázově rozptýlí, takže v průměru přispívají velice málo; počáteční rozdělení je zapomenuto. Všimněme si, že šířka prostředního maxima je nezávislá na počáteční amplitudě vlny; mezi rezonanční částice mohou tedy patřit jak zachycené, tak i nezachycené částice. Tento jev nemá žádný vztah k zachycování částic.

Vyřešení dvou paradoxů 7.6.2

Na obr. 7-25 je vidět, že integrand v rovnici [7-107] je sudou funkcí $\omega - ku$, takže částice pohybující se rychleji než vlna i částice pohybující se pomaleji než vlna přispívají k Landauovu útlumu. To odpovídá fyzikální představě, kterou jsme odvodili z obrázku 7-24. Na druhé straně sklon křivky na obr. 7-25, který vystupuje v integrandu rovnice [7-106], je lichou funkcí $\omega - ku$ a z toho bychom usuzovali, že částice pohybující se rychleji než vlna jí předávají energii, zatímco částice pomalejší než vlna si energii od ní berou. Tyto dva popisy se liší integrací per partes; oba jsou správné a který z nich vybereme, závisí na tom, zda chceme v integrandu mít funkci $\hat{f}_0(u)$ nebo $\hat{f}_0'(u)$.

Druhý paradox se týká galileovské invariantnosti. Řekneme-li, že útlum vyžaduje, aby bylo částic rychlejších než vlna méně než těch, které jsou pomalejší, nevzniká žádná potíž, pokud jsme v souřadnicové soustavě, v níž plazma zůstává v klidu. Přejdeme-li však k jiné soustavě pohybující se rychlostí V (obr. 7-26), ukáže se, že částic rychlejších než vlna je víc než pomalejších a očekávali bychom, že vlna poroste, namísto aby se zmenšovala. Tento paradox odstraníme znovuzavedením druhého členu v rov. [7-100], který jsme zanedbali. Jak jsme ukázali v odd. 7.5.1, tento



V pohybující se souřadné soustavě se na maxwellovském rozdělení objeví oblast s nestabilním sklonem. OBR. 7-26

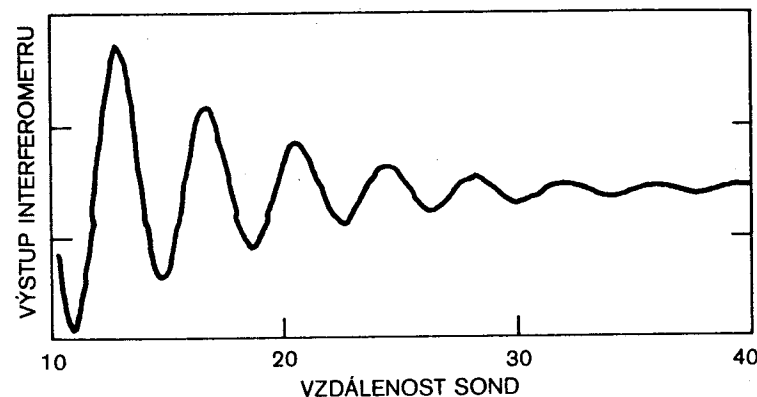
člen může způsobit, že $\langle \Delta W_k \rangle$ je záporné. V souřadnicové soustavě na obr. 7-26 druhý člen v rov. [7-100] není zanedbatelný, $\langle \Delta W_k \rangle$ je vskutku záporné a vlna se jeví, jako kdyby měla zápornou energii (tj. v driftujícím maxwellovském rozdělení je více energie, zůstává-li bez oscilací, než s oscilacemi). Vlna „roste“, ale přidá-li se energie vlně se zápornou energií, její amplituda se zmenší.

7.7 BGK A VAN KAMPENOVY MODY

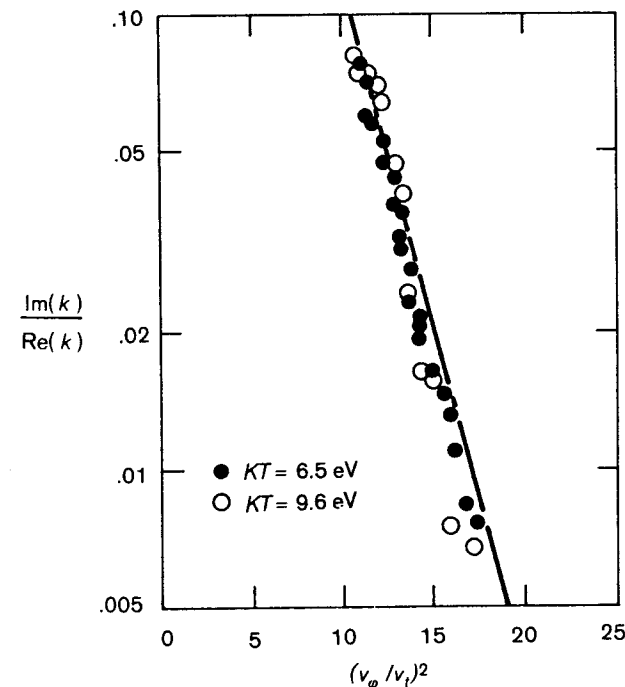
Viděli jsme, že Landauův útlum je přímo vázán na požadavek, aby $f_0(v)$ bylo zpočátku v prostoru homogenní. Na druhé straně je možno generovat netlumené elektronové vlny, jestliže $f(v, t=0)$ je zpočátku vytvořena tak, že je konstantní podél trajektorií částic. Z obr. 7-24 je zřejmé, že částice ani nezískají, ani neztrácejí energii, je-li na počátku hustota plazmatu podél každé trajektorie konstantní. Taková vlna se nazývá BGK mod, neboť I. B. Bernstein, J. M. Greene a M. D. Kruskal první ukázali, že jsou možné netlumené vlny s libovolnými ω , k , amplitudou a tvarem vln. Rozhodujícím parametrem, jenž musí být správně nastaven při „tvarování“ $f(v, t=0)$, aby vznikl BGK mod, je poměr zachycených a nezachycených elektronů. Vezmeme-li BGK mod v limitním případě malých amplitud, dostaneme tak zvaný Van Kampenův mod. V této limitě jsou zachyceny jenom částice s $v = v_\phi$. Počet zachycených částic můžeme změnit, přidáme-li k $f(v, t=0)$ člen úměrný $\delta(v - v_\phi)$. Rozbor obrázku 7-24 ukáže, že přidání částic podél linie $v = v_\phi$ nezpůsobí útlum; pro $t > 0$ existuje právě tolik částic, jež energii získávají, jako těch, jež energii ztrácejí. Zvolíme-li tedy rozdělovací funkce s δ -funkcemi na jiných hodnotách v_ϕ , můžeme generovat netlumené Van Kampenovy mody s libovolným v_ϕ . Takové singulární počáteční podmínky jsou však nefyzikální. Abychom dostali hladkou křivku $f(v, t=0)$, musíme sečíst Van Kampenovy mody s daným rozdělením fázové rychlosti v_ϕ . I když je každý z modů netlumený, celková porucha bude vykazovat Landauův útlum, protože jednotlivé mody nezůstanou navzájem ve fázi.

7.8 EXPERIMENTÁLNÍ OVĚŘENÍ

Jakkoliv Landauovo odvození bezsrážkového útlumu bylo stručné a jasné, nebylo zřejmé, že se týká fyzikálně pozorovatelného jevu, dokud J. M. Dawson nepodal delší intuitivní odvození, jehož jsme se volně přidrželi v odd. 7.6. Dokonce i potom existovaly pochybnosti, že by mohly být v laboratoři vytvořeny vhodné podmínky pro tento jev. Tyto pochyby byly v roce 1965 odstraněny experimentem Malmberga a Whartona. Na detekci a excitaci plazmových vln užíli sond rozmístěných podél sloupce bezsrážkového plazmatu. Fázi a amplitudu vln jako funkci vzdálenosti měřili interferometricky.



Obr. 7-27
Zápis interferometru ukazuje poruchu hustoty v tlumené plazmové vlně. [Převzato z J. H. Malmberg a C. B. Wharton, Phys. Rev. Letters 17, 175 (1966).]

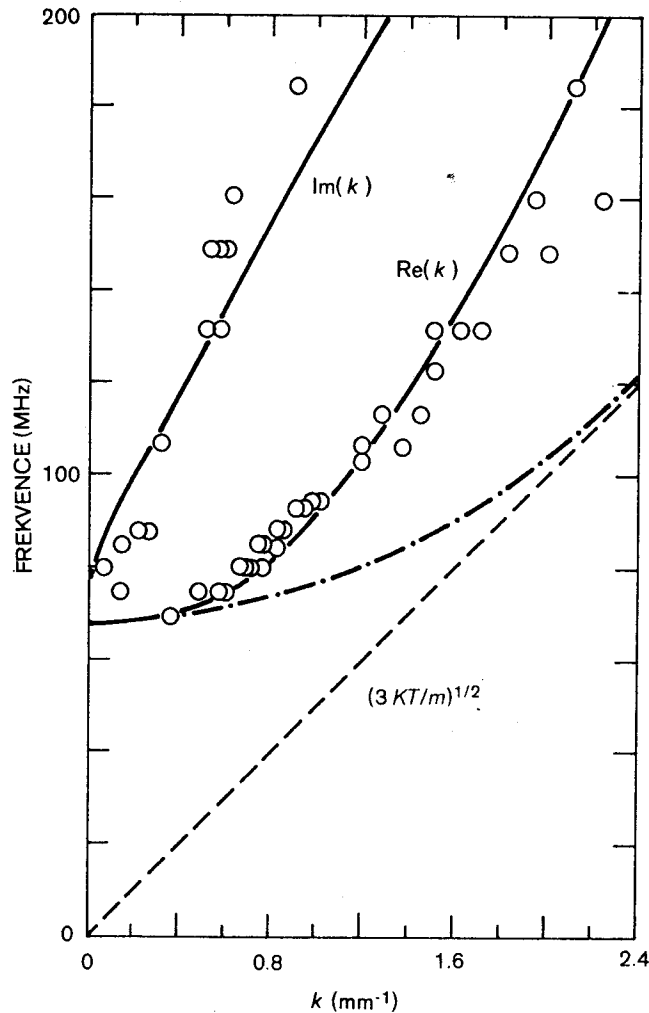


Obr. 7-28
Ověření Landauova útlumu v experimentu Malmbergové a Whartonové (uvedená citace).

Obr. 7-27 ukazuje prostorovou změnu tlumené vlny. Protože při experimentu bylo ω reálné, ale k komplexní, nemohou být tato data porovnávána s výsledkem, který jsme získali v rov. [7-70]. Místo toho se musí pro

reálné ω vypočítat $\text{Im}(k)/\text{Re}(k)$. V tomto poměru je rovněž obsažen faktor $\exp(-v_\phi^2/v_i^2)$, který je úměrný počtu rezonančních elektronů v maxwellovském rozdělení. Logaritmus $\text{Im}(k)/\text{Re}(k)$ by měl tudíž být úměrný $(v_\phi/v_i)^2$. Obr. 7-28 ukazuje, že měření je v soulase s teoretickou křivkou.

Podobný experiment v rovinné geometrii provedli Derfler a Simonen, takže výsledné $\text{Re}(\omega)$ může být porovnáno s výrazem [7-64]. Obrázek



OBR. 7-29 Experimentální měření disperzního vztahu pro plazmové vlny v rovinné geometrii. [Převzato z H. Derfler a T. Simonen, J. Appl. Phys. 38, 5018 (1967).]

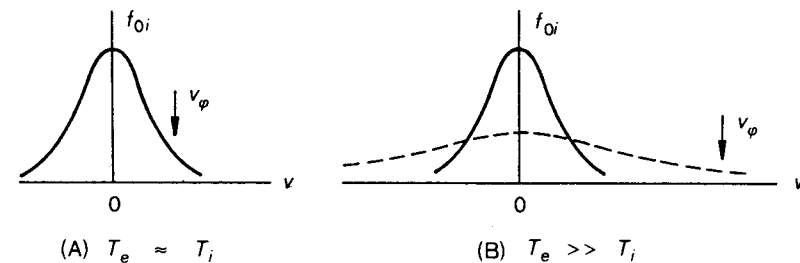
7-29 ukazuje výsledky jejich měření $\text{Re}(k)$ a $\text{Im}(k)$ při různých frekvencích. Čerchovaná křivka jsou hodnoty výrazu [7-64]; je to táž závislost jako na obr. 4-5. Experimentální body se odchyli od čerchované křivky v důsledku členů vyššího řádu v rozvoji v rov. [7-59]. Teoretická křivka počítaná podle rov. [7-54] však s těmito výsledky dobře souhlasí.

IONTOVÝ LANDAUŮV ÚTLUM 7.9

Elektrony nejsou jediné možné rezonanční částice. Má-li vlna natolik malou fázovou rychlost, že odpovídá tepelné rychlosti iontů, může se objevit iontový Landauův útlum. Například na iontově akustickou vlnu působí Landauův útlum velmi silně. Připomeňme si z rov. [4-41], že disperzní vztah pro iontové vlny je

$$\frac{\omega}{k} = v_z = \left(\frac{KT_e + \gamma_i KT_i}{M} \right)^{1/2} \quad [7-112]$$

Je-li $T_e \leq T_i$, leží fázová rychlost v oblasti, kde sklon křivky $f_{oi}(v)$ je záporný, jak ukazuje obr. 7-30 (A). Iontové vlny jsou tudíž pro $T_e \leq T_i$ silně tlumeny mechanismem Landauova útlumu. Iontové vlny lze pozorovat pouze pro $T_e \gg T_i$ [obr. 7-30 (B)], takže fázová rychlost leží daleko na chvostu rychlostního rozdělení iontů. Vtipně a kontrolovatelným způsobem zavedli

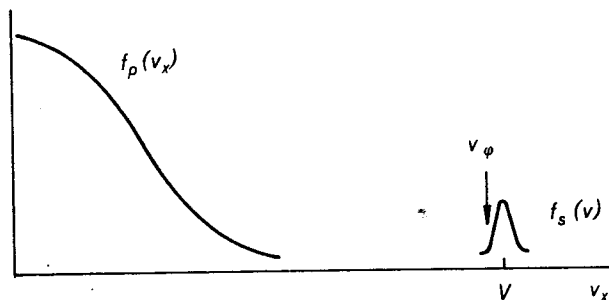


Vysvětlení Landauova útlumu iontově akustických vln. Pro $T_e \approx T_i$ zasahuje fázová rychlost do iontového rozdělení; při $T_e \gg T_i$ je jen velmi málo iontů, jež mají rychlost blízkou v_ϕ . Přidáním lehkých iontů (čárkovaná křivka) Landauův útlum vzroste.

OBR 7-30

Landauův útlum do iontových vln Alexeff, Jones a Montgomery. V plazmatu těžkých iontů (jako jsou xenonové) s $T_e \gg T_i$ vytvořili slabě tlumenou vlnu, pak přidali malé množství lehkých atomů (helium). Protože helium mělo přibližně stejnou teplotu jako xenon, ale mnohem menší hmotnost, jeho rozdělovací funkce byla mnohem širší, jak ukazuje čárkovaná křivka na obr. 7-30 (B). Rezonanční heliové ionty pak způsobily, že vlna byla tlumená.

ÚLOHA 7-1. Nekonečné homogenní plazma s pevnými ionty má rozdělovací funkci elektronů složenou (1) z maxwellovského rozdělení „plazmových“ elektronů s hustotou n_p a teplotou T_p (toto rozdělení je vůči laboratornímu souřadnicovému systému v klidu) a (2) z maxwellovského rozdělení elektronů „svazku“ s hustotou n_s a teplotou T_s (střed tohoto rozdělení je v bodě $\mathbf{v} = V\hat{\mathbf{x}}$) (obr. 7.31). Je-li n_s infinitesimálně malé, jsou plazmové oscilace postupující ve směru x tlumeny Landauovým útlumem.



OBR. 7.31 Neporušené rozdělovací funkce plazmatu $f_p(v_x)$ a elektronového svazku $f_s(v_x)$ při interakci svazku s plazmatem.

Bude-li n_s velké, vznikne dvousvazková nestabilita. Kritickou hodnotu n_s , při níž se nestabilita začne projevovat, můžete nalézt tak, že položíte sklon celkové rozdělovací funkce roven nule. Aby výpočet zůstal jednoduchý, můžete přibližnou odpověď hledat takto:

- Napište výraz pro $f_p(v)$ a $f_s(v)$ s užitím těchto označení: $v = v_x$, $a^2 = 2KT_p/m$, $b^2 = 2KT_s/m$.
- Předpokládejte, že fázová rychlost v_ϕ je hodnota v , při níž $f'_s(v)$ má největší kladný sklon. Najděte v_ϕ a $f'_p(v_\phi)$.
- Nalezněte $f'_p(v_\phi)$ a položte $f'_p(v_\phi) + f'_s(v_\phi) = 0$.
- Pro $V \gg b$ ukažte, že kritická hustota svazku je dána přibližně výrazem

$$\frac{n_s}{n_p} = (2e)^{-1/2} \frac{T_s}{T_p} \frac{V}{a} \exp(-V^2/a^2).$$

Kapitola osmá

NELINEÁRNÍ JEVY

ÚVOD 8.1

Až do této chvíle jsme svoji pozornost omezili téměř výlučně na *lineární* jevy, tj. na jevy popsatelné rovnicemi, v nichž závisle proměnná se neobjevuje ve vyšší než první mocnině. Například celý náš postup v kapitole 4., kdy jsme se zabývali vlnami, se zakládal na linearizaci, při níž byly členy vyššího řádu považovány za malé a byly zanedbány. Tento postup nám umožňoval zabývat se vždycky jenom jednou Fourierovou komponentou, s oním uklidňujícím vědomím, že s každou nesinusovou vlnou lze zacházet jako se součtem vhodného spektra Fourierových komponent. Tento postup je v pořádku, pokud je amplituda vlny natolik malá, že platí lineární rovnice.

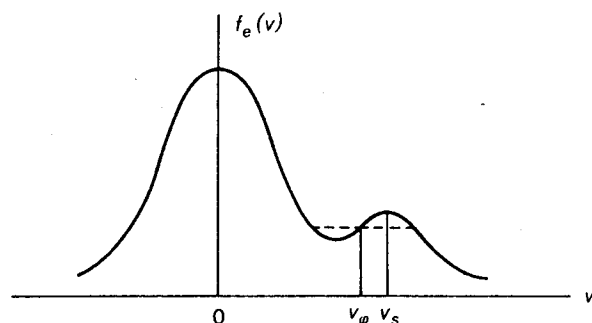
Žel v mnoha experimentech nejsou vlny v okamžiku, kdy je pozorujeme, už popsatelné lineární teorií. Vezměme například driftové vlny. Protože jsou nestabilní, jejich amplituda by podle lineární teorie exponenciálně narůstala. Toto narůstání většinou nepozorujeme – protože obvyčejně nevíme, kdy se máme začít dívat – ale pozorujeme vlny, které už nenarůstají a mají velkou a stále stejnou amplitudu. Skutečnost, že vlny už nenarůstají, znamená, že lineární teorie už neplatí a že amplitudu omezuje nějaký *nelineární* efekt. Ukázalo se, že teoretické vysvětlení tohoto jednoduchého pozorování je překvapivě obtížným problémem, protože amplituda „nasycených“ vln je poměrně malá.

Při narůstání amplitudy může vlna projít řadou změn. Může změnit svůj tvar – např. ze sinusové vlny se změni v podobu trojúhelníku skloněného na jednu stranu. To je totéž, jako když řekneme, že vznikly Fourierovy komponenty o jiných frekvencích (nebo vlnočtech). V krajním případě se vlna může i „rozpadnout“, podobně jako mořské vlny na pláži,

a přeměnit energii vlny v tepelnou energii částic. Velká vlna může ve svých potenciálních důlech zachytit částice a změnit tak vlastnosti prostředí, jímž se šíří. S tímto efektem jsme se už setkali, když jsme hovořili o nelineárním Landauově útlumu. Je-li plazma tak silně rozrušeno, že je v něm spojitě spektrum frekvencí, je ve stavu *turbulence*. Tento stav se musí popisovat statisticky podobně jako v hydrodynamice tekutin. Důležitým důsledkem turbulence plazmatu je *anomální odpor*, kdy pohyb elektronů je zpomalován srážkami s náhodnými fluktuacemi elektrického pole namísto s ionty. Tohoto jevu se užívá při ohmickém ohřevu plazmatu (odd. 5.6.3) na vysoké teploty, kdy normální odpor nestačuje.

Nelineární jevy můžeme rozdělit do tří základních kategorií:

1. *Principiálně nelinearizovatelné problémy*. Například difúze v úplně ionizovaném plynu je ze své podstaty nelineárním problémem (oddíl 5.8), protože difúzní koeficient se mění s hustotou. V oddílu 6.1 jsme viděli, že problémy hydromagnetické rovnováhy jsou nelineární. V oddílu 8.2 uvedeme jako příklad další důležitý jev – plazmové stěnové vrstvy.



OBR. 8-1 Nestabilní rychlostní rozdělení elektronů se dvěma vrcholy.

2. *Interakce vlna–částice*. Příkladem takové interakce je zachycení částice (oddíl 7.5); může vést k nelineárnímu útlumu. Klasickým příkladem je kvazilineární efekt, při němž vlny mění rovnovážné rychlostní rozdělení plazmatu. Vezmeme plazma s elektronovým svazkem (obr. 8-1). Poněvadž na rozdělovací funkci existuje oblast, kde df_0/dv je kladné, má systém inverzní Landauův útlum a plazmové oscilace s fázovou rychlostí v_ϕ v oblasti kladné derivace jsou nestabilní (rov. [7-67]). Nejprve jsou interakcemi vlna–částice postiženy rezonanční elektrony a jejich rozdělovací funkce se bude měnit působením elektrického pole vlny. Vlny se budou stabilizovat, když $f_e(v)$ bude vlnami zploštěna, jak to ukazuje čárkovaný úsek na obr. 8-1, takže nové rovnovážné rozdělení už nebude mít kladnou derivaci. To je typický kvazilineární efekt. Jiný příklad interakcí vlna–částice, plazmatická echa, uvedeme v oddílu 8.6.

3. *Interakce vlna–vlna*. Vlny mohou spolu navzájem interagovat dokonce i podle tekutinového popisu, v němž se jevy spojené s jednotlivými částicemi zanedbávají. Samotná vlna může slábnout předně tím, že generuje vyšší harmonické frekvence ke své základní frekvenci. Tyto harmonické vlny mohou pak interagovat mezi sebou a s původní vlnou a vytvářet další vlny na zánějových frekvencích. Tyto zánějové vlny mohou pak zase tak dalece narůst, že mohou interagovat a vytvářet další zánějové frekvence, dokud nebude spektrum spojitě. Je zajímavé promyslet si, jakým směrem proudí energie v turbulentním spektru. V mechanice dynamiky tekutin se dlouhovlnné mody rozpadají na krátkovlnné mody, neboť ve velkých vírech je více energie a může se zmenšit jenom rozštěpením na malé víry, z nichž každý má méně energie. Nejmenší víry pak přeměňují svůj kinetický pohyb viskózním útlumem v teplo. V plazmatu se zpravidla setkáváme s opakem. Krátkovlnné mody mají tendenci splynout v dlouhovlnné mody, jež mají méně energie; energie elektrického pole $\epsilon_0 E^2/2$ je řádově rovna $\epsilon_0 k^2 \phi^2/2$, takže při pevném $e\phi$ (jež je obvykle dáno hodnotou KT_e) mají mody s malým k , tj. s velkým λ , méně energie. Z toho plyne, že nestabilitami při velkém k energie přechází na malá k a musí existovat nějaký mechanismus, jímž dochází k disipaci energie. Tento problém neexistuje pro velká k , kde může vzniknout Landauův útlum. Při pohybech ve směru B_0 by mohly nelineární „modulační“ nestability způsobit, že energie při malých k přechází na ionty a zahřívá je. Při pohybech kolmých na B_0 budou mít největší víry vlnové délky řádově stejné jako rozměry plazmatu a mohly by způsobit ztráty plazmatu konvekcí ke stěnám.

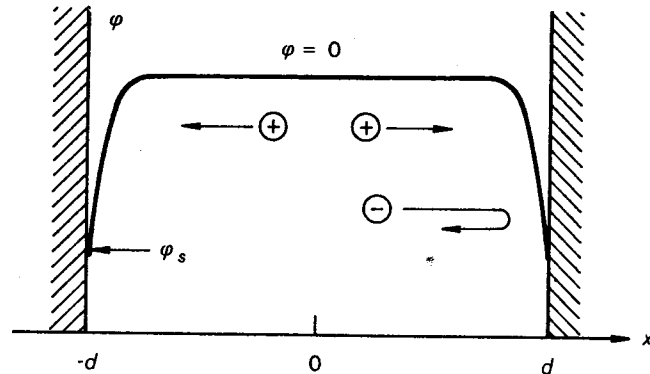
I když v lineární teorii vln a nestabilit zůstávají některé nevyřešené problémy, hlavní zájem výzkumu plazmatu se obrací na daleko méně prostudovanou oblast nelineárních jevů. Z příkladů uvedených v následujících oddílech získáme představu o některých jevech, jež se už teoreticky a experimentálně studovaly.

STĚNOVÉ VRSTVY 8.2

Nezbytnost existence stěnové vrstvy 8.2.1

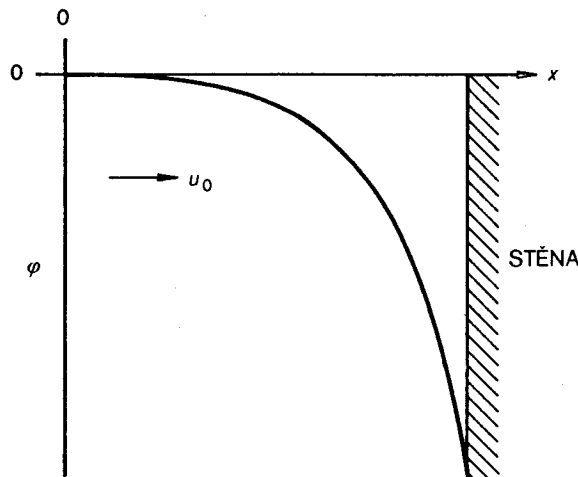
Ve všech skutečných zařízeních je plazma uzavřeno ve vakuové komoře konečných rozměrů. Co se stane s plazmatem na stěně? Omezme se pro jednoduchost na jednorozměrný model bez magnetického pole (obr. 8-2). Předpokládejme, že uvnitř plazmatu není patrné žádné elektrické pole, můžeme tam tedy položit potenciál ϕ roven nule. Narazí-li ionty a elektrony do stěny, rekombinují a ztrácejí se z plazmatu. Poněvadž elektrony mají mnohem vyšší tepelné rychlosti než ionty, ztrácejí se rychleji a zanechávají plazma s výsledným kladným nábojem. Plazma pak musí mít vůči stěně kladný potenciál, tzn. potenciál stěny ϕ_s je záporný. Tento potenciál se nemůže rozšířit přes celé plazma, protože Debyeovo stínění

(oddíl 1.4) omezi změny potenciálu na tenkou vrstvu o tloušťce řádově několika Debyeových délek. Této vrstvičce, která musí existovat na všech chladných stěnách, jichž se plazma dotýká, říkáme *stěnová vrstva*. Úlohou stěnové vrstvy je vytvářet potenciálovou bariéru, takže pohyblivější částice,



OBR. 8-2 Potenciál plazmatu ϕ vytváří v blízkosti stěny vrstvu, na níž se elektrony odrážejí. Coulombůvská bariéra $e\phi_s$ se nastaví tak, že za sekundu dostihne stěnu stejný počet iontů jako elektronů.

obvyčejně elektrony, jsou zadržovány elektrostaticky. Výška bariéry se samočinně nastaví tak, že proud elektronů, jež mají dostatek energie na překonání bariéry a dosáhnou stěny, se právě rovná toku iontů dopadajících na stěnu.



OBR. 8-3 Potenciál ϕ v rovinné stěnové vrstvě. Předpokládáme, že chladné ionty vstupují do vrstvy s jednotnou rychlostí u_0 .

Rovnice pro rovinnou stěnovou vrstvu 8.2.2

V oddíle 1.4 jsme při odvozování Debyeovy délky linearizovali Poissonovu rovnici. Máme-li však přesně vyšetřit průběh $\phi(x)$ ve stěnové vrstvě, musíme řešit nelineární problém; zjistíme, že ne vždycky existuje řešení. Obrázek 8-3 ukazuje situaci v blízkosti jedné ze stěn. Představme si, že z vlastního plazmatu do oblasti stěnové vrstvy ionty vstupují v rovině $x = 0$ driftovou rychlostí u_0 . Tento drift potřebujeme kvůli započtení úniku iontů směrem na stěnu z oblasti, kde ionizaci vznikly. Pro jednoduchost položíme $T_i = 0$, takže v místě $x = 0$ mají všechny ionty rychlost u_0 . Předpokládejme, že se jedná o stacionární stav a že v oblasti vrstvy nedochází ke srážkám. Potenciál ϕ nechť monotonně klesá s x ; vlastně by průběh ϕ mohl mít prostorové oscilace, pak by v stacionárním stavu existovaly zachycené částice. K tomu ve skutečnosti nemůže dojít, protože disipativní procesy mají tendenci rozbít jakoukoliv takovou složitější strukturu.

Je-li $u(x)$ rychlost iontů, pak ze zákona zachování energie platí

$$\frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}mu_0^2 - e\phi(x), \quad (8-1)$$

$$u = \left(u_0^2 - \frac{2e\phi}{M}\right)^{1/2}. \quad (8-2)$$

Rovnice kontinuity pro ionty pak dává hustotu iontů n_i vyjádřenou hustotou vlastního plazmatu n_0

$$n_0u_0 = n_i(x)u(x), \quad (8-3)$$

$$n_i(x) = n_0 \left(1 - \frac{2e\phi}{Mu_0^2}\right)^{-1/2}. \quad (8-4)$$

Ve stacionárním stavu se budou elektrony skoro přesně řídit Boltzmannovým vztahem

$$n_e(x) = n_0 \exp(e\phi/KT_e). \quad (8-5)$$

Poissonova rovnice pak je

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{e}{\epsilon_0} (n_e - n_i) = \frac{en_0}{\epsilon_0} \left[\exp\left(\frac{e\phi}{KT_e}\right) - \left(1 - \frac{2e\phi}{Mu_0^2}\right)^{-1/2} \right]. \quad (8-6)$$

Strukturu této rovnice snadněji pochopíme, zjednodušíme-li označení následujícím způsobem

$$\chi \equiv -\frac{e\phi}{KT_e}, \quad \xi \equiv \frac{x}{\lambda_D} = x \left(\frac{n_0e^2}{\epsilon_0KT_e}\right)^{1/2}, \quad M \equiv \frac{u_0}{(KT_e/M)^{1/2}}. \quad (8-7)$$

Pak rov. [8-6] dostává tvar

$$\chi'' = \left(1 - \frac{2\chi}{M^2}\right)^{-1/2} - e^{-\chi}, \quad (8-8)$$

kde apostrof značí $d/d\xi$. To je nelineární rovnice pro rovinnou stěnovou vrstvu; přijatelné řešení má jenom tehdy, je-li M dostatečně velké. Smysl symbolu M se ozřejmí v oddíle o rázových vlnách.

8.2.3 Bohmovo kritérium stěnové vrstvy

Rovnici [8-8] lze jednou integrovat po vynásobení obou stran χ'

$$\int_0^\xi \chi' \chi'' d\xi_1 = \int_0^\xi \left(1 - \frac{2\chi}{M^2}\right)^{-1/2} \chi' d\xi_1 - \int_0^\xi e^{-\chi} \chi' d\xi_1, \quad [8-9]$$

kde ξ_1 je integrační proměnná. Protože pro $\xi = 0$ je $\chi = 0$, integraci snadno dostáváme

$$\frac{1}{2}(\chi^2 - \chi_0^2) = M^2 \left[\left(1 + \frac{2\chi}{M^2}\right)^{1/2} - 1 \right] + e^{-\chi} - 1. \quad [8-10]$$

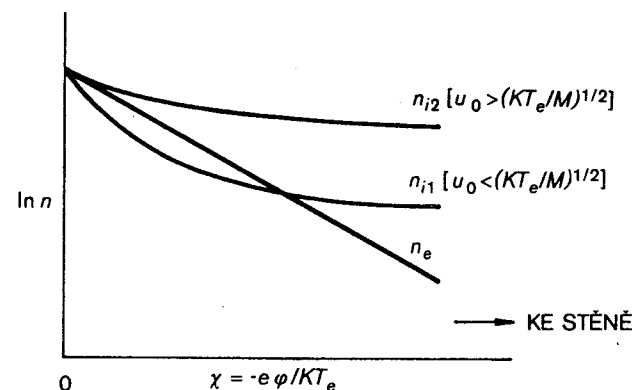
Je-li v plazmatu $E = 0$, musíme pro $\xi = 0$ položit $\chi_0 = 0$. Abychom našli χ , museli bychom druhou integraci provést numericky; ale až je řešení jakékoliv, je jisté, že pravá strana rov. [8-10] je kladná pro všechna χ . Zejména pro $\chi \ll 1$ můžeme členy na pravé straně rozvinout v Taylorovu řadu

$$M^2 \left[1 + \frac{\chi}{M^2} - \frac{1}{2} \frac{\chi^2}{M^4} + \dots - 1 \right] + 1 - \chi + \frac{1}{2}\chi^2 + \dots - 1 > 0, \\ \frac{1}{2}\chi^2 \left(-\frac{1}{M^2} + 1 \right) > 0, \\ M^2 > 1 \quad \text{neboli} \quad u_0 > (KT_e/M)^{1/2}. \quad [8-11]$$

Tato nerovnost je známa jako *Bohmovo kritérium stěnové vrstvy*. Říká, že ionty musí do oblasti vrstvy vstupovat s rychlostí větší, než je akustická rychlost v_z . Aby ionty mohly získat tuto usměrněnou rychlost u_0 , musí v plazmatu být konečné elektrické pole. Náš předpoklad, že v místě $\xi = 0$ je $\chi' = 0$, je tudíž jenom přibližný a je možno ho takto formulovat proto, že rozměry stěnové vrstvy jsou obvykle daleko menší než rozměry vlastního plazmatu, v němž jsou ionty urychlovány. Hodnota u_0 je do jisté míry libovolná a závisí na tom, kde zvolíme rozhraní $x = 0$ mezi plazmatem a stěnovou vrstvou. Tok iontů $n_0 u_0$ je ovšem pevně dán rychlostí ionizačního procesu, takže mění-li se u_0 , bude hodnota n_0 v místě $x = 0$ nepřímo úměrná u_0 . Mají-li ionty konečnou teplotu, bude kritická driftová rychlost u_0 o něco menší.

