DIFERENCIÁLNÍ POČET

Pouhý ***popis stavu systému*** často nestačí, snažíme se předpovědět jeho ***vývoj*** – tedy předpovědět ***nový stav po určité události***.

VÝVOJ SYSTÉMU NAZÝVÁME *PROCES*.

Při studiu ***procesů*** nás např. zajímá, jak se systém vyvíjí v čase (jaký je jeho stav po uplynutí určitého časového intervalu - čas je zde ***nezávisle proměnná***).

Nezávisle ***proměnou nemusí být jen čas***, ale podnětem k vývoji systému může být ***změna*** jakákoliv jiné veličiny: teploty, tlaku, složení, pH, Eh ...

Obecně nás tedy zajímá, jak se ***mění*** závislá(é) proměnná(é) ***se změnou*** nezávislé veličiny. Matematika nám poskytuje excelentní nástroj k popisu změn: ***diferenciální počet***

Příklad:

Mějme nelineární funkci

$$\mathbf{Y = f(x)}$$

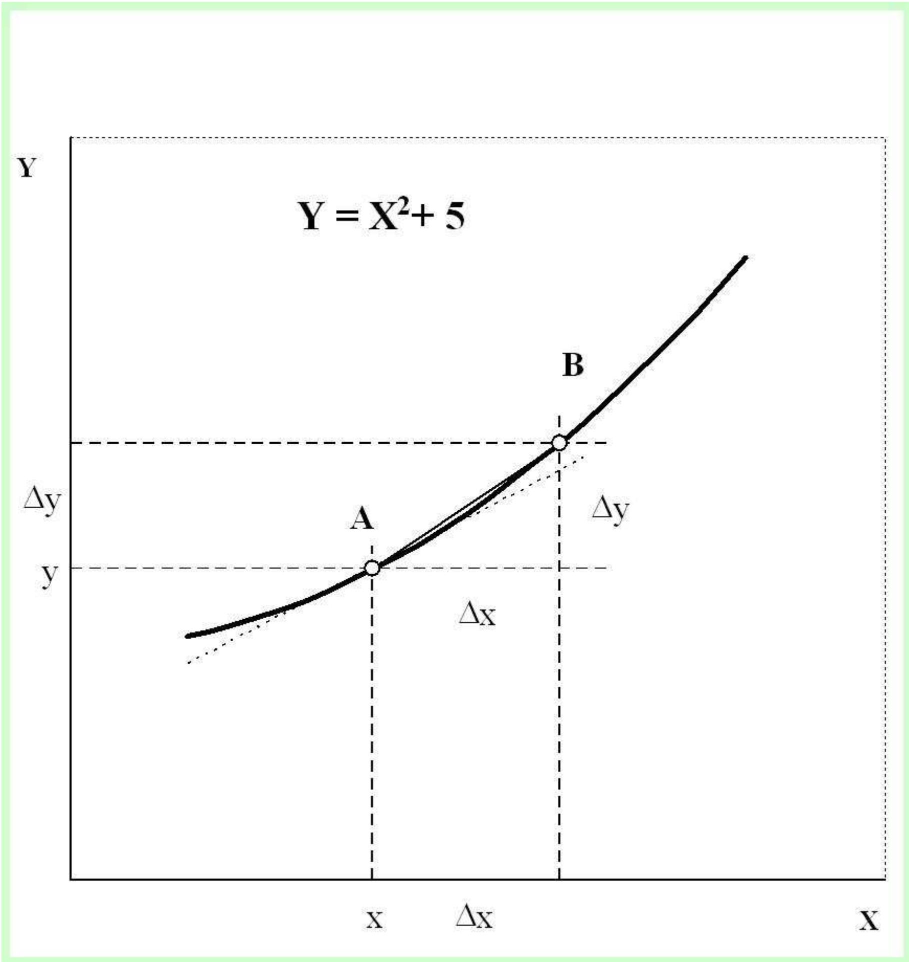
např. $\mathbf{Y = X^2 + 5}$:

Jaká je strmost (gradient) závislosti **Y = f(X)** v daném bodě (např. **A**), t.j., do jaké míry se změní **Y** se změnou **X?**

To určuje ***hodnota směrnice tečny*** ke ***křivce funkční závislosti*** v tomto bodě.

Můžeme najít přímo směrnici v jediném bodě? **Ne!**

Musíme „testovat“ jeho okolí, abychom zjistili, jaké zde má funkční závislost (její křivka) „trendy“.



Velikost změny **Y** se změnou **X** lze přibližně vyjádřit poměrem **Δy/Δx**, kde **Δ** vyjadřují přírůstky hodnot veličin **y** a **x**. Symbolicky

$\Delta y = (y + \Delta y) - y$

nebo po vyjádření hodnotou funkce **f(x)** v bodech **x + Δx** a **x**:

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

Po dosazení do konkrétní funkční závislosti $\mathbf{Y = f(X) = X^2 + 5}$ dostaneme $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Po úpravách

$\Delta y = [(x + \Delta x)^2 + 5] - [x^2 + 5]$

$\Delta y = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + 5 - x^2 + 5$

$\Delta y = 2x\ \Delta x + \Delta x^2$

Podělíme-li horní výraz přírůstkem **Δx**, dostaneme hledaný poměr **Δy/Δx**:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

Jak je vidět z obrázku, poměr $\Delta y/\Delta x$ ***nevystihuje přesně*** hodnotu směrnice tečny v bodě **A**: má vyšší hodnotu! Lepší přiblížení dosáhneme, pokud zvolíme **menší interval Δx**!

Jestliže se **Δx** bude blížit nule, pak ***nejlepší shoda***! Sice také **Δy** se bude blížit nule, ale vzájemný poměr bude nabývat ***konkrétních hodnot***. Pak

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to \frac{dy}{dx} = 2x$$

dy a **dx** jsou diferenciály. Výraz „**2x**“ je ***derivace funkce*** $f(x) = x^2 + 5$

Obecně: jestliže $\mathbf{y = x^n}$, pak $\mathbf{y' = dy/dx = nx^{(n-1)}}$

DEFINIČNÍM ZÁPIS DERIVACE SE ČASTO VYJADŘUJE VE FORMĚ LIMITY

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Diferenciál funkce obecně vyjádřen vztahem

$$\mathbf{dy = y'\,dx}$$

Pravidla derivování elementárních a složených funkcí

$y = \text{konst}$ $y' = 0$

$y = x^n$ $y' = nx^{(n-1)}$

$y = \ln x$ $y' = 1/x$

$y = \ln f(x)$ $y' = f'(x)/f(x)$

$y = e^x$ $y' = e^x$

$y = e^{f(x)}$ $y' = e^{f'(x)}$

$y = k\, f(x)$ $y' = k\, f'(x)$

$y = f(x) + g(x)$ $y' = f'(x) + g'(x)$

$y = f(x)\, g(x)$ $y' = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$

$y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ $y' = \dfrac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{g(x)^2}$

DIFERENCIÁLY VYŠŠÍHO ŘÁDU

Diferenciál druhého řádu (druhý diferenciál) funkce $y = f(x)$

$\mathbf{d^2y = f''(x)\, dx^2}$

$f''(x)$ je druhá derivace $f(x)$ podle x

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x)$$