Hry, sázky a střední hodnota

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Přírodovědecká fakulta
Ústav matematiky a statistiky

14. května 2015

Obsah přednášky

1. Střední hodnota
   - Očekávaný výnos a doba čekání na úspěch
   - Volby jsou taky hra
2. Neintuitivní pravděpodobnostní a statistické důsledky
   - Simpsonův paradox
   - Praktické důsledky podmíněné pravděpodobnosti
   - Trochu odlehčení na závěr ...

Očekávaný výnos

Z matematických pojmů budeme používat zejména pojem *očekávaný výnos* (střední hodnota) náhodné veličiny, který je definován jako součet příslušných výnosů vynásobených pravděpodobností jejich výskytu[1], tj. v případě diskrétní veličiny s konečně mnoha hodnotami

$$E(X) = p_1 \cdot v_1 + \cdots p_n \cdot v_n.$$

Např. střední hodnota padlého čísla při hodu šestibokou kostkou je $\frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 6 = 3{,}5$.

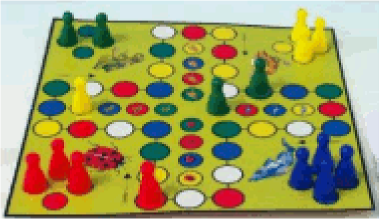
[1] Vážený čtenář tuší, že jsme zde značně neformální, korektní matematická definice střední hodnoty náhodné veličiny by vyžadovala jistou přípravu, my se však v rámci konceptu přednášky budeme snažit formálnostem vyhýbat.

Předpokládané (očekávané) čekání

Ilustrujme pojem střední hodnoty (v tomto případě *předpokládaného čekání*) na příkladu, který každý z nás zná ze hry *Člověče, nezlob se.*

Příklad

Jaká je průměrná doba čekání na to, že při hodech kostkou padne číslo 6?



Řešení

Se znalostí teorie pravděpodobnosti samozřejmě můžeme konstatovat, že jde o klasický příklad diskrétní náhodné veličiny X s tzv. geometrickým rozdělením, určeným pravděpodobnostní funkcí

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1} \cdot p,$$

kde p je pravděpodobnost úspěchu, tedy v našem případě $p = \frac{1}{6}$. Tato náhodná veličina má základní momenty $E(X) = \frac{1}{p}, D(X) = \frac{1-p}{p^2}$.

Řešení (pokr.)

Úloha se tedy dá snadno vyřešit se znalostí teorie pravděpodobnosti, my to ale zvládneme i bez toho. Nechť je pravděpodobnost úspěchu p, jaký je očekávaný počet opakování pokusu, než se úspěch dostaví?

- Úspěch nastane při 1. pokusu – pravděpodobnost p
- Úspěch nastane při 2. pokusu – pravděpodobnost $(1-p)p$
- Úspěch nastane při 3. pokusu – pravděpodobnost $(1-p)^2p$
- ...
- Úspěch nastane při n-tém pokusu – pravděpodobnost $(1-p)^{n-1}p$

Celkem je očekávaný počet pokusů roven

$$1\cdot p + 2\cdot(1-p)p + 3\cdot(1-p)^2p + \cdots + n\cdot(1-p)^np + \cdots .$$

Jde o součet nekonečné řady, který lze vypočítat s využitím geometrických řad[a] – součet je roven $1/p$.

[a] http://en.wikipedia.org/wiki/Wheat_and_chessboard_problem

Kolik bude stát sběr kartiček?

Příklad

Marek sbírá kartičky hokejistů NHL. Jeho cílem je mít všech 100 kartiček a zajímá ho (tedy asi spíše rodiče, kteří to platí ☺), kolik krabiček, do kterých jsou kartičky náhodně po jedné umisťovány, v průměru potřebuje, aby získal všech 100 kartiček.