Fyzikálnímu smyslu Bohmova kritéria snadno porozumíme ze závislosti iontové a elektronové hustoty na χ (obr. 8-4). Podle Boltzmannova vztahu elektronová hustota n_e exponenciálně klesá s χ . Iontová hustota rovněž klesá, protože ionty jsou urychlovány v potenciálu vrstvy. Mají-li

ionty zpočátku velkou energii, klesá $n_i(\chi)$ pomalu, protože pole ve stěnové vrstvě způsobuje relativně malou změnu iontové rychlosti. Mají-li ionty zpočátku malou energii, klesá $n_i(\chi)$ rychle a může se dostat pod křivku n_e .



Změna (v logaritmickém měřítku) hustoty iontů a elektronů ve stěnové vrstvě v závislosti na normalizovaném potenciálu χ . Iontová hustota je nakreslena pro dva případy: u_0 je větší a u_0 je menší než kritická rychlost.

OBR. 8-4

V tom případě je v blízkosti $\chi = 0$ rozdíl $n_e - n_i$ kladný; a podle rov. [8-6] se $\phi(x)$ musí zakřivovat nahoru, což je v rozporu s požadavkem, že vrstva musí odpuzovat elektrony. Aby k tomuto nedošlo, musí být sklon $n_i(\chi)$ v místě $\chi = 0$ menší (v absolutní hodnotě) než sklon $n_e(\chi)$; tato podmínka je totožná s podmínkou $M^2 > 1$.

Zákon Childův–Langmuirův 8.2.4

Protože $n_e(\chi)$ exponenciálně klesá s χ , může být v oblasti velkých hodnot χ , tj. blízko u stěny (nebo u nějaké záporné elektrody), elektronová hustota zanedbána. Přibližná Poissonova rovnice potom je

$$\chi'' \approx \left(1 + \frac{2\chi}{M^2}\right)^{-1/2} \approx \frac{M}{(2\chi)^{1/2}}. \quad [8-12]$$

Vynásobením χ' a integrací od $\xi_1 = \xi_z$ do $\xi_1 = \xi$, dostáváme

$$\frac{1}{2}(\chi^2 - \chi_z^2) = \sqrt{2} M (\chi^{1/2} - \chi_z^{1/2}), \quad [8-13]$$

kde ξ_z znamená místo, kde jsme začali zanedbávat n_e . Můžeme znovu stanovit nulu proměnné χ tak, že $\chi_z = 0$ v bodě $\xi = \xi_z$. Můžeme rovněž zanedbat χ_z' , protože lze očekávat, že průběh potenciálu bude mít mnohem

strmější sklon v oblasti $n_e = 0$ než v oblasti s konečným n_e . Z rov. [8-13] pak vychází

$$\begin{aligned} \chi'^2 &= 2^{3/2} M \chi^{1/2}, \\ \chi' &= 2^{3/4} M^{1/2} \chi^{1/4} \end{aligned} \quad [8-14]$$

neboli

$$d\chi/\chi^{1/4} = 2^{3/4} M^{1/2} d\xi. \quad [8-15]$$

Integrací od $\xi = \xi_z$ do $\zeta = \xi_z + \xi_d = \xi_{\text{stěna}}$ dostáváme

$$\frac{4}{3} \chi_s^{3/4} = 2^{3/4} M^{1/2} \zeta_d \quad [8-16]$$

neboli

$$M = \frac{4\sqrt{2}}{9} \frac{\chi_s^{3/2}}{\zeta_d^2}. \quad [8-17]$$

Přejdeme opět k proměnným u_0 a ϕ a za ξ_d dosadíme d/λ_D , pak pro iontový proud ke stěně $J = en_0 u_0$ nacházíme výraz

$$J = \frac{4}{9} \left(\frac{2e}{M} \right)^{1/2} \frac{\epsilon_0 |\phi_s|^{3/2}}{d^2}. \quad [8-18]$$

To je známý Childův–Langmuirův zákon pro proud v rovinné diodě omezený prostorovým nábojem.

Změny potenciálu v systému plazma–stěna můžeme rozdělit na tři části. Nejbliže u stěny je oblast bez elektronů, jejíž tloušťka d je dána rovnicí [8-18], v níž J_0 je určeno rychlostí ionizačního procesu a ϕ_s je určeno rovností toků elektronů a iontů. Pak přichází oblast, v níž n_e nabývá na významu. Jak jsme ukázali v oddíle 1.4, měřítkem pro tuto oblast je Debyeova délka. Konečně je to třetí, daleko rozměrnější oblast, jakási „předvrstva“, v níž jsou ionty urychlovány potenciálovým spádem $\phi \geq \frac{1}{2} kT_e/e$ na požadovanou rychlost u_0 . Podle toho kterého experimentu se za „předvrstvu“ může brát celé plazma, střední volná dráha nebo střední ionizační dráha. Průběh potenciálu je samozřejmě hladký, na tři oblasti jsme jej rozdělili jen kvůli snadnému pochopení a museli jsme k tomu použít nestejná délková měřítka. V počátcích zkoumání výbojů v plynech byly stěnové vrstvy pozorovány jako temná místa, v nichž nejsou přítomny elektrony, nedochází k excitaci atomů a k emisi. Později byly změny potenciálu měřeny elektrostatickým ohybem tenkého elektronového svazku namířené rovnoběžně se stěnou.

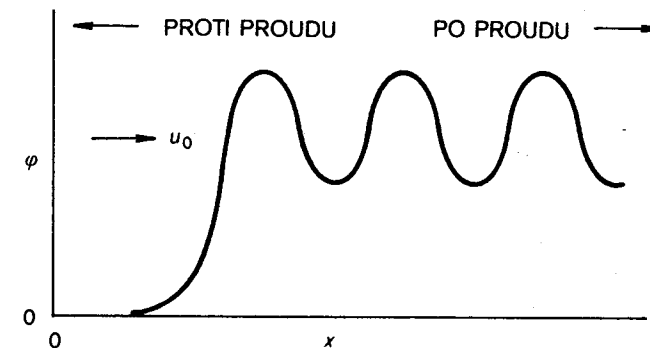
8.3 IONTOVĚ AKUSTICKÉ RÁZOVÉ VLNY

Letí-li tryskové letadlo rychleji než zvuk, vytváří rázovou vlnu. Je to principiálně nelineární jev, neboť neexistuje stadium, kdy by tato vlna byla malá a narůstala. Tryskové letadlo je rychlejší než vlny ve vzduchu, takže neporušené prostředí nemůže být předbíhajícími signály „varováno“ dříve, než na něj narazí velká rázová vlna. U hydrodynamických vln hraji hlavní

roli srážky. Rázové vlny existují také v plazmatu, i když v něm ke srážkám nedochází. Magnetickou rázovou vlnu – „přídovou vlnu“* – vytváří Země, brázdící meziplanetární plazma a vlekoucí za sebou dipólové magnetické pole. Budeme hovořit o jednodušším příkladu: o bezsrážkové jednorozměrné rázové vlně, která se vyvine z iontové vlny s velkou amplitudou.

Sagdějevův potenciál 8.3.1

Obrázek 8-5 ukazuje idealizovaný průběh potenciálu v iontově akustické rázové vlně. Nyní tento tvar vysvětlíme. Vlna postupuje doleva rychlostí u_0 . Přejdeme-li k souřadnému systému, který se pohybuje s vlnou, bude funkce $\phi(x)$ v čase konstantní a my budeme vidět proud plazmatu narážející na vlnu zleva rychlostí u_0 . Pro jednoduchost nechť $T_i = 0$, takže všechny ionty dopadají touž rychlostí u_0 , a nechť elektrony mají maxwellovské rozdělení.



OBR. 8-5
Typické rozložení potenciálu v iontově akustické rázové vlně. Vlna se pohybuje doleva, takže v souřadné soustavě spojené s vlnou proudí ionty rychlostí u_0 zleva do vlny.

Poněvadž se rázová vlna pohybuje daleko pomaleji než elektrony při svém tepelném pohybu, můžeme posunutí středu v maxwellovském rozdělení zanedbat. Pro rychlost iontů vychází ze zákona zachování energie

$$u = \left(u_0^2 - \frac{2e\phi}{M} \right)^{1/2}. \quad [8-19]$$

Je-li n_0 hustota neporušeného plazmatu, je hustota iontů v rázové vlně

$$n_i = \frac{n_0 u_0}{u} = n_0 \left(1 - \frac{2e\phi}{M u_0^2} \right)^{-1/2}. \quad [8-20]$$

* takto jsme přeložili termín „bow shock“ (výslovnost: [bau šok]) – pozn. překl.

Elektronová hustota je dána Boltzmannovým vztahem. Poissonova rovnice pak dává

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{e}{\epsilon_0}(n_e - n_i) = \frac{en_0}{\epsilon_0} \left[\exp\left(\frac{e\phi}{KT_e}\right) - \left(1 - \frac{2e\phi}{Mu_0^2}\right)^{-1/2} \right]. \quad [8-21]$$

To je ovšem táž rovnice (rov. [8-6]), jako jsme měli pro stěnovou vrstvu. Rázová vlna není nic víc než stěnová vrstva pohybující se plazmatem. Zavedeme nyní bezrozměrné proměnné

$$\chi \equiv + \frac{e\phi}{KT_e}, \quad \xi = \frac{x}{\lambda_D}, \quad M \equiv \frac{u_0}{(KT_e/M)^{1/2}}. \quad [8-22]$$

Všimněme si, že jsme změnili znaménko v definici χ , abychom stejně jako u vrstvy měli i v tomto případě χ kladné. Veličina M se nazývá *Machovo číslo* rázové vlny. Rovnici [8-21] můžeme nyní napsat

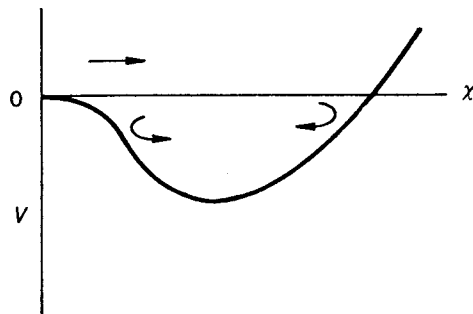
$$\frac{d^2\chi}{d\xi^2} = e^{\chi} - \left(1 - \frac{2\chi}{M^2}\right)^{-1/2} \equiv -\frac{dV(\chi)}{d\chi}, \quad [8-23]$$

kteřá se od rovnice pro stěnovou vrstvu [8-8] liší jenom v důsledku změněného znaménka χ .

Vlastnosti řešení rov. [8-23] objasnil R. Z. Sagdžev, který užil analogie s oscilátorem v potenciálové jámě. Výchylka x oscilátoru vystaveného síle $-m dV(x)/dx$ je dána rovnicí

$$d^2x/dt^2 = -dV/dx. \quad [8-24]$$

Jestliže pravou stranu rov. [8-23] definujeme jako $-dV/d\chi$, je tato rovnice totožná s rovnicí oscilátoru, kde potenciál χ má roli x a $d/d\xi$ nahrazuje d/dt . Kvazipotenciál $V(\chi)$ se někdy nazývá Sagdževův potenciál. Funkci

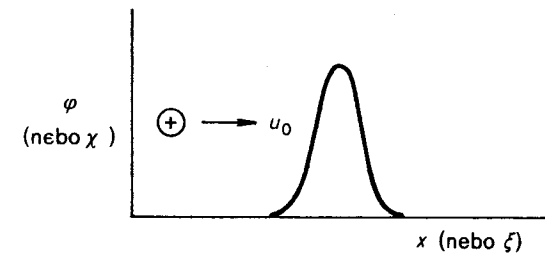


OBR. 8-6 Sagdževův potenciál $V(\chi)$. Horní šipka je trajektorie kvazičástice, která popisuje soliton: vpravo se odráží a vrací se. Spodní šipky naznačují pohyb kvazičástice, která ztratila energii a je zachycena v potenciálové jámě. Odrazy tam a zpět popisují oscilace za čelem rázové vlny.

$V(\chi)$ můžeme nalézt integrací rov. [8-23] s okrajovými podmínkami $V(\chi) = 0$ pro $\chi = 0$

$$V(\chi) = 1 - e^{\chi} + M^2 \left[1 - \left(1 - \frac{2\chi}{M^2}\right)^{1/2} \right]. \quad [8-25]$$

Pro M v určitém rozsahu hodnot má tato funkce tvar jako na obr. 8-6. Kdyby to opravdu byla potenciálová jáma, částice vstupující zleva by přecházela na pravou stranu jámy ($x > 0$), odrazila by se a vrátila do místa ($x = 0$), přičemž by jednou proběhla tam a zpět. Podobně kvazičástice v naší analogii se jednou vychýlí ve směru kladného χ a vrátí se zpět k $\chi = 0$, jak ukazuje obr. 8-7. Jeden takový impuls se nazývá *soliton*.



Potenciál v solitonu pohybujícím se doleva. OBR. 8-7

Je to porucha potenciálu a hustoty postupující na obr. 8-7 doleva rychlostí u_0 .

Jestliže částice během doby, kdy je v potenciálové jámě, ztratí energii, nikdy se do místa $x = 0$ nevrátí, ale bude oscilovat (v čase) okolo nějaké kladné hodnoty x . Podobně malá disipace způsobí, že potenciál rázové vlny bude oscilovat (v prostoru) okolo nějaké kladné hodnoty ϕ . Přesně to je znázorněno na obr. 8-5. Ve skutečnosti pro tento jev není disipace potřeba, odraz iontů od čela rázové vlny má též účinek. Abychom to pochopili, představme si, že energie iontů je trochu „rozmazána“ tepelným pohybem a že výška $e\phi$ čela rázové vlny je právě tak veliká, že některé ionty odrazí zpět doleva, zatímco zbytek přejde přes potenciálový val doprava. Odražené ionty způsobí zvětšení iontové hustoty v oblasti nalevo od čela vlny (obr. 8-5). To znamená, že veličina

$$\chi' = \frac{1}{n_0} \int_0^{\xi} (n_e - n_i) d\xi_1 \quad [8-26]$$

se zmenší. Poněvadž χ' je analogií dx/dt u oscilátoru, ztratil náš myšlený oscilátor rychlost a je zachycen v potenciálové jámě z obr. 8-6.

8.3.2 Kritická Machova čísla

Řešení, ať už v podobě solitonu nebo v podobě sledu vln, existuje jenom pro jistý rozsah hodnot M . Dolní mez pro M je dána podmínkou, že $V(\chi)$ je potenciálová jáma a nikoliv val. Rozložením rovnice [8-25] v řadu pro $\chi \ll 1$ vychází

$$\frac{1}{2}\chi^2 - (\chi^2/2M^2) > 0, \quad M^2 > 1. \quad [8-27]$$

To je fyzikálně i matematicky přesně totéž, jako Bohmovo kritérium pro existenci vrstvy (rov. [8-11]).

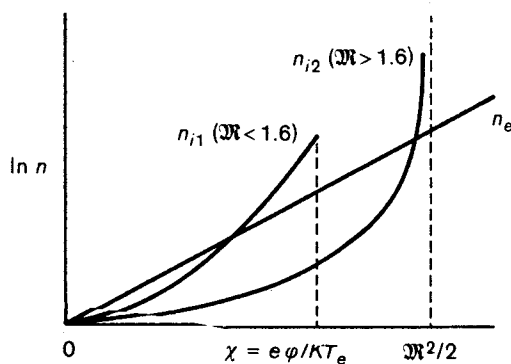
Horní mez pro M je dána podmínkou, že funkce $V(\chi)$ z obr. 8-6 musí pro $\chi > 0$ přetnout osu χ , jinak se virtuální částice neodrazí a potenciál bude stoupat do nekonečna. Podle rov. [8-25] požadujeme, aby pro nějaké $\chi > 0$ platilo

$$e^x - 1 < M^2 \left[1 - \left(1 - \frac{2\chi}{M^2} \right)^{1/2} \right]. \quad [8-28]$$

Je-li překročeno spodní kritické Machovo číslo ($M > 1$), je levá strana, představující integrál elektronové hustoty od nuly do χ , zpočátku větší než pravá strana, představující integrál iontové hustoty. Když se χ zvětšuje, může pravá strana dohonit levou stranu, není-li M^2 příliš velké. Nejvyšší hodnota, kterou χ kvůli odmocnině může mít, je však $M^2/2$. Fyzikálně to znamená, že $e\phi$ nemůže být větší než $\frac{1}{2}Mu_0^2$, jinak by se ionty nedostaly do té oblasti plazmatu, která leží dále ve směru proudu. Dosazením nejvyšší hodnoty χ do rov. [8-28] dostáváme

$$\exp(M^2/2) - 1 < M^2 \quad \text{neboli} \quad M < 1,6. \quad [8-29]$$

To je horní kritické Machovo číslo. Rázové vlny v plazmatu s chladnými ionty tedy existují jenom pro $1 < M < 1,6$.

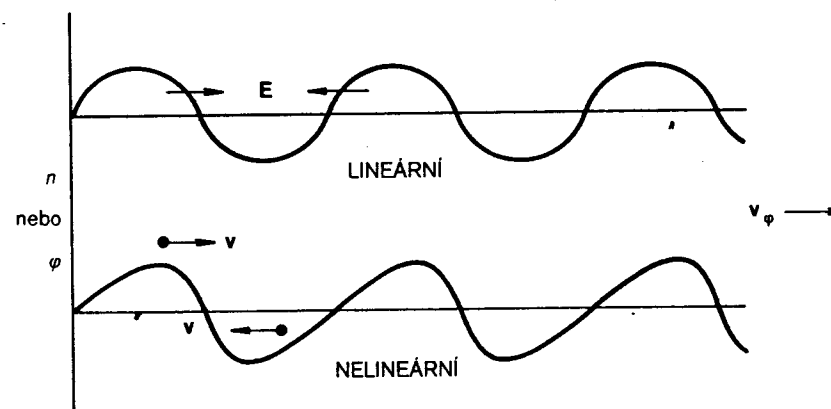


OBR. 8-8 Změna hustoty iontů a elektronů (v logaritmickém měřítku) v solitonu v závislosti na normalizovaném potenciálu χ . Hustota iontů je nakreslena pro dva případy: Machovo číslo je větší nebo menší než 1,6.

Jako u stěnové vrstvy nejlépe vysvětlíme fyzikální situaci závislosti n_i a n_e na χ (obr. 8-8). Tento graf se od obrázku 8-4 liší v důsledku změny znaménka ϕ . Protože jsou nyní ionty zpomalovány, nikoliv urychlovány, n_i poroste do nekonečna pro $\chi = M^2/2$. Dolní kritické Machovo číslo zajišťuje, že pro malá χ křivka n_i leží pod křivkou n_e , takže potenciál $\phi(x)$ má zpočátku správné znaménko křivosti. Když křivka n_{i1} protíná křivku n_e , má soliton $\phi(x)$ (obr. 8-7) inflexní bod. A konečně když χ je tak velké, že plochy pod křivkami n_i a n_e jsou si rovné, dosahuje soliton vrcholu a křivky n_{i1} a n_e jsou probírány pozpátku s χ jdoucím zpět k nule. Rovnost ploch zajišťuje, že výsledný náboj v solitonu je nulový; vně solitonu tedy není elektrické pole. Je-li M větší než 1,6 (křivka n_{i2}), je plocha pod křivkou iontové hustoty menší i tehdy, kdy χ dosahuje svoji maximální hodnotu $M^2/2$.

Vzrůst strmosti vln 8.3.3

Šířili se iontová vlna v plazmatu s chladnými ionty, bude mít fázovou rychlost podle rov. [4-42], odpovídající hodnotě $M = 1$. Jak lze potom vytvořit rázovou vlnu s $M > 1$? Musíme si připomenout, že rov. [4-42] byla řešením lineárního problému, platným pouze pro malé amplitudy.



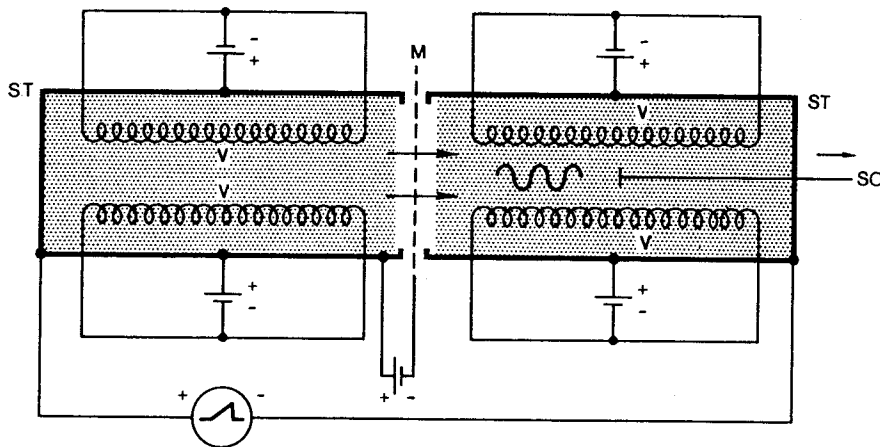
Strmost iontových vln o velké amplitudě se zvětšuje, takže náběhová hrana má větší sklon než zádní hrana. OBR. 8-9

S narůstající amplitudou zvětšuje se rychlost iontové vlny a rovněž se mění tvar ze sinusového na pilový se strmou náběhovou hranou (obr. 8-9). Příčina spočívá v tomto: Elektrické pole vlny urychlilo ionty, ty mají v potenciálovém vrchu vlny větší rychlost ve směru fázové rychlosti v než ionty v důlu vlny, protože právě prošly při průchodu vlny periodou urychlování. Lineární teorie započítává tento rozdíl rychlostí, ale nebere v úvahu prostorové posunutí, jež je jeho důsledkem. Z nelineární teorie snadno

poznáváme, že ionty na vrcholu vlny jsou posunuty doprava, zatímco v důlu jsou posunuty doleva, a tak zvětšují strmost vlny. Poněvadž je porucha hustoty ve fázi s potenciálem, je doprava urychlováno víc iontů než doleva a vlna způsobuje výsledný tok hmoty ve směru šíření. To způsobí, že rychlost vlny se zvětší nad akustickou rychlost vln v neporušeném plazmatu, takže M je větší než jedna.

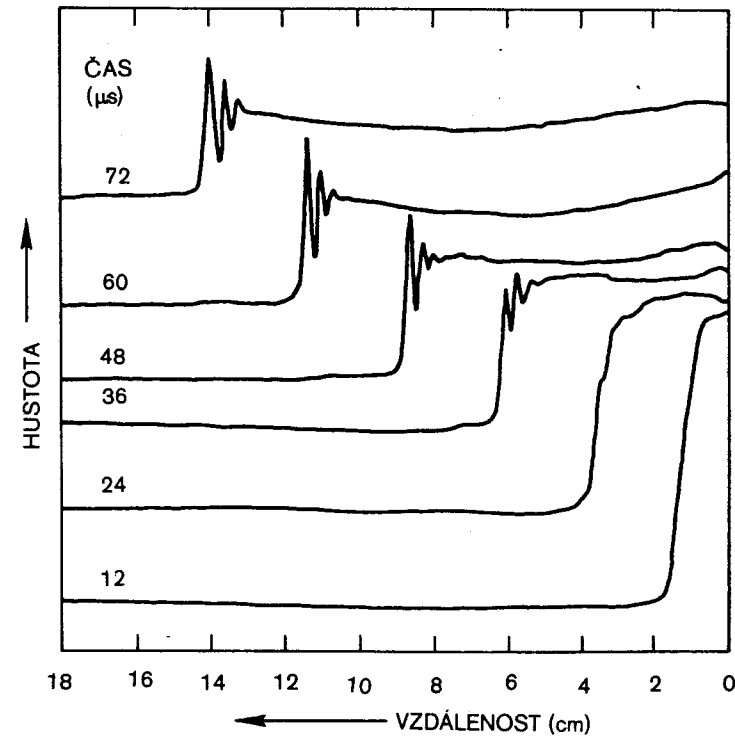
8.3.4 Experimentální pozorování

Iontově akustické vlny tvaru ukázaného na obr. 8-5 generovali R. J. Taylor, D. R. Baker a H. Ikezi. Museli k tomu vytvořit nový typ zdroje plazmatu, tzv. DP (dvoji plazma) systém. Obrázek 8-10 schematicky ukazuje, jak tento přístroj pracuje. Ve dvou elektricky izolovaných komorách se výbojem mezi vlákny V a stěnami ST vytvoří plazma se stejnými parametry.



OBR. 8-10 Schéma DP přístroje, v němž byly generovány a detegovány iontově akustické rázové vlny. [Srv. R. J. Taylor, D. R. Baker a H. Ikezi, Phys. Rev. Letters 24, 206 (1970).]

Komory jsou odděleny mřížkou M se záporným předpětím, která odpuzuje elektrony a vytváří po obou stranách iontovou stěnovou vrstvu. Mezi komory je přiveden napěťový impuls, obvykle napěťový skok, který způsobí, že ionty proudí z jedné komory do druhé a excitují rovinnou vlnu s velikou amplitudou. Vlna je detegována pohyblivou sondou nebo analyzátozem rychlosti částic SO. Na obr. 8-11 jsou měření fluktuací hustoty v rázové vlně jako funkce času a polohy sondy. Vidíme, že roste strmost čela vlny a ta se pak mění v rázovou vlnu klasického tvaru. Útlum oscilací je způsoben srážkami.



Prostorový průběh hustoty v rázové vlně měřený při různých časech ukazuje, jak se charakteristický tvar z obr. 8-5 vyvíjí. [Převzato z Taylor a ost., citovaná práce.]

OBR. 8-11

PONDEROMOTORICKÁ SÍLA 8.4

Světelné vlny působí tlak záření, který je obvykle velmi slabý a těžko jej lze detegovat. Dokonce i zsvěcenějším lidem známý příklad chvostu komety tvarovaného tlakem slunečního světla není v tomto ohledu bez vady, neboť ve skutečnosti spolupůsobí částice proudící od Slunce. Užije-li se však k ohřátí nebo k udržení plazmatu vysoce výkonného mikrovlnného záření nebo laserových svazků, může tlak záření dosáhnout až několika set tisíc atmosfér! V případě plazmatu působí tato síla na částice mechanismem ne právě prostým a nazývá se *ponderomotorická síla*. Pomocí této síly můžeme mnohé nelineární jevy snadno vysvětlit.

Tuto nelineární sílu nejsnáze odvodíme, budeme-li sledovat pohyb elektronu v oscilujících \mathbf{E} a \mathbf{B} polích vlny. Konstantní pole \mathbf{E}_0 a \mathbf{B}_0 nebudeme přitom brát v úvahu. Pohybová rovnice elektronu je

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e[\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})]. \quad [8-30]$$

Tato rovnice je přesná, jestliže \mathbf{E} a \mathbf{B} znamená hodnotu těchto polí v místě, kde se právě elektron nachází. Nelinearita vstupuje do rovnice jednak členem $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, který je druhého řádu, neboť jak \mathbf{v} , tak i \mathbf{B} při rovnováze vymizí, takže tento člen nemůže být větší než $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_1$, kde \mathbf{v}_1 a \mathbf{B}_1 jsou hodnoty z lineární teorie. Druhá část nelinearity, jak uvidíme, vstupuje skrze \mathbf{E} v místě skutečné (nikoliv počáteční) polohy částice. Vezměme elektrické pole vlny ve tvaru

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_p(\mathbf{r}) \cos \omega t, \quad [8-31]$$

kde $\mathbf{E}_p(\mathbf{r})$ v sobě zahrnuje prostorovou závislost. V prvním přiblížení můžeme v rov. [8-30] zanedbat člen $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ a vzít \mathbf{E} v počáteční poloze \mathbf{r}_0

$$m \, d\mathbf{v}_1/dt = -e \mathbf{E}(\mathbf{r}_0), \quad [8-32]$$

$$\mathbf{v}_1 = -(e/m\omega) \mathbf{E}_p \sin \omega t = d\mathbf{r}_1/dt, \quad [8-33]$$

$$\delta \mathbf{r}_1 = (e/m\omega^2) \mathbf{E}_p \cos \omega t. \quad [8-34]$$

Je důležité si uvědomit, že při nelineárním výpočtu nemůžeme napsat $e^{i\omega t}$ a potom použít reálnou část výsledku, ale musíme napsat reálnou část explicitně: $\cos \omega t$. V nelineární teorii se totiž vyskytují součiny oscilujících faktorů a operace násobení není s operací oddělení reálné části komutativní. (Součin reálných částí není totožný s reálnou částí součinu.)

Přejdeme k přiblížení druhého řádu a rozvíjíme $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ v řadu v blízkosti bodu \mathbf{r}_0

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}_0) + (\delta \mathbf{r}_1 \cdot \nabla) \mathbf{E}|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0} + \dots \quad [8-35]$$

Musíme nyní přičíst člen $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_1$, kde \mathbf{B}_1 je dáno Maxwellovou rovnicí

$$\nabla \times \mathbf{E} = -d\mathbf{B}/dt, \quad [8-36]$$

$$\mathbf{B}_1 = -(1/\omega) \nabla \times \mathbf{E}_p|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0} \sin \omega t.$$

Ta část rovnice [8-30], která je vyjádřena členy druhého řádu, je potom

$$m \, d\mathbf{v}_2/dt = -e[(\delta \mathbf{r}_1 \cdot \nabla) \mathbf{E} + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_1]. \quad [8-37]$$

Dosazením výrazů [8-33], [8-34] a [8-36] do [8-37] a vystředováním přes čas dostáváme

$$m \left\langle \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} \right\rangle = -\frac{e^2}{m\omega^2} \frac{1}{2} [(\mathbf{E}_p \cdot \nabla) \mathbf{E}_p + \mathbf{E}_p \times (\nabla \times \mathbf{E}_p)] \equiv \mathbf{f}_{NL}. \quad [8-38]$$

Přitom jsme užili vztah $\langle \sin^2 \omega t \rangle = \langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}$. Dvojitý vektorový součin lze zapsat jako součet dvou členů, z nichž jeden se zruší s členem $(\mathbf{E}_p \cdot \nabla) \mathbf{E}_p$. Zůstává potom

$$\mathbf{f}_{NL} = -\frac{1}{4} \frac{e^2}{m\omega^2} \nabla E_p^2. \quad [8-39]$$

To je efektivní nelineární síla působící na jeden elektron. Síla působící na prostorovou jednotku je \mathbf{f}_{NL} krát elektronová hustota n_0 , kterou můžeme

vyjádřit pomocí ω_p^2 . Ježto $E_p^2 = 2\langle E^2 \rangle$, dostáváme konečně pro ponderomotorickou sílu výraz

$$\mathbf{F}_{NL} = -\frac{\omega_p^2}{\omega} \nabla \frac{\epsilon_0 \langle E^2 \rangle}{2}. \quad [8-40]$$

Jedná-li se o vlnu elektromagnetickou, převažuje v rov. [8-38] druhý člen a fyzikální mechanismus síly \mathbf{F}_{NL} je následující: elektrony oscilují ve směru \mathbf{E} , ale magnetické pole vlny stáčí jejich orbity. Lorentzova síla $-e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ tlačí elektrony ve směru \mathbf{k} (\mathbf{v} má stejný směr jako \mathbf{E} a součin $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ leží ve směru \mathbf{k}). Fáze vektorů \mathbf{v} a \mathbf{B} jsou takové, že výsledkem střედování přes jednu oscilační periodu není nula, nýbrž — měřeno delším časovým úsekem — vzniká drift ve směru \mathbf{k} . Má-li vlna konstantní amplitudu, není pro udržení tohoto driftu už třeba žádné další síly; jestliže se ale amplituda vlny mění, nahromadí se elektrony v oblastech s malou amplitudou a na překonání prostorového náboje je potřeba síla. Proto je efektivní síla \mathbf{F}_{NL} úměrná gradientu $\langle E^2 \rangle$. Poněvadž driftový pohyb je pro všechny elektrony tentýž, je \mathbf{F}_{NL} úměrné hustotě — odtud faktor ω_p^2/ω^2 v rov. [8-40].

Jedná-li se o vlnu elektrostatickou, převažuje v rov. [8-38] první člen a fyzikální mechanismus síly \mathbf{F}_{NL} je prostě takový, že elektron oscilující ve směru $\mathbf{k} \parallel \mathbf{E}$ doběhne dále během půl cyklu, kdy se pohybuje z oblasti silného pole do oblasti slabého pole, než při obráceném pohybu, takže výsledným pohybem je drift.

I když \mathbf{F}_{NL} působí především na elektrony, je tato síla posléze přenášena na ionty, poněvadž se jedná o efekt, který má nízkofrekvenční nebo stejnosměrný charakter. Vytvoří-li se působením \mathbf{F}_{NL} shluk elektronů, vznikne touto separací nábojů pole \mathbf{E}_{sn} . Celková síla, již je elektron vystaven, je

$$\mathbf{F}_e = -e\mathbf{E}_{sn} + \mathbf{F}_{NL}. \quad [8-41]$$

Protože ponderomotorická síla působící na ionty je menší o faktor $\Omega_p^2/\omega_p^2 = m/M$, je síla působící na iontovou tekutinu přibližně

$$\mathbf{F}_i = e\mathbf{E}_{sn}. \quad [8-42]$$

Sečteme obě poslední rovnice a zjišťujeme, že síla působící na plazma je \mathbf{F}_{NL} .

Prímým důsledkem síly \mathbf{F}_{NL} je samofokuse laserového paprsku v plazmatu. Z obr. 8-12 je patrné, že svazek laserových paprsků o konečném průměru vyvolá v plazmatu ponderomotorickou sílu v radiálním směru. Tato



Samofokuse laserového svazku je způsobena ponderomotorickou silou. OBR. 8-12

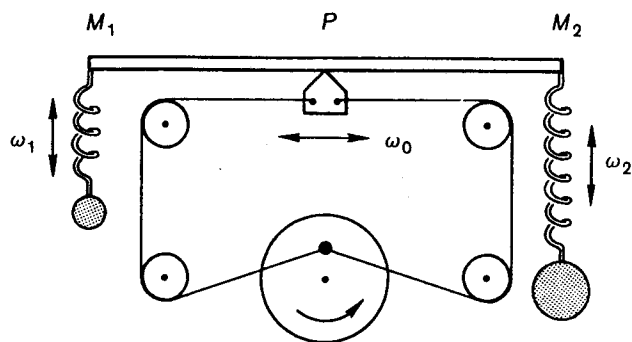
síla vytlačuje plazma ven ze svazku, takže uvnitř svazku je ω_p menší a dielektrická konstanta větší než vně svazku. Plazma má tak stejný účinek jako konvexní čočka, fokusující svazek do malého průřezu.

8.5 PARAMETRICKÉ NESTABILITY

Z nelineárních interakcí „vlna-vlna“ jsou nejdůležitější studovány „parametrické nestability“, jež jsou tak nazývány pro svou analogii s parametrickým zesilovačem, přístrojem používaným v slaboproudé elektrotechnice. Studium těchto jevů a jejich pochopení již poměrně pokročilo, protože jejich teorie je v podstatě lineární, ovšem lineární vzhledem k oscilujícímu rovnovážnému stavu.

