Unitární a ortogonální operátory

Spektrum operátoru $\varphi : U \to U$ .... množina všech vlastních čísel tohoto operátoru

Minule: $\varphi : U \to U$, v U je ortonormální báze α

Dokázali jsme:

φ je unitární $\iff$ pro matici $A = (\varphi)_{\alpha,\alpha}$ platí

$$A^{-1} = \overline{A}^T$$

Takové matice nazýváme unitární (komplexní matice)

$$\overline{\begin{pmatrix} 1-i & 2i \\ 3-i & 4 \end{pmatrix}}^T = \begin{pmatrix} 1+i & 3+i \\ -2i & 4 \end{pmatrix}$$

φ je ortogonální $\iff$ $A^{-1} = A^T$ A je reálná matice

Nazýváme ortogonální.

Vlastnosti unitárních a ortogonálních operátorů

Determinant

(a) Determinant unitární matice je v abs. hodnotě roven 1.

(b) Determinant ortogonální matice je roven ± 1.

Důkaz pro unitární matici

$$A \cdot \bar{A}^T = E$$

$$\det(A \cdot \bar{A}^T) = \det E$$

$$\det A \cdot \underline{\det(\bar{A}^T)} = 1$$

$$\det A \cdot \det \bar{A} = 1$$

$$|\det A|^2 = 1 \Rightarrow |\det A| = 1.$$

Vlastní čísla a vektory unitárních operátorů

Věta Nechť $\varphi: U \to U$ je unitární

(a) Všechna vl. čísla unitárních operátorů mají abs. hodnotu $= 1$.

(b) Vlastní vektory k různým vlastním číslům jsou na sebe kolmé.

(c) V U existuje ortonormální báze tvořená vlastními vektory.

Důkaz: (a) $\varphi(u) = \lambda u$

$$= \langle \lambda u, \lambda u \rangle = \langle \varphi(u), \varphi(u) \rangle = \langle u, u \rangle$$

$|\lambda|^2$

$\lambda \bar{\lambda} \langle u, u \rangle$

Odtud $|\lambda|^2 = 1$, neboť $\langle u, u \rangle \neq 0$.

(b) $\varphi(u) = \lambda u, \quad \varphi(v) = \mu v \qquad \lambda \neq \mu. \qquad |\mu| = 1 \qquad \overline{\mu} = \mu^{-1}$

$$\lambda \overline{\mu} \langle u, v\rangle = \langle \lambda u, \mu v\rangle = \langle \varphi(u), \varphi(v)\rangle = \langle u, v\rangle$$

$$\lambda \mu^{-1} \langle u, v\rangle = \langle u, v\rangle$$

Rovnost nastane buď pro

$\lambda \mu^{-1} = 1 \iff \lambda = \mu$ (my ale předpokládáme $\lambda \neq \mu$)

nebo

$\langle u, v\rangle = 0$ a tento případ nastane.

(c) Důkaz povedeme indukcí podle $\dim U$.

$\dim U = 1$ pak $\varphi(u) = \lambda u$ a vektor $\frac{u}{\|u\|}$ je ortonormální

báze modulu U.

Nechť věta platí pro dimenze $\leq n-1$. Nechť U má dimenzi n.

Char. polynom operátoru φ má kořen v kompl. číslech. Označme jej λ_1. Toto číslo je vlastní číslo φ a proto podle (a) je $|\lambda_1| = 1$.

Nechť u_1 je příslušný vl. vektor velikosti 1. Uvažujme

$$V = [u_1]^{\perp}$$

Ukážeme, že V je invariantní podprostor operátoru φ.

Nechť $u \perp u_1$, chceme dk, že také $\varphi(u) \perp u_1$.

$$\langle \varphi(u), \lambda_1 u_1 \rangle = \underline{\langle \varphi(u), \varphi(u_1) \rangle} = \langle u, u_1 \rangle = 0$$

$$\| $$

$$\underset{\substack{\neq \\ 0}}{\bar{\lambda}} \langle \varphi(u), u_1 \rangle \implies \langle \varphi(u), u_1 \rangle = 0 \text{ a } \varphi(u) \in [u_1]^{\perp} = V.$$

Tedy $\varphi/V : V \to V$ je unitární operátor. Dále $\dim V = n-1$.

Proto můžeme na φ aplikovat indukční předpoklad.

