

Systemy lineárných diferenciálních rovnic prvého rádu

Peter Šepitka

podzim 2014

Obsah

- 1 Obyčajné diferenciálne rovnice prvého rádu – opakovanie
- 2 Systémy lineárnych diferenciálnych rovníc
- 3 Homogénny systém lineárnych diferenciálnych rovníc
- 4 Nehomogénny systém lineárnych diferenciálnych rovníc
- 5 Lineárne diferenciálne rovnice vyšších rádov
- 6 Systémy s konštantnými koeficientami

Obsah

- 1 **Obyčajné diferenciálne rovnice prvého rádu – opakovanie**
- 2 Systémy lineárnych diferenciálnych rovníc
- 3 Homogénny systém lineárnych diferenciálnych rovníc
- 4 Nehomogénny systém lineárnych diferenciálnych rovníc
- 5 Lineárne diferenciálne rovnice vyšších rádov
- 6 Systémy s konštantnými koeficientami

Základné pojmy

Nech $F : M \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ je daná funkcia. Rovnica

$$F(x, y, y') = 0, \quad \text{kde } ' := \frac{d}{dx}, \quad (1)$$

sa nazýva **obyčajná diferenciálna rovnica prvého rádu**. Riešenie (integrál) rovnice (1) je každá funkcia $y = \varphi(x)$, ktorá má deriváciu na intervale $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ a pre $\forall x \in \mathcal{I}$ platí

$$[x, \varphi(x), \varphi'(x)] \subseteq M \quad \text{a} \quad F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0.$$

Graf funkcie $y = \varphi(x)$, t.j., množina $\{[x, y] \subseteq \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathcal{I}, y = \varphi(x)\}$, sa nazýva **integrálna krivka** rovnice (1). V prípade, ak je možné upraviť rovnicu (1) na tvar

$$y' = f(x, y), \quad (2)$$

kde $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je funkcia, rovnica (2) sa nazýva **ODR I. rádu rozriešená vzhľadom na deriváciu**. Rovnica (1) sa nazýva **nerozriešená vzhľadom na deriváciu**.

- **Začiatočná (Cauchyho) úloha (problém)** – hľadáme riešenie $y = \varphi(x)$ rovnice (2), ktorého integrálna krivka prechádza pevne zvoleným bodom $[x_0, y_0] \in D$, t.j.,

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \quad (3)$$

Riešenie úlohy (3) sa nazýva **partikulárne riešenie** rovnice (2).

- **Všeobecné riešenie** rovnice (2) – funkcia $y = \varphi(x, C)$ závislá na jednom reálnom parametre C , pomocou ktorej možno vhodnou voľbou C získať riešenie každej úlohy (3) (t.j., pre každú voľbu $[x_0, y_0] \in D$).
- **Úplné (maximálne) riešenie** – problém predlžovania riešení úlohy (3).
- **Singulárne riešenie** – porušená jednoznačnosť úlohy (3) v každom bode integrálnej krivky.

Príklad 1

$$y' = \frac{y}{x}.$$

Funkcia $y = Cx$ je všeobecné riešenie uvedenej rovnice na intervaloch $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$. Každá začiatočná úloha

$$y' = \frac{y}{x}, \quad y(x_0) = y_0$$

totiž spĺňa $x_0 \neq 0$ a funkcia $y = C_0x$ pre $C_0 = y_0/x_0$ je jej riešením na $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$. Zároveň je to jediné a úplné riešenie tejto začiatočnej úlohy na intervaloch $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$.

Príklad 2

$$y' = -y^2.$$

Funkcia $y = (x + C)^{-1}$ je pre každé $C \in \mathbb{R}$ jediným a úplným riešením uvedenej rovnice na intervaloch $(-\infty, -C)$ a $(-C, \infty)$, avšak nie je to všeobecné riešenie tejto rovnice, pretože nevyčerpáva napr. riešenie začiatočnej úlohy

$$y' = -y^2, \quad y(1) = 0.$$

Táto začiatočná úloha má jediné a úplné riešenie $y = 0$ na celej reálnej osi.

Príklad 3

$$y' = 3y^{\frac{2}{3}}, \quad y(0) = 0.$$

Funkcie $y = 0$ a $y = x^3$ sú dve rôzne úplné riešenia tejto začiatočnej úlohy. Riešenie $y = 0$ je zároveň singulárnym riešením danej rovnice.