8.5.1 Vázané oscilátory

Na obr. 8-13 je nakreslen mechanický model: dva oscilátory M_1 a M_2 jsou spojeny tyčí spočívající na podpěře. Podpěra P podkluzuje tam a zpět s frekvencí ω_0 , zatímco vlastní frekvence oscilátorů jsou ω_1 a ω_2 . Je zřejmé, že – neuvažujeme-li tření – pohybu podpěry není kladen žádný odpor,



OBR. 8-13 Mechanická analogie parametrické nestability.

pokud se M_1 a M_2 nepohybují. Dále, jestliže P se nepohybuje a do pohybu je uvedeno M_2 , bude se pohybovat M_1 ; pokud ale ω_2 není vlastní frekvencí M_1 , bude amplituda malá. Předpokládejme nyní, že P i M_2 jsou uvedeny do pohybu. Vychýlení M_1 je úměrné součinu vychýlení M_2 a délky ramene páky, bude se tedy v čase měnit jako

$$\cos \omega_2 t \cos \omega_0 t = \frac{1}{2} \cos [(\omega_2 + \omega_0) t] + \frac{1}{2} \cos [(\omega_2 - \omega_0) t]. \quad [8-43]$$

Rovná-li se ω_1 buď $\omega_2 + \omega_0$ nebo $\omega_2 - \omega_0$, bude pohyb M_1 rozkmitáván jako při rezonanci a poroste do velkých amplitud. Začne-li jednou M_1

oscilovat, bude získávat energii i M_2 , protože jedna ze zánějových frekvencí vznikajících z ω_1 a ω_0 je právě ω_2 . A tak jakmile jeden z oscilátorů začne oscilovat, bude jeden rozkmitáván druhým, tzn. systém je nestabilní. Energii ovšem dodává „pumpa“ P, která se setkává s odporem, jakmile je tyč skloněná. Je-li pumpa dostatečně silná, amplituda jejich oscilací není ovlivňována oscilátory M_1 a M_2 ; takovou nestabilitu lze zvládnout lineární teorií. V plazmatu mohou roli oscilátorů P, M_1 a M_2 hrát různé typy vln.

Frekvenční podmínka 8.5.2

Pohybová rovnice jednoduchého harmonického oscilátoru x_1 je

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \omega_1^2 x_1 = 0, \quad [8-44]$$

kde ω_1 je jeho rezonanční frekvence. Je-li poháněn časově závislou silou, jež je úměrná součinu amplitudy E_0 pohonu neboli pumpy a amplitudy x_2 druhého oscilátoru, má pohybová rovnice tvar

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \omega_1^2 x_1 = c_1 x_2 E_0, \quad [8-45]$$

kde c_1 je konstanta vyjadřující velikost vazby. Podobná rovnice platí pro x_2

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \omega_2^2 x_2 = c_2 x_1 E_0. \quad [8-46]$$

Nechť $x_1 = \bar{x}_1 \cos \omega t$, $x_2 = \bar{x}_2 \cos \omega' t$ a $E_0 = \bar{E}_0 \cos \omega_0 t$. Rovnice [8-46] pak zní

$$\begin{aligned} (\omega_2^2 - \omega'^2) \bar{x}_2 \cos \omega' t &= c_2 \bar{E}_0 \bar{x}_1 \cos \omega_0 t \cos \omega t = \\ &= c_2 \bar{E}_0 \bar{x}_1 \cdot \frac{1}{2} \{ \cos [(\omega_0 + \omega) t] + \cos [(\omega_0 - \omega) t] \}. \end{aligned} \quad [8-47]$$

Členy na pravé straně mohou rozkmitávat oscilátory x_2 s frekvencemi

$$\omega' = \omega_0 \pm \omega. \quad [8-48]$$

Bez nelineárních interakcí může mít x_2 jenom frekvenci ω_2 , pak musí být $\omega' = \omega_2$. Člen na pravé straně může však způsobit posunutí frekvence, takže ω' je jenom přibližně rovno ω_2 . Mimo to ω' může být komplexní, poněvadž existuje útlum (pro jednoduchost dosud zanedbávaný), nebo může docházet k růstu oscilací (jde-li o nestabilitu). V každém případě je x_2 oscilátor s konečným Q a může reagovat na jistý rozsah frekvencí okolo ω_2 . Je-li ω malé, mohou podle rov. [8-48] obě možné hodnoty ω' ležet uvnitř šířky pásma oscilátoru x_2 ; musíme pak připustit existenci dvou oscilátorů: $x_2(\omega_0 + \omega)$ a $x_2(\omega_0 - \omega)$.

Nechť nyní $x_1 = \bar{x}_1 \cos \omega'' t$ a $x_2 = \bar{x}_2 \cos [(\omega_0 \pm \omega) t]$; dosadíme do rovnice [8-45]

$$\begin{aligned} (\omega_1^2 - \omega''^2) \bar{x}_1 \cos \omega'' t &= \\ &= c_1 \bar{E}_0 \bar{x}_2 \cdot \frac{1}{2} (\cos \{[\omega_0 + (\omega_0 \pm \omega)] t\} + \cos \{[\omega_0 - (\omega_0 \pm \omega)] t\}) = \\ &= c_1 \bar{E}_0 \bar{x}_2 \cdot \frac{1}{2} \{ \cos [(2\omega_0 \pm \omega) t] + \cos \omega t \}. \end{aligned} \quad [8-49]$$

Členy na pravé straně mohou excitovat nejenom původní oscilaci $x_1(\omega)$, ale i nové frekvence $\omega'' = 2\omega_0 \pm \omega$. Budeme uvažovat případ $|\omega_0| \gg |\omega_1|$, takže $2\omega_0 \pm \omega$ leží dost daleko od pásma frekvencí, na něž x_1 může reagovat, a $x_1(2\omega_0 \pm \omega)$ je možno zanedbat. Máme tedy tři oscilátory, $x_1(\omega)$, $x_2(\omega_0 - \omega)$ a $x_2(\omega_0 + \omega)$, které jsou vázány rovnicemi [8-45] a [8-46]

$$\begin{aligned} (\omega_1^2 - \omega^2) x_1(\omega) - c_1 E_0(\omega_0) [x_2(\omega_0 - \omega) + x_2(\omega_0 + \omega)] &= 0, \\ [\omega_2^2 - (\omega_0 - \omega)^2] x_2(\omega_0 - \omega) - c_2 E_0(\omega_0) x_1(\omega) &= 0, \\ [\omega_2^2 - (\omega_0 + \omega)^2] x_2(\omega_0 + \omega) - c_2 E_0(\omega_0) x_1(\omega) &= 0. \end{aligned} \quad [8-50]$$

Disperzním vztahem je podmínka, že determinant koeficientů se rovná nule

$$\begin{vmatrix} \omega^2 - \omega_1^2 & c_1 E_0 & c_1 E_0 \\ c_2 E_0 & (\omega_0 - \omega)^2 - \omega_2^2 & 0 \\ c_2 E_0 & 0 & (\omega_0 + \omega)^2 - \omega_2^2 \end{vmatrix} = 0. \quad [8-51]$$

Řešení s $\text{Im}(\omega) > 0$ by znamenalo nestabilitu.

Pro malé posuvy frekvencí a pomalý útlum nebo růst můžeme položit ω a ω' přibližně rovné neporušeným frekvencím ω_1 a ω_2 . Z rovnice [8-48] pak máme frekvenční podmínku

$$\omega_0 \approx \omega_2 \pm \omega_1. \quad [8-52]$$

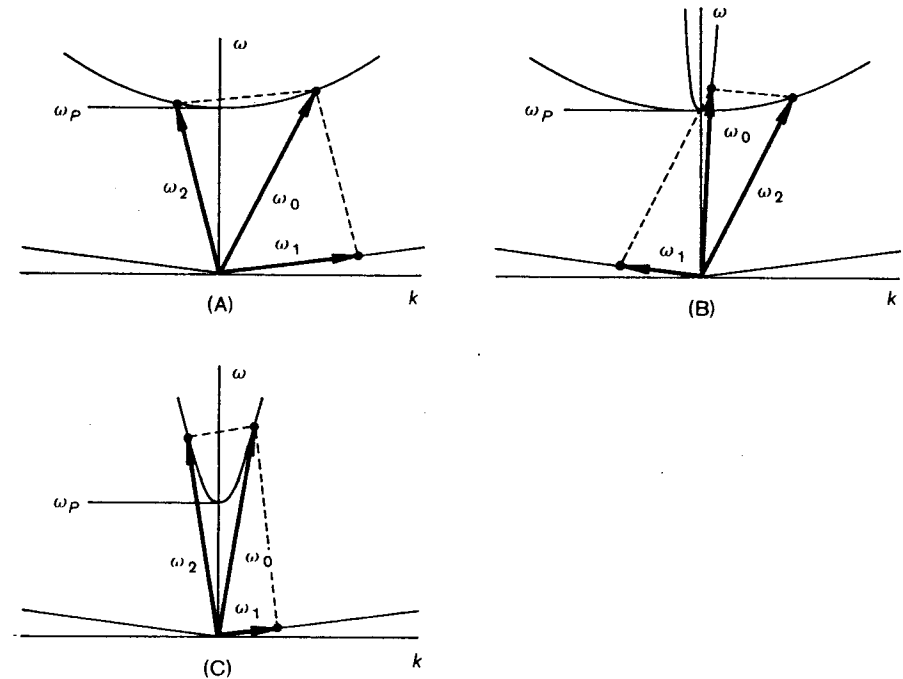
Jsou-li takovými oscilátory vlny v plazmatu, musíme ωt nahradit výrazem $\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$. Pak ovšem existuje také podmínka pro vlnové vektory

$$\mathbf{k}_0 \approx \mathbf{k}_2 \pm \mathbf{k}_1 \quad [8-53]$$

popisující prostorové zázneje, tj. periodicitu bodů s konstruktivní a destruktivní interferencí v prostoru. Těmto dvěma podmínkám [8-52] a [8-53] lze snadno porozumět podle analogie s kvantovou mechanikou. Vynásobíme-li prvou z nich Planckovou konstantou \hbar , máme

$$\hbar \omega_0 = \hbar \omega_2 \pm \hbar \omega_1. \quad [8-54]$$

E_0 a x_2 mohou být například elektromagnetické vlny, takže $\hbar \omega_0$ a $\hbar \omega_2$ jsou energie fotonů. Oscilátor x_1 může být Langmuirova vlna neboli plazmon s energií $\hbar \omega_1$. Rovnice [8-54] prostě znamená zachování energie. Podobně rov. [8-53] znamená zachování hybnosti $\hbar \mathbf{k}$.



OBR. 8-14
Rovnoběžníková konstrukce, ilustrující frekvenční podmínku a podmínku pro vlnové vektory, pro tři parametrické nestability: (A) nestabilita rozpadu elektronové vlny, (B) nestabilita parametrického rozpadu a (C) nestabilita stimulovaného Brillouinova zpětného rozptylu; ω_0 je dopadající vlna, ω_1 a ω_2 výsledné vlny. Přímkou jsou disperzní křivky iontových vln, úzké paraboly patří světelným vlnám a široké paraboly elektronovým vlnám.

V případě jednorozměrných plazmových vln je současné splnění rovnic [8-52] a [8-53] možné jenom pro určité kombinace vln. Požadavky kladené na jejich vzájemné vztahy jsou nejlépe vidět na diagramu $\omega - k$ (obr. 8-14). Obrázek 8-14(A) ukazuje disperzní křivky elektronové plazmové vlny (Bohmova-Grossova vlna) a iontové akustické vlny (srv. obr. 4-13). Elektronová vlna (ω_0, \mathbf{k}_0) o velké amplitudě se může rozpadnout v elektronovou vlnu (ω_2, \mathbf{k}_2) pohybující se opačným směrem a v iontovou vlnu (ω_1, \mathbf{k}_1) . Rovnoběžníková konstrukce zajišťuje, že jsou splněny podmínky $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$ a $\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$. Poloha bodů (ω_0, \mathbf{k}_0) a (ω_2, \mathbf{k}_2) na elektronové křivce musí být nastavena tak, aby vektor jejich rozdílu ležel na iontové křivce. Všimněme si, že elektronová vlna se nemůže rozpadnout ve dvě jiné elektronové vlny, protože neexistuje způsob, jak dostat vektor rozdílu na elektronovou křivku.

Obrázek 8-14(B) ukazuje rovnoběžníkovou konstrukci pro nestabilitu „parametrického rozpadu“. Zde (ω_0, \mathbf{k}_0) je dopadající elektromagnetická

vlna o velké fázové rychlosti ($\omega_0/k_0 \approx c$). Ta excituje elektronovou a iontovou vlnu, jež se pohybují v opačných směrech. Poněvadž $|k_0|$ je malé, dostáváme pro tuto nestabilitu $|k_1| \approx -|k_2|$ a $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$.

Obrázek 8-14(C) ukazuje diagram $\omega-k$ pro nestabilitu „parametrického zpětného rozptylu“, při němž světelná vlna excituje iontovou vlnu a jinou světelnou vlnu šířící se opačným směrem. Tentýž případ může nastat, je-li iontová vlna nahrazena plazmovou vlnou. Podle analogie s podobnými jevy ve fyzice pevných látek se tyto procesy nazývají „stimulovaný Brillouinův* rozptyl“ a „stimulovaný Ramanův rozptyl“.

8.5.3 Práh nestability

Nedochází-li k útlumu, mohou se parametrické nestability objevit při jakýchkoliv amplitudách, ale ve skutečnosti již i malý až už srážkový nebo Landauův útlum nestabilitám zabrání, pokud čerpající** vlna není dost silná. Abychom vypočítali práh nestability, musíme zavést útlumové rychlosti Γ_1 a Γ_2 oscilátorů x_1 a x_2 . Rovnice [8-44] pak zní

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \omega_1^2 x_1 + 2\Gamma_1 \frac{dx_1}{dt} = 0. \quad [8-55]$$

Je-li např. x_1 výchylka pružiny tlumené třením, představuje poslední člen sílu úměrnou rychlosti. Je-li x_1 elektronová hustota v plazmové vlně tlumené srážkami mezi elektrony a neutrálními částicemi, je Γ_1 rovno $v_s/2$ (srv. úlohu 4-5). Vyšetření rovnic [8-45], [8-46] a [8-50] ukáže, že smíme užít exponenciální notaci; nechť tedy $d/dt \rightarrow -i\omega$ pro x_1 a x_2 , pokud zůstává E_0 reálné a nechť je \bar{x}_1 a \bar{x}_2 komplexní. Z rovnic [8-45] a [8-46] dostáváme

$$\begin{aligned} (\omega_1^2 - \omega^2 - 2i\Gamma_1\omega)x_1(\omega) &= c_1 x_2 E_0, \\ [\omega_2^2 - (\omega - \omega_0)^2 - 2i\Gamma_2(\omega - \omega_0)]x_2(\omega - \omega_0) &= c_2 x_1 E_0. \end{aligned} \quad [8-56]$$

Dále se ještě omezíme na jednoduchý případ dvou vln – tj. $\omega \approx \omega_1$ a $\omega_0 - \omega \approx \omega_2$, avšak $\omega_0 + \omega$ je dostatečně vzdáleno od ω_2 , takže nemůže rezonovat – kdy se třetí řádek i sloupec rov. [8-51] nemusí brát v úvahu. Rovnice [8-51] pak dostává tvar

$$(\omega^2 - \omega_1^2 + 2i\Gamma_1\omega)[(\omega - \omega_0)^2 - \omega_2^2 + 2i\Gamma_2(\omega - \omega_0)] = c_1 c_2 E_0^2. \quad [8-57]$$

Pro prahové ω můžeme položit podmínku $\text{Im}(\omega) = 0$. Nejnižší prahová hodnota E_0 se objeví při přesném splnění frekvenční podmínky, tj. $\omega = \omega_1$, $\omega_0 - \omega = \omega_2$. Tak rov. [8-57] dává

$$c_1 c_2 (E_0^2)_{\text{prah}} = 4\omega_1 \omega_2 \Gamma_1 \Gamma_2.$$

Prahová hodnota klesá k nule s útlumem kterékoliv z vln.

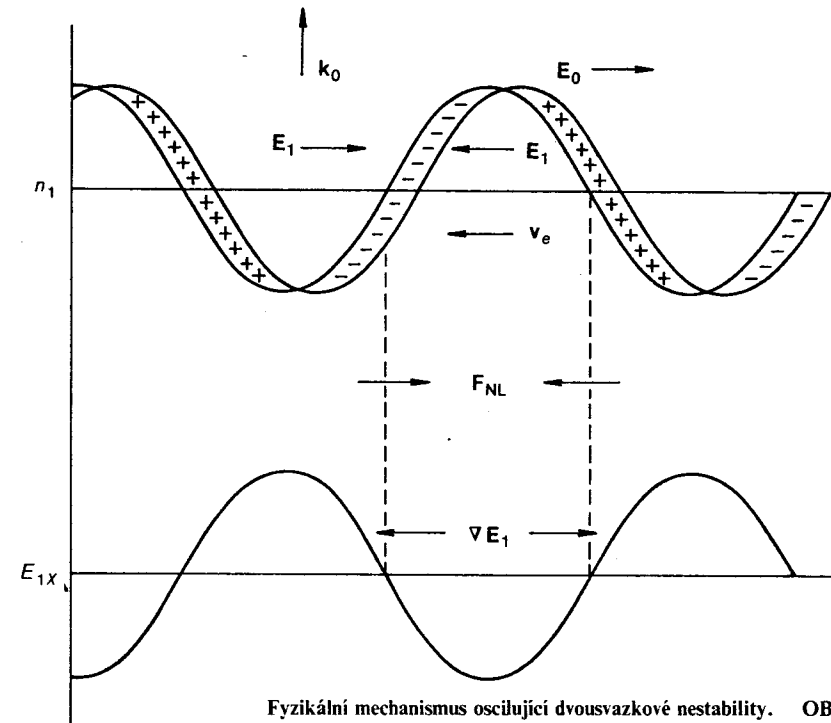
* vyslov: brijuen – pozn. překl.

** správný český termín místo „pumpující“ – pozn. překl.

Fyzikální mechanismus 8.5.4

Parametrické excitaci vln můžeme velmi snadno porozumět prostřednictvím ponderomotorické síly (oddíl 8.4). Jako ilustrativní případ uvažujme elektromagnetickou vlnu (ω_0, k_0) excitující elektronovou plazmovou vlnu (ω_2, k_2) a nízkofrekvenční iontovou vlnu (ω_1, k_1) [obr. 8-14(B)]. Poněvadž ω_1 je malé, musí ω_0 být blízko ω_p . Výsledek se však bude výrazně lišit podle toho, zda $\omega_0 < \omega_p$ nebo $\omega_0 > \omega_p$. V prvním případě vzniká „oscilující dvousvazková“ nestabilita* (kterou probereme podrobně), v druhém nestabilita „parametrického rozpadu“.

Předpokládejme, že v plazmatu je porucha hustoty tvaru $n_1 \cos k_1 x$; tato porucha může vzniknout spontánně jako jeden z projevů tepelného šumu. Nechť má čerpající vlna elektrické pole $E_0 \cos \omega_0 t$ ve směru x , jak ukazuje obr. 8-15. Není-li v plazmatu stejnosměrné pole B_0 , bude pro pumpující vlnu platit vztah $\omega_0^2 = \omega_p^2 + c^2 k_0^2$, takže pro $\omega_0 \approx \omega_p$ je $k_0 \approx 0$. Můžeme tedy E_0 považovat za prostorově konstantní. Je-li ω_0 menší než ω_p , což je rezonanční frekvence chladné elektronové tekutiny, budou se elektrony pohybovat ve směru opačném k E_0 , zatímco ionty se v časovém



* původní termín: oscillating two-stream instability – pozn. překl.

měřitku ω_0 pohybovat nebudou. Zvlnění hustoty způsobí pak separaci náboje, jak ukazuje obr. 8-15. Elektrostatické náboje vytvoří pole E_1 , které osciluje s frekvencí ω_0 . Ponderomotorická síla způsobená celkovým polem je podle rov. [8-40]

$$F_{NL} = -\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \nabla \frac{\epsilon_0 \langle (E_0 + E_1)^2 \rangle}{2} \quad [8-58]$$

Poněvadž E_0 je homogenní a mnohem větší než E_1 , je významný jenom prostřední člen kvadrátu

$$F_{NL} = -\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\epsilon_0 \langle 2E_0 E_1 \rangle}{2} \quad [8-59]$$

Tato síla se středováním nevynuluje, protože E_1 mění znaménko s E_0 . Jak je vidět na obr. 8-15, F_{NL} je nulové na vrcholech a v důlech hustoty n_1 , ale je velké tam, kde je velké ∇n_1 . Toto prostorové rozložení způsobuje, že F_{NL} tlačí elektrony z oblastí malých hustot do oblastí velkých hustot. Výsledné stejnosměrné elektrické pole vleče sebou také ionty a hustotní porucha narůstá. Prahová hodnota F_{NL} je taková hodnota, která právě dostačuje k překonání tlaku $\nabla n_1 (KT_i + KT_e)$, který se snaží vyhladit průběh hustoty. Hustotní zvlnění se prostředím nešíří, takže $\text{Re}(\omega_1) = 0$. Tento jev se nazývá *oscilující dvousvazková nestabilita*, protože elektrony stále přetahované ze strany na stranu mají časově vystředovanou rozdělovací funkci se dvěma vrcholy podobně jako ve dvousvazkové nestabilitě (odd. 6.6).

Je-li ω_0 větší než ω_p , přestává tento fyzikální mechanismus působit, protože oscilátor, který je poháněn rychleji, než je jeho rezonanční frekvence, se pohybuje opačným směrem než síla na něj působící (podrobněji to vysvětlíme v následujícím oddíle). Směry vektorů v_e , E_1 a F_{NL} jsou pak obráceně než na obr. 8-15 a ponderomotorická síla táhne ionty z oblastí hustších do řidších; porucha se zmenšuje. Správné fázové poměry se však zase mohou obnovit, jestliže hustotní porucha má konečnou fázovou rychlost. Přirozená rychlost iontové vlny je akustická rychlost v_z , takže $\omega_1 = kv_z$. V souřadné soustavě pohybující se spolu s hustotním zvlněním se čerpající pole elektronové tekutiny jeví s frekvencí posunutou Dopplerovým jevem $\omega' = \omega_0 - kv_z$. Interakce je nejsilnější, když se tato frekvence rovná přirozené frekvenci ω_p elektronů. Pak máme $\omega' = \omega_p = \omega_0 - kv_z$, neboli $\omega_2 = \omega_0 - \omega_1$, což je právě splněná frekvenční podmínka. Iontová a plazmová vlna jsou excitovány energií, kterou přináší dopadající elektromagnetická vlna; tento jev se nazývá *nestabilita parametrického rozpadu*.

8.5.5 Oscilující dvousvazková nestabilita

Za pomoci fyzikální představy uvedené v předcházejícím oddíle nyní odvodíme tento nejjednodušší příklad parametrické nestability. Pro jedno-

duchost považujeme teploty T_i a T_e a srážkové frekvence ν_i a ν_e za nulové. Iontová tekutina se pak bude řídit rovnicemi pro nízké frekvence

$$Mn_0 \frac{\partial v_{i1}}{\partial t} = F_{NL}, \quad [8-60]$$

$$\frac{\partial n_{i1}}{\partial t} + n_0 \frac{\partial v_{i1}}{\partial x} = 0. \quad [8-61]$$

Poněvadž rovnovážný stav bereme jako prostorově homogenní, můžeme na prostorové změny užít Fourierovu analýzu a $\partial/\partial x$ nahradit výrazem ik . Poslední dvě rovnice pak dávají

$$\frac{\partial^2 n_{i1}}{\partial t^2} + \frac{ik}{M} F_{NL} = 0, \quad [8-62]$$

kde F_{NL} je dáno rovnicí [8-59]. Pro nalezení E_1 musíme započítat vysokofrekvenční pohyb elektronů. Užijeme rovnici pro elektronovou tekutinu

$$m \left(\frac{\partial v_e}{\partial t} + v_e \frac{\partial}{\partial x} v_e \right) = -eE. \quad [8-63]$$

Pro oscilující rovnováhu dostáváme

$$\frac{\partial v_{e0}}{\partial t} = -\frac{e}{m} E_0 = -\frac{e}{m} \bar{E}_0 \cos \omega_0 t. \quad [8-64]$$

Linearizací pro malé odchylky od této rovnováhy dostáváme

$$\frac{\partial v_{e1}}{\partial t} + ikv_{e0}v_{e1} = -\frac{e}{m} E_1. \quad [8-65]$$

Protože $|\partial v_{e1}/\partial t| \approx \omega_p v_e$, může být druhý člen zanedbán, platí-li $kv_{e0} \ll \omega_p$, což je téměř vždy splněno. Podle Poissonovy rovnice

$$ikE_1 = -en_{e1}/\epsilon_0 \quad [8-66]$$

dostáváme pro vysokofrekvenční pohyb

$$\frac{\partial v_{e1}}{\partial t} = \frac{n_{e1} e^2}{ikm\epsilon_0}. \quad [8-67]$$

Rovnice kontinuity pro elektrony je

$$\frac{\partial n_{e1}}{\partial t} + ikv_{e0}n_{e1} + n_0 ikv_{e1} = 0. \quad [8-68]$$

V tomto místě musíme být opatrní a uvědomit si, že elektronový pohyb má dvě složky: vysokofrekvenční, kdy se elektrony pohybují nezávisle na iontech, a nízkofrekvenční, kdy se „kvazineutrálně“ pohybují spolu s ionty. n_{e1} je tudíž součet vysokofrekvenční složky n_{ev} a nízkofrekvenční složky $n_{en} = n_{i1}$. (Porušené pole E_1 má rovněž nízkofrekvenční složku, která přenáší sílu F_{NL} na ionty; my jsme s ní již pracovali a označili jsme

ji $F_{NL}(e)$. V prostředním členu rov. [8-68] musíme tedy za n_{e1} dosadit n_{i1} , abychom dostali vysokofrekvenční složku

$$\frac{\partial n_{ev}}{\partial t} + n_0 i k v_{e1} + i k v_{e0} n_{i1} = 0. \quad [8-69]$$

Zderivujeme podle času, zanedbáme $\partial n_{i1}/\partial t$ a použijeme rov. [8-64] a [8-67]

$$\frac{\partial^2 n_{ev}}{\partial t^2} + \omega_p^2 n_{ev} = \frac{i k e}{m} n_{i1} E_0. \quad [8-70]$$

Nechť n_{ev} se mění jako $\exp(-i\omega t)$

$$(\omega_p^2 - \omega^2) n_{ev} = \frac{i k e}{m} n_{i1} E_0. \quad [8-71]$$

Rovnice [8-66] a [8-71] pak dávají vysokofrekvenční pole

$$E_1 = -\frac{e^2}{\epsilon_0 m} \frac{n_{i1} E_0}{\omega_p^2 - \omega^2} \approx -\frac{e^2}{\epsilon_0 m} \frac{n_{i1} E_0}{\omega_p^2 - \omega_0^2}. \quad [8-72]$$

Tim, že jsme položili $\omega \approx \omega_0$, vlastně předpokládáme, že n_{i1} narůstá velmi pomalu ve srovnání s frekvencí pole E_0 . Ponderomotorická síla pak vyplývá z rov. [8-59]

$$F_{NL} \approx \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \frac{e^2}{m} \frac{i k n_{i1}}{\omega_p^2 - \omega_0^2} \langle E_0^2 \rangle. \quad [8-73]$$

Všimněme si, že E_1 i F_{NL} mění znaménko zároveň s $\omega_p^2 - \omega_0^2$. Tim je vyjádřeno, že mechanismus oscilující dvousvazkové nestability přestává působit pro $\omega_0^2 > \omega_p^2$. Největší efekt se objeví pro $\omega_0^2 \approx \omega_p^2$; faktor (ω_p^2/ω_0^2) pak můžeme zanedbat. Rovnici [8-62] můžeme potom psát

$$\frac{\partial^2 n_{i1}}{\partial t^2} \equiv \frac{e^2 k^2}{2 M m} \frac{\bar{E}_0^2 n_{i1}}{\omega_p^2 - \omega_0^2}. \quad [8-74]$$

Protože pro tuto nestabilitu platí $\text{Re}(\omega) = 0$, můžeme položit $n_{i1} = \bar{n}_{i1} \exp \gamma t$, kde γ je rychlost růstu (inkrement) nestability. Tedy

$$\gamma^2 \approx \frac{e^2 k^2}{2 M m} \frac{\bar{E}_0^2}{\omega_p^2 - \omega_0^2}. \quad [8-75]$$

γ je reálné, jestliže $\omega_0^2 < \omega_p^2$. Skutečná hodnota γ bude záviset na tom, jak lze zmenšit jmenovatel v rov. [8-72], aniž by se užilo aproximace $\omega^2 = \omega_0^2$. Při konečném útlumu bude mít $\omega_p^2 - \omega^2$ imaginární složku úměrnou výrazu $2I_2 \omega_p$, kde I_2 je rychlost útlumu (dekrement) elektro- nových oscilací. Pak máme

$$\gamma \sim \bar{E}_0 / I_2^{1/2}. \quad [8-76]$$

Dostatečně daleko nad prahovou hodnotou bude imaginární složka ω určována inkrementem γ a nikoliv I_2 . Pak je

$$\gamma^2 \sim \frac{\bar{E}_0^2}{\gamma}, \quad \gamma \sim (\bar{E}_0)^{2/3}. \quad [8-77]$$

Tato závislost γ na E_0 je charakteristická pro všechny parametrické nestability. Přesný výpočet γ a prahové hodnoty E_0 vyžaduje pečlivější zacházení s frekvenční diferencí $\omega_p - \omega_0$, než zde můžeme ukázat.

Má-li se tento problém řešit přesně, vypočítá se z rov. [8-71] n_{i1} a dosadí se do rov. [8-74]

$$\frac{\partial^2 n_{i1}}{\partial t^2} = -\frac{i k e}{M} n_{ev} E_0. \quad [8-78]$$

Rovnice [8-70] a [8-78] pak vytvářejí dvojici rovnic podobně jako rov. [8-45] a [8-46] a jako řešení lze užít rovnici [8-51]. Frekvence ω_1 v tomto případě vymizí, protože pro limitní případ nulové teploty má iontová vlna $\omega_1 = 0$.

Nestabilita parametrického rozpadu 8.5.6

Kdybychom chtěli odvodit analogické výrazy pro případ $\omega_0 > \omega_p$, sledovali bychom tutéž myšlenkovou linii jako shora a došli bychom k excitaci plazmové vlny a iontové vlny. Vynecháme výpočty, jež jsou o něco rozvláčnější než pro oscilující dvousvazkovou nestabilitu, a místo toho popi-

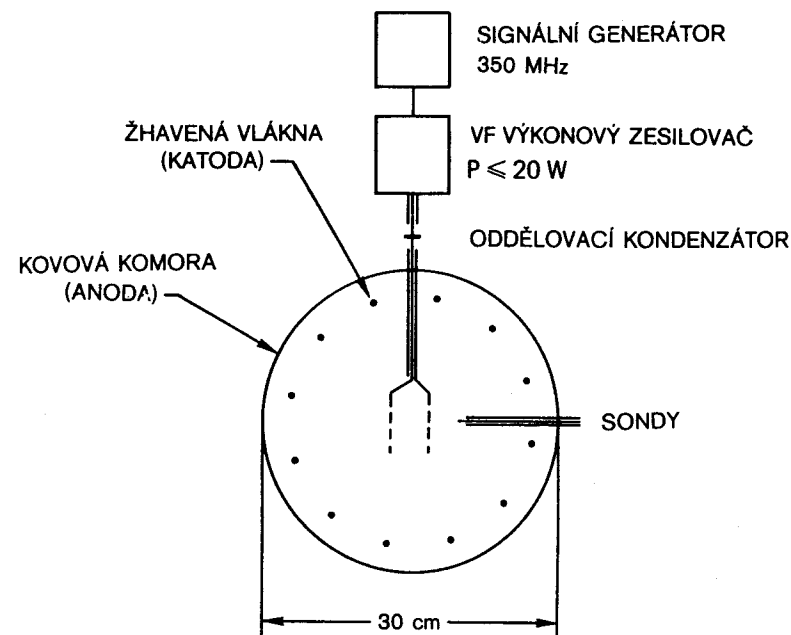
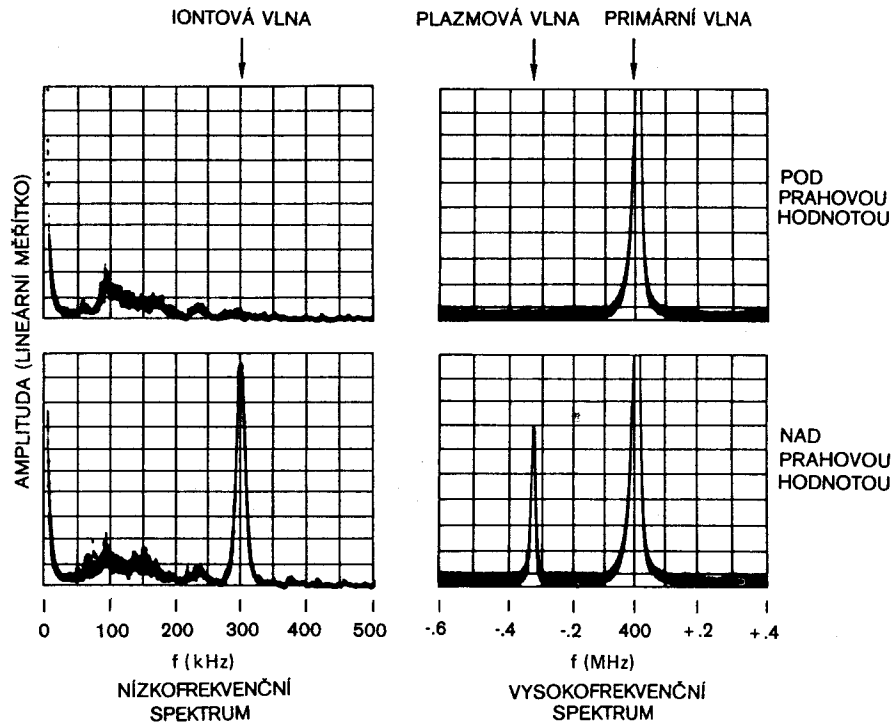


Schéma experimentu, jímž byla ověřena nestabilita parametrického rozpadu. [Převzato z A. Y. Wong a ost., Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research, 1971, I, 335 (International Atomic Energy Agency, Vienna, 1971).]

