Důkaz: $X = A + u$, $Y = B + v$, $u \in Z(m)$, $v \in Z(n)$

$$\|X - Y\|^2 = \|A + u - B - v\|^2 = \|\underbrace{A - B}_{\text{vektor v } \mathbb{R}^n} + \underbrace{u - v}_{\in Z(m) + Z(n)}\|^2 \overset{\text{věta v 6. předn.}}{\geq} \underbrace{\|A - B - P_{Z(m)+Z(n)}(A - B)\|^2}_{\|P_{(Z(m)+Z(n))^\perp}(A-B)\|^2}$$

(a) $\Rightarrow$ (c)

$\|M - N\|$ je minimální. Pak pro $M = A + u$, $N = B + v$ platí

$$\|A + u - B - v\|^2 = \|A - B + u - v\|^2 = \|\overbrace{A - B - P_{Z(m)+Z(n)}(A - B)}^{(Z(m)+Z(n))^\perp}$$

$$+ \underbrace{P_{Z(m)+Z(n)}(A - B) + u - v}_{Z(m)+Z(n)}\|^2 \text{ je minimální}$$

Typický příklad.

$\mathbb{R}^5 = \mathcal{U}$, $\quad \mathcal{M} = A + a u_1 + b u_2$

$\mathcal{N} = B + c v_1 + d v_2$

Máme spočítat jejich vzdálenost

1. postup Najdeme $M \in \mathcal{M}$ a $N \in \mathcal{N}$, které realizují vzdálenost

$M = A + a u_1 + b u_2$

$N = B + c v_1 + d v_2$

$M - N \perp Z(\mathcal{M}) + Z(\mathcal{N}) = [u_1, u_2, v_1, v_2]$

$$\left.\begin{aligned} \langle M - N, u_1 \rangle &= 0 \\ \langle M - N, u_2 \rangle &= 0 \\ \langle M - N, v_1 \rangle &= 0 \\ \langle M - N, v_2 \rangle &= 0 \end{aligned}\right\}$$

4 rovnice pro neznámé a, b, c, d

$\langle A - B + a u_1 + b u_2 - c v_1 - d v_2, u_1 \rangle = 0$

$\langle A - B, u_1 \rangle + a \langle u_1, u_1 \rangle + b \langle u_2, u_1 \rangle + \ldots = 0$

Známe-li $P_{(Z(m)+Z(n))^\perp}(A-B)$ pak

(+) $A-B-P_{(Z(m)+Z(n))^\perp}(A-B) = P_{Z(m)+Z(n)}(A-B) =$

$= a u_1 + b u_2 - c v_1 - d v_2$

Potom pro body, které realizují vzdálenost platí

$$M-N = P_{(Z(m)+Z(n))^\perp}(A-B)$$

(*) přepíšeme takto

$$M-N-P_{(Z(m)+Z(n))^\perp}(A-B) = A-B-P_{Z(m)+Z(n)}(A-B) = \overbrace{A - a u_1 - b u_2}^{M} \overbrace{- B + c v_1 + d v_2}^{N}$$

② Nechť $U \cap V = \{\vec{0}\}$

Pak $\quad \measuredangle(U, V) = \min\limits_{\substack{u \in U \\ v \in V}} \measuredangle([u], [v])$

③ $U \subseteq V$ nebo $V \subseteq U \qquad \measuredangle(U, V) = 0$

④ $U \cap V \neq \{\vec{0}\}$

$$\measuredangle(U, V) = \measuredangle\overbrace{\left(U \cap (U \cap V)^{\perp}, V \cap (U \cap V)^{\perp}\right)}^{\text{kyto definováno ve ②}}$$

$$\left(U \cap (U \cap V)^{\perp}\right) \cap \left(V \cap (U \cap V)^{\perp}\right) =$$

$$= (U \cap V) \cap (U \cap V)^{\perp} = \{\vec{0}\}$$

Příklad $\mathbb{R}^4$

e_1, e_2, e_3, e_4 vekt. stand. báze v $\mathbb{R}^4$

$U = [e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3]$

$V = [e_2 + e_4, e_2 + e_3 + e_4]$

Spočítejte $\sphericalangle(U, V)$

$U \cap V = [e_3]$

$(U \cap V)^\perp = [e_1, e_2, e_4]$

$U \cap (U \cap V)^\perp = [e_1 + e_2]$

$V \cap (U \cap V)^\perp = [e_2 + e_4]$

$$\cos(\sphericalangle U, V) = \cos(\sphericalangle([e_1 + e_2], [e_2 + e_4]))$$

$$= \frac{|\langle e_1 + e_2, e_2 + e_4 \rangle|}{\|e_1 + e_2\| \, \|e_2 + e_4\|} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

$$\sphericalangle(U, V) = \frac{\pi}{3}$$

α, β dvě báze prostoru U

nahrazujeme inverzní

$$(\varphi)_{\beta,\beta} = (id)_{\beta,\alpha}(\varphi)_{\alpha,\alpha}\,(id)_{\alpha,\beta}$$

$$B = P^{-1} A P$$

Definice: Dvě čtvercové $(n \times n)$ matice A a B nazveme podobné, jestliže existuje regulární matice P, že

$$B = P^{-1} A P.$$

Podobnost je relace ekvivalence.

<u>Příklad</u>: $\varphi: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \quad \varphi(x) = Ax$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} = (\varphi)_{\mathcal{E}_4, \mathcal{E}_4}$$

$$V = \Big[\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_2} \Big]$$

$$\mathcal{E}_4 = (e_1, e_2, e_3, e_4)$$

$$\varphi(v_1) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = v_1 + 2v_2 \subseteq V$$

$$\varphi(v_2) = A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2v_1 + v_2 \subseteq V$$

$$\varphi(av_1 + bv_2) = a\underset{V}{\underset{\cap}{\varphi(v_1)}} + b\underset{V}{\underset{\cap}{\varphi(v_2)}} \in V$$

<u>Závěr</u>: V je invariantní podprostor operátoru φ.

Věta. Nechť $\varphi: U \to U$ a $V \subseteq U$ je jeho invariantní podprostor.
Nechť α je báze prostoru U, která vznikla doplněním báze podprostoru V.
Pak

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)}_{\dim V} \Big\} \dim V$$

Dk: $\alpha = (\underbrace{u_1, u_2, \dots u_k}_{\text{báze } V}, u_{k+1}, \dots u_n)$ báze U

$1 \le i \le k$

$$\varphi(u_i) = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k$$

$$(\varphi(u_i))_\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{tvar matice } (\varphi)_{\alpha,\alpha}$$

Věta: $\varphi: U \to U$ a nechť $U = V \oplus W$ kde V a W jsou invariantní podprostory. Nechť $\alpha = (u_1, u_2, \dots u_k, u_{k+1}, \dots, u_n)$ je báze prostoru U takové, že $(u_1, \dots u_k)$ je báze V a $(u_{k+1}, \dots, u_n)$ je báze W. Pak

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right) \begin{array}{l} \}\, k \\ \}\, n-k \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\quad}_{k} & \underbrace{\quad}_{n-k} \end{array} \end{array}$$

Důkaz stejný jako u předchozí věty

$w = u_i \qquad k+1 \le i \le n$

$$\varphi(u_i) = \sum_{j=k+1}^{n} a_j u_j \quad \dots \text{ příslušný sloupec matice}$$

$$\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{k+1} \\ \vdots \\ a_n \end{matrix}$$