

Matematika (a fyzika) schovaná za GPS

Michal Bulant

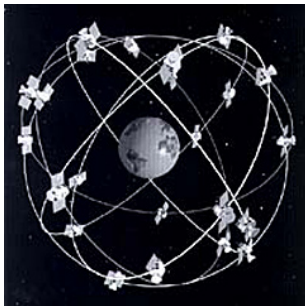
Masarykova univerzita
Přírodovědecká fakulta
Ústav matematiky a statistiky

Brno, 30. dubna 2015

Global Positioning system

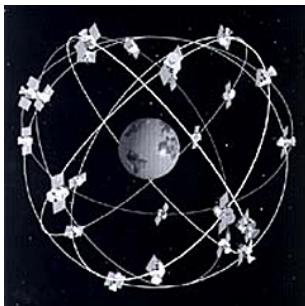
- minimálně 27 satelitů (24 aktivních – jsou po 4 rovnoměrně rozmístěny na 6 orbitálních drahách, 3 záložní), v tuto chvíli 34 aktivních, viz

<http://www.navcen.uscg.gov/?Do=constellationStatus>



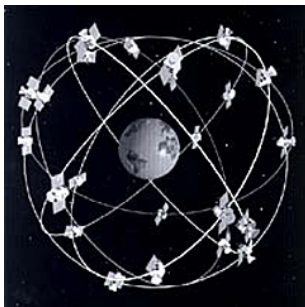
Global Positioning system

- minimálně 27 satelitů (24 aktivních – jsou po 4 rovnoměrně rozmístěny na 6 orbitálních drahách, 3 záložní), v tuto chvíli 34 aktivních, viz <http://www.navcen.uscg.gov/?Do=constellationStatus>
- výška cca 19 300 km na povrchem Země, cca 2 oběhy denně



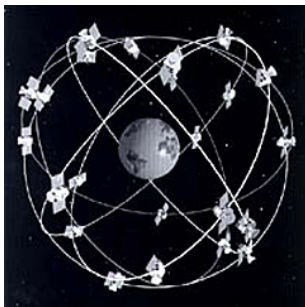
Global Positioning system

- minimálně 27 satelitů (24 aktivních – jsou po 4 rovnoměrně rozmístěny na 6 orbitálních drahách, 3 záložní), v tuto chvíli 34 aktivních, viz <http://www.navcen.uscg.gov/?Do=constellationStatus>
- výška cca 19 300 km na povrchem Země, cca 2 oběhy denně
- z každého místa na Zemi viditelných 4–12 satelitů



Global Positioning system

- minimálně 27 satelitů (24 aktivních – jsou po 4 rovnoměrně rozmístěny na 6 orbitálních drahách, 3 záložní), v tuto chvíli 34 aktivních, viz <http://www.navcen.uscg.gov/?Do=constellationStatus>
- výška cca 19 300 km na povrchem Země, cca 2 oběhy denně
- z každého místa na Zemi viditelných 4–12 satelitů
- od 1. května 2000 zrušeno umělé zkreslování dat (SA – selective availability)



Jak to vlastně funguje?

Jak to vlastně funguje?



Cheap GPS ...

Satelity obíhající (nejde o stacionární družice) Zemi vysílají zprávy obsahující:

- čas vyslání zprávy,
- polohu satelitu,
- systémovou informaci o stavu a (přibližné) pozici ostatních satelitů.

Výpočet pozice – úvod

Satelity obíhající (nejde o stacionární družice) Zemi vysílají zprávy obsahující:

- čas vyslání zprávy,
- polohu satelitu,
- systémovou informaci o stavu a (přibližné) pozici ostatních satelitů.

Z těchto informací chce příjemce (GPS přijímač) odvodit informaci o své poloze.

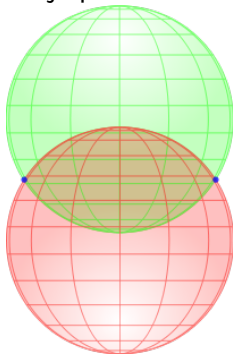


Výpočet pozice

Přijímač na základě polohové a časové informace $[x_i, y_i, z_i, t_i]$ od alespoň 3(4) satelitů vypočte svoji zdánlivou vzdálenost r_i od jednotlivých vysílačů (*pseudorange*) za předpokladu, že se signál šíří rychlostí světla (odhadněte, jak dlouho letí signál).