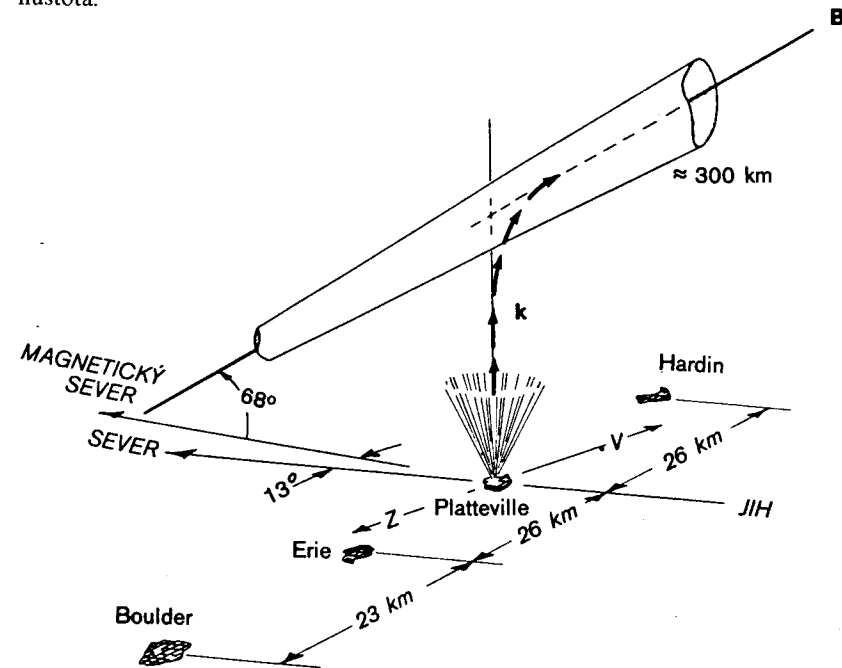


OBR. 8-17 Oscilogramy frekvenčního spektra oscilací měřených na aparatuře z obr. 8-16. Je-li výkon budicího signálu právě ještě pod prahovou hodnotou, pozorujeme v nízkofrekvenčním spektru jenom šum a ve vysokofrekvenčním spektru jenom budicí signál. Nepatrným zvýšením výkonu se dostane systém nad prahovou hodnotu a objeví se současně frekvence plazmové vlny a iontové vlny. [S laskavým svolením R. Stenzela, University of California.]

šeme některé experimenty. Nestabilita parametrického rozpadu je experimentálně dobře doložená, neboť byla pozorována v ionosféře i v laboratoři. S oscilující dvousvazkovou nestabilitou se nesetkáme tak často, jednak kvůli podmínce $\text{Re}(\omega) = 0$ a jednak proto, že podmínka $\omega_0 < \omega_p$ znamená, že dopadající vlna je tlumená. Obrázek 8-16 ukazuje aparaturu, kterou sestrojili Stenzel a Wong, sestávající ze zdroje plazmatu podobného jako na obr. 8-10, dvojice mřížek, mezi nimiž je oscilátorem generované pole E_0 , a sondy spojené se dvěma analyzátory frekvenčního spektra. Obrázek 8-17 ukazuje spektra signálů detegovaných v plazmatu. Pod prahovou hodnotou je ve vysokofrekvenčním spektru jenom čerpající vlna na 400 MHz, zatímco nízkofrekvenční spektrum vykazuje jenom malý šum. Zvětší-li se poněkud amplituda čerpající vlny, v nízkofrekvenčním spektru se na 300 kHz objeví iontová vlna a současně se ve vysokofrekvenčním

spektru objeví postranní pásmo na 399,7 MHz. To je elektronová plazmová vlna na rozdílové frekvenci. Rovněž lze pozorovat, že iontová vlna vytváří zázněje s čerpající vlnou a vzniká signál na součtové frekvenci 400,3 MHz.

Tato nestabilita byla pozorována rovněž při ionosférických experimentech. Na obr. 8-18 je geometrické schéma ionosférické verze experimentu, provedeného s velkým radioteleskopem v Platteville v Coloradu. Anténou je do ionosféry vyslán vysokofrekvenční svazek 7 MHz o výkonu 2 MW. V ionosférické vrstvě, v níž $\omega_0 \geq \omega_p$, vzniká elektronová a iontová vlna a ionosférické elektrony se zahřívají. V jiném experimentu s velkou parabolickou anténou v Arecibu v Portoriku měřili ω a k elektronových vln tak, že pomocí svazku radarových vln s frekvencí 430 MHz pozorovali rozptyl na mřížkové struktuře, kterou vytvořila porušená elektronová hustota.



Geometrické schéma ionosférické verze experimentu, při němž byly vysokofrekvenční vlny absorbovány mechanismem parametrického rozpadu. [Převzato z W. F. Utlaug a R. Cohen, Science 174, 245 (1971).]

OBR. 8-18

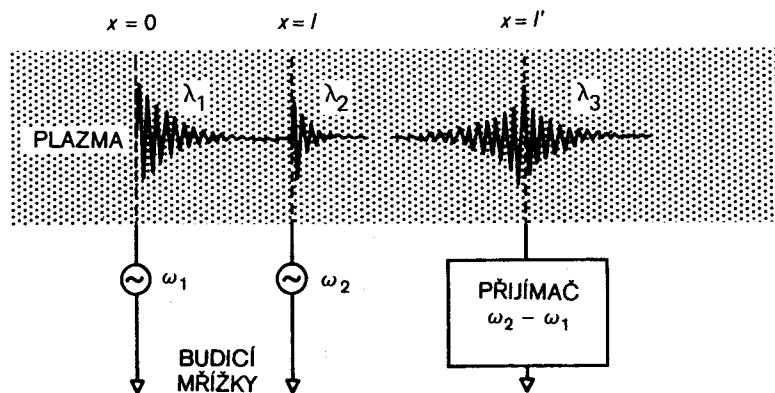
PLAZMOVÁ ECHA 8.6

Poněvadž mechanismus Landauova útlumu není spojen se srážkami a s disipačními procesy, je vratným procesem. Že to tak skutečně je, dokazuje jasně pozoruhodný jev plazmového echa. Obrázek 8-19 ukazuje schéma

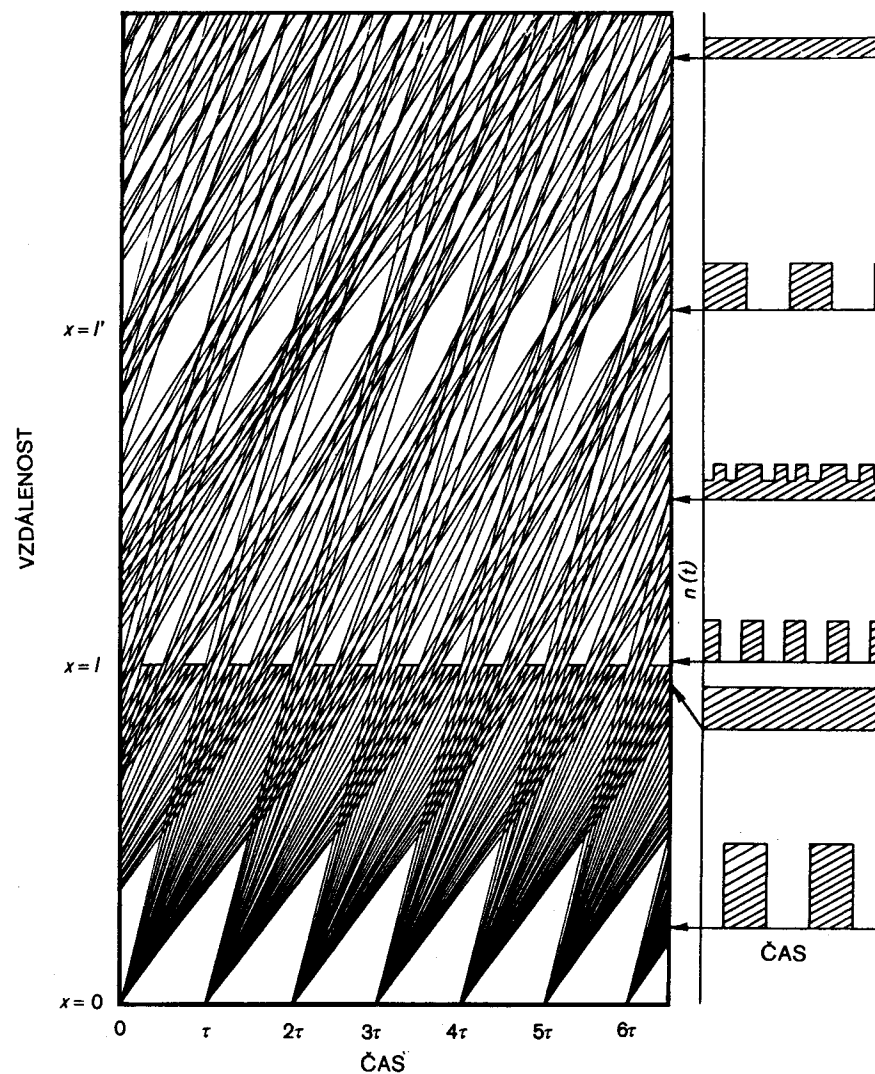
experimentálního uspořádání. Na první mřížce je generována plazmová vlna s frekvencí ω_1 a vlnovou délkou λ_1 šířící se doprava. Vlna se Landauovým útlumem zmenší až pod práh měřitelnosti. Druhou mřížkou ve vzdálenosti l od první je generována druhá vlna s ω_2 a λ_2 , která je rovněž utlumena. Pohybujeme-li v podélném směru třetí mřížkou spojenou s přijímačem naladěným na frekvenci $\omega = \omega_2 - \omega_1$, nalezneme ve vzdálenosti $l' = l\omega_2/(\omega_2 - \omega_1)$ echo. Děje se totiž toto: rezonanční částice, jež jsou příčinou toho, že první vlna je zcela ztlumena, uchovávají informace o vlně ve své rozdělovací funkci. Jestliže druhá mřížka převrací změnu rozdělení rezonančních částic, může se vlna znovu objevit. K tomuto procesu může ovšem dojít jenom v téměř bezsrážkovém plazmatu. Amplituda echa ve skutečnosti sloužila k citlivému měření srážkové frekvence. Na obr. 8-20 je fyzikální model vzniku echa. Na téměř principu spočívá pozorování echa u elektronových plazmových vln a cyklotronových vln. Obr. 8-20 představuje vlastně závislost vzdálenosti na čase, takže trajektorie částice s danou rychlostí je přímka. V místě $x = 0$ je mřížka, která periodicky dovoluje průchod shlukům částic s nestejnou rychlostí. Právě pro tuto nestejnost rychlosti se shluky mísí dohromady a v určité vzdálenosti l se hustota, znázorněná na pravé straně obrázku, stává v čase konstantní. Druhá mřížka v místě $x = l$ s vyšší frekvencí částicím cestu střídavě uzavírá a uvolňuje. Tento výběr trajektorií částic v prostoru a čase pak vede k tomu, že se částice v místě $x = l'$ znovu shlukují.

Vztah mezi l' a l můžeme vypočítat z tohoto zjednodušeného modelu, který zanedbává vliv elektrického pole vlny na trajektorie částic. Je-li $f_1(v)$ rozdělovací funkce na první mřížce a její modulace je $\cos \omega_1 t$, bude rozdělení pro $x > 0$ dáno výrazem

$$f(x, v, t) = f_1(v) \cos\left(\omega_1 t - \frac{\omega_1}{v} x\right). \quad [8-79]$$



OBR. 8-19 Schéma měření plazmatického echa. [Převzato z A. Y. Wong a D. R. Baker, Phys. Rev. 188, 326 (1969).]



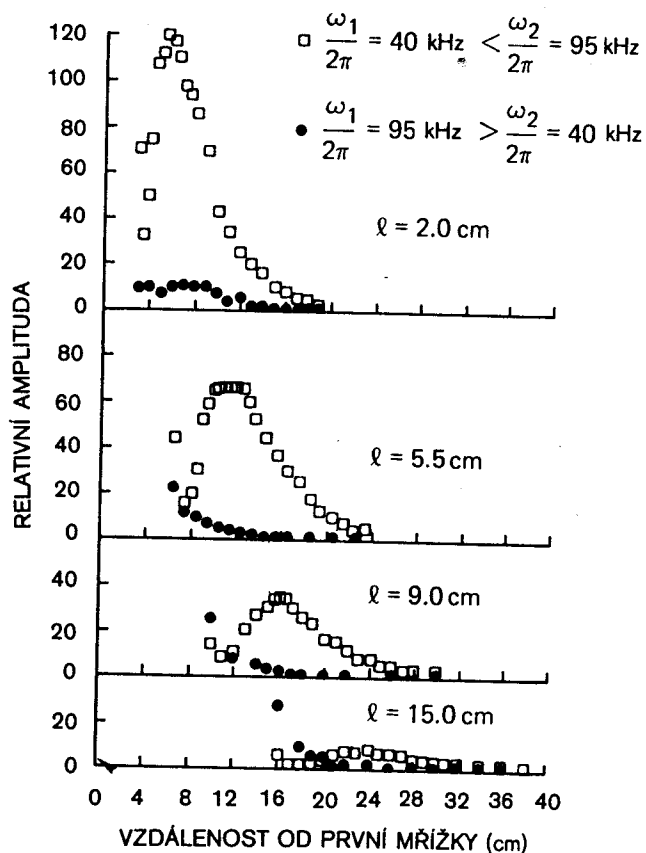
Prostoro-časové trajektorie částic, periodicky zadržovaných a propouštěných. Dochází ke shlukování trajektorií, jež vede ke vzniku echa. Vpravo je časový průběh hustoty v různých vzdálenostech. [Převzato z D. R. Baker, N. R. Ahern a A. Y. Wong, Phys. Rev. Letters 20, 318 (1968).]

OBR. 8-20

Druhá mřížka v místě $x = l$ bude dále toto rozdělení modulovat faktorem obsahujícím ω_2 a vzdálenost $x - l$

$$f(x, v, t) = f_{12}(v) \cos\left(\omega_1 t - \frac{\omega_1}{v} x\right) \cos\left[\omega_2 t - \frac{\omega_2}{v} (x - l)\right] = \quad [8-80]$$

$$= f_{12}(v) \cdot \frac{1}{2} \left\{ \cos\left[(\omega_2 + \omega_1)t - \frac{\omega_2(x-l) - \omega_1 x}{v}\right] + \cos\left[(\omega_2 - \omega_1)t - \frac{\omega_2(x-l) - \omega_1 x}{v}\right] \right\}. \quad [8-81]$$



OBR. 8-21 Měření profilu amplitudy echa pro různé vzdálenosti l mezi budícími mřížkami. Plné kroužky odpovídají případu $\omega_2 < \omega_1$, při němž by echo nemělo vzniknout. [Převzato z Baker, Ahern a Wong, citovaná práce.]

Echo je způsobeno druhým členem, který osciluje s frekvencí $\omega = \omega_2 - \omega_1$ a jeho argument je nezávislý na v , platí-li

$$\omega_2(x - l) = \omega_1 x$$

neboli

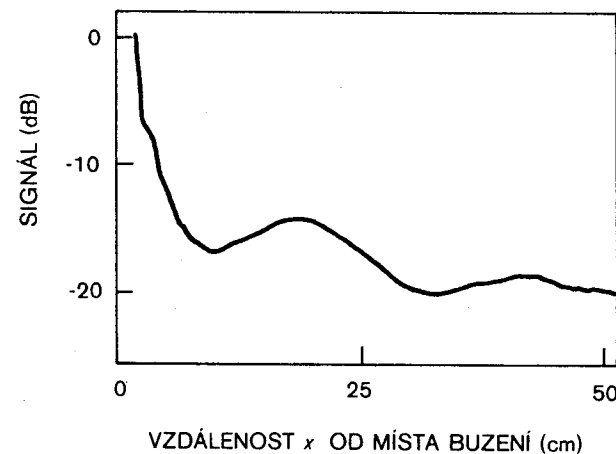
$$x = \omega_2 l / (\omega_2 - \omega_1) \equiv l'. \quad [8-82]$$

Druhý člen tudíž není v bodě $x = l'$ ovlivněn rozptylem rychlostí, směřování fází bylo sejmuto. Integrujeme-li přes rychlosti, dává tento člen fluktuaci hustoty s frekvencí $\omega = \omega_2 - \omega_1$. Prvý člen je nedetegovatelný, protože mísení fází vyhladilo hustotní poruchu. Je zřejmé, že l' je kladné jenom pro $\omega_2 > \omega_1$. Fyzikální příčina spočívá v tom, že druhá mřížka má k dispozici menší vzdálenost, na níž dešifruje poruchy způsobené prvou mřížkou, musí tedy pracovat s vyšší frekvencí.

Echa iontové vlny měřili Baker, Ahern a Wong, výsledky ukazuje obr. 8-21. Vzdálenost l' se mění současně s l podle vztahu [8-82]. Plné body, odpovídající případu $\omega_2 < \omega_1$, ukazují, že echo nevzniká, jak také lze očekávat. Amplituda echa se zmenšuje se vzdáleností, protože srážky kazí koherenci rychlostní modulace.

NELINEÁRNÍ LANDAUŮV ÚTLUM 8.7

Sledujeme-li v prostoru amplitudu elektronové nebo iontové vlny excitované např. mřížkou, často zjistíme, že se nezmenšuje exponenciálně, jak předpovídá lineární teorie, a to tehdy, je-li amplituda velká. Místo toho



Měření profilu amplitudy nelineární elektronové vlny vykazující ne-monotonní pokles. [Převzato z R. N. Franklin, S. M. Hamberger, H. Ikezi, G. Lampis a G. J. Smith, Phys. Rev. Letters 28, 1114 (1972).]

OBR. 8-22

zpravidla zjistíme, že se amplituda zmenšuje, opět roste a pak osciluje, dříve než se ustálí na nějaké hodnotě. Takové chování elektronové vlny s frekvencí 38 MHz ukazuje obr. 8-22. Přesně takové oscilace *amplitudy* lze očekávat od nelineárního jevu zachycení částic, o němž jsme hovořili v odd. 7.5, i když mohou spolupůsobit i jiné efekty. Že k zachycení částic dojde, lze očekávat tehdy, když je potenciál vlny tak velký jako kinetická energie částic pohybujících se fázovou rychlostí

$$|q\phi| = \frac{1}{2}mv_{\phi}^2 = \frac{1}{2}m(\omega/k)^2. \quad [8-83]$$

Poněvadž $|\phi| = |E/k|$, znamená tato podmínka

$$\omega \approx \omega_k, \quad \omega_k^2 \equiv |qkE/m|. \quad [8-84]$$

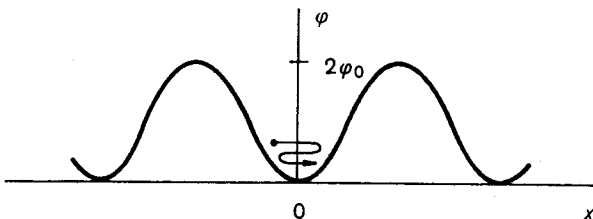
Veličina ω_k je frekvence kmitů částice zachycené u dna sinusové potenciálové jámy (obr. 8-23). Potenciál je dán výrazem

$$\phi = \phi_0(1 - \cos kx) = \phi_0\left(\frac{1}{2}k^2x^2 + \dots\right). \quad [8-85]$$

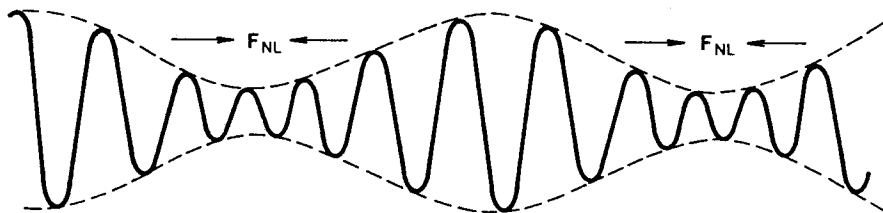
Pohybová rovnice je

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -m\omega^2x = qE = -q \frac{d\phi}{dx} = -qk\phi_0 \sin kx. \quad [8-86]$$

Frekvence ω není konstantní, pokud není x malé, $\sin kx \approx kx$, a pokud ϕ není přibližně parabolické. Pak ω má hodnotu ω_k definovanou rovnicí [8-84]. Jsou-li rezonanční částice potenciálem odraženy, vrátí kinetickou energii vlně a vlna vzroste. Odrazí-li se částice zase od druhé strany, pře-



OBR. 8-23 Zachycená částice odrážející se v potenciálové jámě vlny.



OBR. 8-24 Ponderomotorická síla způsobená obálkou modulané vlny může zachytit částice a umožnit tak rezonanci vlna-částice při grupové rychlosti.

cházi energie zpět částicím a vlna je tlumena. V souřadné soustavě spojené s vlnou by tedy bylo možno očekávat amplitudové oscilace s frekvencí ω_k . V laboratorní soustavě by to byla frekvence $\omega' \approx \omega_k + kv_{\phi}$; amplitudové oscilace by měly vlnčet $k' = \omega'/v_{\phi} = k[1 + (\omega_k/\omega)]$.

Podmínka $\omega_k \geq \omega$ se ukazuje jako mez platnosti lineární teorie, a to i tehdy, když spolupůsobí jiné procesy než zachycení částic. Jiný typ nelineárního Landauova útlumu souvisí se záněji dvou vln. Představme si, že máme dvě vysokofrekvenční elektronové vlny (ω_1, k_1) a (ω_2, k_2) . Ty vytvoří záněje a obalová křivka amplitud bude postupovat rychlostí $(\omega_2 - \omega_1)/(k_2 - k_1) \approx d\omega/dk = v_g$. Tato rychlost může být natolik nízká, že může ležet v oblasti rozdělovací funkce iontů. Tak může docházet k výměně energie s rezonančními ionty. Potenciál, který na ionty působí, je efektivní potenciál způsobený ponderomotorickou silou (obr. 8-24); může se objevit Landauův útlum nebo zesílení. Útlum představuje efektivní způsob jak zahřívát ionty vysokofrekvenčními vlnami, které normálně s ionty neinteragují. Má-li rychlostní rozdělení iontů dva vrcholy, může excitovat elektronové vlny. Taková nestabilita se nazývá *modulační nestabilita*.

Kapitola devátá

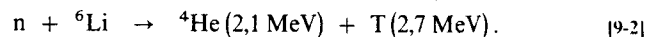
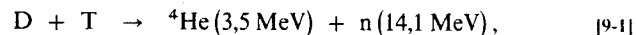
ÚVOD DO ŘÍZENÉ TERMONUKLEÁRNÍ REAKCE

9.1 PROBLÉM ŘÍZENÉ TERMONUKLEÁRNÍ REAKCE

Je zcela v pořádku, že tato kniha končí úvodem, neboť studium elementární fyziky plazmatu směřuje k zvládnutí složitého problému, který zpočátku dodával podněty pro růst této nové vědy – k zvládnutí řízené termonukleární reakce. Protože jediným palivem, jež bude konečný reaktor vyžadovat, je těžký vodík obsažený v mořské vodě, dosažení tohoto cíle by znamenalo získání prakticky neomezeného zdroje energie (dostačujícího na stovky miliónů let) bez významnějších výdajů za palivo. To by představovalo tak obrovský impuls pro naši civilizaci, že je možno řízenou termonukleární reakci považovat za nejdůležitější výzvu, před jakou kdy člověk a věda stojí.

9.1.1 Reakce

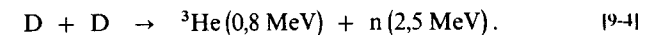
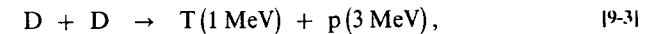
Prvá generace termojaderných reaktorů bude využívat následující reakce



n je neutron, D a T jsou atomy deuteria (${}^2\text{H}$) a tritia (${}^3\text{H}$). Tato reakce, jak poznáme, má ze všech nejnižší zápalnou teplotu a nejmenší požadavky na udržení plazmatu. Větší část energie však odchází v podobě neutronů s energií 14 MeV a musí se od nich získávat v tepelném cyklu, jehož termodynamická účinnost je omezena asi na 40%. Krom toho neutrony poškozují stěny reaktoru a vyvolávají jejich radioaktivitu.

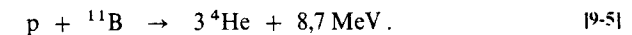
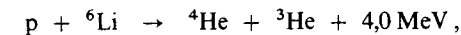
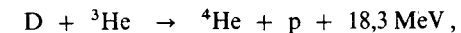
Druhou nevýhodou reakce [9-1] je, že tritium se v přírodě nevyskytuje a musí být produkováno reakcí [9-2] v lithiovém plášti obklopujícím plazma. Naštěstí ${}^6\text{Li}$ je izotop nacházející se v hojně míře v přírodním lithiu (7,5%), kterého jsou v zemské kůře vydatné zásoby. Zásoby deuteria jsou nevyčerpatelné, neboť 0,015% vodíku v mořské vodě tvoří deuterium a lze ho snadno oddělit.

V reaktoru spalujícím samotné deuterium by probíhaly tyto reakce, k nimž dochází se skoro stejnou pravděpodobností



Odpadá potřeba produkce tritia a jenom 34% energie patří neutronům. Je však mnohem obtížnější vyhovět nárokům kladeným na plazma.

Lákavou možnost představují v termojaderném reaktoru elektricky nabitě produkty reakce, jichž by bylo možno užít přímo k výrobě elektrické energie; tím bychom se vyhnuli malé účinnosti tepelného cyklu a minimalizoval by se nepříznivý vliv na životní prostředí. Kdybychom dosáhli vysokých zápalných teplot, byly by z tohoto hlediska vhodné reakce, jejichž produktem jsou nabitě částice.



9.1.2 Nezbytnost plazmatu

Protože jsou ionty kladně nabitě, musí být dříve, než může dojít k reakcím uvedeným v oddíle 9.1.1, překonána Coulombova odpuzivá síla. Pohyb atomových jader musí tudíž být zrychlen na tak vysoké energie, aby jádra pronikla Coulombovou bariérou. Například účinný průřez σ pro reakci $D-T$ se prudce zvětšuje, jakmile energie vzroste na 50 keV. V blízkosti 100 keV dosahuje σ maxima a při vyšších energiích pozvolna klesá. Svazek deuterionů z urychlovače nelze použít; dá se ukázat, že je-li svazek namířen například na terčík z pevného tritia nebo deuteria, většina energie se ztratí ionizací a ohřátím terčíku a elastickými srážkami. Srážející se svazky nelze vytvořit tak husté, aby získaná energie z termojaderné reakce byla větší než energie potřebná pro urychlení. Cíle lze dosáhnout vytvořením maxwellovského plazmatu, jehož rychlé částice z konce rychlostního rozdělení by vstupovaly do termojaderných reakcí. Je-li rozdělovací funkce maxwellovská, nemění se elastickými srážkami a energie, kterou bylo plazma zahřáto, se uchovává, dokud se částice neúčastní některé reakce nebo dokud neunikne z vymezeného prostoru. Proto mluvíme o *termonukleární* reakci.

9.1.3 Zápalná teplota

Výkon vzniklý v objemové jednotce reakcemi D-T je

$$P_r = n_D n_T \langle \sigma v \rangle W, \quad [9-6]$$

kde $\langle \sigma v \rangle$ je vystředováno přes maxwellovské rozdělení a W je energie 17,6 MeV uvolňující se při každé reakci. Aby se teplota plazmatu zachovala, musí být tento výkon větší než výkon, který se ztrácí. I kdyby bylo plazma dokonale drženo, bude nevyhnutelně docházet ke ztrátám energie zářením elektronů. K emisi tohoto záření, nazývaného brzdné záření, dochází, když se elektrony elasticky sráží s ionty a září tudíž jako urychlované náboje. Výkon brzdného záření je dán výrazem

$$P_b = 5 \times 10^{-43} Z^2 n^2 (KT_e)_{\text{keV}}^{1/2}. \quad [9-7]$$

P_r i P_b se mění s n^2 , ale P_r roste s KT daleko rychleji než P_b . Zápalnou teplotu můžeme stanovit tak, že položíme P_r a P_b sobě rovné a budeme předpokládat, že vzniklé ionty mají dostatek času, aby v coulombovských srážkách předaly svoji energii ostatním iontům a elektronům, takže všechny teploty jsou stejné. Zápalná teplota reakce D-T je asi 4 keV, reakce D-D asi 35 keV. Pro reakce s velkým Z podle rov. [9-5] by byla potřebná dokonce ještě vyšší teplota.

9.1.4 Lawsonovo kritérium

Podmínka, aby termojadernou reakcí vzniklo víc energie, než je jí zapotřebí k ohřevu plazmatu a náhradě ztrát zářením, znamená určité požadavky kladené na hustotu plazmatu n , na dobu udržení τ a na teplotu. Předpokládá se, že jak energie termojaderné reakce, tak energie brzdného záření, tak kinetická energie unikajících částic (rychlost úniku se vyjadřuje pomocí τ) jsou vráceny do tepelného cyklu s účinností nepřevyšující 33%. Ukazuje se, že n a τ se objevují jenom v součinu $n\tau$. Minimální hodnota $n\tau$ potřebná pro reakce D-T je asi $10^{20} \text{ m}^{-3} \text{ s}$, pro reakce D-D asi $10^{22} \text{ m}^{-3} \text{ s}$. To se nazývá *Lawsonovo kritérium*. Principiálně je možné snížit tato čísla užitím složitějších modelů, jako kombinací svazku a plazmatu, nebo účinnější přeměnou energie, jako je přímá přeměna v elektřinu.

9.1.5 Hlavní problémy

Problémy, jež jsou spojeny s vývojem termojaderného reaktoru, je možno rozdělit do tří hlavních skupin:

1. udržení plazmatu,
2. ohřev plazmatu,
3. technická stránka termojaderné reakce.

Udržení se týká dosažení hodnoty $n\tau$ podle Lawsonova kritéria. Existují dva odlišné přístupy: udržení magnetickým polem s charakteristickými hodnotami $n \approx 10^{21} \text{ m}^{-3}$ a $\tau \approx 0,1 \text{ s}$ a inerciální (setrvačné) udržení s $n \approx 10^{32} \text{ m}^{-3}$ a $\tau \approx 10^{-11} \text{ s}$. Magnetickému udržení se dostalo největší pozornosti a je ze všech tří jmenovaných problémů nejvíce prostudováno. Ohřev plazmatu samozřejmě souvisí s udržením; i pomalý ohřívací proces by dostačoval, kdyby byl čas udržení velmi dlouhý. Podrobný mechanismus ohřevu ještě není znám. Technické problémy se týkají projektu reaktoru samého bez ohledu na vlastní plazma. V této oblasti nás skutečně překážky teprve čekají.

Navíc bychom ještě měli jmenovat dvě vedlejší oblasti, v nichž se dosáhlo výrazného pokroku:

1. diagnostika plazmatu,
2. čistota plazmatu.

Byla vyvinuta celá škála různých diagnostických metod na měření parametrů plazmatu a procesů, které v něm probíhají. Tyto metody užívají elektromagnetické vlny, plazmové vlny, vnitřní elektrody-sondy, částicové svazky a vnější čidla. Čistota plazmatu je experimentálním problémem mimořádné důležitosti, poněvadž atomy s velkým Z , které se uvolní ze stěn, způsobí svým zářením intenzivní ztrátu energie. Byla sestrojena zařízení nazývaná divertory (odchylovače), jejichž úkolem je účinně izolovat horké plazma od stěn.

Hlavní přístupy 9.1.6

Vyzkoušelo se již mnoho nápadů, jak dosáhnout podmínek pro termojadernou reakci; i když se ještě zkouší několik málo nestandardních metod, hlavní experimentální úsilí se zúžilo na tyto čtyři přístupy:

1. uzavřené systémy: torusy,
2. otevřené systémy: magnetická zrcadla,
3. theta pinč,
4. lasery.

V uzavřených systémech siločáry zůstávají uvnitř systému, i když se třeba neuzavírají samy do sebe. Otevřené magnetické systémy pracují na principu magnetických zrcadel, popsaném v oddíle 2.3.3. Pinčem se rozumí plazma, jímž protéká tak silný proud, že vytváří vlastní magnetické pole a zároveň zahřívá plazma. Uspořádání může být buď otevřené nebo uzavřené. Termojaderná reakce excitovaná laserem pracuje s inerciálním, nikoliv s magnetickým udržením a bude-li technicky proveditelná, vyhne se potížím s magnetickými nestabilitami.

9.2 MAGNETICKÉ UDRŽENÍ: TORUSY

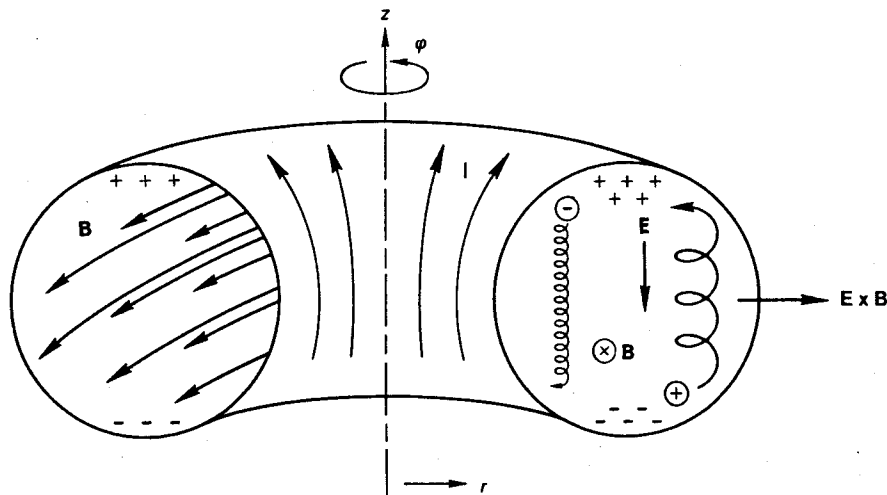
9.2.1 Rovnováha

V oddíle 2.3.2 jsme ukázali, že z jednoduchého torusu, v němž jsou siločáry kruhové a do sebe uzavřené, uniknou částice driftem. Je to důsledek Ampérova zákona,

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} H_\phi r d\phi = I, \quad (9-8)$$

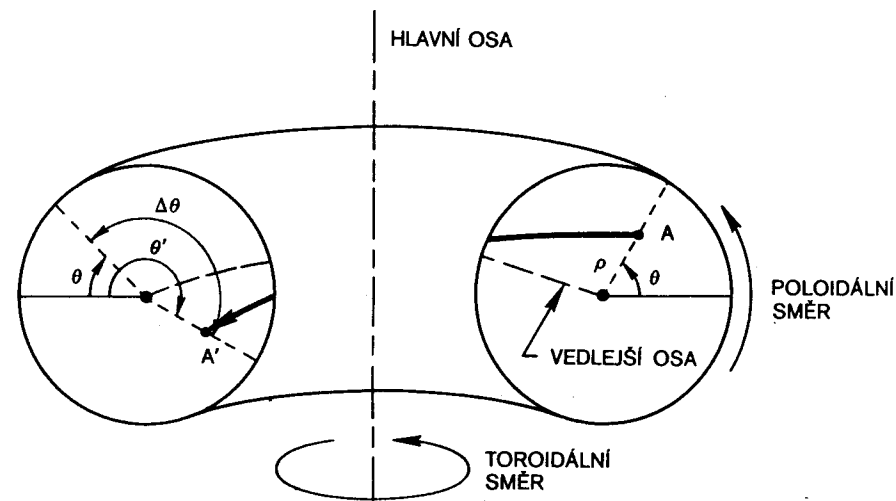
podle něhož se $|B|$ mění jako r^{-1} ; gyrující částice mají tudíž na protějších stranách svých orbitů nestejný Larmorův poloměr (obr. 9-1). Výsledkem je, že ionty driftují v torusu nahoru a elektrony dolů a vzniká vertikální elektrické pole. Toto pole \mathbf{E} pak způsobí, že ionty a elektrony spolu driftují ven z hlavní osy ve směru $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$. Aby se tomuto jevu předešlo, musí mít toroidální systém zkroucené siločáry, jak ukazuje obr. 9-2. Na pravé straně obrázku 9-2 má v rovině průřezu siločára v bodě A souřadnice (ρ, θ) , na levou stranu dorazí do bodu A'. Úhel θ se pootočí okolo menší osy o $\Delta\theta$. Tento úhel pootočení $\Delta\theta$ po jednom proběhnutí siločáry torusem a návratu na pravou stranu se nazývá rotační transformace ι (iota). Kdyby nedocházelo ke srážkám, každá konečná hodnota ι by zabránila driftovým ztrátám a zajistila by plazmatu rovnováhu.

