Odchylky afinních podprostorů v euklidovském prostoru

Buď $n \in \mathbb{N}$ přirozené číslo. Budeme se věnovat odchylkám afinních podprostorů kladných dimenzí v euklidovském vektorovém prostoru $\mathbf{E}_n$, to jest ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^n$ se standardním skalárním součinem $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$.

Odchylku dvou afinních podprostorů $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ kladných dimenzí v euklidovském vektorovém prostoru $\mathbf{E}_n$ značíme symbolem $\measuredangle(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ a definujeme ji jako odchylku $\measuredangle(\mathcal{Z}(\mathcal{P}), \mathcal{Z}(\mathcal{Q}))$ zaměření $\mathcal{Z}(\mathcal{P})$, $\mathcal{Z}(\mathcal{Q})$ těchto afinních podprostorů:

$$\measuredangle(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = \measuredangle(\mathcal{Z}(\mathcal{P}), \mathcal{Z}(\mathcal{Q})).$$

To znamená, že se v dalším výkladu můžeme omezit na odchylky nenulových vektorových podprostorů euklidovského vektorového prostoru $\mathbf{E}_n$.

V následující definici odchylky dvou nenulových vektorových podprostorů euklidovského vektorového prostoru $\mathbf{E}_n$ budou figurovat odchylky dvojic nenulových vektorů z $\mathbb{R}^n$ vypočtené v euklidovském prostoru $\mathbf{E}_n$. Připomeňme proto, že pro odchylku $\measuredangle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ libovolných dvou nenulových vektorů $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ v euklidovském prostoru $\mathbf{E}_n$ jsme v předchozím textu odvodili formuli:

$$\cos \measuredangle(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}||}.$$

Doplňme ještě, že pro libovolné dva nenulové vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ odtud plyne vztah

$$-1 \leqslant \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}||} \leqslant 1,$$

což je fakticky instance Cauchyho-Schwarzovy nerovnosti. Pro kterékoliv dva nenulové vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ to má za následek, že tyto dva vektory mají v euklidovském prostoru $\mathbf{E}_n$ podle předchozí formule jednoznačně určenou odchylku $\measuredangle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ nacházející se v intervalu $<0, \pi>$.

Jsou-li nyní $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$ dva nenulové vektorové podprostory v euklidovském vektorovém prostoru $\mathbf{E}_n$ splňující podmínku $\mathbf{V} \cap \mathbf{W} = \{\mathbf{o}\}$, je jejich odchylka $\measuredangle(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ v euklidovském prostoru $\mathbf{E}_n$ definována formulí

$$\measuredangle(\mathbf{V}, \mathbf{W}) = \inf\big\{\measuredangle(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbf{x} \in \mathbf{V} - \{\mathbf{o}\}, \mathbf{y} \in \mathbf{W} - \{\mathbf{o}\}\big\}.$$

Je zřejmé, na rozdíl od odchylky dvou nenulových vektorů v euklidovském prostoru $\mathbf{E}_n$, že odchylka dvou nenulových vektorových podprostorů v euklidovském prostoru $\mathbf{E}_n$, jejichž průnik je nulový podprostor, se vždy nachází v intervalu $<0, \frac{\pi}{2}>$.

V dalším výkladu se nebudeme věnovat obecnému případu odchylky dvou nenulových vektorových podprostorů $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$ v euklidovském vektorovém prostoru $\mathbf{E}_n$ splňujících podmínku $\mathbf{V} \cap \mathbf{W} = \{\mathbf{o}\}$, ale omezíme se pouze na studium některých speciálních případů, vesměs převoditelných na situaci, kdy alespoň jeden ze zmíněných vektorových podprostorů $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$ je jednorozměrný. Pro obecný případ odkazujeme například na skripta:

Bohumil Šmarda, Lineární algebra, SPN, Praha 1985, kap. IX, §5.

