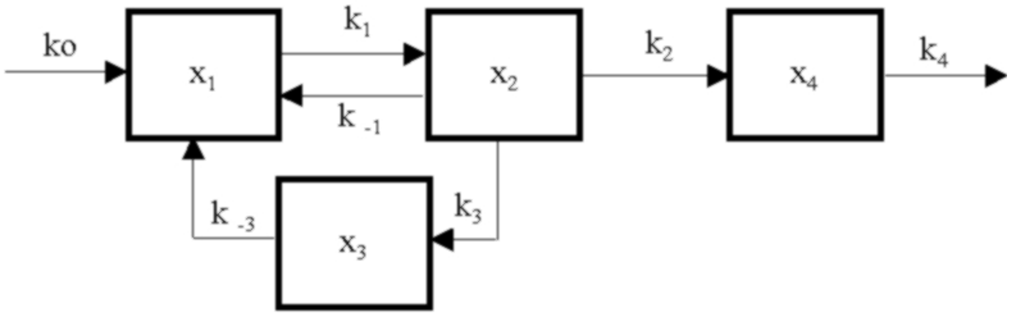
LINEÁRNÍ ALGEBRA 1

ŘEŠENÍ SYSTÉMU LINEÁRNÍCH ROVNIC

Typickým geologickým problémem je určení stacionárních stavů (koncentrace látek v rezervoárech systému v ustáleném stavu)

Typický příklad:



Popis systému (modelu) diferenciálními rovnicemi:

$$+\frac{dx_1}{dt} = -k_1.x_1 + k_{-1}.x_2 + k_{-3}.x_3 + k_0$$

$$+\frac{dx_2}{dt} = k_1.x_1 - (k_{-1} + k_2 + k_3).x_2$$

$$+\frac{dx_3}{dt} = k_3.x_2 - k_{-3}.x_3$$

$$+\frac{dx_4}{dt} = k_2.x_2 - k_4.x_4$$

Stacionární stav:

$$-k_1.x_1 + k_{-1}.x_2 + k_{-3}.x_3 + k_0 = 0$$

$$+k_1.x_1 - (k_{-1} + k_2 + k_3).x_2 = 0$$

$$+k_3.x_2 - k_{-3}.x_3 = 0$$

$$+k_2.x_2 - k_4.x_4 = 0$$

PŘÍKLAD

Čtyři rovnice se čtyřmi proměnnými:

R1: $x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = -2$

R2: $2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$

R3: $x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1$

R4: $x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 4$

Obecná metoda řešení: postupná eliminace proměnných

Lineární kombinace

R1: $x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = -2$

R2: $2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$

R3: $x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1$

R5: $-3x_3 - x_4 = -6$ nová rovnice je výsledkem lineární kombinace **R1 – R4**

$x_4 = 6 - 3\,x_3$

Po dosazení za x4 – redukce počtu proměnných na 3:

$x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 10$

$2x_1 + x_2 - 2\,x_3 = 2$

$x_1 - x_2 - 4x_3 = -5$

Dále postupujeme obdobným způsobem!

<u>**Alternativní postup řešení**</u>**:**

důsledné kombinace původních rovnic

R1: $x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = -2$

R2: $2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$

R3: $x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1$

R4: $x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 4$

R11 = 2 R1 + R1: $5x_1 + 4x_2 + x_3 = 14$

R12 = R2 – R3: $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7$

R13 = R3 + R4: $2x_1 + x_2 + x_3 = 5$

R21 = 2 R11 – R12: $9x_1 + 6x_2 = 21$

R22 = 2 R13 – R12: $3x_1 = 3$

$x_1 = 1$
$x_2 = 2$
$x_3 = 1$
$x_4 = 3$

Veškeré operace se vlastně týkají koeficientů před proměnnými

Koeficienty do tabulky (matice)

Rozšířená matice: obecné řešení:

$$\begin{array}{c} \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{array}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & y: \\ 1 & 2 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & y \\ 1 & 0 & 0 & 0 & y_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & y_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & y_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & y_4 \end{bmatrix}$$

diagonální matice (jednotková **E**)

Úpravy matice lineárními kombinacemi:

a) nejprve docílíme nuly v levém rohu pod diagonálou (trojůhelníková matice)

b) nuly i v pravém rohu nad diagonálou

$$\begin{array}{c} \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{array}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & y: \\ 1 & 2 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & -1 & 6 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ R_2-2R_3 \\ R_3-R_1 \\ R_4-R_1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ R_2+R_3 \\ \\ \end{array} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \\ R_3-R_4 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ R_2-R_3 \\ R_3-2R_4 \\ \\ \end{array} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{array}\begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{array}{l} 3R_1-2R_2 \\ R_2+3R_4 \\ \\ \\ \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{array}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{array}{l} R_1+R_3 \\ 1/3 \\ 1/3 \\ \\ \end{array} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{array}{l} 1/3 \\ \\ \\ \\ \end{array} \Rightarrow \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 3$$

Teorie matic se vyvíjí samostatně

zkoumají se jejich vlastnosti a nacházejí se další zákonitosti

Maticový zápis systému rovnic

$$x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = -2$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$$

$$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 4$$

$$\underset{\mathbf{A}}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}} \underset{\mathbf{x}}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}} = \underset{\mathbf{y}}{\begin{bmatrix} -2 \\ 8 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}}$$

vektorový zápis: **A x** = **y**

A – čtvercová matice **x**, **y** – sloupcové vektory

LITERATURA