Příznivý vliv šroubovicového stočení siločar si můžeme objasnit dvěma způsoby. Sledujeme-li pohyb jednotlivé částice, pak se např. ion driftující v bodě A směrem vzhůru vzdaluje od středu plazmatu. Když dosáhne



OBR. 9-1 V jednoduchém torusu, v němž jsou siločáry uzavřené kružnice, se magnetické pole mění jako $1/r$. Výsledný $\mathbf{v}B$ drift způsobí separaci náboje ve vertikálním směru, která zase vyvolá drift plazmatu směrem ven.

bodu A', driftuje sice stále vzhůru, ale teď se přibližuje středu plazmatu. Budou-li tepelné pohyby mnohem rychlejší než $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ drift, bude se částice po vystředování přes mnoho oběhů okolo hlavní osy nacházet ve stejné vzdálenosti ρ od menší osy, jestliže i siločáry zachovávají tuto vzdálenost.



V torusu s rotační transformací změni siločára A-A' při otočce okolo hlavní osy svůj azimutální úhel θ vzhledem k vedlejší ose. OBR. 9-2

Z hlediska tekutinového si všimněme, že šroubovicové siločáry spojují oblasti kladného náboje s oblastmi záporného náboje (obr. 9-1), a tak zkratují vertikální elektrické pole. Jestliže dochází ke srážkám, je odpor konečný; pak musí být rotační transformace dostatečně veliká, aby se rovnováhy dosáhlo.

Typy toroidálních systémů 9.2.2

Toroidální systémy se rozlišují podle způsobu, jakým se dosahuje zkroucení siločar. Existují čtyři základní typy:

1. vnější šroubovicové vodiče: stellarátory,
2. proud uvnitř plazmatu: tokamaky,
3. vnitřní vodiče: multipóly,
4. svazky částic uvnitř plazmatu: Astron.

Stabilita 9.2.3

Magnetické pole musí mít takovou konfiguraci, aby nejen vytvořilo rovnovážný stav, ale i zajistilo jeho stabilitu. Vysokofrekvenční elektronové nestability nejsou v torusech celkem nebezpečné, protože ionty jsou vysoko-

frekvenčním polem postrkovány jenom v nepatrné míře. Nizkofrekvenční nestability schopné způsobit únik iontů je možno rozdělit do tří skupin:

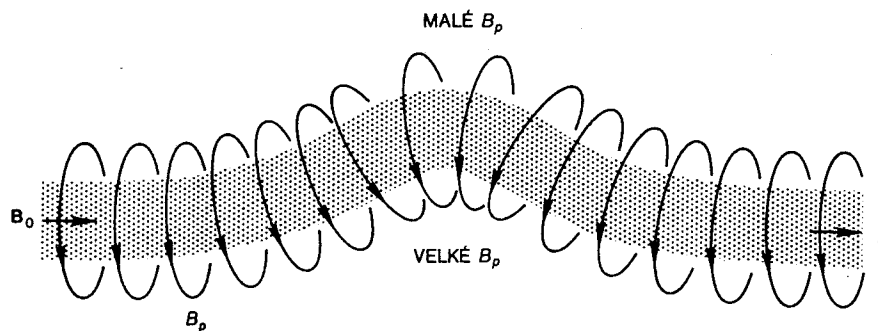
1. nestability Rayleighova–Taylorova typu,
2. nestability způsobené proudem,
3. driftové nestability.

Magnetické pole v torusech je nutně zakřiveno; odstředivá síla, působící na částice obíhající po křivce kolem dokola, se projevuje jako gravitační pole. To vede ke vzniku „gravitační“ nestability, o níž jsme hovořili v oddíle 6.7. Protéká-li plazmatem elektrický proud, ať už proto, aby způsobil zkroucení magnetického pole, nebo aby plazma zahřál, jsou možné dva typy nestabilit – elektrostatické a elektromagnetické. Elektrostatickým typem je dvousvazková nestabilita (oddíl 6.6) způsobená posunutím středů rozdělovacích funkcí iontů a elektronů. Elektromagnetický typ se nazývá „smyčková“ nestabilita (kink instability), o níž jsme dosud nehovořili.

Na obrázku 9-3 je znázorněn elektrický proud protékající sloupcem plazmatu ve směru primárního magnetického pole B_0 . Tento proud vytváří poloidální pole B_p . Vznikne-li smyčka, jak ukazuje obrázek, jsou na vnitřní straně smyčky siločáry pole B_p blíže u sebe než na vnější straně. Magnetický tlak $\epsilon_0 c^2 B_p^2 / 2$ působí tudíž tak, že zvětšuje velikost smyčky a tlačí tak plazma ke stěnám. O posledním typu, o driftových nestabilitách, jsme hovořili v odd. 6.8; jejich fyzikální mechanismus spočívá v rozdílnosti driftových pohybů iontů a elektronů napříč poli B , jak je patrné z rov. [2-59] a [2-66]. Rovněž musí existovat odchylka od Boltzmannova vztahu [3-73]; ta může být způsobena konečným odporem, podobně jako v oddíle 6.8, rezonančními částicemi nebo zachycováním částic v lokálních zrcadlech (obr. 5-21).

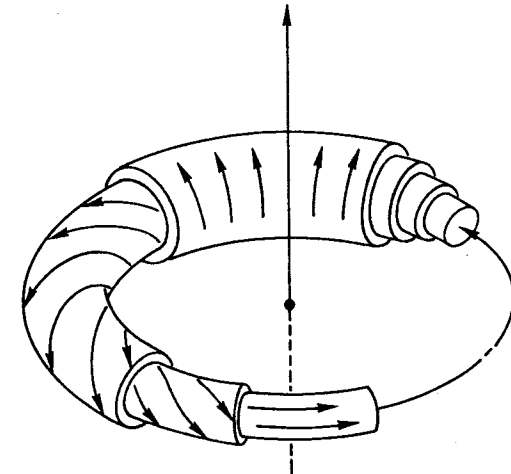
Nestabilitám lze předcházet v zásadě třemi způsoby:

1. střižné magnetické pole,
2. magnetická jáma (minimum \bar{B}),
3. dynamická stabilizace.



OBR. 9-3 Fyzikální princip smyčkové nestability.

Stellarátory a tokamaky užívají především střižné magnetické pole, tzn. úhel sklonu šroubovicových siločar se mění s menším poloměrem ϱ . Na obrázku 9-4 je krajní případ takového pole; v ose je pole čistě toroidální a na okrajích čistě poloidální (názorné vysvětlení těchto termínů je na obr. 9-2). Střižné pole je účinné proti nestabilitám, jimž vyhovuje malé $k_{||}$, jako je gravitační, smyčková a driftová nestabilita. Ve střižných polích se porucha rostoucí z jednoho poloměru do druhého setkává s magnetickými siločarami majícími jiný sklon.



Střižné magnetické pole v torusu. OBR. 9-4

V systému s „járou středního pole“ neboli s *minimum středního B* ($\min \bar{B}$) jsou siločáry zakřivené víc směrem ke středu plazmatu než ven z plazmatu. Takové pole se snadněji vytváří proudy uvnitř plazmatu a více si o nich řekneme v oddíle o multipólech. Na stabilizační účinek pole s $\min \bar{B}$ spo- léhají především zařízení s vnitřním prstencem a s vnitřním svazkem.

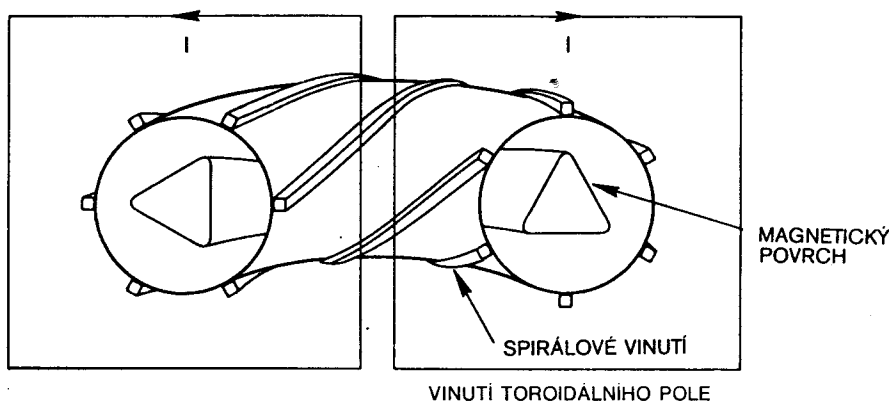
Dynamická stabilizace oscilujícím polem E nebo B může rovněž zabraňovat nestabilitám prostřednictvím časově proměnného střižného pole E nebo B . Účinnější metodou je *stabilizace zpětnou vazbou*, při níž se deteguje fáze nestabilní vlny a na plazma působí ve vhodné fázi síla (např. pomocí vnější cívky) potlačující nestabilitu.

Stellarátory 9.2.4

Stellarátor je toroidální systém, v němž je rotační transformace a střižné pole vytvářeno jenom vnějším vinutím. Siločáry se neuzavírají, avšak zůstávají kolem celého torusu více či méně na stejném vedlejší poloměru.

* rozumí se magnetické pole vystředované podél siločáry – pozn. překl.

Siločáry vytvářejí magnetické povrchy do sebe zasunutě podobně jako na obr. 6-3. Budeme-li dlouho sledovat některou siločáru, zjistíme, že pokrývá určitý magnetický povrch, který neopustí; částice postupující po siločáře bude tedy v plazmatu držená. Typický stellarátorový magnetický povrch má trojúhelníkový průřez jako na obr. 9-5. Teorie rovnovážného a stabilního stavu pro takové prostorové uspořádání je dosti složitá, ale výpočty lze hodně zjednodušit pomocí *variačního principu energie*. U této metody můžeme rozlišit stabilní a nestabilní poruchy podle toho, zda zvyšují nebo snižují energii systému plazma–magnetické pole.

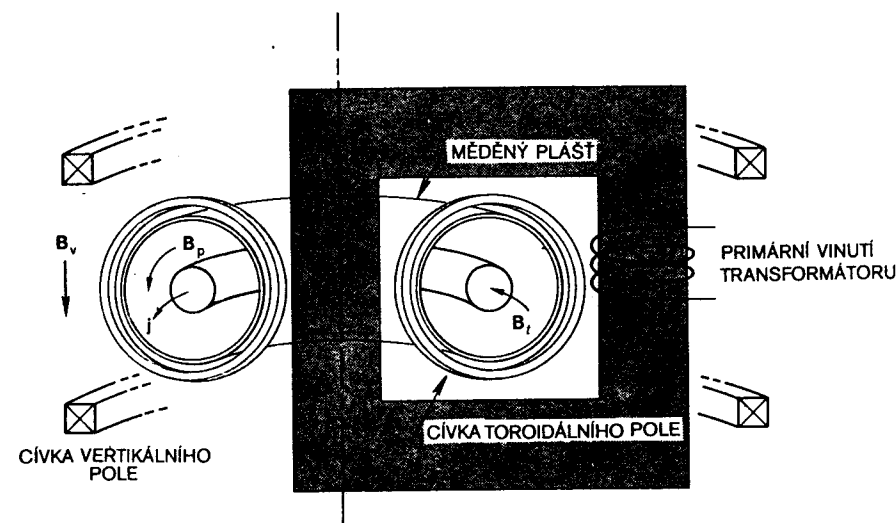


OBR. 9-5 Ve stellarátoru je střížné pole a rotační transformace vytvářena vodiči šroubovitě obtočenými kolem plazmatu. Toto je systém $l = 3$, v němž deformaci magnetických povrchů způsobují tři páry vodičů.

Dokonce ani klasická difúze není v takové geometrii jednoduchá. K tomu, aby byly zkratovány separované náboje z obr. 9-1, je potřebný proud podél B , a tím vzniká dodatečné tření s ionty. Výsledné zvýšení rychlosti klasické difúze se nazývá efekt *Pfirschův-Schlüterův*. Dá se očekávat, že při vysokých teplotách dojde k zachycení částic v banánových orbitech (obr. 5-21) a začne platit neoklasický difúzní zákon (obr. 5-22). I když je možno v některých experimentech se s tímto efektem setkat, ve většině případů odpovídá pozorovaná difúze Bohmovu zákonu (obr. 5-20). Důvody, proč se nedaří udržet plazma ve stellarátorech tak, jak by se očekávalo, mohou být tyto: (1) Střížnost pole nedostačuje k tomu, aby zabránila všem nestabilitám; (2) protože systém není zcela symetrický vzhledem k hlavní ose, může vzniknout asymetrické elektrické pole, které způsobí konvekci plazmatu z jednoho magnetického povrchu na druhý; (3) malé závady magnetického pole mohou způsobit, že siločáry přecházejí z jednoho magnetického povrchu na druhý.

Tokamaky 9.2.5

Z podnětu L. A. Arcimoviče byl v SSSR sestaven tokamak*, zařízení se silným toroidálním magnetickým polem doplněným poloidální složkou, kterou vytváří silný proud v plazmatu samém. Tokamak je dokonale symetrický okolo hlavní osy; ve srovnání se stellarátorem se proto snadněji konstruuje a snadněji se analyzují výsledky. Protože je však plazma zahříváno disipací Jouleova tepla proudu samého a poněvadž proud je zároveň nezbytný pro vytváření rotační transformace zajišťující rovnováhu, nelze problémy udržení a ohřevu vyšetřovat odděleně. Poněvadž kromě toho proud v plazmatu musí být indukovan transformátorem, nemůže tokamak pracovat v ustáleném stavu jako stellarátor; plazma se vytváří a rozpadá při každém impulsu transformátoru. Navzdory těmto nedostatkům je tokamak nejúspěšnější z toroidálních zařízení.



OBR. 9-6 V tokamaku je toroidní složka pole B_t vytvářena cívkami obvyčejného typu, zatímco poloidální složku B_p vytváří velký plazmatem protékající proud indukovaný transformátorem. Přídavné stabilizační síly zajišťuje slabé vertikální pole B_v spolu s vířivými proudy ve vysoce vodivém měděném plášti.

Na obrázku 9-6 jsou hlavní složky tokamaku. Vedle obvyčejného toroidálního pole B_t a plazmatem vytvářeného poloidálního pole B_p je nezbytné ještě třetí pole B_v ve vertikálním směru, které působí proti přirozené rozpínavé tendenci proudového prstence. Poloidální magnetický tlak $\epsilon_0 c^2 B_p^2 / 2$ je na vnitřní straně větší a snaží se zvětšit hlavní poloměr

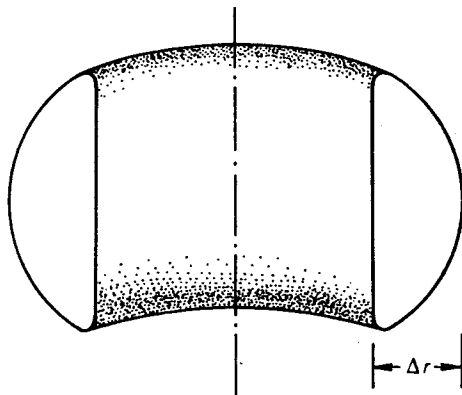
* z ruského: toroidalnaja kamera s magnitnymi katuškami – pozn. překl.

plazmatu. Pole B_z má takový směr, že síla $\mathbf{j} \times \mathbf{B}_z$ působí ve směru radiálních dovnitř. Toto pole mohou vytvářet vnější cívky nebo fiktivní proud ve vysoce vodivém měděném plášti.

Aby rotační transformace i plnila svou funkci, nesmí být celočíselným násobkem 2π , jinak by se siločáry uzavíraly do sebe, nepokrývaly by celý magnetický povrch a neumožňovaly by elektronům dostat se do kteréhokoliv místa, kde je potřeba zrušit prostorový náboj. Kvůli stabilitě nemůže být i větší než 2π , ani když není jeho celočíselným násobkem. Proud tedy nemůže být zvyšován nekonečně ve snaze dosáhnout vysokých teplot. Porovnejme dva tokamaky s rozdílnými poměry R/a *, kde R a a je hlavní a vedlejší poloměr. Měřítkem toho, jak „rychle“ se siločára v plazmatu ovíjí okolo hlavní osy, je poměr B_z/R , pro vedlejší osu je to B_p/a (srv. obr. 9-2). Rotační transformace je tedy úměrná výrazu $B_p R/B_z a$. Činitel jakosti**

$$q \equiv \frac{B_z}{B_p} \frac{a}{R} = \frac{2\pi}{i} \quad [9-9]$$

udává, jak je tokamak vzdálen od limitní hodnoty pro stabilitu $i = 2\pi$, neboli $q = 1$; to je tzv. *Kruskalova-Šafranovova limita*. Kvůli ohřevu si



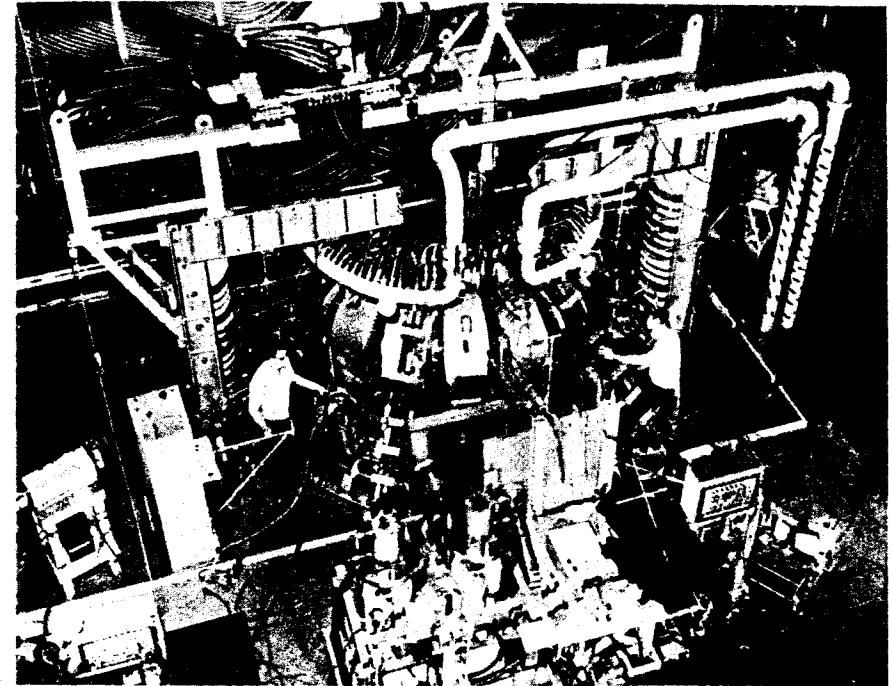
OBR. 9-7 Tokamaky, jejichž průřez není kruhový (podobně jako tento), jsou teoreticky výhodnější než tokamaky s kruhovým průřezem.

však přejeme zvýšit j , jež je úměrné B_p/a , takže žádoucí je nejnižší hodnota q vyhovující z hlediska stability. V praxi není snadné docílit stabilní činnosti pro $q < 2$ nebo 3. Zůstávají-li ostatní parametry stejné, jsou krátké, tlusté tokamaky lepší než dlouhé, tenké; výhodnější jsou malé poměry R/a (aspekty).

* tzv. *aspect* – pozn. překl.

** obvykle se nazývá bezpečnostní faktor (safety factor) – pozn. překl.

Tokamak je možno zlepšit tím, že nebude mít kruhový průřez. V toroidálních systémech pocházejí všechny potíže konců z rozdílné hodnoty B_z na vnitřní a vnější straně prstence. Je možno udělat Δr malé a celkovou plochu průřezu, již protéká proud, zachovat stejně velkou zvětšením vertikálního rozměru přístroje (obr. 9-7). Pro zmenšování Δr

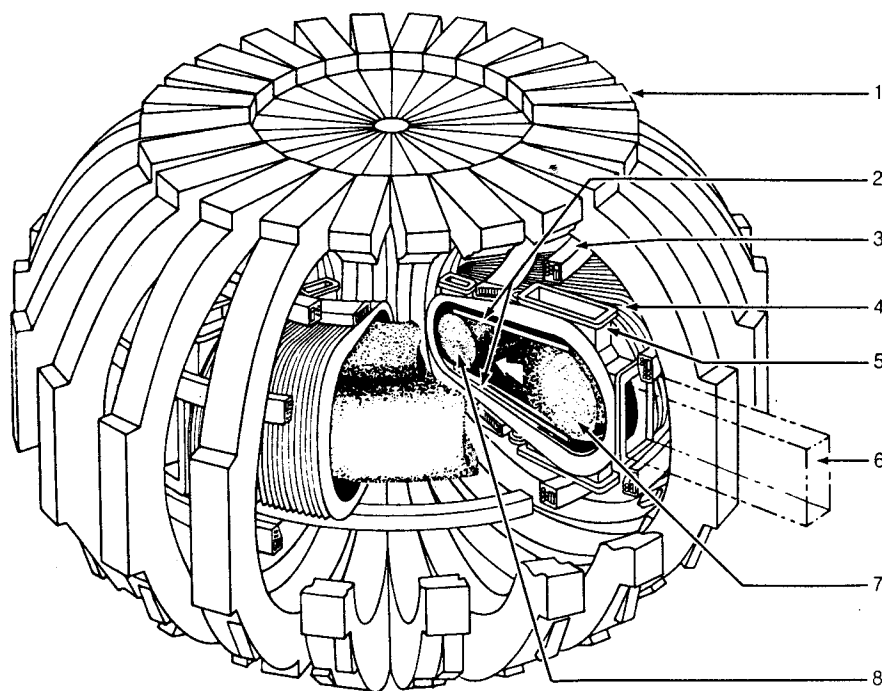


ST Tokamak v Plasma Physics Laboratory v Princetonu ve státě New Jersey. [Financuje U. S. Atomic Energy Commission.] OBR. 9-8

existuje ovšem určitá mez, daná velkým zakřivením průřezu v horní a dolní části plazmatu. Dalším zlepšením, které obr. 9-7 také ukazuje, je trojúhelníkový průřez, takže u vnitřního poloměru je větší objem plazmatu než u vnějšího. U vnitřního poloměru je magnetické pole jednak silnější, jednak má správnou křivost vzhledem ke gravitačnímu modu nestabilit (srv. rov. [6-55]).

Ve stellarátoru se může udržení plazmatu měřit tím způsobem, že se vypne ohřívací proud a pozoruje se klesání hustoty. S tokamakem, v němž je proud nezbytný pro formování magnetického pole, takto postupovat nelze. Poněvadž proud neustále znovu ionizuje ionty, které se dostaly na stěny, rekombinovaly a vrátily se do plazmatu, ztrácí klesání hustoty

tento význam. Významná je však doba udržení energie plazmatu. Právě tak jako difúze částic i difúze energie by měla mít vlastnosti neoklasické difúze (obr. 5-22), jež jsou způsobeny toroidálními efekty. Ukazuje se, že ionty se vskutku řídí tímto zákonem daleko více než Bohmovým zákonem (rov. [5-111]), což naznačuje, že amplituda nestabilit není veliká. Dochází však k anomálnímu přenosu elektronové energie a čas pronikání proudu



OBR. 9-9 Adiabatický toroidální kompresor (ATC)

1. Cívky toroidálního pole (24)
2. Vodící lišty
3. Cívky poloidálního pole
4. Vakuová komora z vlnitého nerezového plechu
5. Měřicí okénko (jedno ze šesti)
6. Výstup k vakuovým vývěvám (6)
7. Původní ohmicky ohřáté plazma
8. Komprimované plazma

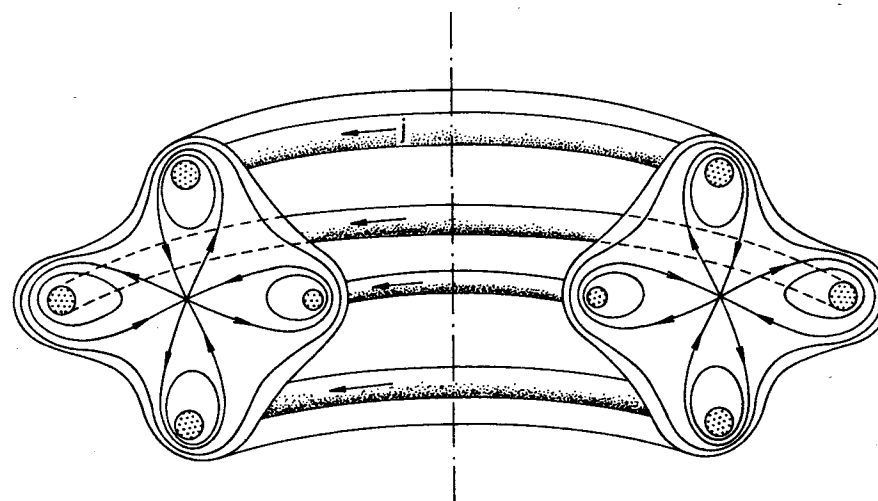
V princetonském ATC tokamaku je plazma adiabaticky komprimováno (ve směru hlavního i vedlejšího poloměru), aby bylo dosaženo vyšší teploty, než lze docílit ohmickým ohřevem. [Princeton University Plasma Physics Laboratory, financuje U. S. Atomic Energy Commission.]

indukovaného v povrchové vrstvě ohřevovým transformátorem dovnitř plazmatu je anomálně krátký. Podařilo se dosáhnout teploty řádově 1 keV a hustoty okolo $5 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$, ale hodnota $n\tau$ zůstává ještě přibližně dva řády pod Lawsonovým kritériem. Předpokládá se, že hodnotu τ lze zvýšit prostým zvětšením velikosti tokamaku, ale zůstává jiný problém. Účinnost ohmického ohřevu se snižuje s rostoucím KT_e a pro dosažení termonukleárních teplot musí být nalezena nějaká metoda pomocného ohřevu.

Na obrázku 9-8 je fotografie typického tokamaku; je to tokamak v princetonské Plasma Physics Laboratory. Na obrázku 9-9 je kresba ATC tokamaku v Princetonu. Tohoto přístroje se užilo k vyzkoušení adiabatické komprese jako prostředku pomocného ohřevu.

Multipóly 9.2.6

Na rozdíl od stellarátorů a tokamaků mají multipóly magnetické pole zcela nebo převážně ve směru poloidálním. Rovnováhy a stability se dosahuje tím, že dovnitř plazmatu se umístí vodiče, a to tak, aby proud jimi protékající vytvořil střední magnetickou jámu*. To je znázorněno na obr. 9-10, kde jsou nakresleny siločáry oktopólového zařízení instalovaného

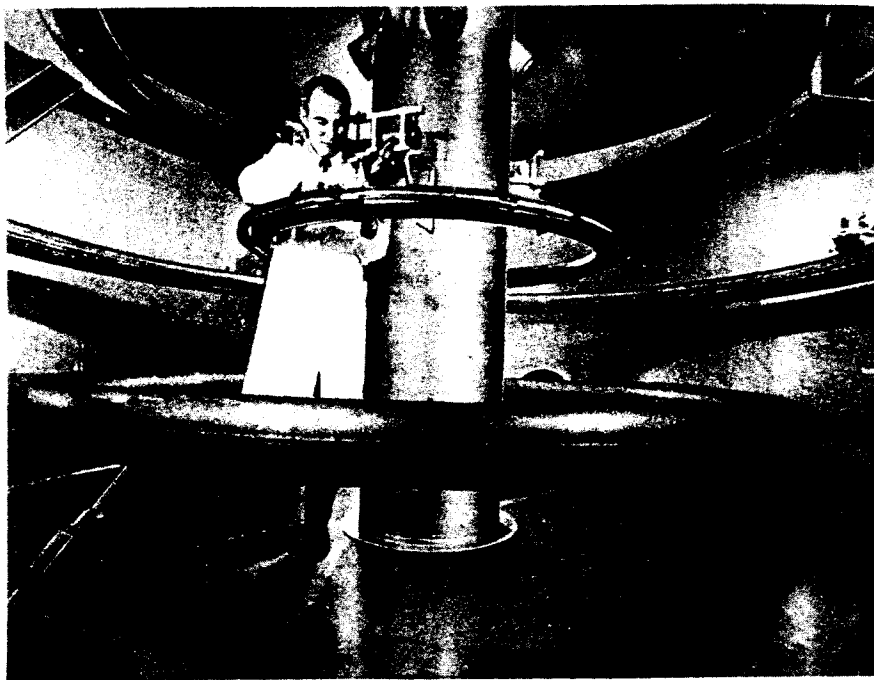


V toroidálním oktopólu protéká čtyřmi vodivými prstenci proud v souhlasném směru a vytváří poloidální magnetické pole naznačeného tvaru. Plazma, vyplňující oblast uprostřed, kde je pole téměř nulové, obtéká kolem prstenců. Na magnetických površích, jež jsou ještě dál od středu než povrchy znázorněné na obrázku, nemá už plazma stabilitu minima středního B a uniká gravitačními nestabilitami.

OBR. 9-10

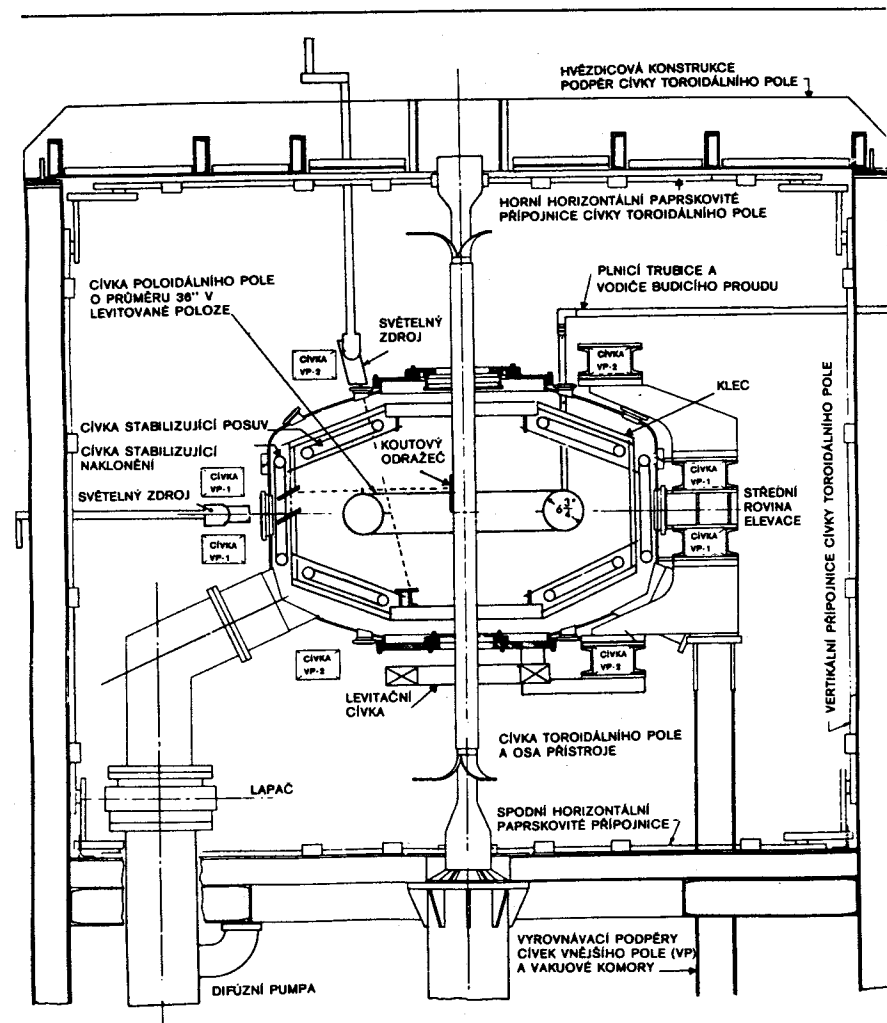
* přesný termín by byl: minimum (jáma) magnetického pole vystředovaného podél siločar – pozn. překl.

v General Atomic Corporation v La Jolla v Kalifornii. Měděnými prstenci protéká proud v souhlasném směru, takže vedlejší osa je místem s nulovým B . Magnetický tlak $\epsilon_0 c^2 B^2 / 2$ roste z tohoto místa všemi směry. Na plazma, které se pohybuje podél vnějších siločar, působí odstředivá síla namířená střídavě dovnitř a ven. V oblasti minima středního* B nepříliš daleko od vodičů je příznivé střední* zakřivení siločar, tzn. vystředovaná odstředivá síla míří dovnitř, takže nevzniká gravitační nestabilita. Takováto stabilizační struktura je velmi účinná i pro ostatní nestability. Je-li B čistě poloidální a siločary se uzavírají, nemohou elektrony zkratovat elektrický potenciál, který může vzniknout mezi přilehlými siločarami. Tomu lze předjet toroidálním magnetickým polem vytvářeným elektrickým proudem protékajícím podél hlavní osy. Potom i v oktopólech vznikne střížné pole. Na obrázku 9-11 je vnitřek velkého oktopólu v La Jolla.



OBR. 9-11 Vnitřek velkého oktopólového zařízení v General Atomic v La Jolla v Kalifornii. Čtyři vodivé prstence jsou podírány tenkými dráty procházejícími plazmatem. [S laskavým svolením T. Ohkawy, General Atomic Company.]

* rozuměj: vystředované – pozn. překl.



