1

SAMOADJUNGOVANÉ OPERÁTORY

Nechť U a V jsou vekt. prostory se skalárním součinem nad $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Nechť $\varphi: U \to V$ je lin. zobrazení

Adjungované lin. zobrazení $\varphi^*: V \to U$ je takové zobrazení, které má vlastnost

$$(\forall u \in U)(\forall v \in V): \langle \varphi(u), v \rangle_V = \langle u, \varphi^*(v) \rangle_U$$

Z definice není na 1 pohled jasné, zda φ^* existuje a je určeno jednoznačně.

Ukážeme si, že tomu tak je, ale nejdřív spočítáme

$(\varphi^*)_{\beta,\alpha}$ pomocí $(\varphi)_{\beta,\alpha}$.

(2)

Nechť $\alpha = (u_1, u_2 \ldots u_n)$ je ortonormální báze v U

Nechť $\beta = (v_1, v_2, \ldots v_k)$ je ortonormální báze ve V.

Lemma:

$$(\varphi^*)_{\alpha,\beta} = \overline{(\varphi)_{\beta,\alpha}}^{T}$$

čára znamená, že bereme všechny prvky matice jako komplexně sdružená čísla

$$\overline{\begin{pmatrix} 2+i, & 3-i \\ 4i, & 2-8i \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 2-i & 3+i \\ -4i, & 2+8i \end{pmatrix}$$

③

$$\langle \varphi(u), v\rangle_V = \left(\varphi(u)\right)_\beta^T \cdot \overline{(v)_\beta} = \left((\varphi)_{\beta,\alpha}(u)_\alpha\right)^T \cdot \overline{(v)_\beta}$$

$$= (u)_\alpha^T \, (\varphi)_{\beta,\alpha}^T \, \overline{(v)_\beta}$$

$$\langle u, \varphi^*(v)\rangle_U = (u)_\alpha^T \, \overline{\left(\varphi^*(v)\right)_\alpha} = (u)_\alpha^T \, \overline{(\varphi^*)_{\alpha,\beta}(v)_\beta}$$

$$= (u)_\alpha^T \, \overline{(\varphi^*)_{\alpha,\beta}} \, \overline{(v)_\beta}$$

$$\langle w, v\rangle = \sum x_i \overline{y_i}$$

$$(w)_\beta = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad (v)_\beta = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Odtud
$$(\varphi)_{\beta,\alpha}^T = \overline{(\varphi^*)_{\alpha,\beta}} \implies (\varphi^*)_{\alpha,\beta} = \overline{(\varphi)_{\beta\alpha}}^T$$

Máme-li matici $(\varphi)_{\beta,\alpha}$, máme jednoznačně určenou i matici $(\varphi^*)_{\alpha,\beta}$.

4

Věta: Adjungované zobrazení $\varphi^*: V \to U$ k zobrazení $\varphi: U \to V$ vždy existuje a je určeno jednoznačně

Důkaz. Zvolíme ort. báze α v U a β ve V. K matici $(\varphi)_{\beta,\alpha}$ existuje určitě matice $\overline{(\varphi)_{\beta,\alpha}}^T$. Ta musí být matice φ^* podle předchozího lemmatu. Určují tedy hodnoty φ^* na vektorech báze β a tím i celé zobrazení φ^*

$\beta = (v_1, v_2, \dots v_k)$ $\quad$ $\left(\varphi^*(v_1)\right)_\alpha = $ 1. sloupec matice $\overline{(\varphi)_{\beta,\alpha}}^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

$\alpha = (u_1, \dots u_n)$ $\quad$ $\varphi^*(v_1) = a_1 u_1 + \dots + a_n u_n$

5

SAMOADJUNGOVANÝ operátor je operátor $\varphi : U \to U$ takový, že

$$\forall u, v \in U : \quad \langle \varphi(u), v \rangle = \langle u, \varphi(v) \rangle$$

tj. $\varphi = \varphi^*$.

