SYSTÉM LINEÁRNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

Systém dvou lineárních rovnic $+\frac{dx_2}{dt} = \ k_{12}x_1 - k_{21}x_2$ $\qquad +\frac{dx_1}{dt} = -k_{12}x_1 + k_{21}x_2$

V maticové formě $\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_{12} & k_{21} \\ k_{12} & -k_{21} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ a ve vektorovém tvaru $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{K}\ \mathbf{x}$, kde **x** je vektor proměnných x_i a **K** je matice koeficientů.

Matice **K** může být rozložena do součinu třech matic $\mathbf{U}\ \mathbf{\Lambda}\ \mathbf{U}^{-1}$, pak $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{U}\ \mathbf{\Lambda}\ \mathbf{U}^{-1}\ \mathbf{x}$.

Násobením $\mathbf{U}^{-1}$ z levé strany dává $\mathbf{U}^{-1}\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{\Lambda}\ \mathbf{U}^{-1}\ \mathbf{x}$.

Protože $\mathbf{U}^{-1}$ je matice konstant, lze psát $\frac{d\mathbf{U}^{-1}\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{\Lambda}\ \mathbf{U}^{-1}\ \mathbf{x}$.

Substituce proměnných dává $\mathbf{U}^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Pak $\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{\Lambda}\ \mathbf{y}$.

Tato rovnice může být rozložena do dílčích rovnic, $\frac{d\,y_i}{dt} = \lambda_i\ y_i$,

které mohou být řešeny za počátečních podmínek, $t = 0$, $y = y_0$ jako $y_i = e^{\lambda_i t}\ y_{i0}$.

Systém těchto rovnic lze převést zpět do vektorové formy, $\mathbf{y} = e^{\mathbf{\Lambda}\,t}\ \mathbf{y_0}$,

a po re-substituci na $\mathbf{U}^{-1}\mathbf{x} = e^{\mathbf{\Lambda}\,t}\ \mathbf{U}^{-1}\mathbf{x_0}$.

Násobením **U** zleva dostáváme vektor **x:** $\mathbf{x} = \mathbf{U}\ e^{\mathbf{\Lambda}\,t}\ \mathbf{U}^{-1}\mathbf{x_0}$

Výraz před $\mathbf{x_0}$ lze rozepsat jako $\mathbf{x} = \sum_i e^{\lambda_i\,t}\ (\text{i} - \text{tý sloupec } \mathbf{U})(\text{i} - \text{tý řádek } \mathbf{U}^{-1})\ \mathbf{x_0}$ kde součin $(\text{i} - \text{tý sloupec } \mathbf{U})(\text{i} - \text{tý řádek } \mathbf{U}^{-1})$ dává novou matici $\mathbf{U_i}$.

Algoritmus pro výsledné řešení je pak $\boxed{\mathbf{x} = \sum_i e^{\lambda_i\,t}\ \mathbf{U}_i\ \mathbf{x_0}}$.

Příklad:. systém dvou lineárních diferenciálních rovnic

$$\frac{dx_1}{dt} = 2\,x_1 \qquad \frac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2$$

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \qquad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\ \mathbf{x}$$

Počáteční podmínky: $t = 0$, $x_1 = 1$ $x_2 = -1$.

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{U\Lambda U}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Obecné řešení: $\mathbf{x} = e^{\lambda_i\, t}\,\mathbf{U}_1\,\mathbf{x}_0 \quad + \quad e^{\lambda_i\, t}\,\mathbf{U}_2\,\mathbf{x}_0$

$$\mathbf{x} = e^{2\,t} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad + \quad e^{\,t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = e^{2\,t} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad + \quad e^{\,t} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$x_1 \;=\; - e^{2\,t}$$

$$x_2 \;=\; - e^{2\,t} - 2\,e^{t}$$