Afinní geometrie

<u>Opakování</u> U vekt. prostor nad $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

$\mathcal{M} \subseteq U$ neprázdná je afinní podprostor

$$\forall A, B \in \mathcal{M} \qquad \lambda A + (1-\lambda) B \in \mathcal{M}$$

Jinak $\mathcal{M}$ je tvaru

$$\mathcal{M} = A + V, \quad V \subseteq U \text{ je vekt. podprostor}$$

$Z(\mathcal{M})$ zaměření

Parametrický zápis af. podpr.

$$X = A + t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots + t_k v_k$$

kde $[v_1, v_2, \dots, v_k] = V$

Popis implicitní pomocí soustavy rovnic $Ax = b$,

kde x jsou souřadnice v nějaké bázi

Vzájemná poloha afinních podprostorů

$\mathcal{M}, \mathcal{N}$ afinní podprostory ve vekt. prostoru $\mathcal{U}$

1. $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M} \iff \mathcal{N} \cap \mathcal{M} \neq \emptyset \quad Z(\mathcal{N}) \subseteq Z(\mathcal{M})$
2. $\mathcal{N}$ a $\mathcal{M}$ pouze rovnoběžné $\iff \mathcal{N} \cap \mathcal{M} = \emptyset \quad Z(\mathcal{N}) \subseteq Z(\mathcal{M})$ nebo $Z(\mathcal{M}) \subseteq Z(\mathcal{N})$
3. $\mathcal{N}, \mathcal{M}$ různoběžné $\iff \mathcal{N} \cap \mathcal{M} \neq \emptyset \quad Z(\mathcal{N}) \not\subseteq Z(\mathcal{M}) \wedge Z(\mathcal{M}) \not\subseteq Z(\mathcal{N})$
4. $\mathcal{N}, \mathcal{M}$ mimoběžné $\iff \mathcal{N} \cap \mathcal{M} = \emptyset \quad Z(\mathcal{N}) \not\subseteq Z(\mathcal{M}) \wedge Z(\mathcal{M}) \not\subseteq Z(\mathcal{N})$

Střední škola: 2 přímky v $\mathbb{R}^3$ – nastanou všechny 4 možnosti

přímka a rovina v $\mathbb{R}^3$ – nenastane 4. možnost

Rovina a přímka v $\mathbb{R}^4$ – mohou být mimoběžné

$$\left.\begin{aligned} \rho &: (0,0,0,0) + t(1,0,0,0) + s(0,1,0,0) \\ p &: (0,0,0,1) + p(0,0,1,0) \end{aligned}\right\} \text{mimoběžné}$$

2 roviny v $\mathbb{R}^4$ mohou být mimoběžné

$$\rho : (0,0,0,0) + t(1,0,0,0) + s(0,1,0,0)$$

$$\pi : (0,0,0,1) + p(0,0,1,0) + q(1,0,0,0)$$

$$Z(\rho) \cap Z(\pi) = [(1,0,0,0)]$$

ale $\rho \cap \pi = \emptyset$ a $Z(\rho) \not\subseteq Z(\pi)$ a $Z(\pi) \not\subseteq Z(\rho)$.

Průnik afinních podprostorů, je-li neprázdný, je opět afinním podprostorem

$$\mathcal{M} = M + Z(\mathcal{M}) \qquad \mathcal{N} = N + Z(\mathcal{N})$$

$$A \in \mathcal{M} \cap \mathcal{N}$$

$$\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = A + Z(\mathcal{M}) \cap Z(\mathcal{N})$$

<u>Spojení afinních podprostorů</u> $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ je nejmenší afinní podprostor obsahující $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$. Označíme $\mathcal{M} \sqcup \mathcal{N}$.

$$\mathcal{M} = M + Z(\mathcal{M}) \qquad \mathcal{N} = N + Z(\mathcal{N})$$

$$\mathcal{M} \sqcup \mathcal{N} = M + [N-M] + Z(\mathcal{M}) + Z(\mathcal{N})$$

Typické úlohy afinní geometrie

Dán bod M, přímka p a přímka q v R^3.
Najděte přímku r, která prochází bodem M a protíná přímky p a q (příčka přímek p a q procházející bodem M).

Hledaná přímka r.

$r \cap p \neq \emptyset \Rightarrow r \sqcup p = \alpha$ rovina ve které leží p a r

Tuto rovinu známe, neboť $\alpha = p \sqcup M$

Průnik $\alpha \cap q = Q$ bod leží na r. Tedy $r = \overleftrightarrow{MQ}$.

Podobná úloha v $\mathbb{R}^4$

M bod v $\mathbb{R}^4$, rovina β v $\mathbb{R}^4$ a přímka p v $\mathbb{R}^4$.

Najděte přímku r procházející bodem M a protínající přímku p a rovinu β.

Řešení $r \sqcup p = \alpha$ rovina, $\alpha = p \sqcup M$.

Hledáme $\alpha \cap \beta = Q$ bod ležící na přímce r, $r = \overleftrightarrow{MQ}$.