Řešení

První karta je jistě nová, druhá karta bude nová s pravděpodobností 99/100, takže délka očekávaného čekání na druhou kartu je 100/99 krabiček. Podobně třetí karta atd. Na zisk sté kartičky bude v průměru čekat 100/1 krabiček.
Celkem je očekávaná doba čekání na všechny kartičky rovna

$$100\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{99}+\cdots+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}\right)\approx 518{,}7.$$

Řada v závorce je tzv. harmonická řada, o níž je znám poměrně překvapivý fakt: sčítáme-li čísla $1/n$ dostatečně dlouho, překročíme libovolně velkou předem zvolenou mez. Součet prvních n členů harmonické řady se dá dobře odhadnout jako $\ln n+\gamma$, kde $\gamma\approx 0{,}57721$ je tzv. Eulerova konstanta.
V našem případě dá tato aproximace výsledek $100(\ln 100+\gamma)\approx 518{,}2$.

Ruleta

Podívejme se teď na hazardní hry a sázky.
Ruleta je známá hra, kde se sází na čísla 1 až 36 a jejich různé kombinace. Aby měl provozovatel zisk, je dále na hrací ploše číslo 0 (a v americké verzi ještě 00).

S pomocí teorie pravděpodobnosti snadno spočítáme očekávaný výnos při sázce 100 Kč na jedno číslo (v takovém případě vyhráváme 35-tinásobek vkladu):

$$-100\frac{36}{37} + 35 \cdot 100\frac{1}{37} = -2{,}70\text{Kč},$$

resp. $-5{,}26$ Kč v americké variantě. Budeme-li sázet na červenou, je pravděpodobnost výhry $\frac{18}{37}$, tj. očekávaný výnos činí $-100\frac{19}{37} + 1 \cdot 100\frac{18}{37} = -2{,}70$ Kč. Stejné je to i při všech ostatních variantách sázek. Všimněte si, že výplaty a sázky v ruletě jsou konstruovány tak, že je úplně jedno na co se sází, očekávaný výnos je vždy stejný, totiž $-\frac{1}{37}$ vkladu (v americké variantě pak $-\frac{2}{38}$ vkladu).

Šťastných 10

Šťastných 10 je sázková hra, kterou provozuje Sazka, a.s., a v níž se tipuje 1 až 10 čísel z 80. V losování je taženo 20 čísel. Hra obsahuje mnoho variant výhry při uhodnutí různého počtu čísel a „dokonce“ cenu útěchy při tipování alespoň 6 čísel a neuhodnutí žádného. Vypočtěme si alespoň průměrný výnos z jedné vsazené stokoruny:

- při sázce na jedno číslo (při uhodnutí dostaneme dvojnásobek vkladu)
- při sázce na pět čísel (3: 2x; 4: 16x; 5: 200x)
- při sázce na deset čísel (0: 1x; 5: 3x; 6: 10x; 7: 20x; 8: 500x; 9: 10000x; 10: 200000x)

Jaká je pravděpodobnost výhry?

Hledanou pravděpodobnost vyjádříme jako podíl počtu úspěšných jevů ku počtu všech možných. Sázíme-li ℓ čísel, jaká je pravděpodobnost, že uhodneme h z nich?

Všech možných vsazených ℓ-tic je $\binom{80}{\ell}$, vyhrávajících [2] pak $\binom{20}{h}\binom{60}{\ell-h}$. Pro jednotlivé zkoumané možnosti tak dostáváme průměrné výnosy[3]

- $100\frac{1}{4} - 100\frac{3}{4} = -50$ Kč
- $100(200 \cdot 6,4 \cdot 10^{-4} + 16 \cdot 1,2 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 8,4 \cdot 10^{-2} - 1) \approx -51$ Kč
- $-50{,}15$ Kč (i s cenou útěchy, jejíž pravděpodobnost je $\binom{60}{10}/\binom{80}{10} \approx 4,6\%$)

Závěr matematika: chcete-li opravdu hrát hazardní hry, bude pro vaši kapsu lepší, půjdete-li (i do amerického) kasina než do Sazky na „Šťastných 10“.