<u>Věta:</u> Operátor $\varphi : U \to U$ je samoadjungovaný, právě když pro jeho matici v <u>ortonormální bázi α</u> platí

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \overline{(\varphi)_{\alpha,\alpha}}^T$$

Důkaz plyne z toho, že φ^* je adjungovaný k φ právě když

$$(\varphi^*)_{\alpha,\alpha} = \overline{(\varphi)_{\alpha,\alpha}}^T$$

6

Hermitovská matice je komplexní matice n×n, pro kterou platí

$$A = \overline{A}^T$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3-8i \\ 3+8i & 4 \end{pmatrix} = \overline{A}^T = \begin{pmatrix} 3 & 3-8i \\ 3+8i & 4 \end{pmatrix}$$

Vždy $A_{ii} \in \mathbb{R}$

$$A_{ii} = \overline{A_{ii}}$$

$$A_{ij} = \overline{A_{ji}}$$

Nad $\mathbb{R}$ je hermitovská matice symetrickou maticí.

$$A = A^T.$$

7

Příklady samoadjungovaných operátorů

1. $\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $\varphi(x) = Ax$, kde $A = \overline{A}^T$

$$\langle \varphi(x), y \rangle = \langle Ax, y \rangle = (Ax)^T \cdot \overline{y} = x^T A^T \overline{y}$$

$$\langle x, \varphi(y) \rangle = \langle x, Ay \rangle = x^T \overline{(Ay)} = x^T \overline{A}\, \overline{y}$$

Protože $A = \overline{A}^T$, je $A^T = \overline{A}$.

2. $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\varphi(x) = Ax$, $A = A^T$

3. Geometrický příklad: $\varphi : U \to U$, φ je kolmá projekce na podprostor $V \subset U$. φ je samoadjungovaný operátor

8

$u, v \in U$

$$\langle \varphi(u), v\rangle = \langle \underbrace{\varphi(u)}_{V}, \underbrace{\varphi(v)}_{\in V} + \underbrace{v-\varphi(v)}_{\in V^\perp}\rangle = \langle \varphi(u), \varphi(v)\rangle + \langle \underbrace{\varphi(u)}_{\in V}, \underbrace{v-\varphi(v)}_{\in V^\perp}\rangle =$$

$$= \langle \varphi(u), \varphi(v)\rangle$$

$$\|$$

$$\langle u, \varphi(v)\rangle = \cdots\cdots \quad \cdots\cdots = \langle \varphi(u), \varphi(v)\rangle$$

jiné ověření $\quad v_1, v_2 \ldots v_k$ báze V ortonormální a doplníme ji na bázi $v_1, \ldots v_k, \ldots v_n$ ortonormální celého U

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & & & & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & & & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

$\varphi(v_1) = v_1 = 1\cdot v_1 + 0\cdot v_2 + \dots + 0\, v_n$

$\varphi(v_2) = v_2 = 0\cdot v_1 + 1\cdot v_2 + \dots + 0\cdot v_n$

$\varphi(v_{k+1}) = 0 = 0\, v_1 + 0\cdot v_2 + \dots$

(9)

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \left(\begin{array}{c|c} E_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$ je hermitovská (symetrická) matice

$\Rightarrow \varphi$ je samoadjungovaný operátor.

VLASTNÍ ČÍSLA a VLASTNÍ VEKTORY

Mnohé vlastnosti jsou shodné nebo velice podobné vlastnostem unitárních operátorů

Lemma: Všechna vl. čísla samoadj. operátorů jsou reálná i když vl. vektory jsou komplexní

Dk: $\varphi(u) = \lambda u \quad u \neq 0$

$$\lambda\langle u,u\rangle = \langle \lambda u,u\rangle = \langle \varphi(u),u\rangle = \langle u,\varphi(u)\rangle = \langle u,\lambda u\rangle = \bar{\lambda}\langle u,u\rangle$$

$$\langle u,u\rangle \neq 0 \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$$

10

<u>Lemma:</u> Vlastní vektory k <u>různým vlastním</u> číslům jsou navzájem kolmé

<u>Důkaz:</u> Nechť $\varphi(u) = \lambda u$, $\varphi(v) = \mu v$, $u \neq 0$, $v \neq 0$.

