

Lineární programování – jaro 2013 – 2. termín

1. (15 bodů) Máme za úkol vytvořit volební program politické strany, který sestává z n kapitol. Do každé kapitoly můžeme napsat reformní plány a populistická hesla. Zbytek programu bude tvořen nicneříkajícími frázemi. Pokud i -tá kapitola (pro $i = 1, \dots, n$) bude obsahovat x procent reformních plánů, ztratíme $a_i x$ milionů hlasů voličů, ale získáme $b_i x$ milionů nových kmenových voličů. Bude-li i -tá kapitola obsahovat x procent populistických hesel, získáme $c_i x$ milionů hlasů, ale ztratíme $d_i x$ milionů kmenových voličů. Formulujte Farkasovo lemma udávající nutnou a postačující podmínku na čísla a_i, b_i, c_i, d_i , abychom mohli vytvořit program splňující současně následující podmínky:

- Přibude nám alespoň milion hlasů.
- Nesníží se nám počet kmenových voličů.
- V jednotlivých kapitolách programu je v průměru nejvýše 50 procent nicneříkajících frází.

2. (20 bodů) Určete funkci f vektoru proměnných z , matici F a vektor a takové, že úloha lineárního programování

$$\max \{ f \mid zF = a, z \leq 1 \}$$

je duální k úloze

$$\min \{ cx \mid yA = p, Bx = q, |yb| \leq dx \}.$$

Formulujte větu o dualitě pro tuto dvojici úloh.

(x je sloupcový vektor proměnných; y je řádkový vektor proměnných; A a B jsou matice; b, c, d, p a q jsou vektory; 1 značí vektor $(1, \dots, 1)$)

3. (25 bodů) Formulujte větu o rozkladu polyedrů a definujte v ní použité pojmy. Dokažte libovolnou ze dvou implikací této věty. Předvedte rozklad uvedený v této větě na polyedru

$$\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \geq 1, x - y \leq 2, y - x \leq 2 \}.$$

Přitom útvary, na které polyedr rozkládáte, zadejte v souladu s příslušnými definicemi.

4. (30 bodů) Vyřešte primární simplexovou metodou úlohu lineárního programování

$$\text{minimalizovat } 2x + y + z - 9t$$

při omezeních $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, t \geq 0$ a

$$\begin{aligned} x - y - 2z &\leq -20, \\ 2x - 2y - 4z - t &\geq -47, \\ x &\quad - 2t \geq -6, \\ z + t &\leq 8. \end{aligned}$$

Poté využijte závěrečnou simplexovou tabulku k vyřešení úlohy, která vznikne z původní úlohy nahrazením čísla 8 na pravé straně poslední nerovnice číslem 5, duální metodou.