Ve V existuje ortonormální báze

$$u_2, u_3, \dots u_n \in V \subseteq U$$

tak, že $\qquad \varphi(u_i) = \lambda_i u_i$

Vezmeme-li $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n) \subseteq U$

dostaneme ortonormální bázi prostoru U tvořenou vlastními

vektory.
$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad |\lambda_i| = 1.$$

Toto neplatí pro ortogonální operátory – tam je situace složitější.

Pro zjednodušení budeme ortogonální operátory uvažovat jako zadané pomocí ortogonálních matic, tj

$$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad \varphi(x) = Ax, \quad A \text{ je ortogonální}$$

a na $\mathbb{R}^n$ bereme standardní skalární součin.

○ Je-li A libovolná reálná matice $n \times n$, která má komplexní vlastní číslo $\lambda = a + ib$ s vlastním vektorem $u = u_1 + iu_2$, $u \in \mathbb{C}^n$, $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^n$. Potom má A rovněž vlastní číslo $\overline{\lambda} = a - ib$ s vlastním vektorem $\overline{u} = u_1 - iu_2$.

Nechť
$$Au = \lambda u$$
$$A(u_1 + iu_2) = (a+ib)(u_1 + iu_2)$$

Komplexní sdružení dává
$$\overline{A}\,\overline{(u_1+iu_2)} = \overline{(a+ib)}\,\overline{(u_1+iu_2)}$$

A je reálná, proto $\overline{A} = A$
$$A(u_1 - iu_2) = (a-ib)(u_1 - iu_2)$$

$u_1 - iu_2$ je vl. vektor s vl. číslem $a - ib$.

○ Je-li A navíc ortogonální, je $\lambda = \cos\alpha + i\sin\alpha$ a platí

(a) $\|u_1\| = \|u_2\|$, $\langle u_1, u_2\rangle = 0$

(b) Vekt. podprostor $[u_1, u_2]$ je invariantní vůči φ a φ na tomto podprostoru je otočení o úhel α od u_2 ke u_1.

<u>Důkaz (a)</u> $u_1 + iu_2$ a $u_1 - iu_2$ jsou vlastní vektory unitárního operátoru $\Phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $\Phi(u) = Au$

A ortogonální je unitární. Podle předchozího jsou vl. vektory k různým vl. číslům kolmé. Proto

$$\langle u_1 + iu_2, u_1 - iu_2 \rangle = 0$$

$$\langle u_1, u_1 \rangle + i\langle u_2, u_1 \rangle - \langle u_1, iu_2 \rangle - \langle iu_2, iu_2 \rangle =$$

$$= \langle u_1, u_1 \rangle + i\langle u_2, u_1 \rangle + i\langle u_1, u_2 \rangle - \langle u_2, u_2 \rangle = 0$$

$$\underbrace{\|u_1\|^2 - \|u_2\|^2}_{\text{reálná část} = 0} + \underbrace{2i\langle u_1, u_2 \rangle}_{\text{im. část} = 0} = 0$$

$$\Rightarrow \|u_1\| = \|u_2\| \quad \langle u_1, u_2 \rangle = 0$$

10

Důkaz (b)

$$\varphi(x) = A x \qquad \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

$$A(u_1 + i u_2) = (\cos\alpha + i \sin\alpha)(u_1 + i u_2)$$

$$\underbrace{A u_1}_{\text{reálná složka}} + i \underbrace{A u_2}_{\text{im. složka}} = \underbrace{\cos\alpha\, u_1 - \sin\alpha\, u_2}_{\text{Reálná část}} + \underbrace{i(\sin\alpha\, u_1 + \cos\alpha\, u_2)}_{\text{im. část}}$$