AFINNÍ ZOBRAZENÍ MEZI AFINNÍMI PODPROSTORY

$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{U}$, $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{V}$ jsou afinní podmnožiny

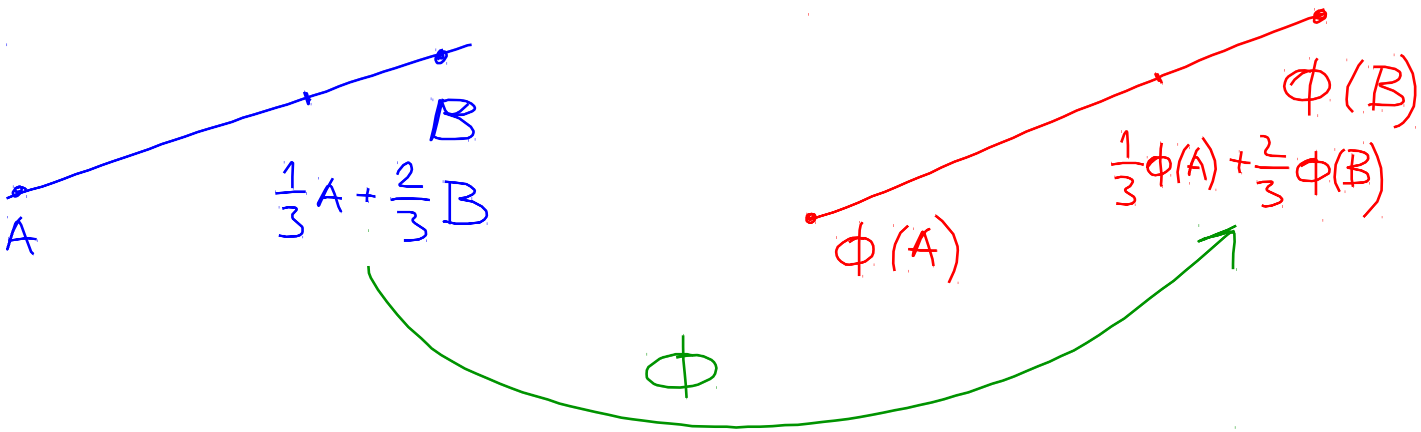
Zobrazení

$$\Phi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$$

se nazývá afinní, jestliže

$$\phi(\lambda A + (1-\lambda)B) = \lambda\phi(A) + (1-\lambda)\phi(B)$$

pro všechna $A, B \in \mathcal{M}$, $\lambda \in \mathbb{K}$.



<u>Příklad</u> $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{N} = \mathbb{R}^k$, $\phi(x) = Ax + b$, A matice $k \times n$, $b \in \mathbb{R}^k$

$$\phi(\lambda x + (1-\lambda)y) = A(\lambda x + (1-\lambda)y) + b = \lambda Ax + (1-\lambda)Ay + \lambda b + (1-\lambda)b$$

$$= \lambda(Ax + b) + (1-\lambda)(Ay + b) = \lambda\phi(x) + (1-\lambda)\phi(y).$$

Věta: Nechť $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{U}$, $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{V}$ jsou afinní podprostory. Zobrazení $\Phi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ je afinní, právě když je tvaru

$$\Phi(M+u) = \Phi(M) + \varphi(u) \quad , \; u \in Z(\mathcal{M}),$$

kde $\varphi : Z(\mathcal{M}) \to Z(\mathcal{N})$ je lineární zobrazení.

Důkaz: $\Leftarrow$ jednodušší část

$\Rightarrow$ Definujme pro afinní zobrazení $\Phi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, zobrazení $\varphi : Z(\mathcal{M}) \to Z(\mathcal{N})$, $M \in \mathcal{M}$ pevný bod

$$\varphi(u) = \Phi(M+u) - \Phi(M).$$

Potom

$$\Phi(M+u) = \Phi(M) + \varphi(u).$$

Stačí dokázat, že φ je lineární.

Dokážeme, že $\varphi(u_1+u_2) = \varphi(u_1)+\varphi(u_2)$

$$\varphi(u_1+u_2) = \Phi(M+u_1+u_2) - \Phi(M) =$$

$$= \Phi\left(2\left[\tfrac{1}{2}(M+u_1) + \tfrac{1}{2}(M+u_2)\right] - 1M\right) - \Phi(M)$$

$$= 2\,\Phi\left(\tfrac{1}{2}(M+u_1) + \tfrac{1}{2}(M+u_2)\right) - \Phi(M) - \Phi(M)$$

$$= 2\,\tfrac{1}{2}\,\Phi(M+u_1) + 2\,\tfrac{1}{2}\,\Phi(M+u_2) - \Phi(M) - \Phi(M)$$

$$= \Phi(M+u_1) - \Phi(M) + \Phi(M+u_2) - \Phi(M)$$

$$= \varphi(u_1) + \varphi(u_2).$$

$\blacksquare$

KVADRATICKÉ A BILINEÁRNÍ FORMY

Lineární forma na vekt. prostoru U na $\mathbb{K}$ je lineární zobrazení

$$\varphi : U \to \mathbb{K}$$

Typický příklad $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$$

$$\varphi(e_1) = a_1 \qquad \varphi(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n) = x_1 \varphi(e_1) + x_2 \varphi(e_2) + \dots + x_n \varphi(e_n)$$

$$\varphi(e_2) = a_2$$

$$\vdots$$

$$\varphi(e_n) = a_n \qquad = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n$$