Výpočet pozice

Přijímač na základě polohové a časové informace $[x_i, y_i, z_i, t_i]$ od alespoň 3(4) satelitů vypočte svoji zdánlivou vzdálenost r_i od jednotlivých vysílačů (*pseudorange*) za předpokladu, že se signál šíří rychlostí světla (odhadněte, jak dlouho letí signál). Vypočtená vzdálenost od satelitu spolu s jeho polohou při vyslání signálu udává sféru (povrch koule), na níž přijímač leží. Průsečíkem takových dvou sfér je pak kružnice, obsahující daný bod.



Průsečíkem třetí sféry s touto kružnicí jsou pak (obvykle) 2 body.
Výslednou pozici je pak možné určit jako:

- ten z průsečíků, který je blíže povrchu Země (v obvyklém případě GPS přijímače v autě či v ruce)

Průsečíkem třetí sféry s touto kružnicí jsou pak (obvykle) 2 body.

Výslednou pozici je pak možné určit jako:

- ten z průsečíků, který je blíže povrchu Země (v obvyklém případě GPS přijímače v autě či v ruce)
- ten z průsečíků, který je blíže **čtvrté sféře** – v tomto případě je rovněž možné pomocí GPS určit nadmořskou výšku, v níž se přijímač pohybuje.

Pro zjednodušení výpočtů je možné bez újmy na obecnosti zvolit kartézskou soustavu souřadnic tak, že středy sfér (tj. pozice vysílajících satelitů) jsou v rovině xy (tj. $z = 0$), jeden ze středů dále umístíme v počátku a druhý na ose x . Uvažujme tedy tři sféry se středy v bodech $[0, 0, 0]$, $[u, 0, 0]$, $[v, w, 0]$ a poloměry r_1, r_2, r_3 a dostaneme tak pro hledanou pozici $[x, y, z]$ rovnice

Pro zjednodušení výpočtů je možné bez újmy na obecnosti zvolit kartézskou soustavu souřadnic tak, že středy sfér (tj. pozice vysílajících satelitů) jsou v rovině xy (tj. $z = 0$), jeden ze středů dále umístíme v počátku a druhý na ose x . Uvažujme tedy tři sféry se středy v bodech $[0, 0, 0]$, $[u, 0, 0]$, $[v, w, 0]$ a poloměry r_1, r_2, r_3 a dostaneme tak pro hledanou pozici $[x, y, z]$ rovnice

$$x^2 + y^2 + z^2 = r_1^2$$

$$(x - u)^2 + y^2 + z^2 = r_2^2$$

$$(x - v)^2 + (y - w)^2 + z^2 = r_3^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r_1^2$$

$$(x - u)^2 + y^2 + z^2 = r_2^2$$

$$(x - v)^2 + (y - w)^2 + z^2 = r_3^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r_1^2$$

$$(x - u)^2 + y^2 + z^2 = r_2^2$$

$$(x - v)^2 + (y - w)^2 + z^2 = r_3^2$$

Odečtením 2. rovnice od první a snadnou úpravou dostaneme

$$x = \frac{1}{2u}(r_1^2 - r_2^2 + u^2),$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r_1^2$$

$$(x - u)^2 + y^2 + z^2 = r_2^2$$

$$(x - v)^2 + (y - w)^2 + z^2 = r_3^2$$

Odečtením 2. rovnice od první a snadnou úpravou dostaneme

$x = \frac{1}{2u}(r_1^2 - r_2^2 + u^2)$, odkud po dosazení za x do první rovnice dostaneme vztah

$$r_1^2 - \frac{(r_1^2 - r_2^2 + u^2)^2}{4u^2} = y^2 + z^2.$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r_1^2$$

$$(x - u)^2 + y^2 + z^2 = r_2^2$$

$$(x - v)^2 + (y - w)^2 + z^2 = r_3^2$$

Odečtením 2. rovnice od první a snadnou úpravou dostaneme

$x = \frac{1}{2u}(r_1^2 - r_2^2 + u^2)$, odkud po dosazení za x do první rovnice dostaneme vztah

$$r_1^2 - \frac{(r_1^2 - r_2^2 + u^2)^2}{4u^2} = y^2 + z^2.$$

Podmínkou pro řešitelnost (tj. pro to, že se první dvě sféry vůbec protínají) je $2ur_1 \geq r_1^2 - r_2^2 + u^2$,

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 &= r_1^2 \\(x - u)^2 + y^2 + z^2 &= r_2^2 \\(x - v)^2 + (y - w)^2 + z^2 &= r_3^2\end{aligned}$$