Porovnáním dostáváme

$$A u_1 = \cos\alpha\, u_1 - \sin\alpha\, u_2$$

$$A u_2 = \sin\alpha\, u_1 + \cos\alpha\, u_2$$

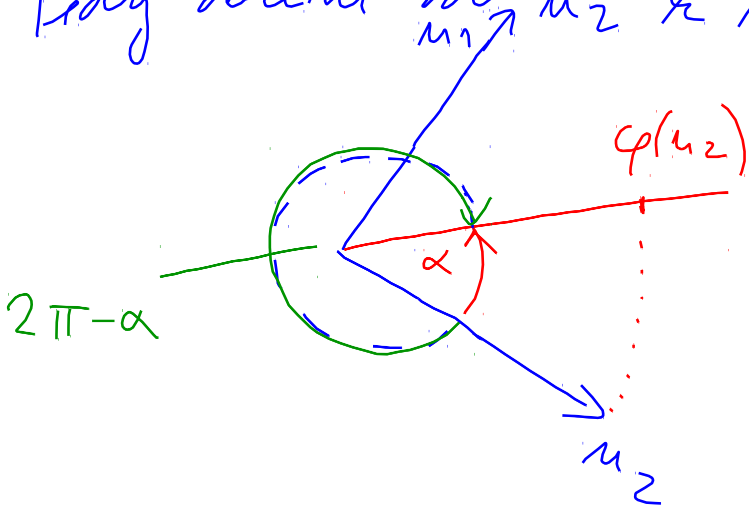
$\varphi(x) = Ax$ je na $[u_1, u_2]$ invariantní.

Matice tohoto zobrazení v bázi $\alpha = (u_2, u_1)$

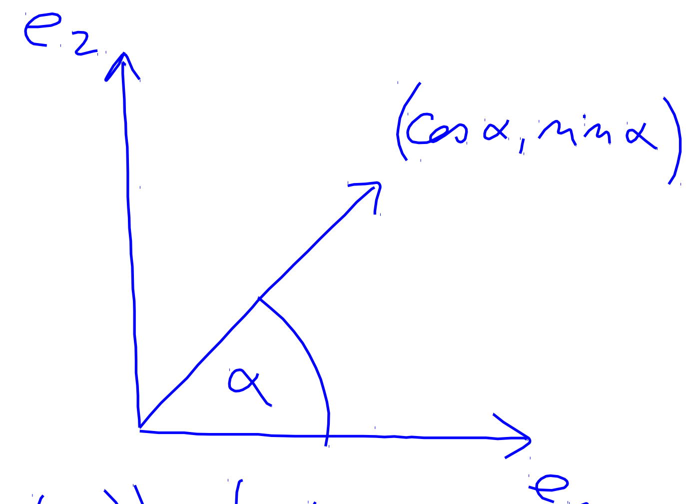
$$\left(\varphi / [u_1, u_2]\right)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \longrightarrow$$

tedy je matice otočení o úhel α od 1. vektoru k 2. vektoru báze.

Tedy otočení od u_2 k u_1 proti směru hod. ručiček o úhel α



$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$



Pokud bychom vzali bázi

$B = (u_1, u_2)$ je

$$(\varphi)_{B,B} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\pi-\alpha) & -\sin(2\pi-\alpha) \\ \sin(2\pi-\alpha) & \cos(2\pi-\alpha) \end{pmatrix}$$

Směr otáčení je dán pořadím vektorů v bázi.

Pro unitární operátory jsme dokázali:

$\varphi : U \to U$ unitární, pak U je direktním součtem navzájem kolmých jednorozměrných invariantních podprostorů. Ty jsou určeny ortonormální bází tvořenou vlastními vektory.

Věta: Je-li $\varphi : U \to U$ ortogonální operátor, pak U je direktním součtem navzájem kolmých podprostorů dimenze 1 a 2. Na prostorech dimenze 1 je φ buď identita (odpovídá vl. číslu 1) nebo $-$identita (vlastní číslo -1). Na prostorech dimenze 2 je φ otočení o úhel α.

$$U = \bigoplus_{i=1}^{k} U_i = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_k$$

$$U_i \perp U_j \quad i \neq j$$

$$\varphi|U_i : U_i \to U_i \quad \begin{cases} \text{identita} \\ -\text{identita} \\ \text{otočení} \end{cases}$$

Základní myšlenka důkazu:

Invariantní podprostory dimenze 1 odpovídají vlastním číslům ± 1.

Invariantní podprostory dimenze 2 odpovídají komplexním vlastním číslům $\cos\alpha + i\sin\alpha$, kde $\sin\alpha \neq 0$.