Nicméně z obecných poznatků o odchylkách dvou nenulových vektorových podprostorů $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$ v euklidovském vektorovém prostoru $\mathbf{E}_n$ splňujících podmínku $\mathbf{V} \cap \mathbf{W} = \{\mathbf{o}\}$ plyne, že odchylka takových dvou vektorových podprostorů $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$ se vždy realizuje jako odchylka vhodných konkrétních nenulových vektorů $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ a $\mathbf{y} \in \mathbf{W}$. To ale znamená, že předchozí definiční formuli pro odchylku dvou nenulových vektorových podprostorů $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$ v euklidovském vektorovém prostoru $\mathbf{E}_n$ splňujících podmínku $\mathbf{V} \cap \mathbf{W} = \{\mathbf{o}\}$ lze přepsat ve tvaru

$$\measuredangle(\mathbf{V}, \mathbf{W}) = \min\bigl\{\measuredangle(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbf{x} \in \mathbf{V} - \{\mathbf{o}\}, \mathbf{y} \in \mathbf{W} - \{\mathbf{o}\}\bigr\}.$$

Poznamenejme ještě, že doposud diskutovaný případ, kdy $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$ jsou dva nenulové vektorové podprostory v euklidovském vektorovém prostoru $\mathbf{E}_n$ splňující podmínku $\mathbf{V} \cap \mathbf{W} = \{\mathbf{o}\}$, v sobě zahrnuje jako speciální případ situaci, kdy je splněno $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{V}^\perp$ (což je ekvivalentní tomu, že je splněno $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{W}^\perp$). V této situaci ale zřejmě máme $\measuredangle(\mathbf{V}, \mathbf{W}) = \frac{\pi}{2}$.

Dokončeme nyní definici odchylky dvou nenulových vektorových podprostorů $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$ v euklidovském vektorovém prostoru $\mathbf{E}_n$ v případě, kdy $\mathbf{V} \cap \mathbf{W} \neq \{\mathbf{o}\}$. Jestliže $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{W}$ nebo $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{V}$, pak přirozeně klademe $\measuredangle(\mathbf{V}, \mathbf{W}) = 0$. Jestliže však $\mathbf{V} \cap \mathbf{W} \neq \{\mathbf{o}\}$, avšak současně $\mathbf{V} \not\subseteq \mathbf{W}$ a $\mathbf{W} \not\subseteq \mathbf{V}$, pak uvážíme vektorové podprostory $\overline{\mathbf{V}} = \mathbf{V} \cap (\mathbf{V} \cap \mathbf{W})^\perp$ a $\overline{\mathbf{W}} = \mathbf{W} \cap (\mathbf{V} \cap \mathbf{W})^\perp$. Pak zřejmě $\overline{\mathbf{V}}$ a $\overline{\mathbf{W}}$ jsou nenulové vektorové podprostory euklidovského vektorového prostoru $\mathbf{E}_n$ splňující podmínku $\overline{\mathbf{V}} \cap \overline{\mathbf{W}} = \{\mathbf{o}\}$. V tom případě klademe $\measuredangle(\mathbf{V}, \mathbf{W}) = \measuredangle(\overline{\mathbf{V}}, \overline{\mathbf{W}})$.

