DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

Integrál

$y=\int f(x)dx$ $f(x)=y'=\frac{dy}{dx}$ $\frac{dy}{dx}=f(x)$ $dy=f(x)dx$

$\int dy=\int f(x)dx$ $y+C_1=F(x)+C_2$ $y=F(x)+C$

TVAROVÁNÍ KLASTŮ BĚHEM TRANSPORTU

Model: tvar jílových bloků (klastů) se mění při rotaci kolem náhodně se měnící osy v intervalu [0, 2π]). Aktuální tvar lze vyjádřit hodnotou sféricity **ψ**:

$\Psi=\sqrt[3]{S^2/(L\,I)}$ kde **L**, **I**, a **S** představují rozměry bloku (m) na dlouhé, střední a krátké ose.

„Rovnovážný“ tvar při transportu (tj. sférický tvar) je dán podmínkou **ψ** = **1**. Odchylka od tohoto tvaru je **1-ψ**. Lze předpokládat, že velká odchylka (extrémně nepravidelný tvar) se bude při rotaci měnit rychleji než malá odchylka. Přírůstek sféricity s počtem otáček d**Ψ**/d**n** pak bude úměrný odchylce **1-ψ**:

$$\frac{d\Psi}{dn}=k(1-\Psi)$$

Řešení 1

Separace proměnných: $\frac{d\Psi}{(1-\Psi)}=k\,dn$ Integrace (neurčitý integrál): $\int\frac{d\Psi}{(1-\Psi)}=\int k\,dn$

Substituce: $1-\Psi=Y;\ \frac{dY}{d\Psi}=-1;\ d\Psi=-dY;$ $-\int\frac{1}{Y}dY=k\int dn$ Integrace: $\ln Y=-kn+C$

Resubstituce: $\ln(1-\Psi)=-kn+C$

Výpočet **C** z počátečních podmínek: n=0 $\Psi=\Psi_0$ $\ln(1-\Psi)=-kn+\ln(1-\Psi_0)$

Úprava: $\ln(1-\Psi)=\ln e^{-kn}+\ln(1-\Psi_0)$ $\ln(1-\Psi)=\ln\left(e^{-kn}(1-\Psi_0)\right)$ $\frac{1-\Psi}{1-\Psi_0}=e^{-kn}$

Řešení 2 $\frac{d\Psi}{(1-\Psi)} = k\,dn$ Integrace (určitý integrál): $\int_{\Psi_0}^{\Psi} \frac{d\Psi}{(1-\Psi)} = k \int_{n=0}^{n} dn$

Substituce: $1-\Psi = Y; \quad \frac{dY}{d\Psi} = -1; \quad d\Psi = -dY; \quad \Psi = 1-Y; \quad 1-\Psi_0 = Y_0 \quad \Rightarrow \quad \Psi_0 = 1-Y_0$

$-\int_{Y_0}^{Y} \frac{dY}{Y} = k \int_{n=0}^{n} dn$ Integrace: $[\ln Y]_{Y_0}^{Y} = -k\,[n]_0^n$

$\ln(Y) - \ln(Y_0) = -kn \quad \Rightarrow \quad \ln \frac{1-\Psi}{1-\Psi_0} = \ln e^{-kn}$ $\frac{1-\Psi}{1-\Psi_0} = e^{-kn}$ $\Psi = 1-(1-\Psi_0)\,e^{-kn}$

KINETIKA REAKCE

Rozpouštění a precipitace amorfních gelů SiO_2

$$SiO_2 + 2H_2O \underset{k_b}{\overset{k_f}{\rightleftarrows}} H_4SiO_4$$

$$+\frac{da_{H_4SiO_4}}{dt} = k_f\,\{A\}\,a_{SiO_2} a_{H_2O}^2 - k_b\,\{A\}\,a_{H_4SiO_4}$$

Řešení

Separace proměnných: $+\frac{da_{H_4SiO_4}}{k_f\,a_{SiO_2} a_{H_2O}^2 - k_b\,a_{H_4SiO_4}} = \{A\}\,dt$

a_{SiO2} = konst
a_{H2O} = konst
$\{A\}$ = konst

Substituce:

$$k_f\,a_{SiO_2} a_{H_2O}^2 - k_b\,a_{H_4SiO_4} = Y \quad \Rightarrow \quad \frac{dY}{da_{H_4SiO_4}} = -k_b \quad \Rightarrow \quad da_{H_4SiO_4} = -\frac{1}{k_b}dY$$

$-\frac{1}{k_b}\frac{dY}{Y} = \{A\}\,dt$ ⟹ $\int \frac{dY}{Y} = -k_b\,\{A\}\int dt$ ⟹ Integrace: $\ln Y = -k_b\,\{A\}\,t + C$