Mějme
$$\lambda_1 = \cos\alpha + i\sin\alpha \quad \text{s vl. vektorem } u_1 + i u_2$$
$$\overline{\lambda_1} = \cos\alpha - i\sin\alpha \quad (\sin\alpha \neq 0) \quad \longrightarrow \text{podprostor } [u_1, u_2] = U_1$$

a
$$\lambda_2 = \cos\beta + i\sin\beta \quad \text{s vl. vektorem } v_1 + i v_2$$
$$\overline{\lambda_2} = \cos\beta - i\sin\beta \quad (\sin\beta \neq 0) \quad \longrightarrow \text{podprostor } [v_1, v_2] = U_2$$

Dokážeme, že $U_1 \perp U_2$ v případě, že $\lambda \neq \mu$ a $\lambda \neq \overline{\mu}$

Víme, že $\lambda \neq \mu$ implikuje
$$\langle u_1 + i u_2, v_1 + i v_2 \rangle = 0$$

Dále $\lambda \neq \overline{\mu}$ implikuje
$$\langle u_1 + i u_2, v_1 - i v_2 \rangle = 0$$

Z těchto dvou rovnic porovnáním reálných a im. složek, dostaneme

$$\left.\begin{array}{l} \langle u_1, v_1\rangle = 0 \\ \langle u_1, v_2\rangle = 0 \\ \langle u_2, v_1\rangle = 0 \\ \langle u_2, v_2\rangle = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad U_1 \perp U_2$$

Aplikace na dimenzi 3

Každá ortogonální matice 3×3 reprezentuje otáčení kolem osy složené případně se symetrií podle roviny kolmé k ose. Ve vhodné ortonormální bázi, je matice příslušného operátoru rovna

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \varphi(x) = Ax,$ A je ortogonální matice.

A je rovněž unitární. A má nejvýše jedno vlastní číslo reálné, neboť reálný polynom 3. stupně má vždy kořen v $\mathbb{R}$. Toto reálné vl. číslo je ± 1.

Předp. že další vlastní čísla nejsou reálná

$$\pm 1, \quad \cos\alpha + i\sin\alpha, \quad \cos\alpha - i\sin\alpha, \quad \sin\alpha \neq 0$$

Vlastní vektory

$$v \qquad u_1 + i u_2 \qquad u_1 - i u_2$$

Tvrdíme, že vektor v reprezentuje osu otáčení. Rovina kolmá k ní je $[u_1, u_2]$ a v každé rovině jde o otáčení o úhel α od u_2 k u_1.

Typická úloha – zadána matice A řádu 3×3, zjistěte o jaké geometrické zobrazení se jedná. $\varphi(x) = Ax : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

Příklad: $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ $\det(A - \lambda E) =$

$= (1-\lambda)\left(\lambda^2 - \lambda + 1\right)$

Vl. čísla

$\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$

$\lambda_3 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$

vl. vektor

$v = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ $\|v\| = 1.$

$z = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ $u_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ $u_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

Podle předchozí teorie

$\alpha = (v_1, u_2, u_1)$

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ 0 & \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$$

Zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ reprezentuje otočení o úhel $\frac{\pi}{3}$ kolem osy zadané vektorem $v = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Otáčení je ve směru od u_2 k u_1.

Domácí úloha: Zadáno geometricky ortogonální zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Najděte matici A tak, aby

$$\varphi(x) = A x \quad \text{ve stand. souřadnicích.}$$

Příklad $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, otočení kolem osy $x_1 = x_2, x_3 = 0$ o úhel $\frac{\pi}{2}$ tak, že $\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ má všechny složky kladné.

Řešení: Zvolíme vhodnou ortonormální bázi a napíšeme matici φ nejprve v této bázi, protože je to jednodušší.

19

$$v_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)^T$$

osa otáčení

$$v_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

$$v_3 = (0, 0, 1)$$

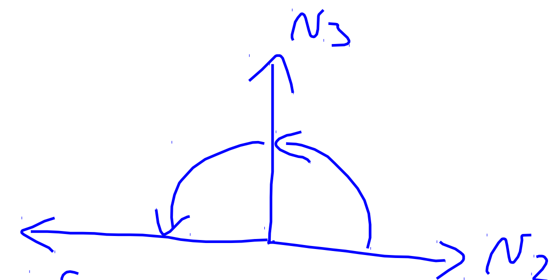
$$\varphi(v_1) = v_1$$

$$\varphi(v_2) = v_3$$ z geometrické představy

$$\varphi(v_3) = -v_2$$

$$\alpha = (v_1, v_2, v_3)$$

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ 0 & \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$$ $-v_2$



20

$$(\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon} = (id)_{\varepsilon,\alpha} (\varphi)_{\alpha,\alpha} (id)_{\alpha,\varepsilon}$$

matice přechodu

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ortogonální, neboť je matice přechodu mezi ortonorm. bázemi

$$(id)_{\varepsilon,\alpha}^{-1} = (id)_{\varepsilon,\alpha}^{T}$$ neb je ortogonální

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vynásobíme a dostaneme $(\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$