Návrh princetonského FM-1 Spheratoru. Vertikální vodič uprostřed vytváří toroidální pole; shora dolů se proud vrací soustavou vodičů umístěných na vnějším okraji systému, připomínající ptačí klec. Poloidální pole je vytvářeno proudem v supravodivém prstenci, který se bez podpěr vznáší v magnetickém poli cívky umístěné v dolní části. Stabilizační cívky v spojení se stabilizačním zpětnovazebným systémem brání pohybům prstence. Uvnitř prstence je tekuté helium, které jej udržuje na teplotě supravodivosti až po dobu dvou hodin, než se helium vypaří. Pomocné cívky, označené VP, tvoří magnetické pole tak, aby mělo minimum středního B . Plazma obklopuje prstence a má tvar trubice ohnuté do kruhu. [Princeton University Plasma Physics Laboratory, financuje U. S. Atomic Energy Commission.]

OBR. 9-12

Téhož efektu minima \bar{B} lze rovněž dosáhnout dvěma prstencovými vodiči (*kvadrupól*) nebo jediným prstencem (*sferátor* či *mimocentrální levitron**). V druhém případě je nezbytné toroidální i vertikální pole. Hlavním problémem multipólů je ovšem držení těchto vnitřních prstenců a jejich proudové napájení. Podpěry musí procházet plazmatem a dochází na nich ke ztrátám. Jediný způsob, jak se těmto ztrátám vyhnout, jsou levitující prstence. Toho lze na přechodnou dobu docílit tím, že se v prstencích indukuje proud a vnější magnetické pole je zvedne silou $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$. Když se proud vlivem odporu zmenší, prstence spadnou. Uživeme-li supravodivé prstence a zchladíme je na kryogenní teploty, můžeme proud udržet takřka neomezeně dlouho. Multipól pak může s levitujícími prstenci pracovat v stacionárním režimu. Na obr. 9-12 je náčrt sferátoru FM-1 v Princetonu, kde byl pokus s levitujícími prstenci uskutečněn. Doba činnosti byla omezena asi na dvě hodiny, pak bylo třeba doplnit do prstence tekuté hélium, užívané k jeho ochlazení na teplotu 4 K.

Přesto, že multipóly jsou příliš komplikované na to, aby se o nich dalo uvažovat jako o reaktoru, sehrály důležitou roli ve výzkumu toroidálních systémů. Byla na nich vyzkoušena užitečnost střížných polí a stabilizace minimem \bar{B} . Po odstranění nestabilních oscilací ukázaly multipóly zhooubný účinek nepravidelností magnetického pole a asymetrií elektrického pole na udržení plazmatu. Studium multipólů vedlo k teoretickému objevu celé třídy *nestabilit se zachycenými částicemi*, které jsou vyvolány tím, že částice nemohou obíhat kolem dokola podél siločar, protože narážejí na lokální magnetická zrcadla. A konečně multipóly umožnily první experimentální ověření zákona neoklasické difúze.

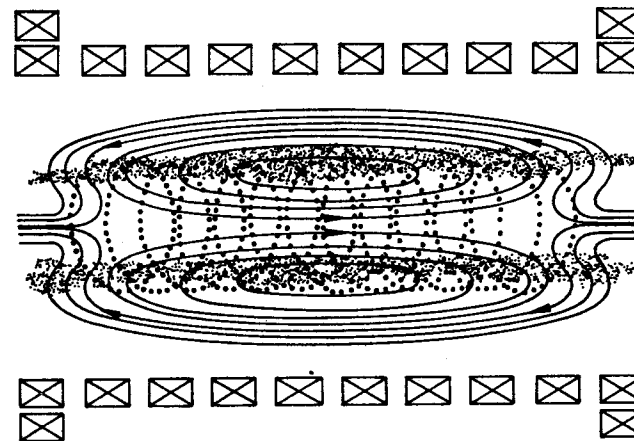
9.2.7 Zařízení s relativistickým svazkem

Potíže s levitací supravodivého prstence uvnitř plazmatu, vytvářejícího vhodně zformované poloidální pole, je možno obejít, užijeme-li namísto prstence svazek relativistických elektronů o vysokém proudu. Takový svazek by nezpůsobil žádné ztráty plazmatu, naopak by složil k jeho ohřevu. Je možné si například představit, že by prstencem sferátoru (obr. 9-12) byl nahrazen svazek relativistických elektronů z některého z generátorů, jež jsou dnes dostupné a jež jsou schopné vytvářet krátké impulsy 10^6 A a 1 MeV. Hlavním problémem je, jak tyto elektrony vstříknout do magnetického pole a zachytit je v něm.

Obrovský přístroj tohoto typu, nazývaný Astron, byl postaven v Lawrence Livermore Laboratory v Kalifornii. Na obr. 9-13 je jeho náčrt. Elektrony s energií 4 MeV jsou z urychlovače vstříkovány do magnetického pole se zrcadly na koncích. Cyklotronně rotující elektrony vytvářejí pole opačného směru, než je pole držící plazma, a kdyby byl elektronový proud

* z latinského levare = zdvihát – pozn. překl.

dostatečně velký, některé ze siločar by vytvářely uvnitř plazmatu uzavřené křivky, takže výsledné pole by bylo poloidální, multipólového typu se střední magnetickou jámou. Přidáním proudu ve směru hlavní osy by vzniklo střížné pole topologicky identické s polem sferátoru. (Pro srovnání obrázku 9-13 s obrázkem 9-12 pootočte jeden nebo druhý o 90° .) Vzdor tomu, že do Astronu byly nakonec vstříknuty elektrony s parametry 600 A a 6 MeV, nestačil proud na obrácení magnetického pole v ose a experimenty na tomto zařízení byly zastaveny.

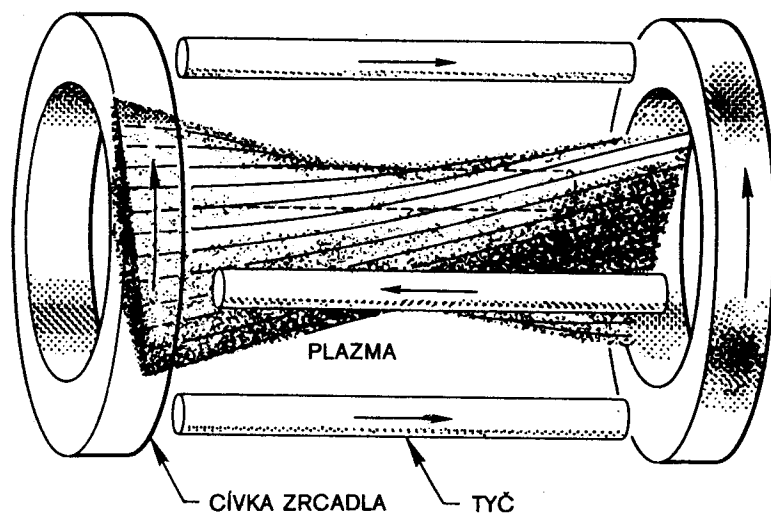


OBR. 9-13
V Astronu je pás relativistických elektronů (tečky), obklopujících horizontální osu symetrie, držen zrcadlovým polem. Proud elektronů zakřivuje zrcadlové pole do naznačeného tvaru, který má oblast stabilního udržení s uzavřenými siločárkami. Relativistické elektrony slouží rovněž k ohřevu plazmatu v této oblasti.

Zařízení s relativistickým svazkem můžeme považovat za mezičlánek mezi tokamaky a multipóly. Ve všech těchto případech toroidální proud vytváří poloidální magnetické pole. V tokamacích je velikost proudu omezena smyčkovou nestabilitou. Pevné prstence v multipólech nemohou vytvářet smyčku, ale narušují plazma. Relativistické svazky nejsou tak stabilní jako pevné prstence, ale jsou přece o stupeň „pevnější“ než elektrony plazmatu, protože jejich hmotnost se relativisticky zvětší.

ZRCADLA 9.3

O principu udržení plazmatu magnetickými zrcadly jsme hovořili v oddíle 2.3.3. Jednoduché uspořádání zrcadel z obr. 2-8 je však nestabilní vůči gravitační žlábkové nestabilitě, poněvadž křivost je všude konvexní, takže odstředivá síla míří opačným směrem než gradient hustoty (srv. rov. [6-55]).



OBR. 9-14 Magnetické zrcadlo lze zformovat do konfigurace s minimem $|B|$ přidáním čtyř Ioffeho tyčí — přímých vodičů, jimiž protéká proud střídavě v opačných směrech. Plazma je pak zkrouceno do naznačeného tvaru a je stabilní vůči gravitačním nestabilitám. [Převzato ze Scientific American 215, 21 (1966).]

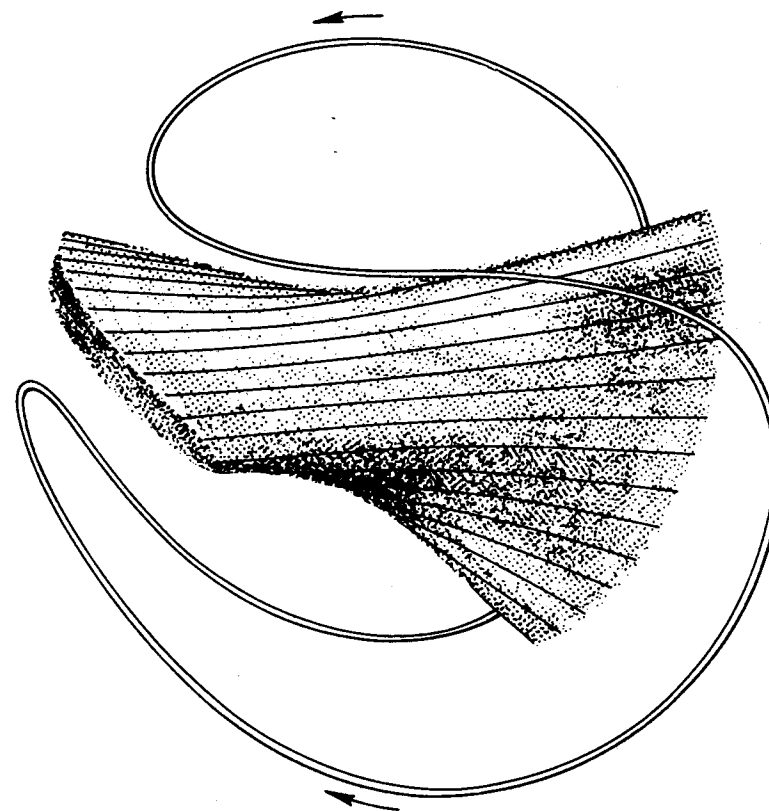
Stability lze dosáhnout pomocným proudem protékajícím tzv. *Ioffeho tyčemi*. Obrázek 9-14 ukazuje, jak se plazma stočí do asymetrického tvaru, přidají-li se tato „vinutí“. Plazma se pak nachází v *absolutní magnetické jámě*, tj. intenzita pole $|B|$ narůstá všemi směry, radiálně i axiálně. Taková konfigurace s minimem $|B|$ je stabilní vůči nízkofrekvenčním modům, které byly zdrojem potíží u torusů, ale jak uvidíme, má jiné nestability. To nejlepší, čeho lze v torusech dosáhnout, je mělká *střední magnetická jáma*, kde středování se rozumí podél siločáry. Nestability se mohou ještě objevovat lokálně v oblastech s nepříznivou křivostí.

Dalším zlepšením konfigurace na obr. 9-14 je spojení Ioffeho tyčí a hlavních cívek do jediného vinutí. Výsledné vinutí se podobá švu na baseballovém nebo tenisovém míčku a nazývá se *baseballová cívka* (obr. 9-15). Na obrázku 9-16 je takováto supravodivá baseballová cívka spouštěna do vakuové komory v Lawrence Livermore Laboratory. Plazma vzniká lorentzovskou ionizací svazku neutrálních atomů vodíku s velkou energií vstříkovaného do magnetického pole. Na obr. 9-17 je nakreslen celý systém.

Doposud nejlepších výsledků se dosáhlo rovněž v Livermoru s velkým zrcadlovým zařízením 2XII. Na obrázku 9-18 je jeho schéma. Plazma je vstříkovááno, zahříváno adiabatickou kompresí a dále ohříváno vstříkováním svazku neutrálních atomů s vysokou energií, mezi nimiž a ionty dochází k výměně náboje. Tímto způsobem se dosáhlo — byť i nikoliv současně —

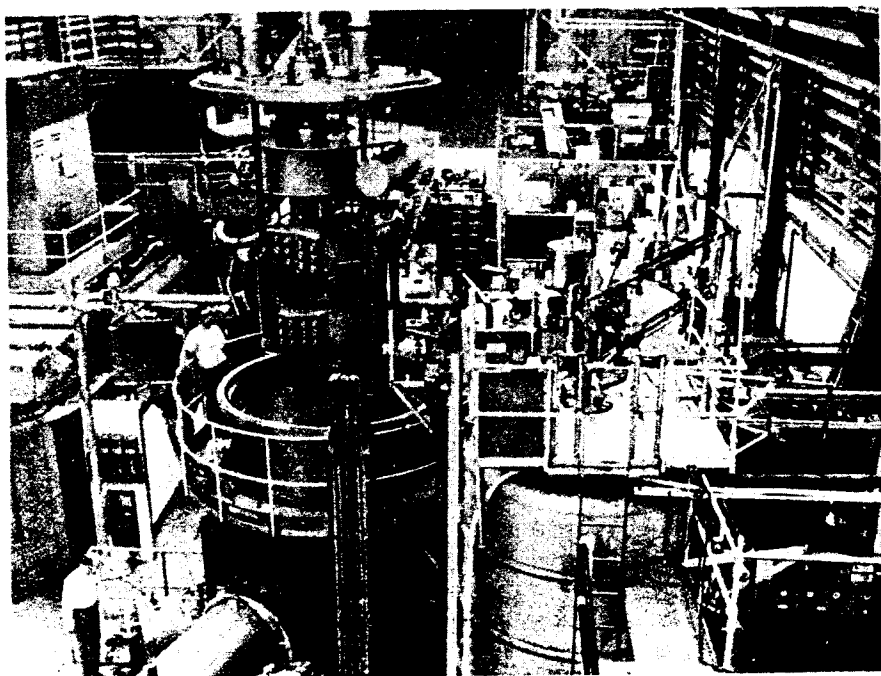
iontových teplot okolo 8 keV, hustot řádově $6 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$ a doby udržení řádově 0,5 ms.

Zrcadlové systémy jsou v principu zařízení pro práci ve stacionárním režimu, v němž rychlost vstřikování odpovídá rychlosti difúzních ztrát. K difúzi dochází především na koncích, neboť magnetická jáma brání nestabilitám, jež vedou k radiální Bohmově difúzi. Difúze na koncích však není obyčejná difúze, nýbrž difúze v *rychlostním prostoru*. Částice, jež jsou mimo únikový kužel (obr. 2-9), mohou difundovat do únikového kuželu při srážce, při níž se změni směr jejich rychlosti o malý úhel. Ke zvětšení difúze v rychlostním prostoru mohou vést nestability, ale jenom tehdy, je-li frekvence vyšší než Ω_e , takže se může změnit adiabaticky invariant iontů (oddíl 2.8.1). Nestability rychlostního prostoru, způsobené odchylkami rychlostního rozdělení s únikovým kuželem (obr. 7-7) od maxwellovského rozdělení, jsou bohužel právě v tomto frekvenčním rozsahu. Tyto nestability



„Baseballová cívka“ je topologicky ekvivalentní jednoduchému zrcadlu s Ioffeho tyčemi. OBR. 9-15 [Převzato ze Scientific American, uvedená citace.]

vznikají s menší pravděpodobností, je-li přístroj krátký (jako u baseballové geometrie) a má-li rychlostní rozdělení vstřikovaných částic velkou šířku. Začíná se už objevovat teoretické vysvětlení pozorovaných difúzních rychlostí prostřednictvím nelineárního stadia nestabilních oscilací.



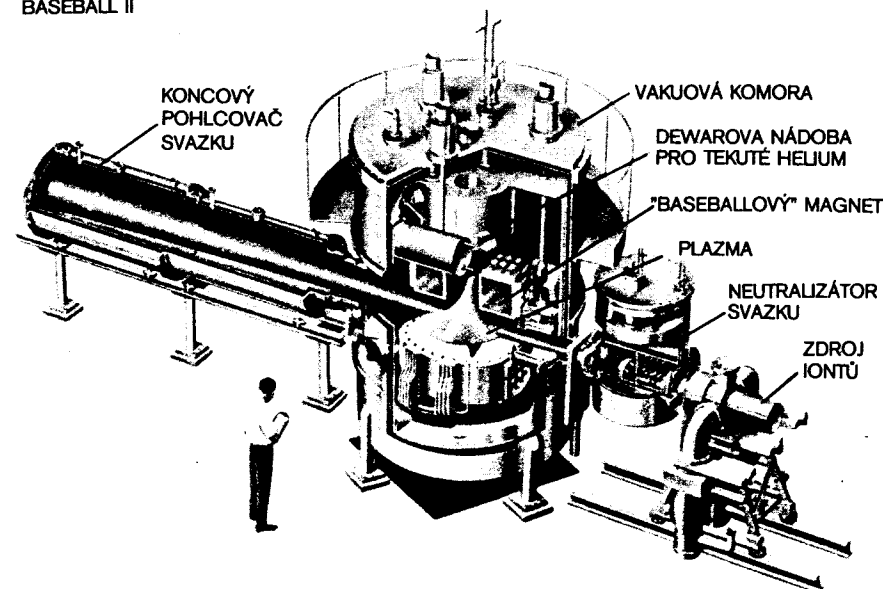
OBR. 9-16 Supravodivá cívka Baseball II v Lawrence Livermore Laboratory v Kalifornii je ukládána do vakuové komory. [Financuje U. S. Atomic Energy Commission.]

Při obyčejné difúzi mohou opustit systém jenom ty částice, které jsou na okrajích a srazí se. Difúze v rychlostním prostoru je daleko nebezpečnější, protože k ní může dojít kdekoliv v celém objemu. Jakmile se částice po náhodné srážce jednou octne v únikovém kuželu, opustí systém při prvním doběhnutí do hrdla zrcadla. Z těchto důvodů jsou pro zrcadlová zařízení příznačně poměrně velké ztrátové rychlosti; aby se minimalizovaly, počítá se obyčejně u zrcadlových reaktorů s vyšší hodnotou KT a nižší hustotou než u toroidálních reaktorů.

Ve spojení s přímou přeměnou energie vznikl vtipný projekt, jímž by se ztráty na koncích změnily ve výhodu. Plazma proudící ven na koncích systému se nejprve rozpíná a řídne v rozbíhavém magnetickém poli, až je

jeho hustota natolik nízká a Debyeova délka natolik velká, že do něj může proniknout elektrické pole. Elektrony jsou odděleny od iontů ostrým ohybem magnetického pole, který ionty nemohou sledovat. Iontový svazek je pak zpomalován řadou elektrod s postupně se zvětšujícím kladným

BASEBALL II

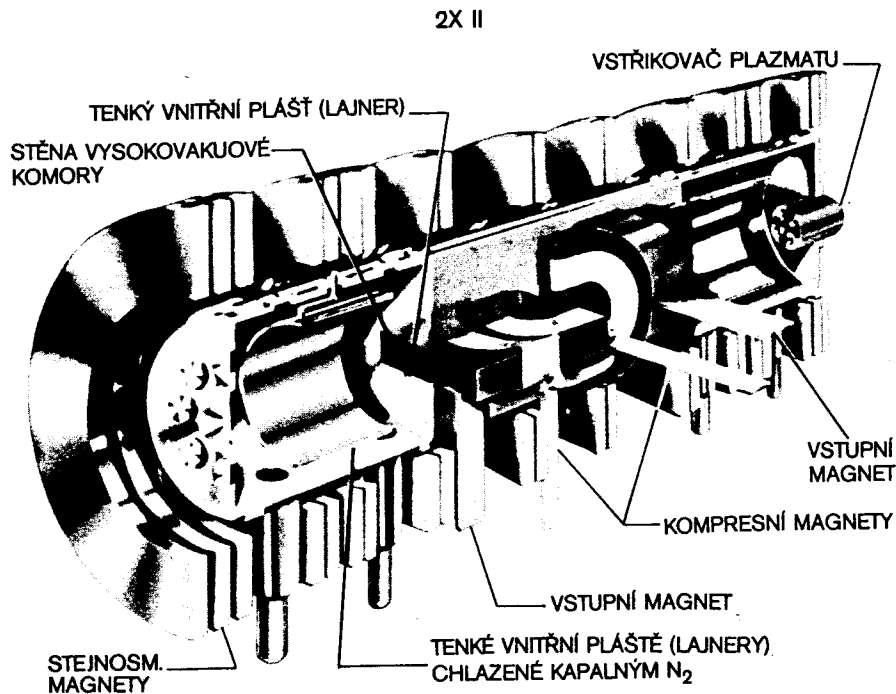


EXPERIMENT SE SUPRAVODIVÝM MAGNETEM A SE VSTŘIKEM NEUTRÁLŮ

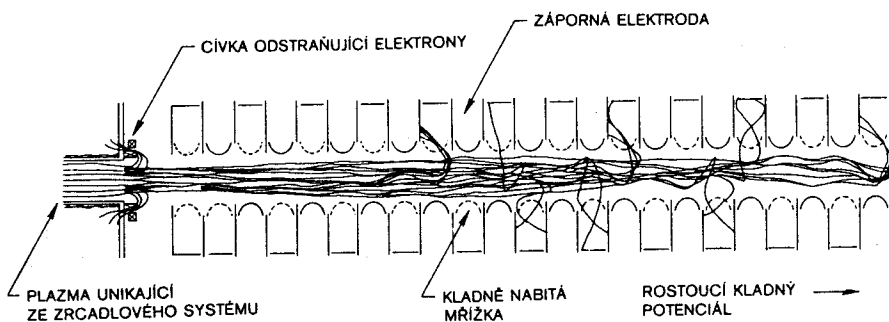
Plazma v Baseballu II se vytváří samoionizací částic intenzivního svazku neutrálního vodíku vstřikovaného napříč magnetickým polem. [Lawrence Livermore Laboratory, financuje U. S. Atomic Energy Commission.]

OBR. 9-17

potenciálem. Potenciál elektrod ve skutečnosti střídá znaménko, aby se tak dosáhlo silné fokusace a ionty nemohly opustit svazek, dokud neztratí téměř všechnu svoji kinetickou energii. Když je ion tak zpomalen, že již nereaguje na fokusující sílu, odchází radiálně skrz mřížku a pomáhá udržovat náboj na elektrodě, na níž se zachytí. Elektroda pak může být zapojena takovým způsobem, že se stává zdrojem stejnosměrného napětí. Na obr. 9-19 jsou vypočítané trajektorie částic v přímém měničích energie (konvertoru). Je-li možno docílit toho, aby přeměna energie nabitých částic přímo v elektrickou dosáhla účinnosti $>90\%$, může být Lawsonovo kritérium pro zrcadlové reaktory významně zmírněno.



OBR. 9-18 Zařízení 2XII v Lawrence Livermore Laboratory jsou velká magnetická zrcadla, vytvářena cívkami „yin-yang“, což je modifikace baseballové cívky. Plazma je vstřikováno plazmatickými děly, je adiabaticky stlačeno a dále ohříváno neutrálním svazkem prostřednictvím výměny náboje. [Lawrence Livermore Laboratory, financuje U. S. Atomic Energy Commission.]



OBR. 9-19 Vypočtené iontové trajektorie v navrhovaném elektrostatickém zpomalovači pro přímou přeměnu kinetické energie nabitých produktů termojaderné reakce v energii elektrickou. [S laskavým svolením R. F. Posta z Lawrence Livermore Laboratory, financuje U. S. Atomic Energy Commission.]

PINČE 9.4

Pinč* je svou podstatou nejjednodušší zařízení pro termojaderné reakce: Plazma, jímž prochází proud, je drženo magnetickým polem tohoto proudu. Existuje dvojí geometricky komplementární uspořádání, z-pinč a ϑ -pinč (obr. 9-20). Když se zvětšuje proud, narůstající magnetické pole stlačuje plazma a zahřívá ho; držení a ohřev plazmatu vystupují spolu. Protože je k tomu potřeba velikých proudů, pracují pinče jenom v krátkých impulsích. ϑ -pinč má obvykle konfiguraci magnetického zrcadla, aby se snížily ztráty na koncích systému. Jeden i druhý typ pinče může být ohnut do torusu.

V případě z-pinče se proud potřebný pro udržení termojaderního plazmatu snadno vypočítá. Magnetický tlak $\epsilon_0 c^2 B^2 / 2$ musí stačit na vyrovnání tlaku plazmatu nKT . Je-li I celkový proud sloupcem o poloměru r , pole na povrchu je $B = \mu_0 H = I / 2\pi r \epsilon_0 c^2$. Nechť $N = \pi r^2 n$ je počet iontů na metr délky. Bilance tlaků pak dává

$$\frac{\epsilon_0 c^2}{2} \left(\frac{I}{2\pi r \epsilon_0 c^2} \right)^2 = \frac{NKT}{\pi r^2}$$

neboli

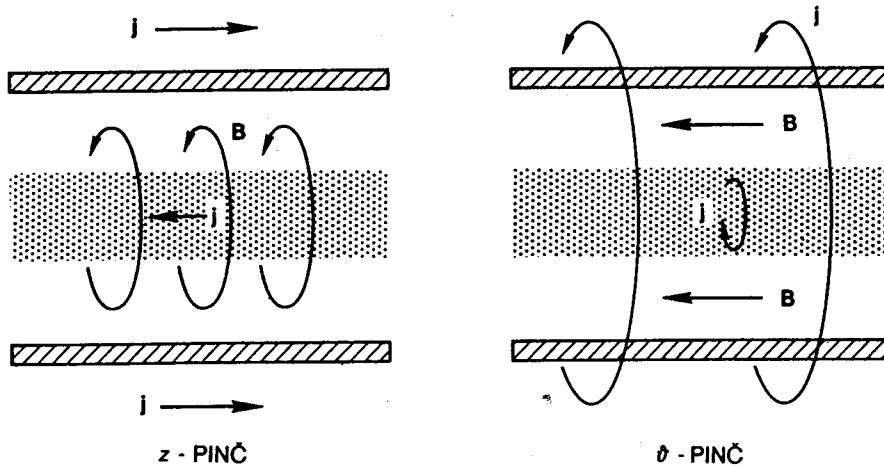
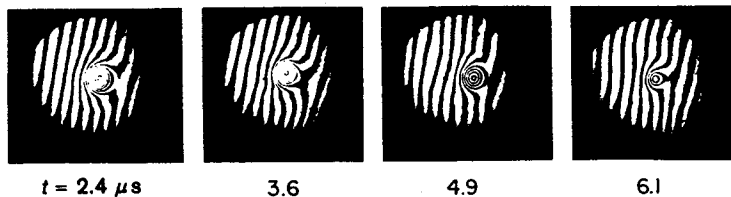
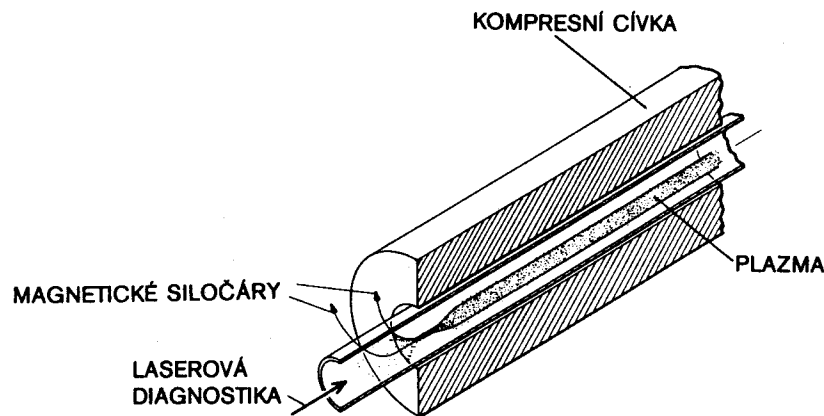
$$I^2 = 2 \times 10^7 NKT. \quad [9-10]$$

To je známo jako *Bennettova podmínka pinče*. Protékají-li plazmatem potřebné stovky tisíc ampérů, může snadno vzniknout smyčková (obr. 9-3) nebo některá příbuzná nestabilita, při níž dochází k lokálnímu zúžení průřezu**. Byla realizována řada návrhů na potlačení těchto nestabilit, ale žádný z nich není dokonalý.

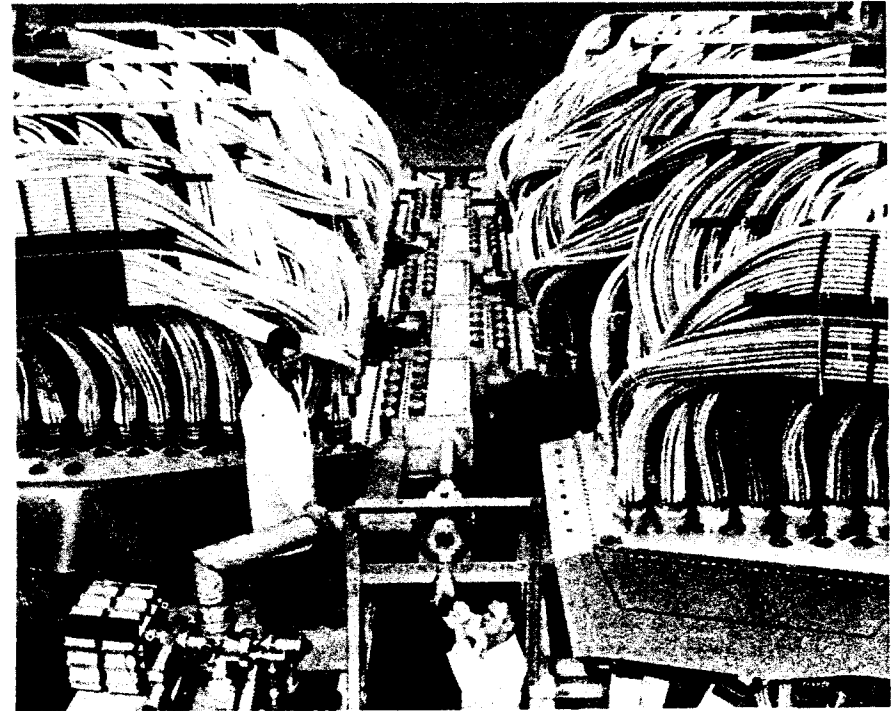
Na druhé straně ϑ -pinč vykazuje pozoruhodný stupeň stability. Na obrázku 9-21 je rozložení hustoty při pohledu ve směru osy, naměřené laserovým interferometrem. Kruhové interferenční proužky představují křivky konstantní hustoty plazmatu. Vidíme, že plazma se při svém rozpadu nestěhuje ke stěnám. V ϑ -pinčích se dosáhlo hustot až k 10^{23} m^{-3} , teplot několika keV a časů udržení několika mikrosekund. Při těchto hustotách je srážková frekvence tak vysoká, že princip zrcadlového držení je neúčinný. Aby se zvětšil průletový čas iontů ke koncům systému, byly postaveny dlouhé lineární ϑ -pinče. Na obrázku 9-22 je fotografie dlouhého ϑ -pinče v Los Alamos Scientific Laboratory v Novém Mexiku. Baterie kondenzátorů, dodávajících energii cívkám pinče, zaplňují velkou budovu. V ϑ -pinčích se pozorovala klasická difúze. Na obrázku 9-23 je změřený profil hustoty v ϑ -pinči dlouhém 8 m v Culham Laboratory v Anglii. Tento

* český přepis všeobecně zavedeného slova pinch = (angl.) stisknutí, sevření – pozn. překl.

** pro podobnost s obvyklým tvarem uzenin se v anglické literatuře označuje jako *sausage instability*. Česky bychom asi řekli *nestabilita „zúžení“* nebo *„přískrcení“* – pozn. překl.

OBR. 9-20 Geometrické schéma z-pinče (vlevo) a θ -pinče (vpravo).OBR. 9-21 Schéma lineárního θ -pinče. Pod ním laserové interferogramy ukazují, že hustota plazmatu s časem klesá, ale držení plazmatu je stabilní. [Los Alamos Scientific Laboratory, financuje U. S. Atomic Energy Commission.]

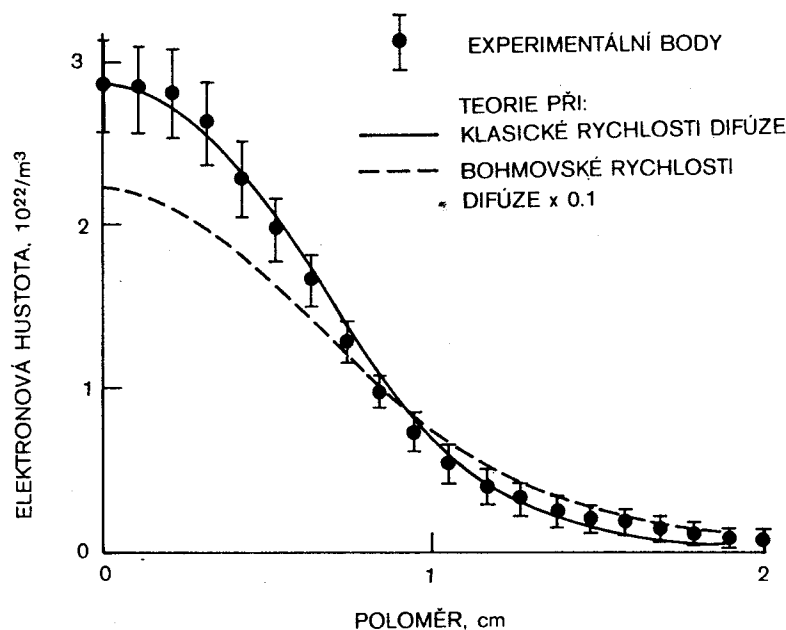
profil se shoduje daleko lépe s profilem vypočítaným pro klasickou difúzi než s profilem podle Bohmovy formule. I když nebyla měřena hladina fluktuaací (při tak vysokých hustotách plazmatu je obtížné používat sondy), je zřejmé, že nestability nehrají hlavní roli.

OBR. 9-22 Velký lineární θ -pinč v Los Alamos Scientific Laboratory v Novém Mexiku. Energie impulsně napájející cívku je uložena v impulsních kondenzátorech, zaplňujících budovu. Kondenzátory jsou připojeny kabely, jež fotografie ukazuje. [Los Alamos Scientific Laboratory, financuje U. S. Atomic Energy Commission.]