Resubstituce:

Počáteční podmínky:

⟹ $\ln\left(k_f\,a_{SiO_2} a_{H_2O}^2 - k_b\,a_{H_4SiO_4}\right) = -k_b\,\{A\}\,t + C$ $t = 0 \rightarrow a_{H4SiO4} = a^0_{H4SiO4}$

⟹ $\ln\left(k_f\,a_{SiO_2} a_{H_2O}^2 - k_b\,a_{H_4SiO_4}\right) = \ln e^{-k_b\{A\}t} + \ln\left(k_f\,a_{SiO_2} a_{H_2O}^2 - k_b\,a_{H_4SiO_4}^0\right)$

⟹ $a_{H_4SiO_4} = \frac{k_f}{k_b} a_{SiO_2} a_{H_2O}^2 \left(1 - e^{-k_b\{A\}t}\right) + a_{H_4SiO_4}^0 e^{-k_b\{A\}t}$

KONCENTRACE Rn V JESKYNI

Individuální toky **Rn** [Bq s^{-1}] jsou definovány: Tok $\mathbf{j}_1$ je dán součinem exhalace **E** (Bq m^{-2} s^{-1}) díky rozpadu ^{238}U a ploše stěn **S** [m^2]:

$$\mathbf{j_1 = E\,S}$$

Toky **Rn** spojené s ventilací jeskyně

$$\mathbf{j_2 = u\,c_{Rn(in)}} \qquad \text{a} \qquad \mathbf{j_4 = -\,u\,c_{Rn}},$$

kde **u** je objemová rychlost proudění vzduchu [m^3 s^{-1}] a $\mathbf{c}_{Rn(in)}$ je koncentrace radonu [Bq m^{-3}] na vstupu do jeskyně.

Tok $\mathbf{j}_3$ odpovídající α-rozpadu radonu

$$\mathbf{j_3 = -\,\lambda\,c_{Rn}\,V}$$

kde **λ** je rozpadová konstanta ^{222}**Rn** [s^{-1}], $\mathbf{c}_{Rn}$ je aktuální koncentrace ^{222}Rn [Bq m^{-3}], a **V** je objem jeskyně [m^3]. Znaménko udává směr toku!

Celkový tok Rn do jeskyně **j** = d$\mathbf{n}_{Rn/dt}$, (přírůstek **Rn** v jeskyni za čas) je dán sumou všech toků

$$\frac{dn_{Rn}}{dt} = \frac{V\,dc_{Rn}}{dt} = ES - \lambda c_{Rn} V + u\,c_{Rn(in)} - u\,c_{Rn}$$

Řešení

Separace proměnných:

$$\frac{V\,dc_{Rn}}{dt} = ES + u\,c_{Rn(in)} - (\lambda V + u)c_{Rn}$$

$$\frac{dc_{Rn}}{ES + u\,c_{Rn(in)} - (\lambda V + u)c_{Rn}} = \frac{1}{V}dt$$

Substituce:

$$ES + u\,c_{Rn(in)} - (\lambda V + u)c_{Rn} = Z \;\Rightarrow\; \frac{dZ}{dc_{Rn}} = -(\lambda V + u) \;\Rightarrow\; -\frac{dZ}{(\lambda V + u)} = dc_{Rn}$$

$$-\frac{1}{\lambda V + u}\frac{dZ}{Z} = \frac{1}{V}dt \;\Rightarrow\; \frac{dZ}{Z} = -\frac{\lambda V + u}{V}dt$$

Integrace:

$$\int \frac{dZ}{Z} = -\frac{\lambda V + u}{V}\int dt$$

$$\ln Z = -\frac{\lambda V + u}{V}t + C$$

Dosazení:

$$\ln\left(ES + u\,c_{Rn(in)} - (\lambda V + u)c_{Rn}\right) = -\frac{\lambda V + u}{V}t + C$$

Výpočet konstanty - počáteční podmínky: $t = 0 \rightarrow c_{Rn} = c^0_{Rn}$

$$\ln\left(ES + u\,c_{Rn(in)} - (\lambda V + u)c_{Rn}\right) = \ln e^{-\frac{\lambda V + u}{V}t} + \ln\left(ES + u\,c_{Rn(in)} - (\lambda V + u)c_{Rn}\right)$$

Po úpravách:

$$c_{Rn} = \left(\frac{ES + u\,c_{Rn(in)}}{\lambda V + u}\right)\left(1 - e^{-\frac{\lambda V + u}{V}t}\right) + c^0_{Rn}\,e^{-\frac{\lambda V + u}{V}t}$$