Odečtením 2. rovnice od první a snadnou úpravou dostaneme $x = \frac{1}{2u}(r_1^2 - r_2^2 + u^2)$, odkud po dosazení za x do první rovnice dostaneme vztah

$$r_1^2 - \frac{(r_1^2 - r_2^2 + u^2)^2}{4u^2} = y^2 + z^2.$$

Podmínkou pro řešitelnost (tj. pro to, že se první dvě sféry vůbec protínají) je $2ur_1 \geq r_1^2 - r_2^2 + u^2$, neboli $r_2^2 \geq (u - r_1)^2$, či $r_1 + r_2 \geq u \geq r_1 - r_2$ (tuto podmínku lze samozřejmě takřka ihned vidět z obrázku). Při splnění odvozené podmínky již vypočteme i souřadnici y pomocí dosazení do třetí rovnice. Souřadnici z pak lze dopočítat např. jako $z = \pm \sqrt{r_1^2 - x^2 - y^2}$.

Jak ale počítat prakticky odmocniny?

V důsledku je třeba řešit nelineární soustavu rovnic o více neznámých – již jsme ukázali jeden způsob, jakým ji lze převést na postupné řešení rovnic o jedné neznámé. Newton-Raphsonova metoda je iterativní metoda na hledání kořenů reálných funkcí (obecně více proměnných).

Jak ale počítat prakticky odmocniny?

V důsledku je třeba řešit nelineární soustavu rovnic o více neznámých – již jsme ukázali jeden způsob, jakým ji lze převést na postupné řešení rovnic o jedné neznámé. Newton-Raphsonova metoda je iterativní metoda na hledání kořenů reálných funkcí (obecně více proměnných).

Newtonova metoda tečen

S touto metodou přišel Newton kolem roku 1670 a vysvětlil ji na příkladu rovnice (viz též [tato ukázka](#))

$$x^3 - 2x - 5 = 0.$$

Jeden z kořenů je blízko 2, položil tedy $x = 2 + p$ a dosazením do rovnice dostal vztah pro p :

Jak ale počítat prakticky odmocniny?

V důsledku je třeba řešit nelineární soustavu rovnic o více neznámých – již jsme ukázali jeden způsob, jakým ji lze převést na postupné řešení rovnic o jedné neznámé. Newton-Raphsonova metoda je iterativní metoda na hledání kořenů reálných funkcí (obecně více proměnných).

Newtonova metoda tečen

S touto metodou přišel Newton kolem roku 1670 a vysvětlil ji na příkladu rovnice (viz též tato ukázka)

$$x^3 - 2x - 5 = 0.$$

Jeden z kořenů je blízko 2, položil tedy $x = 2 + p$ a dosazením do rovnice dostal vztah pro p :

$$p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0.$$

Jak ale počítat prakticky odmocniny?

V důsledku je třeba řešit nelineární soustavu rovnic o více neznámých – již jsme ukázali jeden způsob, jakým ji lze převést na postupné řešení rovnic o jedné neznámé. Newton-Raphsonova metoda je iterativní metoda na hledání kořenů reálných funkcí (obecně více proměnných).

Newtonova metoda tečen

S touto metodou přišel Newton kolem roku 1670 a vysvětlil ji na příkladu rovnice (viz též tato ukázka)

$$x^3 - 2x - 5 = 0.$$

Jeden z kořenů je blízko 2, položil tedy $x = 2 + p$ a dosazením do rovnice dostal vztah pro p :

$$p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0.$$

Protože je ale p malé, je možné zanedbat členy $p^3, 6p^2$, odkud $p = \frac{1}{10}$. To samozřejmě není přesné řešení, jde ale o další zpřesnění, můžeme nyní psát $x = 2,1 + q$, dostat tak další aproximaci $x = 2,0946$ atd.

Jak ale počítat prakticky odmocniny?

Ukažme zde pro ilustraci použití této metody pro odvození elegantního postupu výpočtu druhé odmocniny (tento postup je znám jako Babylónská metoda či jako Heronův vzorec¹).

¹To samozřejmě neznamená, že Newton měl něco společného s dávnými Babylóňany, jeho metoda je obecnější.

Jak ale počítat prakticky odmocniny?

Ukažme zde pro ilustraci použití této metody pro odvození elegantního postupu výpočtu druhé odmocniny (tento postup je znám jako Babylónská metoda či jako Heronův vzorec¹).