[2] Též takto: $\binom{\ell}{h} \cdot \binom{80-\ell}{20-h}/\binom{80}{20}$.

[3] Podrobněji ve worksheetu na `http://www.math.muni.cz/~bulik/ostatni/stastnych10.xls`.

Jak tedy vyhrát?

Letmý pohled na internet nám přitom nabídne hned několik zaručených tipů, jak sázet v různých hrách a neprohrát. Např. v ruletě sázíme na barvu nebo ve hře Šťastných 10 na jedno číslo (dokud nevyhrajeme) vždy dvojnásobek předchozí sázky (strategie známá jako *Martingale betting strategy)*. Viz např. návod již z roku 1882 (František Bačkovský pod pseudonymem Vlastimil Benátský, *Jak sázeti do loterie, bychom zcela jistě vyhráli*[4]).

Návody jsou to v podstatě korektní až na předpoklad, že dotyčný má k dispozici neomezený zdroj peněz na sázky a s tím, že výnos ze sázení je i v takovém případě zanedbatelný vzhledem k množství peněz, které musíme mít k dispozici a je tedy třeba k výdělku odehrát větší množství her.

[4] `http://goo.gl/qLn9S`

Analýza Martingale strategie

Příklad

Řekněme, že máte k dispozici 50 000 Kč na sázky začínající na 1 Kč a uplatňujete uvedenou strategii (sázíme přitom na barvu). Nazvěme jedním **kolem** několik proher zakončených výhrou (příp. sérii proher zakončených bankrotem). Na závěr úspěšného kola vždy vyděláme 1 Kč. Jaká je střední hodnota výhry? Zbankrotujeme, pokud součet sázek

$$1 + 2 + 2^2 \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

překročí náš rozpočet, tj. pokud $n \geq 16$. Pravděpodobnost bankrotu (16 proher v řadě) je (v evropské verzi rulety) $(19/37)^{16} \approx 0{,}002\%$ (tedy mizivá), pravděpodobnost výhry 1 Kč je zbytek do 100%. Střední hodnota výhry za jedno kole je pak

$$(19/37)^{16} \cdot (-50\,000) + (1 - (19/37)^{16}) \cdot 1 \approx -0{,}17.$$

(Psychologické) kouzlo úspěchu těchto her je samozřejmě v tom, že prohra 100 Kč bolí méně než těší výhra 3500 Kč. Internet je plný zpráv těch, kdo touto strategií nějaké ty koruny vyhráli, těch, kteří podstatně větší peníze prohráli je jednak méně a jednak se tím zřejmě nechlubí (a nebo už nemají připojení k Internetu).

Příklad

Podívejme se na tuto strategii ještě jedním pohledem – jakou máme šanci, že jejím prostřednictvím zdvojnásobíme svůj kapitál dříve než zbankrotujeme?

Ke zdvojnásobení kapitálu je při nastavených podmínkách třeba odehrát 50 000 úspěšných kol[a]. Už jsme spočítali, že pravděpodobnost bankrotu během jednoho kola je mizivých $p_b = (19/37)^{16} \approx 0{,}002\%$, tedy pravděpodobnost, že v každém z 50 000 kol vyhrajeme 1 Kč, je $(1 - p_b)^{50\,000}$, což je pouhých cca 31%.

Máme tedy výrazně vyšší šanci, že o svůj vklad přijdeme, než že ho zdvojnásobíme (a to i při předpokladu „férovosti“ kasín).

[a] Jakkoliv se tento počet nezdá reálný, v internetových kasínech je běžně dosažitelný.