<u>Bilineární forma</u> g je zobrazení

$$U \times U \longrightarrow \mathbb{K} \qquad (u,v) \longmapsto g(u,v) \in \mathbb{K}$$

takové, že pro každé $u \in U$ je zobrazení

$$v \longmapsto g(u,v) \quad : U \longrightarrow \mathbb{K} \quad \text{lineární}$$

a pro každé $v \in U$ je zobrazení

$$u \longmapsto g(u,v) \quad : U \longrightarrow \mathbb{K} \quad \text{lineární}$$

Zobrazení g je lineární v 1. i druhé složce.

<u>Příklad</u>: $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$$g(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, x_i y_j$$

11

Nechť na U máme bázi $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$.

$\varphi : U \to \mathbb{K}$ je lineární forma. Báze $\mathbb{K}$ (1)

Matice φ v bázích α a (1) je

$$(\varphi)_{1,\alpha} = \big(\varphi(u_1)\ \varphi(u_2)\ \dots\ \varphi(u_n)\big)$$

$$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad \varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

$$\alpha = (e_1, e_2, \dots, e_n) \qquad (\varphi)_{1,\alpha} = (a_1\ a_2\ a_3 \dots a_n)$$

Matice bilineární formy $g : U \times U \to \mathbb{K}$ v bázi $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ je matice A řádu $n \times n$ taková, že

$$A_{ij} = g(u_i, u_j)$$

Má-li bilineární forma $g: U \times U \to \mathbb{K}$ v bázi $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ matici A, pak lze g vyjádřit pomocí souřadnic takto

$u, v \in U$ $\quad (u)_\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (v)_\alpha = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$$g(u,v) = g\left(\sum_{i=1}^{n} x_i u_i, \sum_{j=1}^{n} y_j u_j\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, g\left(u_i, \sum_{j=1}^{n} y_j u_j\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} y_j \, g(u_i, u_j)\right) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \, g(u_i, u_j) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} x_i y_j$$

$$= (x_1 \; x_2 \; \dots \; x_n) \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ & & & \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x^T A y = (u)_\alpha^T A (v)_\alpha$$

Bilineární forma je jednoznačně určena svou maticí v nějaké bázi

Matice bilin. formy při změně báze

$g : U \times U \longrightarrow \mathbb{K}$ $\qquad \alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ $\quad \beta = (v_1, \dots, v_n)$ 2 báze

$u, v \in U \quad (u)_\alpha = x, \quad (v)_\alpha = y, \quad (u)_\beta = \bar{x}, \quad (v)_\beta = \bar{y}$

$g(u,v) = x^T A y$ $\quad$ A je matice g v bázi α

$g(u,v) = \bar{x}^T B \bar{y}$ $\quad$ B je matice g v bázi β

Chceme spočítat matici B pomocí matice A

$x = (u)_\alpha = (id)_{\alpha\beta} (u)_\beta = P\bar{x}$

$y = \qquad\qquad\qquad\qquad = P\bar{y}$

$$\bar{x}^T B \bar{y} = g(u,v) = x^T A y = \text{dosadíme za } x \text{ a } y = (P\bar{x})^T A (P\bar{y}) =$$

$$= \bar{x}^T P^T A P \bar{y}$$

$$\bar{x}^T B \bar{y} = \bar{x}^T (P^T A P) \bar{y}$$ pre všetky možné súradnice $\bar{x}$ a $\bar{y}$

Odkiaľ už plynie, že

$$B = P^T A P$$

Dokážeme si to: $\bar{x} = (0,0,\ldots 1,0\ldots 0)$ 1 na i-tom mieste

$\bar{y} = (0,0,\ldots\ldots 0,1,\ldots)$ 1 na j-tom mieste

$$\bar{x}^T B \bar{y} = (0\cdots 1,\cdots 0)\, B \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = B_{ij} \qquad \bar{x}^T (P^T A P) y = (P^T A P)_{ij}$$

Preto $B_{ij} = (P^T A P)_{ij}$, a teda $B = P^T A P$.

Pomocné lemma (použijeme to častěji)

Jestliže $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ je $x^T A y = x^T C y$, pak

$$A = C.$$

Definice Řekneme, že dvě čtvercové matice jsou KONGRUENTNÍ, jestliže existuje regulární matice P taková, že

$$B = P^T A P.$$

Relace A je kongruentní s B je relace ekvivalence.

- $A \sim A \qquad A = E^T A E$
- $A \sim B \Rightarrow B \sim A$

$$B = P^T A P \Rightarrow B P^{-1} = P^T A \Rightarrow (P^{-1})^T B P^{-1} = A$$

$$B \sim A$$

16

- $A \sim B$ a $B \sim C \Rightarrow A \sim C$

$B = P^T A P$ a $C = Q^T B Q \Rightarrow C = Q^T(P^T A P)Q = Q^T P^T A P Q =$

$= (PQ)^T A (PQ)$