Veta 1 (Existencia a jednoznačnosť riešení)

Nech $D \subseteq \mathbb{R}^2$ je oblasť a $[x_0, y_0] \in D$ je daný bod. Uvažujme začiatočnú úlohu

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \quad (4)$$

kde funkcia f je definovaná na D . Platí:

- 1 Ak f je spojitá na D , potom existuje interval \mathcal{I} a funkcia φ tak, že $y = \varphi(x)$ je riešenie úlohy (4) na \mathcal{I} .
- 2 Ak navyše i $\partial f / \partial y$ je spojitá na D , potom pre každé riešenie $y = \psi(x)$ úlohy (4) definované na intervale \mathcal{J} platí

$$\psi(x) = \varphi(x) \quad \text{pre } \forall x \in \mathcal{J} \cap \mathcal{I}.$$

Niektoré špeciálne typy ODR I. rádu

- ODR so separovateľnými premennými

$$y' = g(x) h(y). \quad (5)$$

- Lineárna diferenciálna rovnica prvého rádu

$$y' = p(x) y + q(x). \quad (6)$$

- Bernoulliho diferenciálna rovnica

$$y' = p(x) y + q(x) y^k, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}. \quad (7)$$

- Exaktná diferenciálna rovnica

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0, \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \quad (8)$$

Obsah

- 1 Obyčajné diferenciálne rovnice prvého rádu – opakovanie
- 2 Systémy lineárnych diferenciálnych rovníc**
- 3 Homogénny systém lineárnych diferenciálnych rovníc
- 4 Nehomogénny systém lineárnych diferenciálnych rovníc
- 5 Lineárne diferenciálne rovnice vyšších rádov
- 6 Systémy s konštantnými koeficientami

Definícia a základné pojmy

Nech $n \in \mathbb{N}$. Súbor rovníc

$$\begin{aligned}x_1' &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t), \\x_2' &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t), \\&\vdots \\x_n' &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t),\end{aligned}\tag{9}$$

kde a_{ij} a b_i , $i, j = 1, \dots, n$ sú reálne funkcie definované a spojité na reálnom intervale \mathcal{I} (pripúšťame aj $\mathcal{I} = (-\infty, \infty)$) a znak $'$ znamená d/dt , sa nazýva **system lineárnych diferenciálnych rovníc I. rádu**. Ak $b_i \equiv 0$ na \mathcal{I} pre každé $i = 1, \dots, n$, systém (9) sa nazýva **homogénny**. V opačnom prípade, t.j., $b_i \not\equiv 0$ pre aspoň jedno $i = 1, \dots, n$, hovoríme o **nehomogennom** systéme.

Zavedením označenia

$$A(t) := \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad b(t) := \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}, \quad x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (10)$$

môžeme systém (9) prepísať do tzv. **vektorového tvaru**

$$x' = A(t)x + b(t). \quad (11)$$

Zobrazenia $t \mapsto A(t)$, $t \mapsto b(t)$ a $t \mapsto x(t)$ sa nazývajú **maticová (rádu n) a vektorové (n -vektorové)** funkcie na intervale \mathcal{I} . Platia pre ne všetky známe vlastnosti matic a vektorov. Limity, spojitosť, derivovanie a integrovanie sa realizujú vždy po jednotlivých maticových prvkoch, resp. vektorových zložkách.

Systém (11) sa nazýva **homogénny**, ak $b(t) \equiv 0$ na \mathcal{I} . V opačnom prípade je systém (11) **nehomogénny** a rovnica

$$x' = A(t)x$$

sa nazýva **pridružený homogénny systém** k nehomogénnemu systému (11).

Riešením systému (11) rozumieme každú n -vektorovú funkciu

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))^T$$

definovanú a diferencovateľnú na $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$, ktorá spĺňa rovnicu (11) na \mathcal{J} , t.j.,

$$\varphi'(t) = A(t)\varphi(t) + b(t), \quad \forall t \in \mathcal{J}.$$

Začiatočná (Cauchyho) úloha

$$x' = A(t)x + b(t), \quad x(t_0) = \eta, \tag{12}$$

kde $t_0 \in \mathcal{I}$ je pevný bod a $\eta \in \mathbb{R}^n$ je pevný vektor. Riešenie úlohy (12) sa nazýva aj **partikulárne riešenie**.

Existencia a jednoznačnosť riešení

Lema 1

Nech maticová funkcia A a vektorová funkcia b sú definované a spojité na intervale \mathcal{I} . Potom funkcia φ je riešenie začiatočnej úlohy (12) na celom \mathcal{I} práve vtedy keď

$$\varphi(t) = \eta + \int_{t_0}^t [A(s)\varphi(s) + b(s)] ds \quad \text{pre každé } t \in \mathcal{I}. \quad (13)$$

Poznámka 1

Lema 1 vyjadruje ekvivalenciu medzi úlohou (12) a integrálnou rovnicou (13). Stačí sa preto obmedziť na vyšetrowanie rovnice (13).

Dôkaz Lemy 1.