Věnujme se nyní konkrétně situaci, kdy vektorový podprostor $\mathbf{V}$ euklidovského vektorového prostoru $\mathbf{E}_n$ je jednorozměrný. To znamená, že $\mathbf{V} = [\mathbf{u}]$ pro některý (kterýkoliv) nenulový vektor $\mathbf{u}$ z $\mathbf{V}$. Máme určit odchylku vektorového podprostoru $\mathbf{V}$ od nenulového vektorového podprostoru $\mathbf{W}$. V takovém případě obvykle mluvíme o odchylce vektoru $\mathbf{u}$ od vektorového podprostoru $\mathbf{W}$ a značíme ji symbolem $\measuredangle(\mathbf{u}, \mathbf{W})$. Pokud $\mathbf{u} \in \mathbf{W}$, pak ovšem $\measuredangle(\mathbf{u}, \mathbf{W}) = 0$. Pokud $\mathbf{u} \in \mathbf{W}^\perp$, pak zřejmě $\measuredangle(\mathbf{u}, \mathbf{W}) = \frac{\pi}{2}$. Pokud však $\mathbf{u} \notin \mathbf{W}$ a také $\mathbf{u} \notin \mathbf{W}^\perp$, uvažme ortogonální projekci $\mathbf{z}$ vektoru $\mathbf{u}$ do vektorového podprostoru $\mathbf{W}$. Poněvadž $\mathbf{u} \notin \mathbf{W}^\perp$, je $\mathbf{z} \neq \mathbf{o}$. Poněvadž dále $\mathbf{u} \notin \mathbf{W}$, je také $\mathbf{u} - \mathbf{z} \neq \mathbf{o}$, a navíc $\mathbf{V} \cap \mathbf{W} = \{\mathbf{o}\}$. Uvidíme, že pak $\measuredangle(\mathbf{u}, \mathbf{W}) = \measuredangle(\mathbf{u}, \mathbf{z})$. K tomu stačí podle definice odchylky vektorových podprostorů $\mathbf{V} = [\mathbf{u}]$ a $\mathbf{W}$ ukázat, že pro libovolný nenulový vektor $\mathbf{y} \in \mathbf{W}$ je $\measuredangle(\mathbf{u}, \mathbf{y}) \geqslant \measuredangle(\mathbf{u}, \mathbf{z})$. Poněvadž ale $\mathbf{u} - \mathbf{z} \in \mathbf{W}^\perp$, dostáváme

$$\begin{aligned}
\cos \measuredangle(\mathbf{u}, \mathbf{y}) &= \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{y} \rangle}{||\mathbf{u}|| \cdot ||\mathbf{y}||} = \frac{\langle \mathbf{z} + \mathbf{u} - \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle}{||\mathbf{u}|| \cdot ||\mathbf{y}||} \\
&= \frac{\langle \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle}{||\mathbf{u}|| \cdot ||\mathbf{y}||} + \frac{\langle \mathbf{u} - \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle}{||\mathbf{u}|| \cdot ||\mathbf{y}||} = \frac{\langle \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle}{||\mathbf{u}|| \cdot ||\mathbf{y}||} \\
&\leqslant \frac{||\mathbf{z}|| \cdot ||\mathbf{y}||}{||\mathbf{u}|| \cdot ||\mathbf{y}||} = \frac{||\mathbf{z}||}{||\mathbf{u}||} = \frac{\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle}{||\mathbf{u}|| \cdot ||\mathbf{z}||} \\
&= \frac{\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle}{||\mathbf{u}|| \cdot ||\mathbf{z}||} + \frac{\langle \mathbf{u} - \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle}{||\mathbf{u}|| \cdot ||\mathbf{z}||} = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{z} \rangle}{||\mathbf{u}|| \cdot ||\mathbf{z}||} = \cos \measuredangle(\mathbf{u}, \mathbf{z})
\end{aligned}$$

s využitím Cauchyho-Schwarzovy nerovnosti. Poněvadž funkce $\cos\varphi$ je na intervalu $<0, \pi>$ klesající, plyne odtud výše zmíněná potřebná nerovnost $\measuredangle(\mathbf{u}, \mathbf{y}) \geqslant \measuredangle(\mathbf{u}, \mathbf{z})$ pro každý nenulový vektor $\mathbf{y} \in \mathbf{W}$. To potvrzuje, že

$$\measuredangle(\mathbf{u}, \mathbf{W}) = \measuredangle(\mathbf{u}, \mathbf{z}),$$

kde $\mathbf{z}$ je ortogonální projekce vektoru $\mathbf{u}$ do vektorového podprostoru $\mathbf{W}$ v euklidovském prostoru $\mathbf{E}_n$.