Sportovní sázky

Na utkání čtvrtfinále MS v hokeji mezi ČR a Finskem jsou u jedné internetové sázkové společnosti následující kurzy: **2,64 na vítězství ČR; 3,8 na remízu a 2,5 na vítězství Finska.**
Předpokládáme-li, že kurzy vypsané sázkovou společností odrážejí pravděpodobnost výskytu daného jevu, pak podle vztahu pro očekávaný výnos dostáváme při sázce 100 Kč na každou z variant

$$264 \cdot \frac{1}{2{,}64} + 380 \cdot \frac{1}{3{,}8} + 250 \cdot \frac{1}{2{,}5} - 300 = 0.$$

Je to tedy skutečně tak, že sázková kancelář s námi čestně hraje hru, v níž vydělává jen díky tomu, že její bookmakeři jsou lepší v tipování výsledku nebo jsme někde udělali chybu?

b) je správně: Chybu jsme udělali v tom, že jsme předpokládali, že kurzy vypsané sázkovou společností odpovídají pravděpodobnostem výskytu daných jevů – protože součet $P = \frac{1}{2{,}64} + \frac{1}{3{,}8} + \frac{1}{2{,}5} \approx 1{,}04$ není roven jedné (žádný jiný jev přitom nastat nemůže a jevy jsou tzv. *vylučující se jevy*), „reálné“ kurzy pro spravedlivou hru tedy dostaneme, když uvedené kurzy vynásobíme číslem P.
Převrácená hodnota P pak zároveň udává, kolik vyhrajeme z každé koruny, rozdíl $1/P - 1 = -0,04$ je tedy hledaná očekávaná hodnota výnosu ze sázení.
Tedy: čím větší je součet převrácených hodnot vylučujících se kurzů, které zároveň popisují všechny možné jevy, tím větší je nevýhoda na straně sázejícího.
Do těchto her by se ale i (sportovně založený) matematik mohl zapojit, pokud je přesvědčen, že jednotlivé pravděpodobnosti jsou stanoveny chybně (tedy, je že chytřejší nebo informovanější než příslušný bookmaker).

Volby jsou taky hra

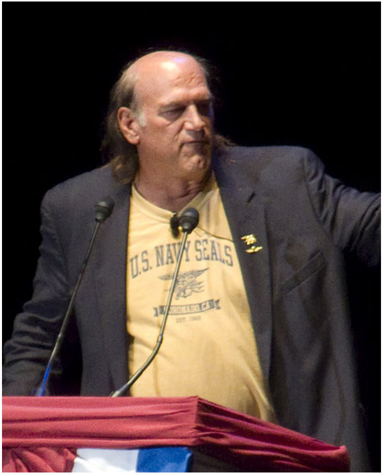
Předpokládejme, že máme 3 voliče (nebo skupiny voličů), kteří se rozhodují mezi 3 kandidáty A,B,C:

- volič 1 preferuje kandidáty v pořadí A, B, C.
- volič 2 preferuje kandidáty v pořadí B, C, A.
- volič 3 preferuje kandidáty v pořadí C, A, B.

Ať je zvolen kterýkoliv kandidát, vždy se najde jiný kandidát, kterého většina voličů upřednostňuje před tímto kandidátem. Tento jev se nazývá **Condorcetův volební paradox**, je způsoben cykličností preferencí jednotlivých voličů a vyskytuje zejména v systémech s alespoň 3 kandidáty/stranami, kdy může kandidát s podporou jen lehce nad 1/3 zvítězit, přestože téměř 2/3 voličů preferují jiného kandidáta.

Condorcetův paradox v praxi

Guvernérem státu Minnesota se v roce 1998 stal bývalý profesionální zápasník wrestlingu (se slovenskými kořeny) *Jesse „The Body" Ventura*.



Politik a zápasník Jesse Ventura

Condorcetův paradox v praxi

Volební preference (podle povolebních průzkumů) kandidátů (kromě Ventury dále demokratický generální prokurátor Skip Humphrey a republikánský starosta města St. Paul Norm Coleman) přitom byly zhruba takové:

Pořadí	35%	28%	20%	17%
1	Col	Hum	Ven	Ven
2	Hum	Col	Col	Hum
3	Ven	Ven	Hum	Col

Díky tomu, že se volilo jednokolovým většinovým systémem, zvítězil Jesse Ventura.