- 1 Mějme dánu diferencovatelnou funkci $f(x)$ a aproximaci jejího kořene x_0 .

¹To samozřejmě neznamená, že Newton měl něco společného s dávnými Babylóňany, jeho metoda je obecnější.

Jak ale počítat prakticky odmocniny?

Ukažme zde pro ilustraci použití této metody pro odvození elegantního postupu výpočtu druhé odmocniny (tento postup je znám jako Babylónská metoda či jako Heronův vzorec¹).

- 1 Mějme dánu diferencovatelnou funkci $f(x)$ a aproximaci jejího kořene x_0 .
- 2 Postupně počítejme další iterace pomocí vztahu $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

¹To samozřejmě neznamená, že Newton měl něco společného s dávnými Babylóňany, jeho metoda je obecnější.

Jak ale počítat prakticky odmocniny?

Ukažme zde pro ilustraci použití této metody pro odvození elegantního postupu výpočtu druhé odmocniny (tento postup je znám jako Babylónská metoda či jako Heronův vzorec¹).

- 1 Mějme dánu diferencovatelnou funkci $f(x)$ a aproximaci jejího kořene x_0 .
- 2 Postupně počítejme další iterace pomocí vztahu $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

¹To samozřejmě neznamená, že Newton měl něco společného s dávnými Babylóňany, jeho metoda je obecnější.

Jak ale počítat prakticky odmocniny?

Ukažme zde pro ilustraci použití této metody pro odvození elegantního postupu výpočtu druhé odmocniny (tento postup je znám jako Babylónská metoda či jako Heronův vzorec¹).

- 1 Mějme dánu diferencovatelnou funkci $f(x)$ a aproximaci jejího kořene x_0 .
- 2 Postupně počítejme další iterace pomocí vztahu $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

Pro výpočet druhé odmocniny z a (tj. hledání kořene funkce $f(x) = x^2 - a$) tak dostáváme iterační postup $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$.

¹To samozřejmě neznamená, že Newton měl něco společného s dávnými Babylóňany, jeho metoda je obecnější.

Jak ale počítat prakticky odmocniny?

Ukažme zde pro ilustraci použití této metody pro odvození elegantního postupu výpočtu druhé odmocniny (tento postup je znám jako Babylónská metoda či jako Heronův vzorec¹).

- 1 Mějme dánu diferencovatelnou funkci $f(x)$ a aproximaci jejího kořene x_0 .
- 2 Postupně počítejme další iterace pomocí vztahu $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

Pro výpočet druhé odmocniny z a (tj. hledání kořene funkce $f(x) = x^2 - a$) tak dostáváme iterační postup $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$.

Tato metoda se dá analogicky použít při optimalizaci, kde místo kořene hledáme řešení rovnice $f'(x) = 0$.

¹To samozřejmě neznamená, že Newton měl něco společného s dávnými Babylóňany, jeho metoda je obecnější.

Příklad

Vypočtěme $\sqrt{12}$ s $x_0 = 3$: $x_1 = \frac{3+4}{2}$, $x_2 = \frac{7/2+24/7}{2} = 97/28 \approx 3,46429$,
přitom $\sqrt{12} \approx 3,46410$.

Příklad

Vypočtěme $\sqrt{12}$ s $x_0 = 3$: $x_1 = \frac{3+4}{2}$, $x_2 = \frac{7/2+24/7}{2} = 97/28 \approx 3,46429$,
přitom $\sqrt{12} \approx 3,46410$.

Analýza efektivity Newtonovy metody

Pomocí Taylorovy věty lze v nějakém okolí x_n psát

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{1}{2!}f''(\alpha)(x - x_n)^2,$$

kde α je mezi x_n a x .

Příklad

Vypočtěme $\sqrt{12}$ s $x_0 = 3$: $x_1 = \frac{3+4}{2}$, $x_2 = \frac{7/2+24/7}{2} = 97/28 \approx 3,46429$,
přitom $\sqrt{12} \approx 3,46410$.

