Kvadratické formy

Sym. bilin. formy $\qquad f(u,v) = f(v,u)$

Sym. bilin. formy mají matice v každé bázi symetrické

Algoritmus K A symetrické najdeme D diagonální tak, že

$$D = P^T A P$$

$$\left(\begin{array}{c|c} A & E \\ \hline \cancel{E} & \end{array}\right) \text{ stejné řádk. a sloupc. el. operace } \left(\begin{array}{c|c} D & P^T \\ \hline \cancel{P} & \end{array}\right)$$

Aplikace: Ke každé sym. bilin. formě $f: U \times U \to K$ existuje báze (tzv. polární) B, v jejíž souřadnicích je vyjádření f

$$f(u,v) = d_{11} x_1 y_1 + d_{22} x_2 y_2 + \dots + d_{nn} x_n y_n$$

Toto lze aplikovat na kvadr. formy

$$g : U \to \mathbb{K}$$

existuje $f : U \times U \to \mathbb{K}$ sym. bilin. forma

$$g(u) = f(u,u).$$

Opačně g určuje bilin. formu f jednoznačně, neboť

$$f(u,v) = \frac{1}{4}\big(g(u+v) - g(u-v)\big)$$

Typická kvadr. forma na $\mathbb{R}^n$: $\quad g(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$

$$a_{ij} = a_{ji}$$

Jiná možnost diagonalizace kvadr. formy je tzv. <u>úprava na čtverce</u>.

Nechť kvadr. forma $g : U \longrightarrow \mathbb{K}$ má v souřadnicích báze α vyjádření

$$g(x) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \dots + a_{nn}x_n^2$$

Ze střední školy známe

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = a_{11}\left(x_1^2 + 2\frac{a_{12}}{a_{11}}x_1x_2\right) + a_{22}x_2^2$$

$$= a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2\right)^2 - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}x_2^2 + a_{22}x_2^2 = a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2\right)^2 + \left(a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}\right)x_2^2$$

$$\left(x_1^2 + 2\frac{a_{12}}{a_{11}}x_1x_2 + \frac{a_{12}^2}{a_{11}^2}x_2^2\right)$$

Po substituci

$$y_1 = x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2$$

$$y_2 = x_2$$

$$= a_{11}y_1^2 + \left(a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}\right)y_2^2$$

4

Obdobně postupujeme i když máme více než 2 proměnné. Jestliže $a_{11} \neq 0$, pak

$$g(x) = a_{11}\left(x_1^2 + 2\frac{a_{12}}{a_{11}}x_1x_2 + 2\frac{a_{13}}{a_{11}}x_1x_3 + \dots + 2\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_1x_n\right) + \underbrace{a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2}_{\text{bez } x_1}$$

$$= a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 - a_{11}\left(\frac{a_{12}a_{13}}{a_{11}^2}x_2x_3 + \dots\dots + 2\frac{a_{1n-1}a_{1n}}{a_{11}^2}x_{n-1}x_n\right) - a_{11}\left(\frac{a_{12}^2}{a_{11}^2}x_2^2 + \dots + \frac{a_{1n}^2}{a_{11}^2}x_n^2\right) + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2$$

$=$ další tabule

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)^2 = (\alpha_1 + \alpha_2 \dots + \alpha_n)(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) = \alpha_1^2 + 2\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1\alpha_3 + \dots\dots 2\alpha_{n-1}\alpha_n + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \dots + \alpha_n^2$$

(5)

$$= a_{11}\underbrace{\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2}_{y_1 = x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n} + h(x_2, x_3, \dots x_n)$$

$y_i = x_i$ pro $i \geq 2$

$$= a_{11}y_1^2 + h(y_2, y_3, \dots y_n)$$

Indukcí dostaneme pak g jako součet násobků čtverců v nových proměnných.

Vše jsme dělali za předpokladu, že $a_{11} \neq 0$. Pokud $a_{11} = 0$, ale nějaké $a_{ii} \neq 0$, vezmeme místo x_1 proměnnou x_i a provedeme totéž.