Dále se krátce věnujme situaci, kdy $n > 1$ a kdy vektorový podprostor $\mathbf{V}$ euklidovského vektorového prostoru $\mathbf{E}_n$ má dimenzi $n-1$, tedy situaci, kdy vektorový podprostor $\mathbf{V}$ je nadrovina v euklidovském vektorovém prostoru $\mathbf{E}_n$. Tehdy jeho ortogonální doplněk $\mathbf{V}^\perp$ je jednorozměrný vektorový podprostor, takže máme $\mathbf{V}^\perp = [\mathbf{r}]$, anebo ekvivalentně $\mathbf{V} = [\mathbf{r}]^\perp$ pro některý (kterýkoliv) nenulový vektor $\mathbf{r}$ z $\mathbf{V}^\perp$. Takový vektor $\mathbf{r}$ se nazývá normálový vektor nadroviny $\mathbf{V}$. Výpočet odchylky této nadroviny $\mathbf{V}$ od nenulového vlastního vektorového podprostoru $\mathbf{W}$ euklidovského vektorového prostoru $\mathbf{E}_n$ lze převést na výpočet odchylky normálového vektoru $\mathbf{r}$ nadroviny $\mathbf{V}$ od zmíněného vektorového podprostoru $\mathbf{W}$. Platí totiž následující tvrzení (viz například skripta MFF Univerzity Komenského: Pavol Zlatoš, Lineárna algebra a geometria, Bratislava 2010, §14.3).

Pro libovolný nenulový vlastní vektorový podprostor $\mathbf{W}$ euklidovského vektorového prostoru $\mathbf{E}_n$ a pro libovolný nenulový vektor $\mathbf{r}$ z tohoto euklidovského vektorového prostoru platí rovnost

$$\measuredangle(\mathbf{r}, \mathbf{W}) \,+\, \measuredangle([\mathbf{r}]^\perp, \mathbf{W}) \,=\, \frac{\pi}{2}.$$

Dlužno podotknout, že bez předpokladu, že v tomto tvrzení vystupuje jen nenulový vektor $\mathbf{r}$ sám, jinak řečeno, že zde figuruje pouze jednorozměrný vektorový podprostor $[\mathbf{r}]$, tato rovnost obecně neplatí.

Na základě poznatků z předchozích odstavců umíme odchylku $\measuredangle(\mathbf{r}, \mathbf{W})$ v této rovnosti vypočítat. Umíme proto vypočítat i odchylku $\measuredangle([\mathbf{r}]^\perp, \mathbf{W})$, to jest, při označení z předminulého odstavce, umíme vypočítat i odchylku $\measuredangle(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ nadroviny $\mathbf{V} = [\mathbf{r}]^\perp$ od vektorového podprostoru $\mathbf{W}$.

Navíc pro libovolný nenulový vlastní vektorový podprostor $\mathbf{W}$ euklidovského vektorového prostoru $\mathbf{E}_n$ a pro libovolný nenulový vektor $\mathbf{r}$ z tohoto euklidovského vektorového prostoru platí zřejmě rovnost

$$\measuredangle(\mathbf{r}, \mathbf{W}) \,+\, \measuredangle(\mathbf{r}, \mathbf{W}^\perp) \,=\, \frac{\pi}{2}.$$

Kombinací této rovnosti s předchozí rovností dostáváme konečně rovnost

$$\measuredangle([\mathbf{r}]^\perp, \mathbf{W}) \,=\, \measuredangle(\mathbf{r}, \mathbf{W}^\perp).$$

Přitom rovněž odchylku $\measuredangle(\mathbf{r}, \mathbf{W}^\perp)$ umíme na základě poznatků z minulých odstavců vypočítat. Dostáváme tak další možnost, jak vypočítat i odchylku $\measuredangle([\mathbf{r}]^\perp, \mathbf{W})$, to jest, při dřívějším označení, máme další způsob, jak vypočítat i odchylku $\measuredangle(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ nadroviny $\mathbf{V} = [\mathbf{r}]^\perp$ od vektorového podprostoru $\mathbf{W}$ v euklidovském vektorovém prostoru $\mathbf{E}_n$.