Nech $t \in \mathcal{I}$. Ak φ je riešenie úlohy (12), t.j. platí

$$\varphi'(s) = A(s)\varphi(s) + b(s) \quad \text{na } \mathcal{I}, \quad (14)$$

potom integráciou oboch strán rovnice (14) od t_0 po t a využitím začiatočnej podmienky $\varphi(t_0) = \eta$ získame integrálnu rovnicu (13), nakoľko

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \varphi'(s) ds &= \int_{t_0}^t [A(s)\varphi(s) + b(s)] ds, \\ \varphi(t) - \varphi(t_0) &= \int_{t_0}^t [A(s)\varphi(s) + b(s)] ds, \\ \varphi(t) &= \eta + \int_{t_0}^t [A(s)\varphi(s) + b(s)] ds. \end{aligned}$$

Naopak, nech φ je riešenie rovnice (13). Potom $\varphi(t_0) = \eta$ a funkcia φ je diferencovateľná na \mathcal{I} . Derivovaním oboch strán rovnice (13) podľa t dostaneme $\varphi'(t) = A(t)\varphi(t) + b(t)$ pre každé $t \in \mathcal{I}$. ■

Veta 2 (Existencia a globálna jednoznačnosť riešení)

Nech maticová funkcia A a vektorová funkcia b sú definované a spojité na intervale \mathcal{I} . Potom úloha (12), t.j., začiatočná úloha

$$x' = A(t)x + b(t), \quad x(t_0) = \eta$$

má pre každé $t_0 \in \mathcal{I}$ a $\eta \in \mathbb{R}^n$ práve jedno úplné riešenie, t.j., riešenie, ktoré existuje na celom \mathcal{I} . Toto riešenie možno vyjadriť ako limitu tzv. Picardovej postupnosti postupných aproximácií $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$, kde pre každé $t \in \mathcal{I}$ platí

$$\varphi_0(t) \equiv 0, \quad \varphi_{k+1}(t) = \eta + \int_{t_0}^t [A(s)\varphi_k(s) + b(s)] ds, \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (15)$$

Poznámka 2

Tvrdenie Vety 2 zostane v platnosti, ak za začiatočnú Picardovu aproximáciu φ_0 zoberieme ľubovoľnú funkciu definovanú a spojitú na \mathcal{I} . Limitná funkcia postupnosti $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ nezávisí na výbere funkcie φ_0 .

Dôkaz Vety 2 (náčrt).

1 Existencia

Funkcie φ_k sú definované na celom \mathcal{I} pre každé $k \in \mathbb{N}_0$. Ukážeme, že postupnosť $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ konverguje **lokálne rovnomerne (skoro rovnomerne)** na intervale \mathcal{I} . To zaručuje existenciu funkcie φ , ktorá je definovaná na celom \mathcal{I} a spĺňa

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(t) = \varphi(t) \quad (16)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t [A(s) \varphi_k(s) + b(s)] ds = \int_{t_0}^t [A(s) \varphi(s) + b(s)] ds \quad (17)$$

pre každé $t \in \mathcal{I}$. Z rovností (16) a (17) vyplýva, že φ rieši integrálnu rovnicu (13) na celom \mathcal{I} . Podľa Lemy 1 je potom funkcia φ riešením začiatkovej úlohy (12) na celom \mathcal{I} .

2 Jednoznačnosť

Jednoznačnosť riešenia začiatkovej úlohy (12) na intervale \mathcal{I} vyplýva z **Gronwallovej lemy**.



Príklad 4

Začiatočná úloha

$$x_1' = -\frac{x_2}{t} + 9t, \quad x_2' = -\frac{x_1}{t} - 3t, \quad x_1(1) = 1, \quad x_2(1) = 2$$

má na intervale $(0, \infty)$ jediné úplné riešenie, pretože funkcie

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{t} \\ -\frac{1}{t} & 0 \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} 9t \\ -3t \end{pmatrix}$$

sú definované a spojité na celom intervale $(0, \infty)$ a bod $t_0 = 1 \in (0, \infty)$. Dá sa ukázať, že hľadaným riešením je dvojica

$$x_1(t) = 7t^2 - \frac{13}{2}t + \frac{1}{2t}, \quad x_2(t) = -5t^2 + \frac{13}{2}t + \frac{1}{2t}, \quad t \in (0, \infty).$$

Poznámka 3

Picardova metóda postupných aproximácií umožňuje podľa Vety 2 hľadať riešenie φ začiatočnej úlohy (12) ako limitu postupnosti $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$. Ak zavedieme funkcie Δ_k pre $k \in \mathbb{N}_0$ predpisom

$$\Delta_k(t) := \varphi_{k+1}(t) - \varphi_k(t), \quad t \in \mathcal{I},$$

potom je možné riešenie φ vyjadriť v tvare nekonečného radu

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k(t), \quad t \in \mathcal{I}. \quad (18)$$