Analýza efektivity Newtonovy metody

Pomocí Taylorovy věty lze v nějakém okolí x_n psát

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{1}{2!}f''(\alpha)(x - x_n)^2,$$

kde α je mezi x_n a x . Protože hledáme x splňující $f(x) = 0$, lze po vydělení $f'(x_n)$ vztah upravit na

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + (x - x_n) = -\frac{f''(\alpha)}{2f'(x_n)}(x - x_n)^2,$$

a tedy

$$x - x_{n+1} = -\frac{f''(\alpha)}{2f'(x_n)}(x - x_n)^2.$$

Efektivnost odmocňování

V našem konkrétním případě funkce $f(x) = x^2 - a$ tak dostáváme ($f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$)

$$x - x_{n+1} = -\frac{2}{4x_n}(x - x_n)^2$$

a je tedy vidět, že chyba $|x - x_n|$ se pro vhodná x (obvykle) rychle zmenšuje.

Efektivnost odmocňování

V našem konkrétním případě funkce $f(x) = x^2 - a$ tak dostáváme ($f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$)

$$x - x_{n+1} = -\frac{2}{4x_n}(x - x_n)^2$$

a je tedy vidět, že chyba $|x - x_n|$ se pro vhodná x (obvykle) rychle zmenšuje.

Příklad

Příkladem funkce, jejíž kořen tato metoda nenajde, ani když začneme sebeblíže, je $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Zde totiž dostaneme

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^{1/3}}{\frac{1}{3}x_n^{-2/3}} = -2x_n.$$

Zobecnění na případ více proměnných

Zobecnění na (např.) k rovnic o k neznámých je relativně přímočaré:

$$x_{n+1} = x_n - J_F(x_n)^{-1} \cdot F(x_n),$$

kde J_F je Jacobián zobrazení F . Výpočet jeho inverze je ale časově velmi náročná operace, proto se často místo toho využívá

- řešení příslušné soustavy lineárních rovnic,
- výpočet zobecněné inverze, při více než k rovnicích metoda nejmenších čtverců
- metoda sdružených gradientů pro řešení příslušné soustavy,
- různých tzv. *kvazi-newtonovských* metod, využívajících pouze přibližného Hessiánu (např. BFGS) – viz např.

<http://demonstrations.wolfram.com/MinimizingTheRosenbrockFunction/>.

Fyzika a praxe nám to trochu (no ... dost) zkomplikuje

Do ideálního stavu ukázaného dříve se nám ale vloudí více či méně závažné chyby:

- 1 Satelity disponují vysoce přesnými atomovými hodinami, to ale naše kapesní GPSka neumí (stála by řádově milióny).

Fyzika a praxe nám to trochu (no ... dost) zkomplikuje

Do ideálního stavu ukázaného dříve se nám ale vloudí více či méně závažné chyby:

- 1 Satelity disponují vysoce přesnými atomovými hodinami, to ale naše kapesní GPSka neumí (stála by řádově milióny).
- 2 Šíří se signál skutečně rychlostí světla i při průchodu ionosférou?

Fyzika a praxe nám to trochu (no ... dost) zkomplikuje

Do ideálního stavu ukázaného dříve se nám ale vloudí více či méně závažné chyby:

- 1 Satelity disponují vysoce přesnými atomovými hodinami, to ale naše kapesní GPSka neumí (stála by řádově milióny).
- 2 Šíří se signál skutečně rychlostí světla i při průchodu ionosférou?
- 3 Signál se odráží od různých terénních překážek, budov apod.

Fyzika a praxe nám to trochu (no ... dost) zkomplikuje

Do ideálního stavu ukázaného dříve se nám ale vloudí více či méně závažné chyby:

- 1 Satelity disponují vysoce přesnými atomovými hodinami, to ale naše kapesní GPSka neumí (stála by řádově milióny).
- 2 Šíří se signál skutečně rychlostí světla i při průchodu ionosférou?
- 3 Signál se odráží od různých terénních překážek, budov apod.
- 4 Do hry velmi zásadně vstupuje i speciální a obecná teorie relativity.

Fyzika a praxe nám to trochu (no ... dost) zkomplikuje

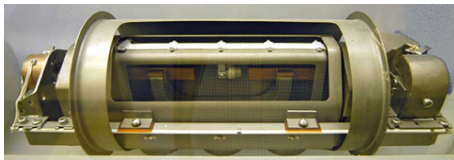
Do ideálního stavu ukázaného dříve se nám ale vloudí více či méně závažné chyby:

- 1 Satelity disponují vysoce přesnými atomovými hodinami, to ale naše kapesní GPSka neumí (stála by řádově milióny).
- 2 Šíří se signál skutečně rychlostí světla i při průchodu ionosférou?
- 3 Signál se odráží od různých terénních překážek, budov apod.
- 4 Do hry velmi zásadně vstupuje i speciální a obecná teorie relativity.

