MATICE

Tabulka čísel

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & a_{2j} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & . & a_{3j} \\ . & . & . & . & . \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & . & a_{ij} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{a_{ij}}$ jsou prvky matice

kde **i** – řádek matice a **j** - sloupec matice

Příklad:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

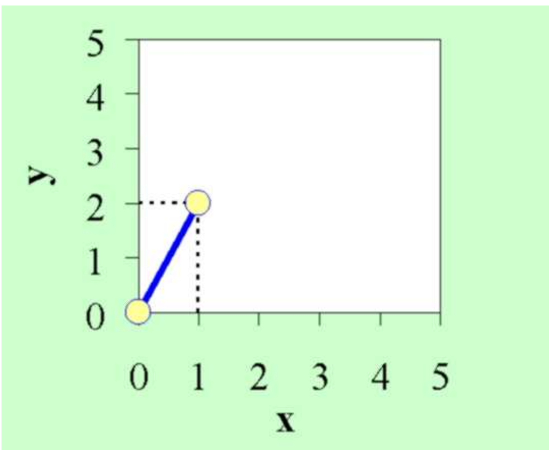
$a_{22} = 1$, $a_{23} = -4$

VEKTOR

Sloupcová matice – vektor

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ . \\ a_{i1} \end{bmatrix}$$

INTERPRETACE: prvky vektoru – souřadnice koncového bodu v i-rozměrném prostoru



Vektor $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Vektor je volně pohyblivý a může být libovolně posunutý do středu souřadného systému.

Zachována je přitom délak a směr vektoru!

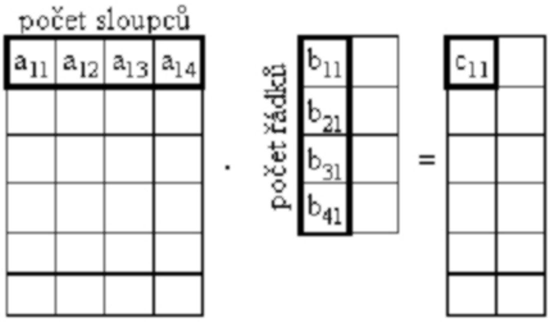
Násobení matic

$\mathbf{A\,B = C}$ $\mathbf{A\,B \neq B\,A}$ násobení „zleva“ a „zprava“

Počet sloupců levé matice musí odpovídat počtu řádků pravé matice

Výsledek násobení – nová matice - s počtem řádků jako má levá matice
- s počtem sloupců jako má pravá matice

Výpočet prvku $\mathbf{c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + a_{14}b_{41}}$ obecně: $c_{11} = \sum_{ij} a_{1j}\, b_{i1}$



ŘEŠENÍ VEKTOROVÉ ROVNICE

Jak řešit vektorovou rovnici $\mathbf{A\,x = y}$???

Je třeba převést matici **A** na pravou stranu rovnice!

Definujme „inverzní matici“ $\mathbf{A^{-1}}$ k matici **A** aby platilo $\mathbf{A^{-1}\,A = E}$

kde **E** je tzv. jednotková matice: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$

(všechny prvky jsou nulové kromě jedniček v hlavní diagonále)

vlastnosti inverzní matice: $\mathbf{A^{-1}\,A = A\,A^{-1} = E}$

Vynásobením vektorové rovnice „zleva“ $\mathbf{A^{-1}\,A\,x = A^{-1}\,y}$

dostáváme řešení $\mathbf{E\,x = A^{-1}\,y}$ resp. $\mathbf{x = A^{-1}\,y}$

Výpočet inverzní matice

Jestliže $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, pak inverzní matice $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T$

kde $|A|$ je determinant matice (číslo „charakterizující“ matici), A_{ij} je „doplněk“ prvku a_{ij},

$$A_{11} = (-1)^{i+j=2} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

T v „exponentu“ matice znamená **transpozici**, tj. záměna sloupců za řádky (přeskupení prvků kolem hlavní diagonály jako osy symetrie).

Výpočet determinantu matice A

„Rozvoj“ matice podle libovolného řádku nebo sloupce

Rozvoj **A** podle 1. řádku:

$$|A| = (-1)^{i+j=2}\, a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{i+j=3}\, a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{i+j=4}\, a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

determinanty v horním výrazu – subdeterminanty matice **A**

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}\, a_{33} - a_{23}\, a_{32} \qquad \text{pak}$$

$$|A| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

Příklad: Vypočítat determinant matice **A** (rozvoj podle 3. řádku)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -6 & 5 & 4 \\ 7 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + 8 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -6 & 5 \end{vmatrix} = 7(-8-15) + 8(5-12) = -217$$

Výpočet determinantu MS EXCEL

- Prvky matice do sešitu
- Kurzor do buňky kde má být výsledek
- Zvolení funkce det (determinant)
- Definice maticového pole

- Enter – výsledek

Příklad: Vypočítat inverzní matici k matici **A**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & -4 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}^{-1} = ?$$

$$|A| = 0 - 1.\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -1(9-10) - 2(0+8) = -15$$

Pokud **|A|** = 0, pak **A** není „regulérní“ a neexistuje $\mathbf{A}^{-1}$

Doplňky:

$$A_{11} = (-1)^2.\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -12 \qquad A_{12} = (-1)^3.\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{13} = (-1)^4.\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 8$$

$$A_{21} = (-1)^3.\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3 \qquad A_{22} = (-1)^4.\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4 \qquad A_{23} = (-1)^5.\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{31} = (-1)^4.\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = -3 \qquad A_{32} = (-1)^5.\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -6 \qquad A_{33} = (-1)^6.\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -3$$

Výpočet inverzní matice k matici $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & -4 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = -\frac{1}{15}\begin{bmatrix} -12 & 1 & 8 \\ -3 & 4 & 2 \\ -3 & -6 & -3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{12}{15} & -\frac{1}{15} & -\frac{8}{15} \\ \frac{1}{5} & -\frac{4}{15} & -\frac{2}{15} \\ \frac{1}{5} & \frac{6}{15} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{12}{15} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{15} & -\frac{4}{15} & \frac{6}{15} \\ -\frac{8}{15} & -\frac{2}{15} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

MS EXCEL:

- prvky matice do sešitu
- definice výsledného maticového pole (musíme znát rozměr výsledné matice)
- volba funkce „INVERZE“
- definice invertované matice
- Shift+Ctrl+Enter výpočet

Příklad: Řešte systém 4 lineárních rovnic o 4 neznámých

R$_1$: $x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = -2$

R$_2$: $2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$

R$_3$: $x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1$

R$_4$: $x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 4$

Maticový zápis: $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 8 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Vektorový zápis: **A x = y**

Symbolické řešení: $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{y}$ $$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}3333 & 1 & 0{,}6667 \\ 0{,}3333 & 1 & -1{,}3333 & -1 \\ -0{,}3333 & -0{,}3333 & 0{,}3333 & 0{,}6666 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}3333 & 1 & 0{,}6667 \\ 0{,}3333 & 1 & -1{,}3333 & -1 \\ -0{,}3333 & -0{,}3333 & 0{,}3333 & 0{,}6666 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 8 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Vektory se rovnají, pokud se rovnají jejich prvky! Pak

tedy: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$, $x_4 = 3$