$$\underline{\lambda\langle u,v\rangle} = \langle \lambda u, v\rangle = \langle \varphi(u), v\rangle = \langle u, \varphi(v)\rangle = \langle u, \mu v\rangle = \underset{\substack{\Uparrow \\ \mathbb{R}}}{\bar{\mu}}\langle u,v\rangle =$$

$$= \underline{\mu\langle u,v\rangle}$$

$$\underset{\substack{\# \\ 0}}{(\lambda-\mu)}\langle u,v\rangle = 0 \implies \boxed{\langle u,v\rangle = 0}$$

11

Věta Ke každému samoadj. operátoru $\varphi: U \to U$ existuje v U ortonormální báze, tvořená vl. vektory operátoru φ, v této bázi má tedy φ matici

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

kde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ jsou vl. čísla, každé tolikrát, kolikrát činí jeho algebraická násobnost.

12

Důkaz provedeme indukcí podle $n = \dim U$.

Pro $n = \dim U = 1$ věta platí

Nechť platí pro $n-1$. Nechť λ_1 je vlastní číslo operátoru $\varphi : U \to U$, $\dim U = n$. λ_1 je kořen char. polynomu a ten má v $\mathbb{C}$ vždy nějaký kořen. Z předchozího víme, že musí být reálný, proto musí existovat vl. vektor u_1, i když je prostor U reálný.

Nechť $\|u_1\| = 1$, $\varphi(u_1) = \lambda_1 u_1$

Vezmeme $[u_1]^\perp$, to je prostor dimenze $n-1$ a ukážeme, že je to invariantní podprostor pro φ

$v \in [u_1]^\perp$, chceme dokázat, že $\varphi(v) \in [u_1]^\perp$

(13)

Spočítáme $\langle \varphi(v), u_1 \rangle$.

$$\langle \varphi(v), u_1 \rangle = \langle v, \varphi(u_1) \rangle = \langle v, \lambda u_1 \rangle = \bar{\lambda} \langle v, u_1 \rangle = \lambda \underbrace{\langle v, u_1 \rangle}_{=0} = 0$$

Tedy $[u_1]^\perp$ je rovněž invariantní podprostor pro φ.

Nyní máme.

$$\varphi/_{[u_1]^\perp} : [u_1]^\perp \longrightarrow [u_1]^\perp \quad \text{je samoadjungovaný}$$

Podle indukčního předpokladu existuje ve $[u_1]^\perp$ ortonormální báze $u_2, u_3, \ldots u_n$ tvořená vlastními vektory. Potom v U
$\alpha = (u_1, u_2 \ldots u_n)$ je ortonormální báze tvořená vlastními vektory.

Množina vl. čísel operátoru φ se nazývá spektrum.

Věta o spektrálním rozkladu

Nechť $\varphi : U \to U$ je samoadjungovaný operátor. Nechť má vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ násobnosti $k_1, k_2, \dots, k_r$ ($k_1 + k_2 + \dots + k_r = \dim U$). Pak existuje rozklad prostoru U na navzájem kolmé vektorové podprostory

$$U = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_r$$

kde U_i má dimenzi k_i a

$$\varphi = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \dots + \lambda_r P_r$$

(15)

kde P_i je kolmá projekce na U_i.

Důkaz. nechť $U_i = \ker(\varphi - \lambda_i \, id)$

$u \in U_i$, $v \in U_j$ jsou dva vl. vektory k různým vl. číslům

Proto $U_i \perp U_j$. Dále nechť $u_1, u_2, \ldots u_n$ je ort. báze složená z ort. bazí podprostorů $U_1, U_2, \ldots U_r$.

$$\varphi(u) = \varphi(x_1 u_1 + x_2 u_2 + \ldots + x_n u_n) = \varphi(\underbrace{x_1 u_1 + \ldots + x_{k_1} u_{k_1}}_{\in U_1}) + \varphi(\underbrace{\qquad}_{U_2}) + \ldots$$

$$= x_1 \varphi(u_1) + \ldots + x_{k_1} \varphi(u_{k_1}) + \text{atd}$$

$$= (x_1 \lambda_1 u_1 + \ldots x_{k_1} \lambda_1 u_{k_1}) + \text{atd} = \lambda_1 P_1(u) + \lambda_2 P_2(u) + \ldots$$

16

DŮSLEDEK věty o existenci orton. báze

Každou samoadjungovanou matici A můžeme psát ve tvaru

$$A = \overline{P}^T D P$$

kde P je unitární matice a D je diagonální matice s vl. čísly matice A na diagonále.