Aby se předešlo ztrátám na koncích systému, je možno ohnout θ -pinč do torusu. Na obrázku 9-24 je 120° sekce zařízení v Los Alamos, nazývaného Scyllac, které má vyzkoušet ideu toroidálního θ -pinče. Pro potlačení toroidálních nestabilit se užije zpětnovazební stabilizace. Poněvadž θ -pinče mohou pracovat jenom při vysokých hodnotách β , bude tím automaticky vyřešen problém ohřevu plazmatu. Teprve budoucnost ukáže, bude-li Scyllac trpět stejnými potížemi jako ostatní torusy. Rovnováha a stabilita θ -pinčů je teoreticky zpracována poměrně málo a naděje na úspěch tohoto

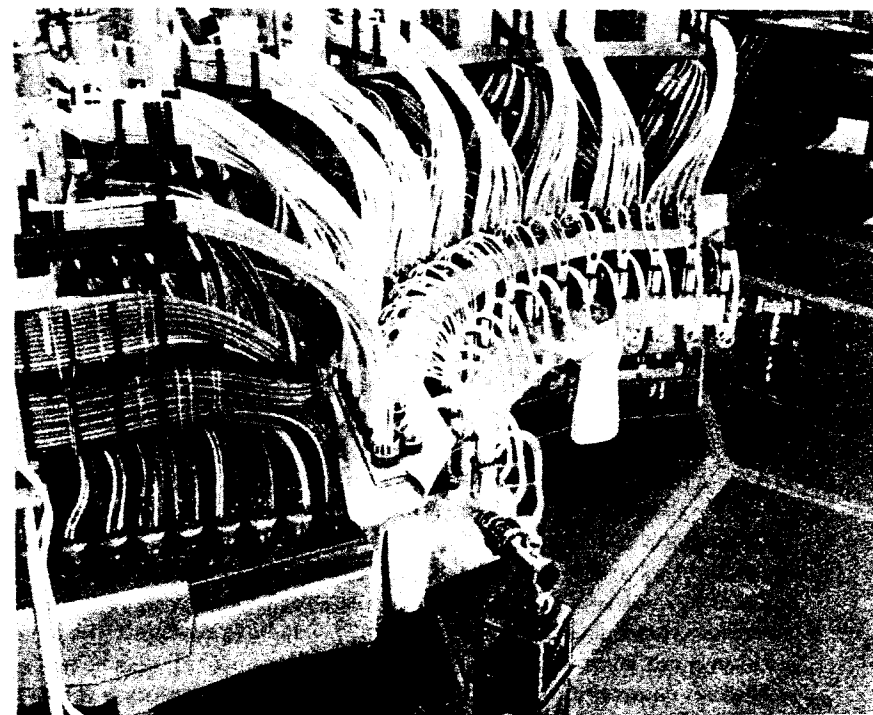
přístupu k problémům termojaderné reakce spočívá především v experimentálních výsledcích získaných na lineárních pinčích.

θ-pinč je impulsní zařízení. Energie, které by se v reaktoru užilo na vytvoření a stlačení plazmatu při každém impulsu, by musela být účinně získána nazpět a v době mezi impulsy uchována. K tomu účelu by mohlo



OBR. 9-23 Měření profilu hustoty v θ-pinči dlouhém 8 metrů. Ukazuje se, že ztráty probíhají podle klasické srážkové difúze. Plná křivka je spočítána na základě Fokkerovy-Planckovy rovnice. Čárkovaná křivka je desetinásobek hodnoty, kterou bychom čekali v případě Bohmovy difúze. [H. A. B. Bodin a ostatní, Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research II, 533 (1968) (International Atomic Energy Agency, Vienna, 1969).]

sloužit induktivní uchování v supravodivých cívkách zchlazených na teplotu kapalného hélia. V těchto systémech by samovolně docházelo k přímé přeměně energie termojaderné reakce na energii elektrickou, poněvadž nabitě produkty reakce by způsobily expanzi plazmatu s větší energií, než jí bylo třeba k jeho stlačení.



120° sektor toroidálního θ-pinče v Los Alamos, nazývaného Scyllac. [Los Alamos Scientific Laboratory, financuje U. S. Atomic Energy Commission.] OBR. 9-24

TERMOJADERNÁ REAKCE VYVOLANÁ LASERY 9.5

Impulsní infračervené lasery jsou s to vytvořit neuvěřitelné hustoty energie, a to přirozeně vede k pokusům užít jich k zapálení termojaderných reakcí. Stejně jako ve všech ostatních přístupech k tomuto problému nevede k nirválně cesta přímá. Nejvýkonnější jsou tyto dva lasery:

Laserové prostředí	Vlnová délka, μm	Mezní hustota n_k , m ⁻³
Neodymové sklo	1,06	10 ²⁷
CO ₂	10,6	10 ²⁵

Kritická hustota $n_k = \epsilon_0 m \omega^2 / e^2$ je taková, při níž $\omega = \omega_p$. Protože se záření laseru nemůže šířit plazmatem s hustotou větší, než je kritická, je

zřejmě, že parametr n_k hraje ústřední roli. Jako příklad současných dosažitelných výkonů uvedme, že laser s neodýmovým sklem dodá 250 J v 0,1 ns. neboli $2,5 \times 10^{12}$ W, což je hodnota rovnající se šestinásobku celého elektrického výkonu ve Spojených státech.

K uskutečnění termojaderné reakce pomocí laserů byly navrženy dvě cesty. Prvá pracuje se systémem laser–plyn. Paprsek CO_2 -laseru ionizuje a zahřívá dlouhý sloupec plynného deuteria a tritia o hustotě okolo 10^{23} m^{-3} . Světlo laseru je absorbováno mechanismem *inverzního brzděného záření*, což je prostě odporový útlum světelných vln způsobený elektron-iontovými srážkami. Poněvadž se srážková frekvence mění jako $KT_e^{-3/2}$ (rovnice [5-69] a [5-70]), je tento proces při termonukleárních teplotách zcela neúčinný a pro $n \ll n_k$ by absorpční délka byla řádově kilometry. Lze však očekávat, že při velkých intenzitách se objeví nelineární parametrické procesy (oddíl 8.5), jež mohou zvýšit absorpci a zkrátit délku plazmatu na rozumné rozměry. Aby bylo splněno Lawsonovo kritérium při $n = 10^{23} \text{ m}^{-3}$, muselo by se užít magnetické držení plazmatu.

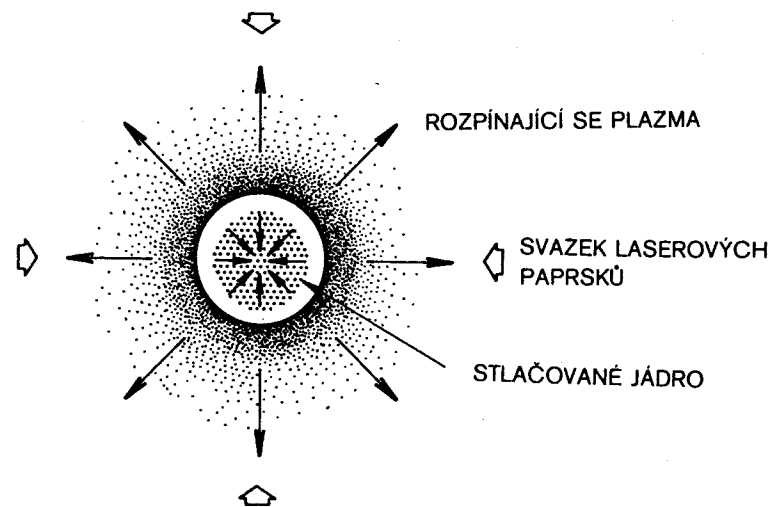
V systému laser–pevný terčik je laserové světlo fokusováno na malý terčik pevného DT, který má hustotu n_0 okolo $5 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$ a měrnou hmotnost $\rho_0 = n_0 M = 200 \text{ kg/m}^3$. Poněvadž n_0 je mnohem větší než n_k dokonce i pro laser s Nd-sklem, záření se odráží, jakmile se na povrchu terčiku vytvoří plazma o hustotě 10^{27} m^{-3} . Zda bude zbytek terčiku ionizován a zahřát na 10 keV, závisí na anomální absorpci způsobené nestabilitami parametrického rozpadu (oddíl 8.5.6). Při hustotách řádově 10^{28} m^{-3} je nemožné vytvořit tak silné magnetické pole, aby vyrovnalo tlak plazmatu nKT . K reakci musí dojít v mikroexplozi trvající méně než 10^{-10} s. Rychlost, s níž plazma expanduje, je dána setrvačností iontů a potenciálem plazmatu (řádově KT_e), jimž jsou ionty urychlovány. Rychlost expanze je tudíž souměřitelná s akustickou rychlostí $v_s = (KT_e/M)^{1/2}$ a doba udržení τ je dána poměrem $\tau \approx R/v_s$, kde R je poloměr terčiku. Užijeme-li tuto hodnotu spolu se střízlivým odhadem účinnosti zmíněných procesů, dostaneme Lawsonovo kritérium pro $n\tau$ při laserové termojaderné reakci. Toto kritérium se obvykle vyjadřuje jako

$$\rho R > 1 \text{ g/cm}^2, \quad \rho R > 10 \text{ kg/m}^2. \quad [9-11]$$

Kdyby mělo být toto kritérium splněno pro $\rho = \rho_0$, vyžadovalo by laserový impuls větší než 3×10^{10} J, což je zcela mimo dosah nejbujnější představitosti.

Možným řešením je stlačit terčik na $\rho = 10^4 \rho_0$. Při intenzitách nad 10^{19} W/m^2 je tlak záření řádově 10^{11} Pa (10^6 atm). To však pro požadovanou kompresi nestačuje. Na obrázku 9-25 je schéma možného řešení. Terčik je ozářen laserovými paprsky ze všech stran. Laserová energie je absorbována parametrickými procesy v kritické vrstvě a povrchová slupka plazmatu se zahřeje. Tato povrchová slupka pak expanduje a její hybnost

způsobí stlačení vlastního nitra, které představuje 10 % původního terčiku. Pak dojde k reakci v tomto nitru a uvolněná energie je zachycena okolní lázni kapalného lithia. Energie nezbytná k ohřátí terčiku je úměrná jeho hmotnosti $\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$. Je-li splněna rov. [9-11] a $R = 10/\rho$, musí být energie laseru úměrná ρ^{-2} . Je-li faktor stlačení 10^4 , dosáhne se tak snížení výkonu 10^8 krát. Tím se požadovaná energie impulsu redukuje na realistickou hodnotu pod 1 MJ.



OBR. 9-25 Princip zapálení termojaderné reakce laserovým ohřevem pevného terčiku DT spočívá v symetrickém ohřevu plazmatového oblaku sbíhajícím se ozáření z laserů (vnější šipky), expanzi ohřátého oblaku (dlouhé šipky) a kompresi nitra (šipky ve středu) způsobené zpětným rázem.

Zůstává řada problémů, které je třeba vyřešit. Energie laseru musí být dodána v dostatečně krátkém čase. Dopadající záření musí být dostatečně izotropní, aby se předešlo Rayleighovým–Taylorovým nestabilitám. Časový průběh impulsu musí být takový, aby předešel nitru na patričnou teplotu dřív, než dojde k adiabatické kompresi. Je-li teplota příliš vysoká, bude hustota po stlačení příliš nízká; je-li teplota naopak příliš nízká, nedosáhne se zápalné teploty. Elektrony zahřáté parametrickou nestabilitou nesmí být tak rychlé, aby pronikly do nitra terčiku a předešly ho. Nesmí dojít k tomu, aby se vlivem ostatních parametrických nestabilit, jako je zpětný rozptyl, světelné paprsky odrazily dřív, než dojdou do kritické vrstvy $\omega = \omega_p$. Účinnost a opakovací frekvence laserů stejně jako jejich energie se musí podstatně zvýšit. Řešení těchto problémů by mohl usnadnit vývoj krátkovlnných laserů (např. Xe) s vyšší hodnotou n_k . Jakkoliv tato metoda laser–terčik odstranila nesnadné problémy s magnetickým držením, jsou nové problémy samy o sobě dost děsivé.

9.6 OHŘEV PLAZMATU

Teoretické pochopení procesů, v nichž je energie absorbována plazmatem a přeměněna v chaotický tepelný pohyb, je ještě v primitivním stavu, částečně pro nelineární povahu problému a částečně pro nesnadnost, s kterou se v experimentech rozlišují efekty ohřevu a efekty udržení. V následujícím jsou vyjmenovány některé z mnoha způsobů, jimiž lze plazma zahřívát.

1. *Ohmický ohřev:* To je prostě Jouleovo teplo I^2R disipované při průchodu proudu plazmatem s konečným odporem. Ohmický ohřev je základní metoda užívaná ve stellarátorech a tokamacích.

2. *Adiabatická komprese* je základní metoda užívaná v některých zrcadlových zařízeních, θ -pinčích a v laserové metodě s terčíkem. V nedávné době byla rovněž použita v tokamacích (obr. 9-9).

3. *Ohřev iontovou vlnou.* Prvním typem zkoušeného vf ohřevu byl ohřev cyklotronní iontovou rezonancí*. Vf cívkou obepínající plazma je excitována elektromagnetická iontově cyklotronová vlna v oblasti, kde platí $\omega < \Omega_c$. Vlna se šíří ve směru zmenšujícího se B^{**} , až dosáhne rezonanční podmínky $\omega = \Omega_c$ a je absorbována ionty při cyklotronním urychlování. Může se také užít rychlá hydromagnetická vlna, příbuzná magnetozvukovému modu z oddílu 4.19. Slibných výsledků se rovněž dosáhlo s vlnami příbuznými s dolními hybridními oscilacemi z oddílu 4.11.

4. *Ohřev elektronovou vlnou.* Mikrovlnnými elektronkami s velkým výkonem je možno urychlovat elektrony na jejich cyklotronní frekvenci v oblasti GHz. To je tzv. ohřev cyklotronní elektronovou rezonancí***. Ačkoliv tímto způsobem lze dosáhnout velkých elektronových energií, obvykle se tato energie netermalizuje, ale nese ji jenom malý počet unikových elektronů, unikajících kolmo na směr B („kolmý únik“). Zdroj s nižší frekvencí může ohřívát nerezonančně mechanismem disipačních odporových procesů. Nejlepší výsledky dávají kombinované rezonanční a nerezonanční vlny, snad v důsledku interakcí vlna-vlna. Stojí za povšimnutí, že ohřev elektronů nepřináší sám o sobě žádný užitek; pro účely termojaderné reakce musí být energie nakonec přenesena na ionty.

5. *Vstřikování nabitých částic.* Zrcadlové systémy a multipóly jsou často plněny plazmatem z tzv. plazmatických „děl“, schopných vstřikovat ionty a elektrony urychlované silou $j \times B$ na energie řádově keV. Urychlovače mohou produkovat iontové svazky s energiemi 300 keV nebo elektronové svazky 6 MeV s hustotou dostačující pro ohřev plazmatu. Takové částice mají natolik velký Larmorův poloměr, že mohou projít napříč magnetickým polem.

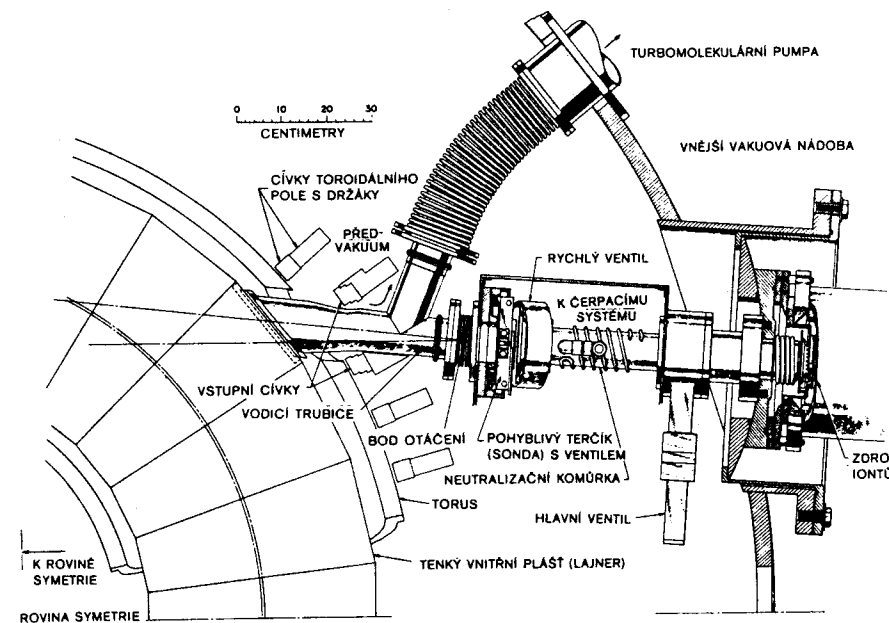
6. *Vstřikování neutrálního svazku.* Neutralizací urychleného iontového svazku v plynové komůrce je možné vytvářet intenzivní svazky neutrálního

* ICRH – ion cyclotron resonance heating – pozn. překl.

** tzv. magnetic beach = magnetická pláž – pozn. překl.

*** ECRH – electron cyclotron resonance heating – pozn. překl.

vodíku nebo deuteria s energiemi 10^4 eV nebo vyššími. Neutrální částice může vstoupit do magnetického pole a vyměnit si náboj s chladným iontem v plazmatu; vznikne tím rychlý ion a pomalý neutrální atom, který potom ze systému uniká. Těto metody se užívá jak v zrcadlových systémech, tak i v torusech. Užije-li se v torusech již naplněných plazmatem, poskytuje další výhodu: ionty vzniklé výměnou náboje mají dostatek energie k tomu,



Vstřikovací systém ORMAK: Schéma injektoru neutrálního svazku pro ohřev tokamakového plazmatu výměnou náboje mezi vstřikovanými rychlými neutrálními atomy a relativně pomalými ionty chladného plazmatu. Když se pak rychlé ionty termalizují s hlavní částí rozdělovací funkce iontů, mohou při tom vstoupit do termojaderných reakcí. Tyto reakce jsou zde proti ostatním metodám ohřevu navíc a představují základní ideu tohoto „dvoukomponentního torusu“. [S laskavým svolením Oak Ridge National Laboratory při Union Carbide Corporation ve smlouvě s U. S. Atomic Energy Commission.]

OBR. 9-26

aby mohly vstoupit do termojaderných reakcí, zatímco se zpomalují a zahřívají plazma. To vede k zmírnění Lawsonova kritéria. Pod pojmem „dvoukomponentní torus“ se rozumí neutrální svazky tritia vstřikované do 2 keV deuteriového plazmatu, nebo obráceně; tím se má dosáhnout bodu energetického zvratu, i když ohmický ohřáté plazma je pod zápalnou teplotou (obr. 9-26).

7. *Magnetické čerpání.* Oscilace intenzity pole v určitém úseku torusu s lokálním zrcadlem mohou přenášet energii na ionty, je-li frekvence

těchto oscilací taková, že se nezachovává adiabatický invariant (srv. oddíl 2.8.1).

8. *Interakce svazek-plazma.* Vstřikování svazku rychlých elektronů nebo iontů do plazmatu může vyvolat dvousvazkovou nestabilitu (oddíl 6.6). Energie přímého pohybu svazku se přemění v energii vlny, která se pak musí Landauovým útlumem nebo parametrickými procesy přeměnit v energii částic. Nízkofrekvenční modulací nebo vstřikováním pod určitým úhlem k magnetickému poli lze dosáhnout toho, že elektronové svazky mají účinnější vazbu s ionty. Skutečnost, že jsou dosažitelné megaampérové relativistické elektronové svazky, zvýšila zájem o tuto metodu ohřevu. Vždycky však je problémem, jak vstřikovat elektrony do magnetického pole.

9. *Turbulentní ohřev.* Experimentálně se prokázalo, že při buzení prudce narůstajícího elektronového proudu v plazmatu se vytvoří turbulentní stav s širokým spektrem fluktuací elektrického pole. Elektrony jsou pak zpomalovány tímto chaotickým elektrickým polem a nikoliv srážkami s ionty. Dochází tak k ohmickému ohřevu s *anomálním odporem*, i když coulombovské srážky jsou zanedbatelné. Ačkoliv se v tomto ohledu většina experimentální práce uskutečnila na lineárních zrcadlových zařízeních, může být turbulentní ohřev důležitou metodou pro tokamaky.

10. *Ohřev parametrickými vlnami.* Intenzivní mikrovlnné nebo infračervené laserové svazky nemají přímou vazbu s rezonančními částicemi, protože fázová rychlost vlny a tepelná rychlost částic se příliš liší. Elektromagnetické vlny se však mohou parametricky rozpadat na iontové vlny a tato energie může být Landauovým útlumem převedena na částice.

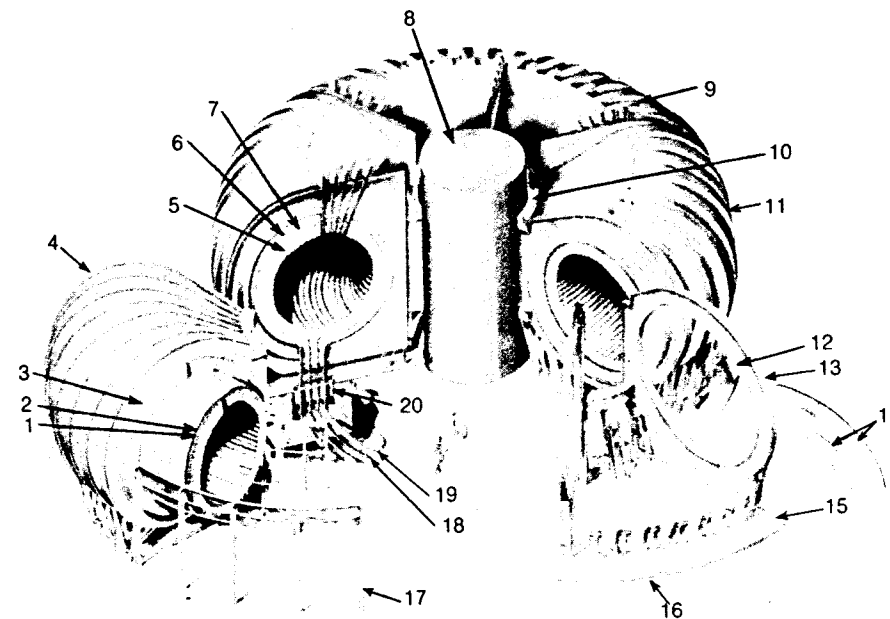
11. *Anihilace pole.* Existuje-li v magnetickém poli nulový bod ($B = 0$) podobně jako v multipólu (obr. 9-10) nebo v magnetosférickém ohonu Země, může být magnetická energie přeměněna velkými indukovanými elektrickými poli v energii částic. Kdyby se tato metoda dala využít, byl by to zřejmě velmi ekonomický způsob ohřevu magneticky drženého plazmatu.

9.7 TECHNICKÉ PROBLÉMY TERMOJADERNÉ REAKCE

Dokonce i tehdy, až budou problémy s udržení a ohřevem plazmatu vyřešeny a fyzikální proveditelnost řízené termojaderné reakce bude prokázána, bude nutno vyřešit ještě celou řadu technologických problémů, než budou moci být postaveny termojaderné reaktory. Některé z nich uvedeme.

1. *Materiály stěn.* Stěny vakuové komory vystavené působení plazmatu budou muset být zhotoveny z materiálu, který se dá snadno vyrobit, bude odolávat vysokým teplotám, nepoškodí ho velké toky 14 MeV neutronů, nebude se rozprašovat při dopadu nabitých částic a nebude se přeměňovat v radioaktivní produkty s dlouhou dobou života. Z dosud známých látek těmto požadavkům nejlépe vyhovuje niob, ale stává se silně radioaktivní, takže uskladnění materiálu z použitých stěn je velkým problémem.

2. *Lithiový plášť.* Tato vrstva slouží dvěma účelům: k produkci tritia podle reakce [9-2] a k zachycování tepelné energie neutronů vznikajících v termojaderných reakcích. Lithium má dobré chladičí vlastnosti, jsou však vážné problémy s korozi a s čerpáním tekutých kovů napříč magnetickým polem.



Toroidální termojaderný reaktor (1000 MW)

OBR. 9-27

- | | |
|---|--|
| 1. Potrubí pro přívod draslíku | 11. Tepelná izolace na cívce magnetu |
| 2. Potrubí s draslíkovými parami | 12. Cívka magnetu |
| 3. Ochranný plášť magnetu | 13. Zpevňovací prstenec magnetu |
| 4. Sextant (šestina torusu) – téměř sestavený | 14. Segmenty pláště |
| 5. Segmenty pláště | 15. Podpěrná výztuha sextantu |
| 6. Sběrné potrubí draslíkových par | 16. Sextant na počátku montáže |
| 7. Potrubí pro rozvod draslíku | 17. Montážní pomocná konstrukce pro sestavení pláště |
| 8. Jádro poloidálního magnetu | 18. Přívodní potrubí pro draslík |
| 9. Vstřikovače neutrálních svazků | 19. Potrubí s draslíkovými parami |
| 10. Kompresní prstence | 20. Kanál k vysokovakuovému vývěvám |

Výtvarně zpracovaná studie 1000 MW tepelného tokamakového reaktoru chlazeného parami draslíku a užívajícího supravodivé magnety. Buňková struktura uvnitř je lithiový plášť. [A. P. Fraas, Oak Ridge National Laboratory při Union Carbide Nuclear Division, vypracováno pro U. S. Atomic Energy Commission.]

3. *Konstrukce magnetů.* Stavba magnetického systému bude vyžadovat velké množství supravodivého materiálu a výkonný chladicí systém. Vinutí musí být podpěrami zajištěno proti ohromnému magnetickému namáhání.

4. *Vstřikování a recirkulace paliva.* Vstřikování deuteria a tritia do torusu není nikterak jednoduchým problémem. Poněvadž během času udržení zreaguje jenom malý zlomek tritia, musí být nespálený zbytek s velkou účinností navrácen zpět do vakuového systému. V reaktoru pracujícím ve stacionárním režimu vzniká problém odstraňování produktů reakcí, jako je He a H.

5. *Ohrožení životního prostředí.* Kromě radioaktivity materiálu způsobené neutrony je vážným problémem unikání tritia. I když bude všechno vyrobené tritium spotřebováno, na pozemku reaktoru bude značná zásoba tritia a jeho difúzní únik do vody nebo do atmosféry při eventuální havárii je vážným problémem.

6. *Hybridní reaktory na principu štěpení – syntéza.* Lawsonovo kritérium je možno zmírnit kombinací štěpného reaktoru s reaktorem termojaderné syntézy a využít tak neutronů produkovaných při syntéze pro usnadnění procesu štěpení. To by velmi pravděpodobně mohlo být prvním praktickým užitím řízené termojaderné reakce.

To jsou pouze malé příklady úkolů, jež před námi stojí. Představu o rozsáhlosti technických problémů termojaderných reakcí si můžeme udělat, uvědomíme-li si, že každé magnetické zařízení, které jsme popsali, každá metoda ohřevu a každá metoda přeměny energie bude muset projít roky technického vývoje, než se stane praktickou skutečností. S technickými projekty se začalo teprve nedávno. Na obrázku 9-27 je náčrt tokamakového reaktoru vypracovaný v Oak Ridge National Laboratory ve státě Tennessee. Čtenář si z něho může udělat představu o tom, jak takový termojaderný reaktor bude vypadat.

9.8 SHRNUÍ

Hledání stabilního magnetického zařízení na udržení plazmatu, jež v posledních více než dvou desetiletích fyziky zaměstnávalo, se zúžilo na tři hlavní typy: tokamak, magnetická zrcadla s minimem B a toroidální θ -pinč. Tokamak vyžaduje ještě studium uchování energie elektronů, pomocných metod ohřevu a zkoušku stability pro velké hodnoty β . Magnetická zrcadla vyžadují výklad pozorovaných dob udržení, zkoušky pro velké hodnoty β a rozsáhlé zkoušky účinnosti metod přímé přeměny energie. θ -pinč se nachází před rozhodující zkouškou stability toroidální konfigurace.

Dalším krokem směřujícím k prokázání uskutečnitelnosti řízené termojaderné reakce je vývoj nových metod ohřevu a teoretické vysvětlení procesů ohřevu. Řada velkých zařízení bude ověřovat zákony podobnosti založené na našem současném porozumění nestabilitám a udržení. Řešení technických problémů termojaderné reakce přijde na řadu až poté, co bude

zvládnuto udržení plazmatu. Nelze se zabývat technickými otázkami reaktoru, dokud není přesně stanovena magnetická konfigurace.

Je pravděpodobné, že při konečné realizaci budou mnohé principy udržení kombinovány. V torusech lze ke stabilizaci střizným polem přidat stabilizaci minimem B , možná pomocí relativistických elektronových svazků. V torusech by mohly být vytvořeny oblasti s lokálními zrcadly, aby se využil vstřik neutrálních svazků. Dokonče i v obyčejných torusech může být zachycení v lokálních zrcadlech důležitým jevem. A obráceně zrcadlová zařízení by mohla být spojena v kruh kvůli odstranění koncových ztrát. Torus kombinovaný s ohřevem rázovou vlnou se bude podobat θ -pinči, který v konfiguraci, jakou má Scyllac, není nic jiného než torus s velkým β .

I když experimenty vykazují stálý pokrok směrem k Lawsonovu kritériu a k zápalným teplotám, můžeme říci, že skutečný pokrok spočívá v rozvoji důkladných základů fyziky plazmatu. Že jsme dobře porozuměli složitému chování plazmatu, se prokázalo například souhlasem mezi teorií a experimentem při stabilizaci minimem B a u neoklasické difúze. Matematické prostředky a fyzikální intuice umožňují nyní fyzikům poměrně rychle analyzovat a vysvětlit nové výsledky experimentů. Základní lineární teorie plazmatu se stala látkou pro učebnice, ale hledání termojaderné energie zůstává neuzavřenou kapitolou.

DODATEK

I. JEDNOTKY

V této knize je použita racionalizovaná MKS soustava jednotek, označovaná též SI. Každý, kdo bude číst vědecké práce z oboru fyziky plazmatu, setká se se soustavou cgs, ať už elektrostatickou nebo Gaussovou. Je proto na místě uvést některé relace mezi těmito soustavami.

Maxwellovy rovnice pro vakuum a Newtonův třetí zákon v SI soustavě znějí

$$\begin{aligned} & \text{SI} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= e(n_i - n_e) \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\dot{\mathbf{B}} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{j} + \dot{\mathbf{D}} \\ \mathbf{D} &= \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \\ m \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \end{aligned}$$

Pro vyhodnocování některých veličin je třeba si pamatovat, že $\epsilon_0^{-1} = 36\pi \times 10^9$ a $c = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2} = 3 \times 10^8$ m/s. Rozměr ϵ_0 je $\text{m}^{-3} \text{kg}^{-1} \text{s}^4 \text{A}^2$. \mathbf{E} a \mathbf{j} vycházejí v praktických jednotkách V/m a A/m², rozměr \mathbf{B} je weber/m² neboli T (tesla). Ještě jednou explicitně uvedme, že poměr E/B má rozměr rychlosti; to nám velice usnadňuje hledání algebraických chyb kontrolou fyzikálního rozměru jednotlivých výrazů.

Energie KT se obvykle udává v elektronvoltech. Chceme-li takto

udanou hodnotu vyjádřit v joulech, musíme KT (eV) vynásobit číslem $1,6 \times 10^{-19}$. Tento faktor není nic jiného než velikost náboje elektronu v SI soustavě – tímto způsobem je vlastně definován elektronvolt.

Naproti tomu Maxwellovy rovnice pro vakuum a třetí zákon Newtonův v soustavě cgs-elektrostatické a v soustavě cgs-Gaussově znějí

cgs-elstat	cgs-Gaussova
$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi e(n_i - n_e)$	$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi e(n_i - n_e)$
$\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$	$c \nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}_G$
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{B}_G = 0$
$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = 4\pi \mathbf{j} + \dot{\mathbf{E}}$	$c \nabla \times \mathbf{B}_G = 4\pi \mathbf{j} + \dot{\mathbf{E}}$
$\epsilon = \mu = 1$	$\epsilon = \mu = 1$
$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$	$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}_G \right)$

\mathbf{B} bez indexu znamená hodnotu v soustavě elektrostatické, je-li udáno v běžnějších jednotkách, v gaussech, je označeno \mathbf{B}_G . Z těchto rovnic je zřejmé, že tyto dva systémy jsou identické, dosadíme-li všude místo \mathbf{B} výraz \mathbf{B}_G/c . Všechny ostatní veličiny zůstávají nezměněny, ϵ a μ jsou v obou soustavách bezrozměrné. Máme-li vyčíslit intenzitu elektrického pole \mathbf{E} nebo potenciál ϕ v praktických jednotkách, je třeba si pamatovat, že 1 statV = 300 V. Hustotu proudu

$$\mathbf{j} = nev$$

dostaneme v A/cm², jestliže za e dosadíme $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C, tj. v SI jednotkách místo v elstat. jednotkách ($e = 4,8 \times 10^{-10}$). Všimněte si ještě, že rychlost $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ driftu je v elstat. jednotkách $v = E/B$ a v Gaussových jednotkách $v = cE/B_G$. Je tedy E/B_G bezrozměrné, zatímco E/B má rozměr rychlosti. Teplota KT udaná v elektronvoltech se převede na ergy podle relace 1 eV = $1,6 \times 10^{-12}$ erg.

Chceme-li v soustavě SI vyjádřit velikost magnetické indukce \mathbf{B} udané – jak bývá nejčastěji zvykem – v gaussech, musíme vědět, že 1 T = 10^4 G. Frekvenci jsme vyjadřovali v hertzech (Hz) a její rozměr (s^{-1}) zůstává ve všech třech zmíněných soustavách stejný, avšak uvedené vzorce, podobně jako vzorce pro jiné plazmatické veličiny, se mohou lišit. Důležité vzorce a jejich odlišný tvar v soustavách SI a cgs-Gaussově jsou uvedeny v Dodatku II. Ještě připomeňme, že hustoty n jsou v soustavách cgs 10^6 krát menší než v soustavě SI.

