

Lineární programování – jaro 2014 – 2. termín

1. (15 bodů) Formulujte Farkasovo lemma udávající nutnou a postačující podmínku na matici A , vektory a a b a číslo α , aby existoval v polyedru

$$\{x \in \mathbb{R}^m \mid xA \leq a, \alpha \cdot x \geq b\}$$

bod, jehož žádné dvě složky se od sebe neliší o více než o 1.

2. (20 bodů) Určete funkci f vektoru proměnných z , matici F a vektor a takové, že úloha lineárního programování

$$\max \{f \mid zF = a, z \geq 1\}$$

je duální k úloze

$$\min \{cx \mid yA = p, Bx \geq q, |yb| \leq dx\}.$$

Formulujte větu o dualitě pro tuto dvojici úloh.

(x je sloupcový vektor proměnných; y je řádkový vektor proměnných; A a B jsou matice; b, c, d, p a q jsou vektory; 1 značí vektor $(1, \dots, 1)$)

3. (25 bodů) Definujte polyedry, polytopy a konečně generované konvexní kužely. Popište konstrukci, která z polytopů a konečně generovaných konvexních kuželů vytvoří právě všechny polyedry. Dokažte, že každý polyedr je opravdu možné touto konstrukcí získat. Uveďte charakterizaci těch polyedrů, které lze touto konstrukcí získat jediným způsobem. Popište polyedr vytvořený z polytopu generovaného množinou $\{(-1, 0), (1, 0)\}$ a konvexního kužele generovaného množinou $\{(-1, -1), (1, 1)\}$ v souladu s definicí polyedru.
4. (30 bodů) Vyřešte primární simplexovou metodou úlohu lineárního programování

$$\text{minimalizovat } 2x + y - 10z - t$$

při omezeních $x \geq 0, y \geq 0, 8 \geq z \geq 0, t \geq 0$ a

$$\begin{aligned}x - y + 2z + 2t &\leq -4, \\2x - 2y + 3z + 4t &\geq -15, \\x - 2z - t &\geq -6.\end{aligned}$$

Poté využijte závěrečnou simplexovou tabulku k vyřešení úlohy, která vznikne z původní úlohy nahrazením podmínky $8 \geq z$ podmínkou $2 \geq z$, duální metodou.