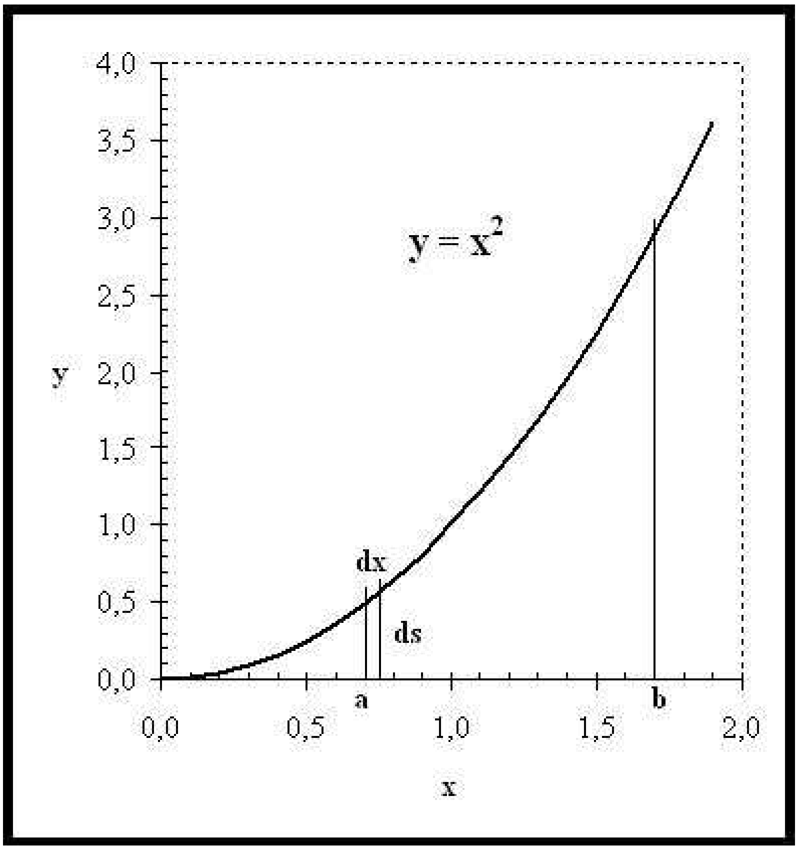
URČITÝ INTEGRÁL

Geometrická interpretace určitého integrálu: ¨

Plocha pod křivkou

Plocha pod křivkou funkce **y** v daných mezích **a** až **b**.



Plocha plošného elementu **ds**: $ds = f(x)\,dx$

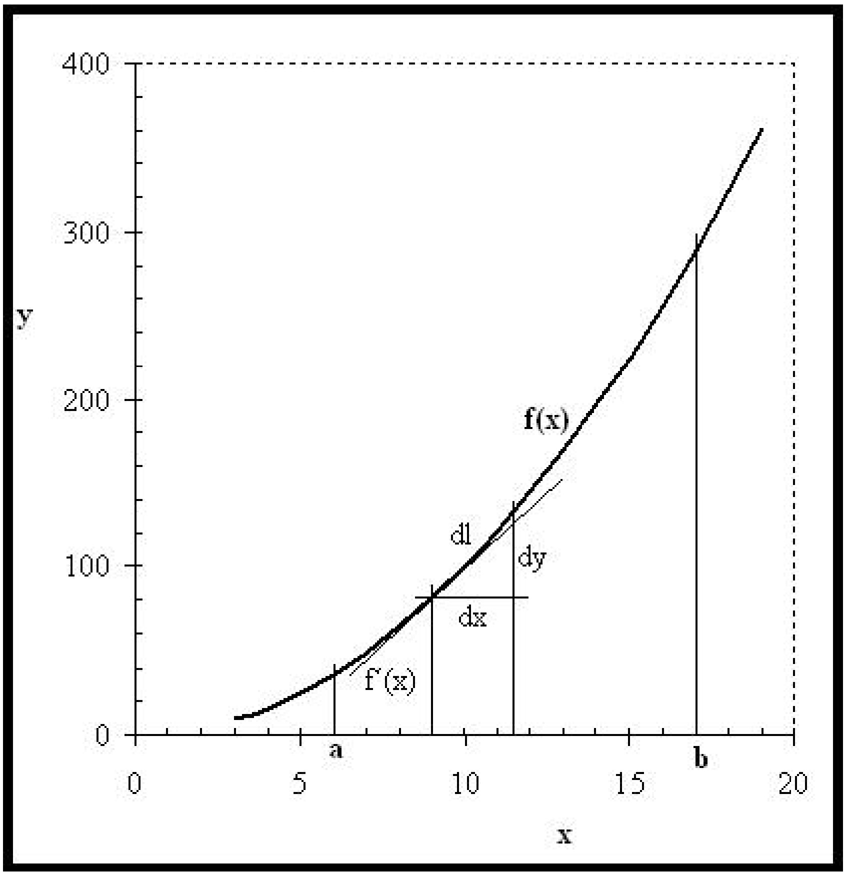
Integrací „sečteme plochy všech elementů“ tak aby vyplnily hledanou oblast: dostaneme plochu **s** pod křivkou od **a** do **b**:

$$s = \int_a^b f(x)\,dx$$

Konkrétně, jestliže $\mathbf{f(x) = x^2}$

$$s = \int_a^b x^2 dx \qquad s = \left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b \qquad s = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

Délka křivky

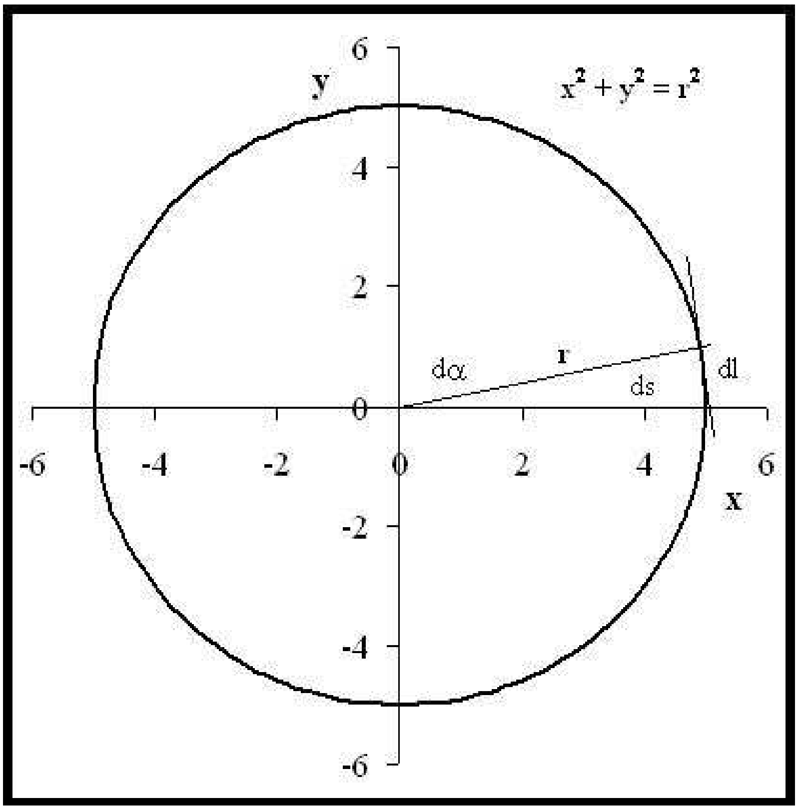


Z Pythagorovy věty: $\mathbf{dl^2 = dy^2 + dx^2}$

Podělíme-li $\mathbf{dx^2}$: $\dfrac{dl^2}{dx^2} = \dfrac{dy^2}{dx^2} + 1$

Po odmocnění: $\dfrac{dl}{dx} = \sqrt{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + 1}$