II. UŽITEČNÉ KONSTANTY A VZORCE

Konstanty

		SI	cgs
c	rychlost světla	3×10^8 m/s	3×10^{10} cm/s
ϵ_0	dielektrická konstanta vakua	$1/36 \times 10^9$ $\cdot \text{m}^{-3} \text{kg}^{-1} \text{s}^4 \text{A}^2$	1
e	náboj elektronu	$1,6 \times 10^{-19}$ C	$4,8 \times 10^{-10}$ elstat
m	hmotnost elektronu	$0,91 \times 10^{-30}$ kg	$0,91 \times 10^{-27}$ g
M	hmotnost protonu	$1,67 \times 10^{-27}$ kg	$1,67 \times 10^{-24}$ g
e/m		$1,76 \times 10^{11}$ C/kg	$1,67 \times 10^{-24}$ elstat
m/M			1837
$(m/M)^{1/2}$			43
K	Boltzmannova konstanta	$1,38 \times 10^{-23}$ J/K	$1,38 \times 10^{-16}$ erg/K
eV	elektronvolt	$1,6 \times 10^{-19}$ J	$1,6 \times 10^{-12}$ erg
1 eV	teploty KT		11 600 K
πa_0^2	účinný průřez atomu H	$0,88 \times 10^{-20}$ m ²	$0,88 \times 10^{-16}$ cm ²
hustota neutrálních atomů při pokojové teplotě a tlaku 0,133 Pa (10^{-3} Torr)		$3,3 \times 10^{19}$ m ⁻³	$3,3 \times 10^{13}$ cm ⁻³

Vzorce

		SI	cgs	číselné vztahy (SI)
ω_p	plazmová frekvence	$\left(\frac{ne^2}{\epsilon_0 m}\right)^{1/2}$	$\left(\frac{4\pi ne^2}{m}\right)^{1/2}$	$f_p = 9\sqrt{n}$
ω_c	elektronová cyklotronová frekvence	$\frac{eB}{m}$	$\frac{eB_G}{mc}$	$f_c = 28B$ GHz
λ_D	Debyeova délka	$\left(\frac{\epsilon_0 KT_e}{ne^2}\right)^{1/2}$	$\left(\frac{KT_e}{4\pi ne^2}\right)^{1/2}$	$69\left(\frac{T}{n}\right)^{1/2}$
r_L	Larmorův poloměr	$\frac{mv_{\perp}}{eB}$	$\frac{mv_{\perp}c}{eB_G}$	
v_A	Alfvénova rychlost	$\frac{B}{(\mu_0 \rho)^{1/2}}$	$\frac{B_G}{(4\pi \rho)^{1/2}}$	$2,2 \times 10^{16} \frac{B}{\sqrt{n}}$ (pro vodík)
v_z	akustická rychlost $T_i = 0$		$\left(\frac{KT_e}{M}\right)^{1/2}$	$10^4 (KT_{ev})^{1/2}$ (pro vodík)
v_E	rychlost $E \times B$ driftu	$\frac{E}{B}$	$\frac{cE}{B_G}$	
v_D	rychlost diamagnetického driftu		$\frac{KT}{eB} \frac{n'}{n}$	$\frac{KT_{ev}}{B} \frac{1}{R}$
β	magnetický tlak / tlak plazmatu	$\frac{nKT}{B^2/2\mu_0}$	$\frac{nKT}{B_G^2/8\pi}$	
v_{te}	tepelná rychlost elektronů		$\left(\frac{2KT_e}{m}\right)^{1/2}$	$5,9 \times 10^5 (KT_{ev})^{1/2}$
v_{ei}	srážková frekvence elektron-ion		$\approx \frac{\omega_p}{n_D}$	$1,5 \times 10^{-12} \frac{n \ln A}{T_{ev}^{3/2}}$
v_{ee}	srážková frekvence elektron-elektron			$3 \times 10^{-12} \frac{n \ln A}{T_{ev}^{3/2}}$
v_{ii}	srážková frkevence ion-ion		$Z^4 \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2} \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{3/2} v_{ee}$	
λ_{ei}	střední volná dráha		$\approx \lambda_{ee} \approx \lambda_{ii}$	$4,5 \times 10^{17} \frac{T_{ev}^2}{n \ln A}$

III. UŽITEČNÉ VEKTOROVÉ RELACE

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \equiv (\mathbf{ABC})$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{ABD})\mathbf{C} - (\mathbf{ABC})\mathbf{D} = (\mathbf{ACD})\mathbf{B} - (\mathbf{BCD})\mathbf{A}$$

$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \nabla \phi + \phi \nabla \cdot \mathbf{A}$$

$$\nabla \times (\phi \mathbf{A}) = \nabla \phi \times \mathbf{A} + \phi \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$$

$$\nabla \times [(\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{A}] = (\mathbf{A} \cdot \nabla)(\nabla \times \mathbf{A}) + (\nabla \cdot \mathbf{A})(\nabla \times \mathbf{A}) - [(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \nabla]\mathbf{A}$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\nabla \cdot \nabla)\mathbf{A}$$

$$\nabla \times \nabla \phi = 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

Cylindrické souřadnice (r, ϑ, z)

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} A_\vartheta + \frac{\partial}{\partial z} A_z$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \vartheta} - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{r}} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \hat{\boldsymbol{\vartheta}} + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\vartheta) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta} \right] \hat{\mathbf{z}}$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A} = (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{A} = & \left[\nabla^2 A_r - \frac{1}{r^2} \left(A_r + 2 \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \vartheta} \right) \right] \hat{\mathbf{r}} \\ & + \left[\nabla^2 A_\vartheta - \frac{1}{r^2} \left(A_\vartheta - 2 \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta} \right) \right] \hat{\boldsymbol{\vartheta}} + \nabla^2 A_z \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} = & \hat{\mathbf{r}} \left(A_r \frac{\partial B_r}{\partial r} + A_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial B_r}{\partial \vartheta} + A_z \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{1}{r} A_\vartheta B_\vartheta \right) \\ & + \hat{\boldsymbol{\vartheta}} \left(A_r \frac{\partial B_\vartheta}{\partial r} + A_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial B_\vartheta}{\partial \vartheta} + A_z \frac{\partial B_\vartheta}{\partial z} + \frac{1}{r} A_\vartheta B_r \right) \\ & + \hat{\mathbf{z}} \left(A_r \frac{\partial B_z}{\partial r} + A_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \vartheta} + A_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

Rejstřík

V rejstříku jsou uvedena jména (tištěna kurzívou) i fyzikální pojmy. Pokud je u hesla uvedeno více odkazů, je kurzívou tištěna stránka s podrobnějším výkladem tohoto pojmu; písmeno *ú* značí stránku, kde se pojem procvičuje v úloze. Uvedení anglického termínu bylo u některých hesel hlavním důvodem k zařazení do rejstříku.

A

absorpce		absorption	
anomální	298	anomalous	
laserového záření	298	of laser light	
mikrovlnné energie	101	of microwave energy	
adiabatický invariant		adiabatic invariant	
μ	52, 60	longitudinal	
podélný, <i>J</i>	54, 57ú		
ϕ	57		
adiabatický toroidální	viz tokamak	adiabatic toroidal compressor	
kompresor	ATC		
<i>Ahern</i>	267		
akustická rychlost	viz rychlost	acoustic speed	
akustické vlny	viz vlny	acoustic waves	
<i>Alexeff</i>	233		
<i>Alfvén</i>	114	Alfvén universe	
Alfvénův vesmír	114		
<i>Allen</i>	131, 157		
<i>Allis</i>	137		
anihilace magnetického pole	183, 302	annihilation of the	
		magnetic field	
antihmota	114	antimatter	
<i>Arcimovič</i>	279		
aspekt (<i>R/a</i>)	280	aspect	
Astron	175, 286	Astron	
atmosféra hvězd	17, 29, 37	stellar atmosphere	

B

<i>Baker</i>	137, 248, 264		
<i>Barrett</i>	88		
Baseball II	290, 291	Baseball II	
baseballová cívka	288, 292	baseball coil	
<i>Berk</i>	208		
<i>Bernstein</i>	230		
beta (β)	181nn, 184ú, 309		
bezpečnostní faktor	viz činitel jakosti	safety factor	
bezsrážkový útlum	viz Landauův	collisionless damping	
	útlum		
bílí trpaslíci	28	white dwarf stars	
blesk	17, 28, 124	lightning	
<i>Bodin</i>	296		
<i>Bohm</i>	86, 171		
Bohmova časová konstanta	172	Bohm time	
<i>Boley</i>	131		
Boltzmannova konstanta	17, 20, 308	Boltzmann's constant	
Boltzmannův vztah	76	Boltzmann relation	
Brillouinův rozptyl	viz nestability		
<i>Brown</i>	87, 151		
<i>Burhop</i>	171		

C

<i>Carpenter</i>	124		
Cauchyho hlavní hodnota	214	Cauchy principal value	
cívky „yin-yang“	292	yin-yang coils	
<i>Clemmow</i>	137		
Clemmow-Mullaly-Allis	137ú	CMA diagram	
diagram			
<i>Cohen</i>	263		
<i>Conte</i>	213		
coulombovský logaritmus $\ln A$	162	Coulomb logarithm	
cyklotron	26	cyclotron	
cyklotronní gyrace	viz cyklotron-	cyclotron gyration	
	ní rotace		
cyklotronní rotace	32nn, 36, 153	cyclotron gyration	
cyklindrické souřadnice	311	cylindrical coordinates	
částečně ionizovaný plyn	141	partially ionized gas	
čerpání magnetické	53, 301	magnetic pumping	
na průletové frekvenci	56	transit-time m. p.	
činitel jakosti	280	quality factor	
číslo Loschmidtovo	23	Loschmidt number	

číslo Machovo	244, 246	Mach number
čistota plazmatu	273	plasma purity
čtvrté skupenství hmoty	18	fourth state of matter
D		
<i>D'Angelo</i>	95n, 107	
<i>Dawson</i>	230	
Debyeova délka	25, 27ú, 309	Debye length
Debyeovo stínění	23nn, 27ú, 77	Debye shielding
defokusační efekt	113, 139ú	defocusing effect
dekrement	viz Landauův útlum	
<i>Derfler</i>	232	
<i>De Silva</i>	131	
deuterium	28, 270nn, 298	deuterium
diamagnetická smyčka	184	diamagnetic loop
diamagnetismus plazmatu	34, 42, 50, 182, 184	diamagnetism of plasma
dielektrická konstanta	61, 62ú, 85ú, 114ú, 129, 306 307n	dielectric constant
difúze (v neutrálním plynu)	140nn	diffusion
ambipolární	143nn, 168	ambipolar d.
napříč B	155nn, 168	amb. diff. across B
anomální	157	anomalous d.
banánová	174	banana d.
Bohmova	170nn, 278, 295	Bohm d.
klasická	140nn, 158ú, 175ú, 293, 296	classical d.
koeficient difúze	143, 158ú	diffusion coefficient
ambipolární	144, 158ú	ambipolar diff. coeff.
klasický	168, 172	classical diff. coeff.
magnetického pole	182nn,	d. of magnetic field
mezi rovnoběžnými	145	d. in a slab
stěnami		
napříč magnetickým	152nn, 175ú	d. across a magnetic field
polem		
neoklasická	174, 278, 282, 286	neoclassical d.
ve válci	147	d. in a cylinder
v plně ionizovaném	167nn	d. in fully ionized plasmas
plazmatu		
v rychlostním prostoru	289	d. in velocity space
difúzní mod (nejnižší)	146	diffusion mode (lowest)
disperzní vztah	86	dispersion relation
divertor	273	divertor
Dopplerův posuv	189, 258	Doppler shift
doutnavý výboj	27ú, 28	glow discharge

drift	35nn, 71	drift
diamagnetický	72nn, 75ú, 179, 184ú	diamagnetic d.
$E \times B$	35	
fiktivní d-ové pohyby	74	fictitious drifts
grad- B	38nn, 45ú, 74, 274	
obecná síla	36	general force
polarizační	49, 62	polarization d.
přehled	52	
v nehomogenním E poli	46	in a nonuniform E field
zakřivení	40, 74	curvature d.
držení plazmatu	viz udržení	
E		
efekt konečného	48, 75	finite-Larmor-radius effect
Larmorova poloměru		
Einsteinův vztah	143	Einstein relation
elektronika plynů	viz výboj v plynech	gaseous electronics
elektronvolt, eV	22, 306 – 308	electron volt
energie ionizační	17	ionization energy
kinetická	20, 138ú	kinetic e.
potenciální	24	potential e.
střední	18, 27ú	average e.
tepelná, <i>KT</i>	20nn, 24	thermal e.
volná	185	free e.
F		
Faradayova rotace	125nn, 127ú	Faraday rotation
<i>Fermi</i>	45	
Fourierova analýza	78, 235	Fourier analysis
Fourierova řada	146	Fourier series
<i>Fraas</i>	303	
<i>Franklin</i>	88, 267	
frekvence cyklotronní	30, 33nn, 62, 75ú, 83, 309	cyclotron frequency
dolní hybridní	107nn, 135, 300	lower hybrid f.
horní hybridní	99nn, 102ú, 126ú, 134	upper hybrid f.
Larmorova	viz cyklotronní f.	Larmor f.
mezni	89, 110nn, 114ú, 118nn	cutoff
levotočivá	119, 123, 126ú	left-hand-cutoff
pravotočivá	119, 123, 126ú	right-hand-cutoff

frekvence plazmová	62ú, 75ú, 81nn, 84ú, 126ú, 138ú, 309	plasma frequency
srážková	142, 162, 309	collision f.
<i>Fried</i>	213	
funkce Besselova	147, 148	Bessel function
ionizační	149	ionization f.
rozdělovací	198nn, 217n, 234ú, 236	distribution f.

G

galaxie	29	galaxy
<i>Gould</i>	101	
<i>Greene</i>	230	
<i>Gross</i>	86	
<i>Grove</i>	171	
gyrace	viz cyklotronní rotace	
číslní střed	34, 158	guiding center
gyrofrekvence	viz frekvence cyklotronní	

H

<i>Hamberger</i>	267	
harmonický oscilátor	253	harmonic oscillator
<i>Harp</i>	101	
hlavní osa (torusu)	275	major axis
hmotnost elektronu	308	electron mass
protonu	308	proton m.
<i>Hoh</i>	156	
hustota kritická	110, 114ú	critical density
náboje	70	charge d.
plazmatu	26, 27ú, 28nn, 83, 110	plasma d.
proudová	70, 165, 307	current d.
hvězdné plazma	viz atmosféra hvězd bílé trpaslice neutronové hvězdy nitro hvězdy	
hvězdy	123nn, 126ú, 135, 139ú	whistler mode

I

ignitron	28	ignitron
<i>Ikezi</i>	248	

index lomu	111, 114ú, 120	index of refraction
inkrement	viz nestability – rychlost růstu	
interakce svazek–plazma	302	beam–plasma interaction
vlna–částice	236	wave–particle i.
vlna–vlna	237, 252, 300	wave–wave i.
interferometr mikrovlnný	111, 114ú	microwave interferometer
invariantnost	43, 46ú, 51, 52nn, 57ú	
Ioffeho tyče	288, 289	Ioffe bars
ionosféra	27, 29, 57, 114, 123, 141, 262	ionosphere
iontový pohon	29	ion propulsion
iota	viz rotační transformace	iota

J

jaderná syntéza	viz termojaderná reakce	fusion
jednotky (fyzikální)	17, 306n	units
<i>Jepcott</i>	131	
jiskrový výboj	31	spark discharge
jiskřička	28	spark gap
<i>Jones</i>	88, 233	
Jouleovo teplo	300	Joule heat

K

<i>Kadomcev</i>	157	
kinetická teorie	59, 69, 198nn	kinetic theory
klystron	26, 111, 190	klystron
kolektivní chování	19	collective behavior
kolmý únik	300	perpendicular runaway
komprese adiabatická	51, 57ú, 70, 283, 288, 299	adiabatic compression
izotermická	70	isothermal c.
konstanta šíření	78	propagation constant
konstrukce magnetů (reaktoru)	304	magnet design
konvektivní cely	172	convective cells
konvektivní derivace	64, 76	convective derivative
korona	29	solar corona
Krabí mlhoviny	29, 183	Crab nebula
<i>Kruskal</i>	230	
Kruskalova–Šafranovova limita	280	Kruskal–Shafranov limit
kvadrupól	286	quadrupole
kvazineutralita	19, 25, 77	quasineutrality

L

<i>Lampis</i>	267	
<i>Landau</i>	213nn	
Landauův útlum	189, 211nn, 234ú, 302	Landau damping
galileovská invariantnost	229	Galilean invariance of L. d.
iontový	233	ion L. d.
lineární	218, 219nn, 269	linear L. d.
nelineární	219, 267nn	nonlinear L. d.
útlumová rychlost (dekrement)	256, 260	damping rate
<i>Langmuir</i>	28, 69, 86	
Langmuirův paradox	69	Langmuir's paradox
Larmorova gyrace	viz cyklotronní rotace	Larmor gyration
Larmorova rotace	viz cyklotronní rotace	
Larmorův poloměr	33nn, 309	Larmor radius
laser	30, 113, 138, 273, 297nn, 302	laser
CO ₂	113, 297	CO ₂ laser
kyanovodíkový, HCN	113, 138	HCN laser
neodymový, Nd	297	Nd laser
laserový interferometr	293	laser interferometer
Lawsonovo kritérium	272, 298, 304	Lawson criterion
<i>Lehnert</i>	131, 156	
levitron mimocentrální	286	off-center levitron
levitující prstenec	286	levitated ring
linearizace	82	linearization
lineární teorie	82	linear theory
lithiový plášť	271, 303	blanket of lithium
lithium	270, 299	lithium
<i>Looney</i>	87	
lorentzovská ionizace	288	Lorentz ionization
M		
magnetická jáma absolutní středního pole	288 277, 183n, 288	absolute magnetic well average m. w.
magnetická pláž	300	magnetic beach
magnetické držení	viz udržení	
magnetický (dipólový) moment	42, 51, 60	magnetic moment
magnetizace	60	magnetization
magnetizace objemová	60	bulk magnetization
magnetohydrodynamika	165	magnetohydrodynamics
magnetosféra	29, 124, 302	magnetosphere

magnetron	26	magnetron
<i>Malmberg</i>	230	
<i>Massey</i>	171	
materiály stěn	302	wall materials
Maxwellovo rozdělení	20, 23ú, 197nn, 214, 217, 229	Maxwellian distribution
mezihvězdné prostředí	29, 126, 138	interstellar medium
měníč energie (= generátor)	29, 167, 182	energy convertor
mikroexploze	298	microexplosion
minimum B	viz magnetická jáma střed- ního pole	
mod (vln) BGK (Bernstein-Greene-Kruskal)	230	BGK mode
Van Kampenův	230	Van Kampen mode
modulace (vlny)	80, 268	modulation
momenty Boltzmannovy	209	moments of the Boltzmann equation
rovnice		
<i>Montgomery</i>	233	
<i>Motley</i>	96, 107	
<i>Mullaly</i>	137	
multipóly	275, 283nn, 300, 302	multipoles
N		
náboj elektronu	308	electron charge
<i>Nedospasov</i>	157	
nelineární jev	235nn, 300	nonlinear phenomenon
neonová trubice	17, 28	neon light (tube)
nestability (přehled)	185n	instabilities
dissipativní	197	dissipative i.
driftová	48, 194, 276n	drift i.
dvousvazková	186nn, 190ú, 206, 218, 234ú, 257, 276, 302	two-stream i. (beam-plasma i.)
oscilující	257, 258nn	oscillating two-stream i.
elektromagnetická	276	electromagnetic i.
elektrostatická	276	electrostatic
explozivní	177	explosive i.
gravitační	37, 190nn, 276, 283, 287, 288	gravitational i.
Harrisova	186	Harris i.
kinetická	186	kinetic i.
mikro-nestability	48	microinstabilities
modulační	237, 269	modulational i.
parametrické	252nn	parametric i.
parametrický rozpad	255, 258, 261nn	parametric decay

nestability		instabilities,	
parametrický zpětný	256	parametric back-scattering	
rozptyl			
práh nestability	256	instability threshold	
Rayleighova-Taylorova	185, 190, 276	Rayleigh-Taylor i.	
	299		
reaktivní	197	reactive i.	
rychlost růstu (nestability)	260	growth rate	
rychlostního prostoru	289	velocity space i.	
se zachycenými částicemi	286	trapped particle i.	
smýčková	276, 287,	kink i.	
	293		
spirálová	157	helical i.	
stimulovaný	256	stimulated Brillouin	
Brillouinův rozptyl		scattering	
stimulovaný	256	stimulated Raman	
Ramanův rozptyl		scattering	
svazková	185n	streaming i.	
univerzální	185	universal i.	
způsobená proudem	276	current-driven i.	
způsobená únikovým	186	loss cone i.	
kuželem			
zúžení (příškrčení)	293	sausage i.	
žlábková	193, 287	flute i.	
neutron	270nn	neutron	
neutronové hvězdy	28, 29	neutron stars	
Nielson	208		
niob	302	niobium	
nitro hvězdy	17, 29	stellar interior	
O			
oblast šíření	119	region of propagation	
odchylovač	viz divertor		
odpor	160nn	resistivity	
anomální	236, 302	anomalous r.	
specifický	160nn, 177ú	specific r.	
Spitzerův specifický	164	Spitzer r.	
Ohkawa	174, 284	heating	
ohřev (plazmatu)	28, 272, 300		
	304	cyclotron h.	
cyklotronní	53, 300	electron cyclotron	
cyklotronní elektronovou	171, 300	resonance h. (ECRH)	
rezonancí		ion cyclotron	
cyklotronní iontovou	171, 300	resonance h. (ICRH)	
rezonancí		electron wave h.	
elektronovou vlnou	300	ion wave h.	
iontovou vlnou	300	resistive microwave h.	
odporový mikrovlnný	171		

ohřev ohmický	163, 171,	ohmic heating	
	175ú, 183,		
	236, 282,		
	300		
parametrickými vlnami	302	parametric wave h.	
turbulentní	302	turbulent h.	
oktopólové zařízení	283	octopole machine	
orbit	34, 51,	(circular) orbit	
	173		
banánový	174, 278	banana o.	
Bohrův orbit H atomu	158, 308	Bohr orbit of the	
		hydrogen atom	
Larmorův	33	Larmor o.	
neporušený	39, 47	undisturbed o.	
teorie orbitu	38	orbit theory	
ORMAK-vstříkovací systém	301	injection system	
oscilace plazmové	8/nn, 93,	plasma oscillations	
	99, 211		
oscilátor	viz harmonický		
otevřený systém	273	open system	
P			
Paulikas	157		
permeabilita	60	permeability	
Pfirsich-Schlüterův efekt	278	Pfirsch-Schlüter effect	
pinč	27, 132, 293nn	pinch	
Bennetova podmínka	293	Bennett pinch condition	
theta pinč	273, 293nn,	theta pinch	
	300, 304		
z-pinč	293	z-pinch	
plamen	27	flame	
plazma (definice)	19	plasma	
bezsrážkové	19, 205	collisionless p.	
Cs	27		
diagnostika plazmatu	273	plasma diagnostics	
dvoji plazma (systém)	248	double plasma	
horké	205	hot p.	
kritéria pro plazma	26	criteria for plasmas	
kvazineutrální	19, 25, 77	quasineutral p.	
plně ionizované	18	fully ionized p.	
termonukleární	27, 271	termonuclear p.	
v pevných látkách	30	solid state p.	
vyhasínající	151, 171	afterglow	
výskyt v plazmatu	17	occurrence of p.	
plazmatická čočka	113	plasma lens	
plazmatické dělo	292, 300	plasma gun	
plazmatické přiblížení	77, 94	plasma approximation	
plazmatický parametr	26, 27ú, 30	plasma parameter	
plazmatický stav	17	plasma state	
plazmon	254	plasmon	

plazmové echo	263nn	plasma echo
plynová komůrka	300	gas cell
pohyblivost	140, 143, 168	mobility
ve směru kolmém k B	154	perpendicular m.
polarizace	50, 61	polarization
kruhová	122	circular p.
levotočivá	122n, 135, 139ú	left-hand c. p.
pravotočivá	122, 135	right-hand c. p.
rovinná	125	plane p.
polarizační náboj	61	polarization charge
pole		field
ambipolární elektrické	144	ambipolar electric f.
magnetické p. Země	37, 45, 54, 124	Earth's magnetic f.
poloidální magn.	277n	poloidal f.
toroidální magn.	277–279, 282, 285	toroidal f.
střížné magnetické	176, 305	magnetic shear
poruchová část (veličiny)	viz linearizace	perturbation part
Post	292	
prostor fázový	205nn, 224	phase-space
rychlostní	54, 199, 200	velocity space
prostor meziplanetární	27, 243	interplanetary space
proud diamagnetický	74, 179, 181, 184ú	diamagnetic current
Hallův	166	Hall c.
polarizační	49, 61	polarization
vázaný	59	bound
přeměna (energie)	viz přímá	
přímá přeměna (energie)	291, 296	direct conversion
pulsar	29, 138	pulsar
Pyle	157	
Q		
Q-systém	38, 73, 88, 96, 107, 114, 138, 162, 170	Q-machine
R		
reakce syntézy	28, 270	fusion reaction
reaktor jaderné syntézy	27, 162, 175, 303	fusion reactor
hybridní (štěpení-syntéza)	304	hybrid r. (fission-fusion)
recirkulace paliva	304	fuel recovery
rekombinace	18, 23, 150nn, 158ú	recombination

rekombinace, koeficient	150	recombination coefficient
radiativní	150	radiative r.
rychlost	18	recombination rate
třítělesová	150	three-body r.
reziduová věta	213	residue theorem
rezonance	118nn	resonance
rezonanční částice	216, 228, 268	resonant particles
Roberts	208	
rotační transformace	274, 278n	rotational transform
rovnice Besselova	147, 148	Bessel equation
Boltzmannova	204	Boltzmann e.
difúze	143, 168n, 183	diffusion e.
Fokkerova-Planckova	206, 296	Fokker-Planck e.
kontinuity	70, 166, 209	e. of continuity
Maxwellovy	40, 59nn, 71, 75ú, 176ú, 306	Maxwell's e-s
MHD	165nn, 184ú	MHD e-s
pohybové	63nn, 67, 211	e. of motion
Poissonova	24, 27ú, 77, 85ú, 94	Poisson's e.
Sahova	17	Saha e.
stavová	70, 211	e. of state
Vlasovova	205, 211	Vlasov e.
rovnováha	177nn	equilibrium
hydromagnetická	179nn	hydromagnetic e.
termodynamická	185	thermodynamic e.
viz linearizace		equilibrium part
rozprašování (materiálu)	303	sputtering
rozptyl	28	scattering
rtuťový usměrňovač	28	mercury rectifier
rychlost Alfvénova	129, 309	Alfvén velocity
fázová	79	phase v.
grupová	80, 268	group v.
střední	200, 210	average v.
střední kvadratická	199	root-mean-square v.
světla	306, 308	v. of light
tepelná	210, 309	thermal v.
zvuku	92, 298, 309	v. of sound
rychlostní rozdělení	viz funkce	velocity distribution
řízená termojaderná reakce	28, 140, 152, 270nn	controlled thermonuclear fusion
S		
Sagdějev	244	
Sagdějevův potenciál	243nn	Sagdeev potential
samofokusace	259	self-focusing
Scyllac	295, 297, 305	

self-konzistentní problém 58, 62, 71
 severní záře 17
 sferátor FM-1 286
 síla Coulombova 19, 161, 271
 Lorentzova 29, 32, 38
 ponderomotorická 249nn, 257, 268
Simonen 232
 simulační metody 59, 208
 skin-efekt (hloubka průniku) 110
 slabě ionizovaný plyn 18
 Slunce 29
 sluneční korona 29
 sluneční skvrna 37
 sluneční vítr 17, 29, 37, 55
Smith 267
 soliton 245
 sonda 69
 souřadný systém 63
Spitzer 162, 164
 srážky 26, 32, 63, 68, 158n, 210
 coulombovské 158nn, 160, 206
 srážkový člen 204, 205
 Krookův 205
 srážkový parametr 161
 stabilita 177nn, 275
 stabilizace dynamická 276
 zpětnou vazbou 277, 285
 stacionární stav 148
 stellarátor 172, 175, 275, 277, 300
Stenzel 262
 stěnová vrstva 25, 238, 239
 Bohmovo kritérium 240, 246,
Stix 137
 stinící vzdálenost viz Debyeova délka
 Stokesův teorém 70, 184ú
 střed cyklotronní rotace viz gyrační střed
 střední magnetická jáma viz magnetická
 střední volná dráha 68, 142, 174ú, 309
 střížné napětí 67
 stupeň ionizace 17
 supravodivá cívka 288, 289, 296, 303

self-consistent problem
 Aurora Borealis
 FM-1 Spherator
 Coulomb force
 Lorentz f.
 ponderomotive f.
 computer simulation
 skin effect
 weakly ionized gas
 sun
 solar corona
 sunspot
 solar wind
 soliton
 probe
 frame
 collisions
 Coulomb c.
 collision term
 Krook coll. term
 impact parameter
 stability
 dynamic stabilization
 feedback s.
 steady state
 stellarator
 sheath
 Bohm sheath criterion
 shielding distance
 Stokes' theorem
 guiding center
 average magnetic well
 mean free path
 shear stress
 amount of ionization
 superconducting coil

supravodivý prsteneč 286
 susceptibilita magnetická 60
 svařovací oblouk 28
 svazek relativistický 286, 305
 vnitřní 275, 277
 zařízení s relativistickým svazkem 286, 305
 Astron 286
 synchrotron 32
 syntéza viz řízená
 systém laser-plyn 298
 systém laser-pevný terčik 298n
 kritická vrstva 298
 povrchová slupka 298
 plazmatu
 stlačené nitro (terčiku) 299
 T
Taylor 248
 tekutinové přiblížení 63nn, 209
 tenzor napětí 65nn, 160, 211
 tepelná kapacita 23
 tepelná vodivost 70
 koeficient 211
 teplota 20
 termojaderná reakce, syntéza 27, 28, 270nn
 thyatron 28
 tlak 67, 160
 tokamak 174, 275, 279nn, 300-304
 adiabatický toroidální kompresor (ATC) 283
 reaktor 304
 ST 281
Tonks 28
 torus 27, 162, 174ú, 273nn, 301, 304
 dvoukomponentní
 hlavní osa (torusu) 301
 vedlejší osa 275
 transportní koeficienty 143
 tritium 28, 270nn, 304
Trivelpiece 101
 tření 160
 turbulence 236

superconducting ring
 magnetic susceptibility
 welding arc
 relativistic beam
 internal beam
 relativistic beam device
 synchrotron
 laser-gas-fusion
 laser-pellet-fusion
 critical layer
 plasma shell
 compressed core
 fluid approximation
 stress tensor
 heat capacity
 thermal conductivity
 coefficient of t. c.
 temperature
 fusion reaction,
 thermonuclear fusion
 thyatron
 pressure
 tokamak
 ATC t.
 t. reactor
 ST t.
 torus
 two-component torus (TCT)
 major axis
 minor axis
 transport coefficients
 tritium
 friction
 turbulence

U

účinný průřez atomu $H \pi a_0^2$	141, 161, 271 308, viz též orbit Bohrov	cross section c. s. of H atom
udržení plazmatu (též držení)	28, 152, 272nn, 304	confinement, containing
doba udržení	158ú, 171, 175ú, 272, 293	conf. time
magnetickým polem (magnetické)	72, 273nn	conf. by magnetic field (magnetic conf.)
setrvačně (inerciální)	273, 298	inertial conf.
uchování energie	296	energy storage
unášení	viz drift	drift
únik elektronů	163, 300	electron runaway
únikový kužel	44, 46ú, 54	loss cone
<i>Utlaut</i>	263	
útlum bezsrážkový	viz Landauův	collisionless damping
srážkový	91ú	collisional d.
uzavřený systém	273	closed system

V

Van Allenovy pásy	17, 29, 45	Van Allen belts
variační princip (energie)	278	energy principle
vázané oscilátory	252	coupled oscillators
vázaný náboj	59, 61	bound charge
viskozita	68, 71, 160	viscosity
kinematický koeficient	69	kinematic v. coefficient
vlny (přehled)	134	waves
Alfvénova vlna	127nn, 135, 137ú, 176ú	Alfvén wave
modifikovaná	134	modified A. w.
torzní	131	torsional A. w.
Bohmova-Grossova	255	Bohm-Gross w.
driftová	75ú, 79ú, 193nn	drift w.
rezistivní	193nn	resistive drift w.
elektromagnetické	108nn, 114ú, 115, 135, 251, 255, 257	electromagnetic w-s
elektronové		electron w-s
elektromagnetické (světelné)	109nn, 114ú, 135, 255	electromagnetic (light) w-s
mimořádné, X	116nn, 126ú, 135	extraordinary w-s
pravo a levotočivé R, L	121n, 126ú, 134, 137ú	right-, left-hand (R-waves, L-waves)
řádné, O	115n, 120, 135, 137	ordinary w-s

vlny elektronové, horní hybridní oscilace plazmové (Langmuirovy)	98nn, 102ú, 85nn, 91ú, 95, 134, 206n, 257 263	electron waves, upper hybrid oscillation plasma (Langmuir) w-s
elektrostatické	98, 104nn, 126ú, 220	electrostatic w-s
elektrostatické elektronové	98nn, 102ú, 251	electrostatic electron w-s
elektrostatické iontové	104nn, 134, 138ú	electrostatic ion w-s
iontové		ion w-s
akustické	92nn, 95nn	ion acoustic w-s
dolní hybridní oscilace	107	lower hybrid oscillations
elektrostatické	104nn, 114ú	ion electrostatic w-s
hydromagnetické	57, 127nn, 136, 137ú, 300	hydromagnetic w-s
magnetozvukové	127, 132nn, 135, 300	magntosonic w-s
klasifikace vln	98	
magnetická rázová vlna	243	magnetic shock
polarizovaná	116, 122, 125	polarized w.
elipticky	116, 122	elliptically p. w.
rovinně	125	plane polarized w.
přířivá	viz vlna magne- tická rázová	bow shock
rádiové vlny	108	radio waves
rázová vlna	242nn, 305	shock wave
rychlá hydromagnetická	134	fast hydromagnetic w.
světelné vlny	108	light waves
zářňová vlna (na rozdílové frekvenci)	237, 263, 269	beat wave
zvukové vlny	91	sound waves
vnitřní prstenec	286	internal ring
vodíková bomba	28	hydrogen bomb
vrstevnicová mapa $f(v)$	204	contour map
vstřikování nabitých částic	300	charged particle injection
neutrálního svazku	288, 301	neutral beam i.
paliva	304	fuel injection
výboj v plynech	28, 141	gas discharge
výměna náboje	288, 301	charge exchange
výpadek rádiového spojení	114	communications blackout
W		
Wharton	230	
Wilcox	131	
Wong	95-97, 262, 264-266	

Z

zachycení (částice)	41, 207, 217n, 268	trapping
zakázané frekvenční pásmo	121, 123	stop band
zákon Ampérův	274	Ampère's law
Fickův	143, 144, 167	Fick's law
Childův–Langmuirův	241	Child–Langmuir law
Ohmův	163	Ohm's law
zobecněný	166	generalized O. l.
zápalná teplota	270	ignition temperature
záření brzdné	272	bremstrahlung
inverzní brzdné	298	inverse bremsstrahlung
kosmické	29, 45ú	cosmic rays
zářivka	17, 28	fluorescent light (tube)
zdrojový člen	148n	source term
zrcadla magnetická	41nn, 51, 53, 54, 180, 273 287nn, 300, 304	magnetic mirrors
azimutální m. z-o	53	spindle-cusp mirror
lokální	276, 286, 305, viz též orbit banánový	local mirror
vstřícná	53	magnetic cusps
zařízení 2XII	288, 292	mirror device 2XII
zrcadlový poměr	44, 51	mirror ratio
životní prostředí (ohrožení)	304	environmental hazards