Je-li A symetrická, je P ortogonální.

Důkaz: A komplexní : $\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $\varphi(x) = Ax$

φ je samoadjungovaný operátor. V $\mathbb{C}^n$ existuje ortonormální báze

17

α tvořená vl. vektory operátoru φ. Platí (ε stand. báze)

$$A = (\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon} = (id)_{\varepsilon,\alpha}(\varphi)_{\alpha,\alpha}(id)_{\alpha,\varepsilon} =$$

$$= P^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \ \lambda_n \end{pmatrix} \underbrace{(id)_{\alpha,\varepsilon}}_{= P}$$

α, ε jsou ortonormální báze, proto je P unitární (nad $\mathbb{C}$) nebo ortogonální (nad $\mathbb{R}$) matice. Proto

$$= \overline{P}^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} P .$$

18

Důsledek pro sym bilin. a kvadratické formy

Nechť $f : U \times U \to \mathbb{R}$ je sym. bilin. forma. Nechť U je prostor se skalárním součinem. Pak v U existuje ortonormální báze α taková, že v souřadnicích této báze je

$$f(u,v) = \lambda_1 x_1 y_1 + \lambda_2 x_2 y_2 + \dots + \lambda_n x_n y_n,$$

kde $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$ jsou vlastní čísla matice bilin. formy f v této ortonormální bázi.

(Totéž pro kvadr. formu g $\quad g(u) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots$)

19

Příklad. Vezmeme lin. izomorfismus $U \to \mathbb{R}^n$ daný souřadnicemi v nějaké ortonormální bázi β. $u \longmapsto (u)_\beta$

Potom můžeme předpokládat, že $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

f má ve stand. bázi ε prostoru $\mathbb{R}^n$ matici A, $A^T = A$, neboť f je symetrická bilin. forma. Matice A definuje samoadjungovaný operátor

$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad \varphi(x) = Ax.$$

Tento operátor má ortonormální bázi tvořenou vlastními vektory. Označme ji $\alpha = (u_1, u_2, .. u_n)$

(20)

Matice f v bázi α je rovna B, kde

$$B = Q^T A Q$$

A je matice f ve stand. bázi ε a $Q = (id)_{\varepsilon,\alpha}$

Víme, že
$$A = P^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \ \lambda_n \end{pmatrix} P \quad \text{kde } P = (id)_{\alpha,\varepsilon}$$

podle předchozí věty. Odtud plyne, že

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \ \lambda_n \end{pmatrix} = (P^{-1})^T A P^{-1} \qquad P^{-1} = (id)_{\varepsilon,\alpha} = Q$$

21

Proto v bázi α má f vyjádření

$$f(u,v) = \lambda_1 x_1 y_1 + \lambda_2 x_2 y_2 + \dots + \lambda_n x_n y_n .$$

Příklad typický číslo 1

Je dána kvadr. forma $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \sum_{1 \le i \le j \le 3}' a_{ij}\, x_i x_j .$$

Najděte ORTONORMÁLNÍ BÁZI, v níž má g diagonální tvar. A matice g ve stand. bázi. $A = A^T$

Najdeme vl. čísla $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ a vlastní vektory k nim. Ty jen nanormujeme

22

Lze z nich vytvořit ortonormální bázi u_1, u_2, u_3. V této bázi

$$g(u) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2$$

$$B = P^{-1} A P \qquad\qquad B = P^T A P$$

podobné A typu — kongruentní

transformace matic lin. operátorů — transformace matic typu bilin. forem

samoadj. $\varphi : U \to U$ — $f : U \times U \to \mathbb{R}$