Fyzika a praxe nám to trochu (no ... dost) zkomplikuje

Do ideálního stavu ukázaného dříve se nám ale vloudí více či méně závažné chyby:

- 1 Satelity disponují vysoce přesnými atomovými hodinami, to ale naše kapesní GPSka neumí (stála by řádově milióny).
- 2 Šíří se signál skutečně rychlostí světla i při průchodu ionosférou?
- 3 Signál se odráží od různých terénních překážek, budov apod.
- 4 Do hry velmi zásadně vstupuje i speciální a obecná teorie relativity.



*Sekunda je podle soustavy SI definována jako doba trvání 9 192 631 770 period záření, odpovídající přechodu mezi dvěma hladinami velmi jemné struktury základního stavu atomu ^{133}Cs .
[Wiki]*

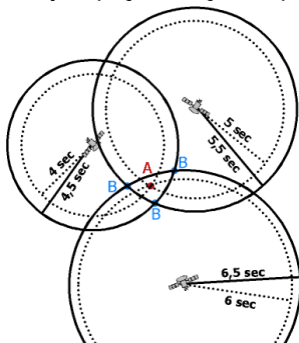
Zdroje chyb GPS

Error Source	Typical or Maximum Error
Ionosphere	10 Meters
Troposphere	1 Meter
Satellite Clock Synchronization	1 Meter
Electronic Noise	2 Meters
Multipath Error	0.5 Meters
Satellite Position (Ephemeris)	1 Meter
<u>Intentional Degradation</u>	0 Meters
Net RMS error	10 Meters
Typical Geometric Error (GDOP)	4
Final RMS error (Net \times GDOP)	40 meters
Actual Typical Error	10 meters

Zdroj: <http://www.pdhcenter.com/courses/l116/l116content.htm>

Jak se vyrovnat s chybami – hodiny v přijímači

S nepřesností levných hodin v GPS přijímači se vyrovnáme poměrně snadno – k tomu nám slouží právě čtvrtý (a případně další) satelit, který jsme dosud ve výpočtech nepoužili. V praxi tak dostáváme čtyři nebo více rovnic o čtyřech neznámých ($x, y, z, error$). Na obrázku je pro zjednodušení ukázán 2D případ, kde hodiny v přijímači jsou zpožděny o 0,5 s.



Jak se vyrovnat s chybami – hodiny v přijímači

Pokud je vidět více než čtyři satelity, máme tzv. přeúčtený systém rovnic a do hry vstupuje možnost *vybrat si* z několika možností tu nejlepší – v takovém případě se poloha aproximuje pomocí metody nejmenších čtverců.

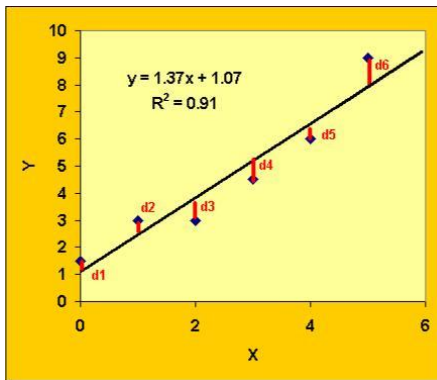
Metoda slouží k rekonstrukci funkce f z hodnot f_0, \dots, f_n naměřených v uzlových bodech a_0, \dots, a_n . Tuto rekonstrukci hledáme vzhledem k danému modelu – dané posloupnosti funkcí (obecně více proměnných) $g_0(x), \dots, g_m(x), \dots$ – ve tvaru

$$y_m(x) = \sum_{j=0}^m c_j g_j(x).$$

Cílem je při tom minimalizovat *součet čtverců*

$$\sum_{i=0}^n (f_i - y_m(a_i))^2.$$

Aproximace metodou nejmenších čtverců



Ukažme si použití této metody v nejjednodušším případě, kdy máme dáno n bodů $([x_1, y_1], \dots, [x_n, y_n])$ a hledáme přímku, která nejlépe *vystihuje* rozložení těchto bodů.

Ukažme si použití této metody v nejjednodušším případě, kdy máme dáno n bodů $([x_1, y_1], \dots, [x_n, y_n])$ a hledáme přímku, která nejlépe *vystihuje* rozložení těchto bodů.

Hledáme tedy funkci tvaru $f(x) = a \cdot x + b$ s neznámými $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby hodnota

$$\sum_{i=1}^n (f(x_i) - y_i)^2$$

byla minimální.