Problematické volební systémy

Uveďme si problematičnost volebních systémů na malém příkladu:
15 lidí se má dohodnout, jaký nápoj se bude servírovat na party. V nabídce jsou *pivo, víno* a *mléko*. Preference účastníků party (bez toho, aby si je dopředu sdělovali) jsou následující:

- 6 z nich má preference v pořadí: mléko, víno, pivo;
- 5 z nich má preference v pořadí: pivo, víno, mléko;
- 4 pak víno, pivo, mléko.

Jakým způsobem se dohodnou na společném nápoji?

Jednokolový většinový systém – každý hlasuje pro 1 variantu, proto vyhraje mléko. Přitom je to ale pro 60% voličů nejhorší varianta!
Dvoukolový většinový systém – dva nápoje s největším počtem hlasů (*mléko* a *pivo*) postupují do druhého kola, kde pivo vyhrává 9:6. Přitom ale celých 10 lidí preferuje víno před pivem ?!

Jak z toho ven?
Bordův protokol – každý volič očísluje kandidáty sestupně podle své preference, rozhodne součet. Vítězem je víno.
Condorcetovo kritérium – vyhraje kandidát, který v hlasování jeden proti jednomu porazí všechny soupeře. Vítězem je opět víno.

Arrowův volební paradox

Kenneth Arrow (1951) klade na volební metody několik přirozených podmínek:

- **neexistence diktátora** – výsledek musí ovlivnit mínění více voličů, ne pouze přebírat preference jednoho z nich
- **univerzalita** – metoda musí brát v potaz preference všech voličů a vyústit v jednoznačné pořadí
- **nezávislost na nepodstatných alternativách** – metoda musí poskytnout stejný výsledek na podmnožině možností (bez ohledu na případné změny preferencí *nepodstatných alternativ*, tj. možností mimo tuto podmnožinu)
- **monotonie** – pokud jednotlivec nově upřednostní nějakou alternativu, metoda nesmí reagovat tak, že ve výsledku tato alternativa dopadne hůře než před touto změnou
- **kolektivní racionalita** – každé možné výsledné pořadí musí být dosažitelné

Poslední 2 podmínky (monotonie a kolektivní racionalita) mohou být nahrazeny tzv. **Paretovou efektivností** – pokud všichni voliči preferují jednoho kandidáta před jiným, musí toto respektovat i výsledek).
Arrow vzápětí dokázal, že **neexistuje** žádná konzistentní metoda, která by spravedlivým způsobem za splnění těchto podmínek určila vítěze mezi alespoň 3 kandidáty.
Všechny volební metody (s výjimkou diktátorství) jsou tedy již z principu nedokonalé, což prokazují mnohé praktické příklady, kdy obětujeme některý jiný přirozený požadavek (často nezávislost na nepodstatných alternativách), abychom se vyhnuli diktátorství.

Jak tedy díky znalosti matematiky opravdu vydělat?

Uvažování hráče nad dominancí jejich strategií můžeme ilustrovat na dalším příkladu:

Příklad

Při hodu mincí (**P**anna, **O**rel) opakovaném 3krát, máme 8 možných jevů, každý se stejnou pravděpodobnosti $\frac{1}{8}$:

$$PPP, PPO, POP, POO, OPP, OPO, OOP, OOO.$$

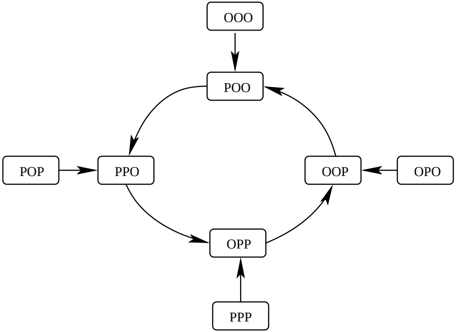
Hru hrají 2 hráči – každý si vybere jednu trojici, pak házeme mincí tak dlouho, až se jedna z těchto trojic objeví. Dotyčný hráč vyhrává.

Kdo si zahraje?

Vysvětlení příkladu

Lze ukázat, že existuje pro druhého hráče strategie výběru tak, že má vždy pravděpodobnost výhry alespoň 2/3.