Co provedeme v případě, že $a_{ii} = 0$ pro všechna i?

Jestliže je $g \neq 0$, pak existuje i a j tak, že

$$a_{ij} \neq 0 \qquad (i \neq j).$$

Vezmeme nové souřadnice

$$y_i = x_i - x_j \qquad\qquad x_i = y_i + x_j = y_i + y_j$$

$$y_j = x_j$$

$$y_k = x_k \quad \text{pro } k \neq i, j$$

V nových souřadnicích

$$g(u) = a_{ij} x_i x_j + \ldots\ldots = a_{ij}(y_i + y_j) y_j + \ldots\ldots = \underbrace{a_{ij}}_{\neq 0} y_j^2 + a_{ij} y_i y_j + \ldots\ldots$$

Tedy v nových souřadnicích g můžeme provést úpravy na čtverce podle předchozího postupu.

Kontrolní výpočet

$$g(u) = 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 12x_2x_3 = 4y_1(y_1+y_2) + 8y_1y_3 +$$

$$\boxed{\begin{aligned} y_1 &= x_1 \\ y_2 &= x_2 - x_1 \\ y_3 &= x_3 \end{aligned}}$$

$$+ 12(y_1+y_2)y_3 = 4y_1^2 + 4y_1y_2 + 8y_1y_3 + 12y_1y_3$$

$$+ 12y_2y_3 = 4(y_1^2 + y_1y_2 + 5y_1y_3) + 12y_2y_3 =$$

$$= 4\left\{\left(y_1 + \frac{1}{2}y_2 + \frac{5}{2}y_3\right)^2 - \frac{10}{4}y_2y_3 - \frac{1}{4}y_2^2 - \frac{25}{4}y_3^2\right\}$$

$$+ 12y_2y_3 = 4\left(y_1 + \frac{1}{2}y_2 + \frac{5}{2}y_3\right)^2 - y_2^2 + 2y_2y_3 - 25y_3^2 =$$

$$= 4\left(y_1 + \frac{1}{2}y_2 + \frac{5}{2}y_3\right) - (y_2 - y_3)^2 + y_3^2 - 25y_3^2 =$$

8

$$= 4\underbrace{\left(y_1 + \frac{1}{2}y_2 + \frac{5}{2}y_3\right)}_{z_1}^2 - \underbrace{\left(y_2 - y_3\right)}_{z_2}^2 - 24\underbrace{y_3}_{z_3}^2 = 4z_1^2 - z_2^2 - 24z_3^2$$

$$z_1 = y_1 + \frac{1}{2}y_2 + \frac{5}{2}y_3 = x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_1 + \frac{5}{2}x_3 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{5}{2}x_3$$

$$z_2 = y_2 - y_3 = -x_1 + x_2 - x_3$$

$$z_3 = y_3 = x_3$$

V přírodní bázi α byly souřadnice x_1, x_2, x_3

V nové bázi β jsou souřadnice z_1, z_2, z_3

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{(u)_\beta = \underset{\substack{\parallel \\ (id)_{\beta\alpha}}}{Q}\,(u)_\alpha}$$

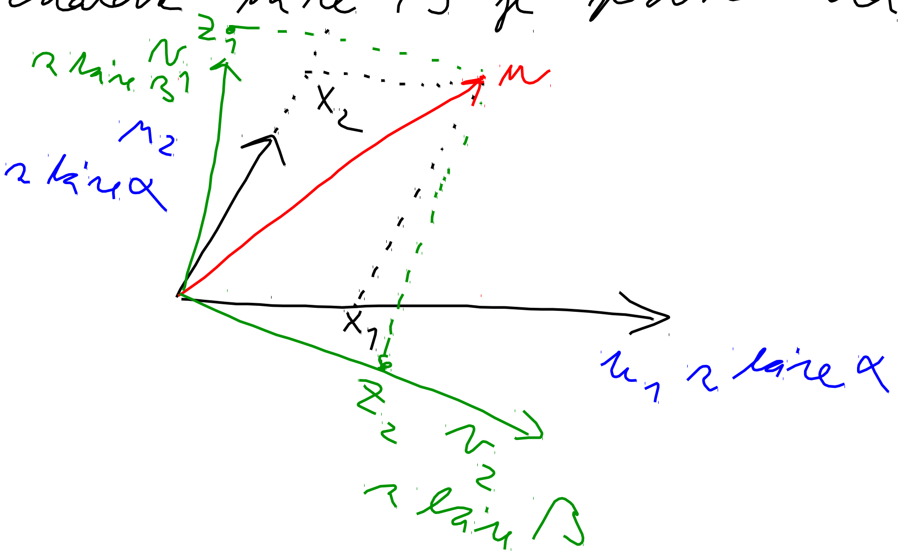
Jak spočítáme bázi β pomocí známé báze α a matice Q?