Po úpravách: $dl = \sqrt{[f'(x)]^2 + 1}\quad dx$ $\qquad l = \int_a^b \sqrt{[f'(x)]^2 + 1}\quad dx$



Obvod kružnice

Délkový element: $\frac{dl}{r} = \text{tg}\, d\alpha \cong d\alpha$ $\qquad dl = \text{tg}\, d\alpha \cong r\, d\alpha$

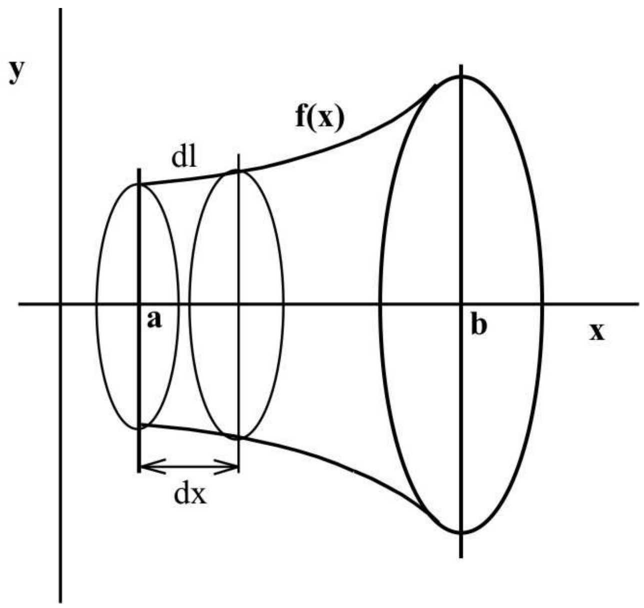
$$l = r\int_a^b d\alpha \qquad l = r[\alpha]_0^{2\pi} \qquad \boxed{l = 2\pi\, r}$$

Plocha kruhu

plocha dif. elementu: $ds = \frac{r\, dl}{2}$

Po dosazení za **dl**: $ds = \frac{r^2\, d\alpha}{2}$ $\qquad s = \frac{r^2}{2}\int_0^{2\pi} d\alpha$ $\qquad s = \frac{r^2}{2}[\alpha]_0^{2\pi}$ $\qquad \boxed{s = \pi\, r^2}$

Plocha pláště rotačního tělesa



Plocha dif. elementu ds = o dl

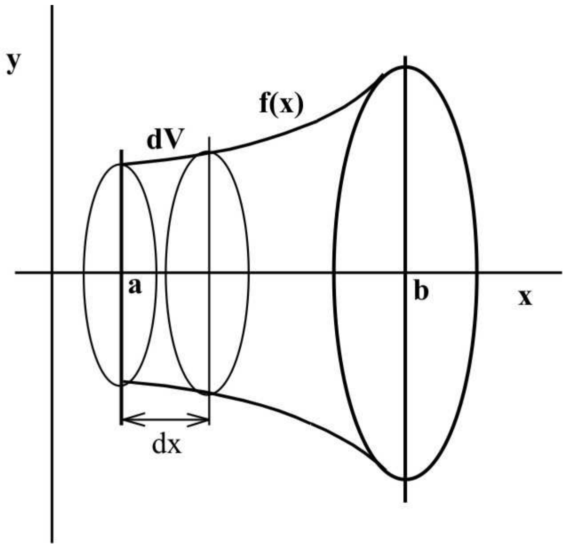
ds = 2p f(x) dl

Po dosazení za dl z předchozího vztahu:

$$ds = 2\pi\, f(x)\, \sqrt{[f'(x)]^2 + 1}\quad dx$$

$$s = 2\pi \int_a^b f(x)\, \sqrt{[f'(x)]^2 + 1}\quad dx$$

Objem rotačního tělesa



Objem dif. elementu:

dV = pr2 dx

dV = p f(x)2 dx

Objem:

$$V = \int_a^b f(x)^2 \, dx$$