- Pokud 1. hráč vybral trojici, začínající *xx*, já vyberu *yxx*
- Pokud 1. hráč vybral trojici, začínající *xy*, já vyberu *xxy*



Dokončení příkladu

Ukážeme, že při výběru POP a PPO je pravděpodobnost prvního výskytu trojice PPO rovna $2/3$.
Snadno je vidět, že dokud padá orel, šance obou se nemění. Jakmile padne panna, máme v dalším tahu pravděpodobnost $\frac{1}{2}$, že padne znovu panna a stejnou pravděpodobnost, že padne orel. Pak

- v případě panny s jistotou vyhrává PPO – házeme tak dlouho než padne orel – celkem pravděpodobnost $\frac{1}{2}$,
- v případě orla vyhrává POP pouze tehdy, pokud následně padne panna, v opačném případě jsme znovu na začátku – tj. celkem pro POP $\frac{1}{4}$.

Celkem tedy ve *dvojnásobném počtu případů* vyhrává PPO, tj. pravděpodobnost jeho vítězství je $\frac{2}{3}$.

Dokončení příkladu, 2. část

Podobně snadno zdůvodníme, že pokud 1. hráč vybere např. *PPO*, my budeme mít s volbou *OPP* větší pravděpodobnost úspěchu.

- dokud se v seznamu hodů neobjeví dvojice *PP*, jistě nemohl nikdo zvítězit
- uvažme první výskyt dvojice *PP*:
  1. je-li hned na začátku posloupnosti hodů ($p = \frac{1}{4}$), vyhrává jistě 1. hráč
  2. objeví-li se dvojice *PP* až později, nutně před jejím prvním výskytem musel padnout *O*rel a vítězíme.

Celkem tedy vyhrává *OPP* s pravděpodobností $\frac{3}{4}$.

Simpsonův „paradox“

Uveďme některé situace, kdy se lidská intuice dostává do problémů: Statistický (zdánlivý) paradox, který se poměrně často objevuje i na reálných datech. Nejlépe je asi pochopitelný na (skutečných) příkladech: Klinická studie se zabývala porovnáním úspěšnosti dvou způsobů léčby ledvinových kamenů. Studie zkoumala zvlášť úspěšnost na malých kamenech a velkých kamenech.

	Metoda A	Metoda B
Malé kameny	93% (81/87)	87% (234/270)
Velké kameny	73% (192/263)	69% (55/80)
Celkem	78% (273/350)	83% (289/350)

Ačkoliv je metoda A lepší jak pro malé, tak velké kameny, celkově se ukazuje jako horší. Je to proto, že v testu byla metoda A výrazně častěji použita pro výrazně hůře dopadající *velké kameny*.

Žaloba na University of California, Berkeley

Jeden z nejznámějších příkladů Simpsonova paradoxu pochází z roku 1973, kdy byla UCB zalažována kvůli údajnému evidentnímu znevýhodňování žen v přijímacím řízení, což měla dokládat tabulka:

	Uchazeči	Úspěšnost
Muži	8442	44%
Ženy	4321	35%

Přitom se ukázalo, že jednotlivé katedry spíše mírně zvýhodňovaly ženy:

	Muži		Ženy	
Katedra	Uchazeči	Přijatí	Uchazečky	Přijaté
A	825	62%	108	82%
B	560	63%	25	68%
C	325	37%	593	34%
D	417	33%	375	35%
E	191	28%	393	24%
F	272	6%	341	7%

Sportovní příklad

Nad tímto jevem se občas z neznalosti podivují i sportovní komentátoři. Objevil se například v této statistice úspěšnosti baseballových odpalů:

	1995		1996		1997	
Derek Jeter	12/48	.250	183/582	.314	190/654	.291
David Justice	104/411	**.253**	45/140	**.321**	163/495	**.329**

Celkem ale Derek Jeter dosáhl skóre 385/1284, tj. 30% úspěšnosti, kdežto David Justice 312/1046, tj. 29,8%. [5]

[5] Nebylo mu to ale nic platné, každý rok byl Justice prohlášen za lepšího.