$$\beta = (v_1, v_2, v_3) = \underbrace{(u_1, u_2, u_3)}_{\alpha} (id)_{\alpha,\beta} = (u_1, u_2, u_3)\, Q^{-1}$$

$$Q^{-1} = (id)^{-1}_{\beta,\alpha}$$

Při tomto postupu najdeme rychle nové souřadnice, ale k nalezení nové báze, musíme spočítat Q^{-1}.

Znalost báze β je podstatná.



$$\boxed{\begin{aligned} \beta &= \alpha\, (id)_{\alpha,\beta} \\ (u)_\beta &= (id)_{\beta,\alpha}\, (u)_\alpha \end{aligned}}$$

Vše, co jsme zatím prováděli šlo dělat nad $\mathbb{R}$ i nad $\mathbb{C}$.

Nyní se zaměříme na

Reálné kvadr. formy

Hodnost kvadr. formy je hodnost její matice.

Jestliže kvadr. formu v polární bázi vyjádříme ve tvaru

$$g(u) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2$$

pak její hodnost je počet nenulových čísel mezi $a_{11}, a_{22}, \dots a_{nn}$.

Hodnost nezávisí na volbě báze

$$B = P^T A P, \text{ kde } P \text{ je regulární}$$

$$h(B) = h(P^T A P) = h(A).$$

Nad reálnými platí více – počet kladných koeficientů i počet záporných koeficientů ve vyjádření

$$g(u) = a_{11}x_1^2 + \dots + a_{nn}x_n^2$$

je nezávislý na volbě polární báze – to říká tzv. Sylvestrův zákon setrvačnosti.

Věta (Sylvestrův zákon setrvačnosti)

Je-li $g: U \to \mathbb{R}$ kvadratická forma, pak existuje báze, v jejíž souřadnicích má g tvar

$$g(u) = 1\cdot x_1^2 + 1\cdot x_2^2 + \dots + 1\cdot x_p^2 - 1\cdot x_{p+1}^2 - \dots - 1\cdot x_{p+q}^2 + 0\cdot x_{p+q+1}^2 + \dots + 0\cdot x_n^2$$

kde počet $+1$, -1 a 0 nezávisí na volbě báze.

<u>Důkaz:</u> Již víme, že existuje báze B taká, že
$$g(u) = a_{11}y_1^2 + a_{22}y_2^2 + \dots + a_{nn}y_n^2$$
Vhodným uspořádáním souřadnic lze dosáhnout toho, že
$$a_{ii} > 0 \quad \text{pro} \quad 1 \le i \le p$$
$$a_{ii} < 0 \quad \text{pro} \quad p+1 \le i \le p+q$$
$$a_{ii} = 0 \quad \text{pro} \quad p+q+1 \le i \le n.$$
Nechť $a_{ii} > 0$. Zvolíme novou souřadnici
$$x_i = \sqrt{a_{ii}}\, y_i$$
Potom $a_{ii} y_i^2 = x_i^2$.