Ukažme si použití této metody v nejjednodušším případě, kdy máme dáno n bodů $([x_1, y_1], \dots, [x_n, y_n])$ a hledáme přímku, která nejlépe *vystihuje* rozložení těchto bodů.

Hledáme tedy funkci tvaru $f(x) = a \cdot x + b$ s neznámými $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby hodnota

$$\sum_{i=1}^n (f(x_i) - y_i)^2$$

byla minimální. S využitím diferenciálního počtu lze snadno odvodit následující tvrzení.

Věta

Mezi přímkami tvaru $f(x) = a \cdot x + b$ má nejmenší součet čtverců vzdáleností funkčních hodnot v bodech x_1, \dots, x_n od hodnot y_i funkce splňující

$$\begin{aligned} a \sum x_i^2 + b \sum x_i &= \sum x_i y_i \\ a \sum x_i + b \cdot n &= \sum y_i \end{aligned}$$

Metoda nejmenších čtverců – příklad

Příklad

Metodou nejmenších čtverců určete *regresní přímku* odpovídající

naměřeným datům:

x	1	2	3	4
y	1,5	1,6	2,1	3,0

Metoda nejmenších čtverců – příklad

Příklad

Metodou nejmenších čtverců určete *regresní přímku* odpovídající naměřeným datům:

x	1	2	3	4
y	1,5	1,6	2,1	3,0

Řešení

Data je vhodné seřadit v tabulce podle schématu:

x	y	xy	x ²
1	1,5	1,5	1
2	1,6	3,2	4
3	2,1	6,3	9
4	3	12	16
10	8,2	23	30

Metoda nejmenších čtverců – příklad

Příklad

Metodou nejmenších čtverců určete *regresní přímku* odpovídající naměřeným datům:

x	1	2	3	4
y	1,5	1,6	2,1	3,0

Řešení

Data je vhodné seřadit v tabulce podle schématu:

x	y	xy	x ²
1	1,5	1,5	1
2	1,6	3,2	4
3	2,1	6,3	9
4	3	12	16
10	8,2	23	30

Odtud $30a + 10b = 23$, $10a + 4b = 8,2$, a tedy $a = 0,5$, $b = 0,8$.

Jak se vyrovnat s chybami – teorie relativity

GPS ukazuje jeden z nejpraktičtějších důsledků teorie relativity – pokud bychom ji nevzali v potaz, bude metoda GPS prakticky nepoužitelná.

Jak se vyrovnat s chybami – teorie relativity

GPS ukazuje jeden z nejpraktičtějších důsledků teorie relativity – pokud bychom ji nevzali v potaz, bude metoda GPS prakticky nepoužitelná. Atomové hodiny pracují s přesností na nanosekundy ($ns = 10^{-9} s$), abychom byli schopni zaručit přesnost zjištění pozice na cca 10 m, je třeba umět určit přesnost času vysílače s přesností cca 30 ns. Přitom se satelity vzhledem k Zemi pohybují rychlostí cca 14 000 km/h.

Jak se vyrovnat s chybami – teorie relativity

GPS ukazuje jeden z nejpraktičtějších důsledků teorie relativity – pokud bychom ji nevzali v potaz, bude metoda GPS prakticky nepoužitelná. Atomové hodiny pracují s přesností na nanosekundy ($ns = 10^{-9}$ s), abychom byli schopni zaručit přesnost zjištění pozice na cca 10 m, je třeba umět určit přesnost času vysílače s přesností cca 30 ns. Přitom se satelity vzhledem k Zemi pohybují rychlostí cca 14 000 km/h.

- Do hry tak vstupuje speciální teorie relativity, neboť přijímač a vysílač jsou vůči sobě v pohybu, dochází ke zpomalení hodin vysílače oproti pozorovateli (*dilatace času*) o $\frac{v^2}{2c^2} \approx \frac{4^2}{2 \cdot (3 \cdot 10^5)^2} \approx 10^{-10}$, tj. asi o $7,7 \mu s/\text{den}$.

Jak se vyrovnat s chybami – teorie relativity

GPS ukazuje jeden z nejpraktičtějších důsledků teorie relativity – pokud bychom ji nevzali v potaz, bude metoda GPS prakticky nepoužitelná. Atomové hodiny pracují s přesností na nanosekundy ($ns = 10^{-9}$ s), abychom byli schopni zaručit přesnost zjištění pozice na cca 10 m, je třeba umět určit přesnost času vysílače s přesností cca 30 ns. Přitom se satelity vzhledem k Zemi pohybují rychlostí cca 14 000 km/h.