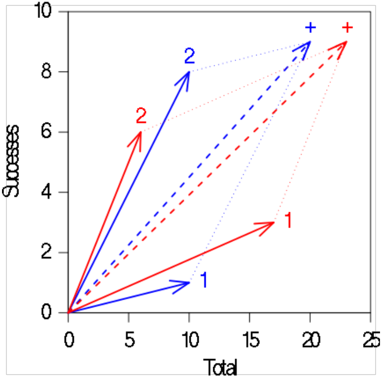
Podobný efekt mívá např. srovnávání úspěšnosti středních škol při přijímacích zkouškách na vysoké školy (Absolventi třídy A dopadli při přijímačkách na každý obor lépe než absolventi třídy B, protože se ale výrazně víc hlásili na obory s menší úspěšností, celkové procento úspěšnosti třídy A bylo nižší).
Vždy je proto třeba pečlivě uvážit, jestli učiněné závěry opravdu odpovídají naměřeným datům nebo jde o jednu z mnoha méně či více „přiohnutých" statistik a jejich interpretací.

Asi zbytečný náznak zdůvodnění

$$\frac{3}{17} > \frac{1}{10}$$

$$\frac{6}{6} > \frac{8}{10}$$

$$\frac{9}{23} < \frac{9}{20}$$



Triple test a jeho výsledky

Triple test je vyšetření krevního séra na hodnoty choriogonadotropinu, estriolu a alfa-fetoproteinu. Provádí se v druhém trimestru těhotenství a má sloužit k detekci rizik genetických poruch a poruch vývoje nervové trubice.
Detekuje poruchy s úspěšností **70%** a naopak **5%** zdravých případů rozpozná jako porušené. Budoucím matkám, u kterých triple test ukáže zvýšené riziko vad plodu, je obvykle doporučeno nějaké další zpřesňující vyšetření, například amniocentéza (odběr plodové vody). Uvádí se, že u těhotné ženy ve věku 20–24 let je pravděpodobnost narození dítěte s Downovým syndromem cca **1:1500**, u těhotné ženy ve věku 35–39 let je pravděpodobnost narození dítěte s Downovým syndromem cca **1:200**.
Prozkoumejme (alespoň z matematického hlediska) význam provádění tohoto testu za uvedených předpokladů, kdy se rodí cca 100 tis. dětí ročně, z toho cca 10% ženám ve věku 35–39 let a cca 12% ženám ve věku 20-24 let.

Specifičnost a senzitivita (citlivost) testu

	Pozitivní skutečnost	Negativní skutečnost
Test pozitivní	True positive	**False positive**
Test negativní	**False negative**	True negative
	Senzitivita	Specifičnost

Triple test	Pozitivní skutečnost	Negativní skutečnost
Test pozitivní	70%	5%
Test negativní	30%	95%
	Senzitivita	Specifičnost

Za dříve uvedených předpokladů snadno vypočteme, že pravděpodobnost, že dítě „starší“ matky bude skutečně postiženo Downovým syndromem, pokud vyšel pozitivní test, je pouhých cca 6,6%. U mladých žen se pak tato pravděpodobnost pohybuje kolem 0,9% a je tedy na zváženou, zda toto plošné testování v dané věkové skupině provádět, pokud navíc uváděné riziko potratu při případné amniocentéze se rovněž pohybuje kolem jednoho promile.

