Domácí úkoly ke cvičení č. 11

1. Nechť lineární operátor $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je ortogonální transformací euklidovského prostoru $\mathbf{E}_3$, která je osovou symetrií podle osy procházející počátkem a kolmé k rovině zadané implicitně jako množina všech řešení homogenní lineární rovnice

$$2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0.$$

Najděte matici lineárního operátoru ψ ve standardní bázi vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$. Rozhodněte, zda tento lineární operátor ψ je současně také samoadjungovaným operátorem na euklidovském prostoru $\mathbf{E}_3$ či nikoliv.

2. Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ buď dána rovina ϱ procházející počátkem a zadaná implicitně jako množina všech řešení homogenní lineární rovnice

$$\varrho : \; 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 0.$$

Ověřte, že zobrazení $\wp_\varrho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ přiřazující každému vektoru $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ jeho ortogonální projekci $\wp_\varrho(\mathbf{u})$ do roviny ϱ v euklidovském prostoru $\mathbf{E}_3$ je lineárním operátorem na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$. Najděte matici tohoto lineárního operátoru $\wp_\varrho$ ve standardní bázi vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$. Rozhodněte, zda lineární operátor $\wp_\varrho$ je samoadjungovaným operátorem na euklidovském prostoru $\mathbf{E}_3$ či nikoliv.

3. Nechť kvadratické formy U, V, W na euklidovském prostoru $\mathbf{E}_3$ mají ve standardních souřadnicích vyjádření tvarů

$$\begin{aligned}
U(\mathbf{x}) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3,\\
V(\mathbf{x}) &= 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3,\\
W(\mathbf{x}) &= 3x_1^2 + 6x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3.
\end{aligned}$$

Ortogonální transformací souřadnic převeďte každou z těchto kvadratických forem na diagonální kanonický tvar. Ke každé z uvedených tří kvadratických forem udejte její příslušnou ortonormální polární bázi. Tzn. najděte ortonormální bázi euklidovského prostoru $\mathbf{E}_3$, v jejíchž souřadnicích nabývá daná kvadratická forma zmíněného kanonického tvaru.

4. Nechť kvadratické formy G, H na euklidovském prostoru $\mathbf{E}_4$ mají ve standardních souřadnicích vyjádření tvarů

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}) &= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_1x_4 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad + 2x_2x_3 - 2x_2x_4 + 2x_3x_4, \\ H(\mathbf{x}) &= 4x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 4x_2x_4. \end{aligned}$$

Ortogonální transformací souřadnic převeďte každou z těchto kvadratických forem na diagonální kanonický tvar. Ke každé z uvedených dvou kvadratických forem udejte její příslušnou ortonormální polární bázi. Tzn. najděte ortonormální bázi euklidovského prostoru $\mathbf{E}_4$, v jejíchž souřadnicích nabývá daná kvadratická forma zmíněného kanonického tvaru.