- Do hry tak vstupuje speciální teorie relativity, neboť přijímač a vysílač jsou vůči sobě v pohybu, dochází ke zpomalení hodin vysílače oproti pozorovateli (*dilatace času*) o $\frac{v^2}{2c^2} \approx \frac{4^2}{2 \cdot (3 \cdot 10^5)^2} \approx 10^{-10}$, tj. asi o $7,7 \mu s$ /den.
- Další ještě významnější efekt představuje obecná teorie relativity, která implikuje, že hodiny poblíž masivního objektu (Země) jdou pomaleji než hodiny vzdálenější (díky většímu zakřivení prostoročasu). Z povrchu Země vidíme tedy satelitní hodiny jdoucí rychleji než tytéž hodiny umístěné na Zemi o cca $45 \mu s$ za den.

- Nezapočítáním teorie relativity bychom tak dostali chybu v řádu $38\mu\text{s}$ za den, což v důsledku znamená cca 10km chybu v určení pozice.

- Nezapočítáním teorie relativity bychom tak dostali chybu v řádu $38\mu\text{s}$ za den, což v důsledku znamená cca 10km chybu v určení pozice.
- Tato chyba je opravena umělým zpomalením atomových hodin umístěných v satelitech oproti hodinám na Zemi (10,22999999543 MHz oproti 10,23 MHz).

Jedno z mnoha možných vylepšení je založeno na myšlence, že relativně blízké přijímače podléhají analogickým atmosférickým chybám. Díky pevným stanicím – např. world DGPS database,

Jedno z mnoha možných vylepšení je založeno na myšlence, že relativně blízké přijímače podléhají analogickým atmosférickým chybám. Díky pevným stanicím – např. world DGPS database, U.S. Coast Guard NavCen,

Jedno z mnoha možných vylepšení je založeno na myšlence, že relativně blízké přijímače podléhají analogickým atmosférickým chybám. Díky pevným stanicím – např. world DGPS database, U.S. Coast Guard NavCen, CZEPOS (VUT/TUBO)

Jedno z mnoha možných vylepšení je založeno na myšlence, že relativně blízké přijímače podléhají analogickým atmosférickým chybám. Díky pevným stanicím – např. world DGPS database, U.S. Coast Guard NavCen, CZEPOS (VUT/TUBO) – u nichž je s vysokou přesností známa poloha a které vysílají rozdíl mezi touto polohou a polohou vypočtenou na základě informací ze satelitů, je možné u špičových DGPS přístrojů dosáhnout přesnosti v řádu centimetrů.

Příklad

V tabulce jsou uvedena skutečná data z několika satelitů – geocentrické souřadnice jsou uvedeny v metrech, čas přenosu signálu v nanosekundách. Vaším úkolem je s využitím vhodného SW (např. OpenOffice Calc, vhodný programovací jazyk, apod.) určit:

- 1 geocentrické souřadnice místa pozorovatele,
- 2 popsat skutečné místo na Zemi, kde se pozorovatel nacházel (?!).

Příklad

V tabulce jsou uvedena skutečná data z několika satelitů – geocentrické souřadnice jsou uvedeny v metrech, čas přenosu signálu v nanosekundách. Vaším úkolem je s využitím vhodného SW (např. OpenOffice Calc, vhodný programovací jazyk, apod.) určit:

- 1 geocentrické souřadnice místa pozorovatele,
- 2 popsat skutečné místo na Zemi, kde se pozorovatel nacházel (?!).

Č. sat.	x [m]	y [m]	z [m]	dt [ns]
1	14177553.47	-18814768.09	12243866.38	70446329.64
2	15097199.81	-4636088.67	21326706.55	75142197.81
3	23460342.33	-9433518.58	8174941.25	78968497.2
4	-8206488.95	-18217989.14	17605231.99	69887173.01
5	1399988.07	-17563734.90	19705591.18	67231182.38
6	6995655.48	-23537808.26	-9927906.48	80796265.09

- **Wikipedia**, The Free Encyclopedia, www.wikipedia.org.
- Neil Ashby, **Relativity and the Global Positioning System**. *Physics Today*, May 2002.

- **Wikipedia**, The Free Encyclopedia, www.wikipedia.org.
- Neil Ashby, **Relativity and the Global Positioning System**. *Physics Today*, May 2002.

Děkuji za pozornost!