Výpočet

Uvažujme (hypotetický) vzorek deseti tisíc žen ve věku 35–39 let:

Starší ženy	Pozitivní skutečnost	Negativní skutečnost	
Test pozitivní	35	497,5	532,5
Test negativní	15	9452,5	9467,5
	50	9950	

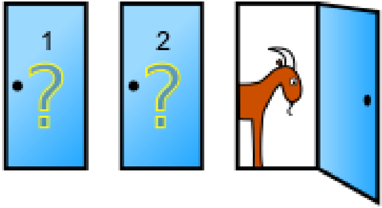
Proto lze pravděpodobnost, že dítě „starší“ matky bude skutečně postiženo Downovým syndromem, pokud vyšel pozitivní test, spočítat jako $\frac{35}{532{,}5} \approx 6{,}6\%$. A pro 12 tis. žen ve věku 20–24 let dostaneme:

Mladší ženy	Pozitivní skutečnost	Negativní skutečnost	
Test pozitivní	5,6	599,6	605,2
Test negativní	2,4	11392,4	11394,8
	8	11992	

Pravděpodobnost, že dítě „mladší“ matky bude skutečně postiženo Downovým syndromem, pokud vyšel pozitivní test, lze nyní spočítat jako $\frac{5{,}6}{605{,}2} \approx 0{,}9\%$.

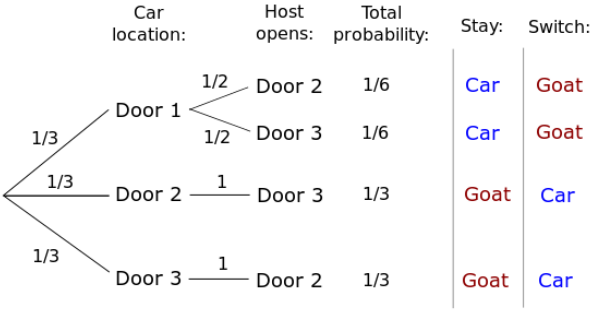
Troje dveře – Monty Hall problem

Moderátor TV soutěže (*Let's make a deal*, Monty Hall) umístil soutěžní cenu – auto – za jedny ze tří dveří. Za každými ze zbývajících dveří je cena útěchy – koza. Úkolem soutěžícího je zvolit si jedny dveře. Řekněme, že zvolí dveře č.1. Poté moderátor otevře jedny ze dvou zbývajících dveří a ukáže, že za nimi je koza. Dá soutěžícímu možnost buď ponechat svou původní volbu, anebo svoji volbu změnit na zbývající dveře.



Stručné zdůvodnění

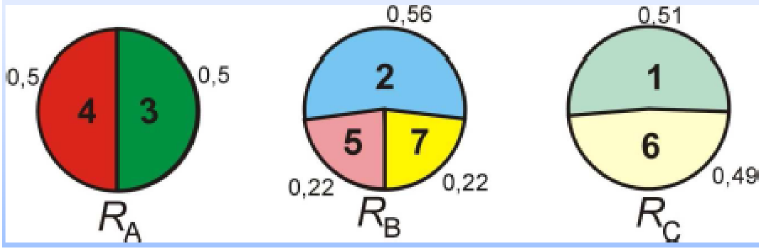
Soutěžící by **měl** změnit dveře, pravděpodobnost úspěchu se tím zvýší z $\frac{1}{3}$ na $\frac{2}{3}$.



Tento problém vzbudil svého času velké pozdvižení, mediální zájem a vášnivé reakce (mnohé z nich trvají dosud) i mnohých absolventů Ph.D. zuřivě obhajujících mylné řešení – viz `http://en.wikipedia.org/wiki/Monty_Hall_problem`.

Tři ruletky

Máte k dispozici některou z ruletek s uvedenými čísly a jejich pravděpodobnostmi. Hrají dva hráči, přičemž ten, kdo vylosuje větší číslo, vyhrává. Kterou ruletku si vyberete?



Lze snadno odvodit, že ruletka A je lepší než kterákoliv ze zbývajících, ruletka C je naopak nejhorší. V situaci, kdy budou hrát tři hráči se však pořadí ruletek obrátí! Situace nikoliv náhodou připomíná problematiku volebních systémů . . .

Použitá literatura

- J. G. Truxal, **Probability examples**, State University of New York, 1989.
- **Wikipedia**, The Free Encyclopedia, `www.wikipedia.org`.

Děkuji za pozornost!