OPERACE S MATICEMI

1. Transformace vektoru

Při operaci **Ax** = **y** transformuje matice **A** vektor **x** do vektoru **y** (matice **A** jako operátor)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

Matice sama může představovat matici sloupcových vektorů

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ a_{42} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ a_{43} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \\ a_{44} \end{bmatrix}$$

Součin **Ax** může být také rozepsán jako

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ a_{42} \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ a_{43} \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \\ a_{44} \end{bmatrix}$$

Příklad:

Transformační matice:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

matice vektorů:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{z} \end{array} \\ \mathbf{B} = & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

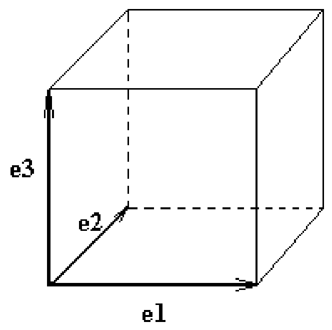
$$\mathbf{Au} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Av} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Ay} = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Az} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Při součinu **AB** transformuje matice **A** každý vektor matice **B** zvlášť:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} \mathbf{Au} & \mathbf{Av} & \mathbf{Ax} & \mathbf{Ay} & \mathbf{Az} \end{array} \\ \mathbf{AB} = & \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 7 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & -4 \end{bmatrix} \end{array}$$

2. Báze prostoru

Sloupcové vektory jednotkové matice **E** tvoří ***bázi*** vektorového (euklidovského) prostoru **R**



$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{kde} \quad \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Bázi prostoru získáme z vektorů $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \ldots \mathbf{e}_i$ jako jejich **vnější součin** $E = \sum_i e_i e_i^T$

Transponovaný vektor(matice) je vektor (matice) se zaměněnými sloupci za řádky:

$\mathbf{A} = \mathbf{B}^T$ kde $a_{ij} = b_{ji}$ kde $\mathbf{e}_i^T$ je transponovaný vektor

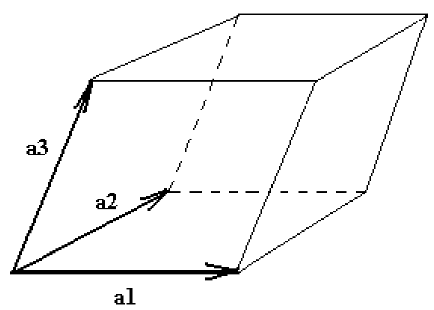
$$e_1 e_2 e_3 = e_1 e_1^T + e_2 e_2^T + e_3 e_3^T$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3 obecné sloupcové vektory $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ matice $\mathbf{A}_{3x3}$ tvoří 3-rozměrný objekt (vektorový objekt),

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{kde} \quad \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}$$

jehož objem vyjadřuje hodnota determinantu matice **A**, det**A**



3. Vnitřní součin (dot product) vektorů

$$\mathbf{x}\,.\,\mathbf{y} = \mathbf{x}^T\,\mathbf{y} = \mathbf{x}\,\mathbf{y}^T$$

výsledkem vnitřního součinu je skalár

Příklad: $x\,.\,y = [1 \quad 1]\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = 1 + 2 = 3$

4. Absolutní délka vektoru

Čtverec absolutní délky vektoru **x** je dán **vnitřním součinem x$^{\mathbf{T}}$** a **x**:

$$\|x\|^2 = x^T x$$

Příklad: $\left\|\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\|^2 = [1 \quad 1]\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = 1 + 1 = 2$ $\qquad \|x\| = \sqrt{2}$

5. Úhel svírající dvěma vektory

Kosinus úhlu θ mezi vektory **x** a **y** je dán vztahem $\cos\theta = \dfrac{x^T\,y}{\sqrt{x^T\,x}\ \ \sqrt{y^T\,y}}$

Příklad: $x = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ $\qquad y = \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$

$x^T = [1 \quad 2]$ $\qquad y^T = [-1 \quad 1]$

$\mathbf{x}^T\mathbf{x} = 1 + 4 = 5$ $\qquad \mathbf{y}^T\mathbf{y} = 1 + 1 = 2$

$\mathbf{x}^T\mathbf{y} = -1 + 2 = 1$ $\qquad \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$

Jestliže vnitřní součin (dot product) vektorů ($\mathbf{x}^T\,\mathbf{y}$, $\mathbf{y}^T\,\mathbf{x}$) je roven nule, pak i **cosθ** je roven nule a vektory **x**, **y** svírají úhel $90^{\mathbf{o}}$**. Říkáme, že *vektory*** jsou ***ortogonální***.

6. Ortogonální matice O

Čtvercová matice, složená z **ortogonálních vektorů** o **jednotkové délce**.

Determinant **detO** = ± 1.

Příklad:

Je matice **O** ortogonální? $\mathrm{O} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ det O = 1

Délka sloupcových vektorů

$$\|x\|^2 = x^T x = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\|y\|^2 = y^T y = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

úhel které vektory svírají

$$x^T y = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

7. Rotace souřadnic

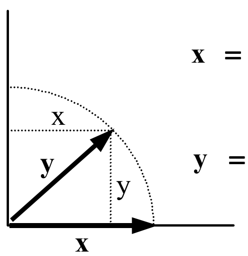
Transformace **Ox** (zde je **O** ve významu operátora) zachovává délku vektoru **x**, způsobí jen posunutí koncového bodu v souřadném systému. Taková operace (geometrická transformace) může být chápána jako ***rotace***.

Příklad:

Ortogonální matice $\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ transformuje např. vektor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

do vektoru $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

Fyzikální význam této transformace je rotace o 45°.



$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} / \sqrt{\mathbf{2}} \\ \mathbf{1} / \sqrt{\mathbf{2}} \end{bmatrix}$$

x = y délka y = 1

$1^2 = x^2 + x^2$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Obecně, **rotace v rovině** o úhel θ: $O = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ rotační matice

V **trojrozměrném prostoru**, rotace kolem osy x, y a z:

$$O_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad O_y = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \quad O_z = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$