Pro $a_{ii} < 0$, zvolíme novou souřadnici
$$x_i = \sqrt{-a_{ii}}\, y_i$$
Potom
$$x_i^2 = -a_{ii} y_i^2, \text{ tedy } a_{ii} y_i^2 = -x_i^2.$$
Dostaneme $g(u) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2$

Důkaz nezávislosti

Nechť v bázi α je $\quad \alpha=(u_1,u_2,\dots u_n)$

$$g(u) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots$$

a nechť v bázi $\beta = (v_1,v_2,\dots v_n)$ je

$$g(u) = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_s^2 - y_{s+1}^2 - \dots$$

a nechť $p > s$.

Uvažujme podprostor

$$P = [u_1,u_2,\dots u_p]$$

Na něm platí $\quad g(u) > 0$ pro $u \in P \setminus \{\vec{o}\}$

Uvažujme další podprostor

$$Q = [v_{s+1}, v_{s+2}, \dots v_n]$$

Platí $\quad g(v) \leq 0$ na Q

(14)

Dokážeme, že $\dim P \cap Q \geq 1$.

Platí totiž

$$\dim(P \cap Q) = \dim P + \dim Q - \dim(P + Q)$$

$$\geq p + (n - s) - n = \underline{p - s} \geq 1.$$

Tedy existuje $u \in P \cap Q \setminus \{\vec{o}\}$ takové, že

$g(u) > 0$ neboť $u \in P$

$g(u) \leq 0$ neboť $u \in Q$, spor $\boxtimes$

Tedy $p = s$.

Tato věta umožňuje definovat signaturu kvadr. formy nad $\mathbb{R}$ jako trojici čísel

$$(s_{+1}, s_{-1}, s_0) \qquad\qquad s_+ + s_- + s_0 = n$$

kde s_+ je počet $+1$, s_- je počet -1 a s_0 je počet 0 ve vyjádření kvadr. formy g podle předchozí věty.

Signatura symetrické matice = signatura odpovídající kvadr. formy.

<u>Věta</u> (Kritérium kongruentnosti) Dvě symetrické reálné matice jsou kongruentní

$$\boxed{A = P^T B P} \quad P \text{ regulární}$$

Řekneme, že kvadr. forma $g : U \to \mathbb{R}$ je

pozitivně definitní $\iff \forall u \in U \setminus \{0\}$ je $g(u) > 0 \iff s_+ = n,\ s_- = s_0 = 0$

negativně definitní $\iff \forall u \in U \setminus \{0\}$ je $g(u) < 0 \iff s_+ = 0,\ s_- = n,\ s_0 = 0$

pozitivně semidefinitní $\iff \forall u \in U \quad g(u) \geq 0 \iff s_- = 0$

negativně semidefinitní $\iff \forall u \in U \quad g(u) \leq 0 \iff s_+ = 0$

indefinitní $\iff \exists u \in U \quad g(u) > 0$, $\exists v \in V \quad g(v) < 0 \iff s_+ > 0,\ s_- > 0$

Sylvestrovo kritérium

Matice A typu $n \times n$, hlavním subdeterminantem této matice řádu i je

$$S_i := \det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1i} \\ & & & \\ A_{i1} & A_{i2} & \cdots & A_{ii} \end{pmatrix}$$

Věta (Sylvestrovo kritérium)

Kvadr. forma g je positivně definitní, právě když všechny subdeterminanty její matice v nějaké bázi jsou kladné, tj

$$s_1 > 0,\ s_2 > 0, \dots, s_n > 0.$$

Kvadr. forma g je negativně definitní, právě když pro její subdeterminanty v nějaké (každé) bázi platí

$$(-1)^i s_i > 0$$

tj $s_1 < 0$, $s_2 > 0$, $s_3 < 0$, …, $(-1)^n s_n > 0$.

Jak si hezky zapamatovat

$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ je pozitivně definitní s maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & 1 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \qquad S_1 = 1 > 0$$

$q(x) = -x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2$ je negativně definitní s maticí

$$\begin{pmatrix} -1 & & & & \\ & -1 & & 0 & \\ & & -1 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & -1 \end{pmatrix}$$

a $S_1 = -1 < 0$, $S_2 = (-1)\cdot(-1) = 1 > 0$, atd.

Skripta Sbírka úloh

math.muni.cz/~sbírka