Nekonečný funkcionálny rad (18) konverguje lokálne rovnomerne na intervale \mathcal{I} . Podľa Vety 2 funkcie Δ_k spĺňajú pre každé $t \in \mathcal{I}$

$$\Delta_0(t) = \eta + \int_{t_0}^t b(s) ds, \quad \Delta_{k+1}(t) = \int_{t_0}^t A(s) \Delta_k(s) ds, \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (19)$$

Príklad 5

Uvažujme homogénnu začiatočnú úlohu

$$x' = Ax, \quad x(0) = (0, 1)^T$$

na intervale $\mathcal{I} = (-\infty, \infty)$, kde A je reálna konštantná matica

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podľa Poznámky 3 s $b(t) \equiv 0$ na \mathcal{I} , $t_0 = 0$ a $\eta = (0, 1)^T$ pre funkcie Δ_k platí

$$\Delta_0(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta_{k+1}(t) = A \int_0^t \Delta_k(s) ds, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad t \in \mathcal{I}.$$

Pomocou matematickej indukcie vzhľadom na index k možno ukázať

$$\Delta_k(t) = \frac{t^k}{k!} A^k \eta, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad t \in \mathcal{I}.$$

Príklad 5

Postupnosť matíc $\{A^k\}_{k=0}^{\infty}$ je periodická s najmenšou periódou 4, nakoľko

$$A^0 = I, \quad A^1 = A, \quad A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -A.$$

Preto pre každé $l \in \mathbb{N}_0$ platí

$$A^{4l} = I, \quad A^{4l+1} = A, \quad A^{4l+2} = -I, \quad A^{4l+3} = -A.$$

Riešenie φ začiatočnej úlohy potom bude mať podľa (18) pre každé $t \in \mathcal{I}$ tvar

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} t^{2m} \right) \eta + \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} t^{2m+1} \right) A\eta \\ &= (\cos t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (\sin t) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Obsah

- 1 Obyčajné diferenciálne rovnice prvého rádu – opakovanie
- 2 Systémy lineárnych diferenciálnych rovníc
- 3 Homogénny systém lineárnych diferenciálnych rovníc**
- 4 Nehomogénny systém lineárnych diferenciálnych rovníc
- 5 Lineárne diferenciálne rovnice vyšších rádov
- 6 Systémy s konštantnými koeficientami

Homogénny systém

Nech $n \in \mathbb{N}$. Uvažujme homogénny systém lineárnych diferenciálnych rovníc

$$y' = A(t)y, \quad (20)$$

kde A je maticová funkcia rádu n definovaná a spojitá na intervale \mathcal{I} . Ak x_1 a y_2 sú dve (úplné) riešenia systému (20) a c_1, c_2 sú ľubovoľné reálne konštanty, potom aj funkcia $y = c_1y_1 + c_2y_2$ je (úplným) riešením rovnice (20), nakoľko

$$y' = (c_1y_1 + c_2y_2)' = c_1y_1' + c_2y_2' = c_1Ay_1 + c_2Ay_2 = A(c_1y_1 + c_2y_2) = Ay$$

na celom intervale \mathcal{I} . Táto vlastnosť je kľúčová pri skúmaní štruktúry množiny všetkých riešení systému (20).

Veta 3 (Štruktúra množiny riešení)

Množina všetkých riešení rovnice (20) na intervale \mathcal{I} tvorí lineárny (vektorový) priestor nad telesom reálnych čísiel.

Lineárna závislosť a nezávislosť funkcií I

Definícia 1

Nech $k \in \mathbb{N}$ a nech y_1, y_2, \dots, y_k sú funkcie definované na nedegenerovanom intervale \mathcal{I} . Povieme, že funkcie y_1, y_2, \dots, y_k sú **lineárne závislé** na \mathcal{I} , ak existuje nenulová k -tica reálnych konštant (c_1, c_2, \dots, c_k) tak, že platí

$$c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \dots + c_k y_k(t) = 0 \quad \text{pre každé } t \in \mathcal{I}.$$

V opačnom prípade sa funkcie y_1, y_2, \dots, y_k nazývajú **lineárne nezávislé** na \mathcal{I} .

Príklad 6

Ukážeme, že 2–vektoré funkcie

$$y_1(t) = (t, t)^T, \quad y_2(t) = (t^2, t)^T, \quad y_3(t) = (t^3, t)^T$$

sú lineárne nezávislé na každom nedegenerovanom reálnom intervale. Nech \mathcal{I} je takýto interval a nech $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ spĺňajú $c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 \equiv 0$ na \mathcal{I} , t.j.,

Lineárna závislosť a nezávislosť funkcií II

Príklad 6

$$c_1 \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} t^3 \\ t \end{pmatrix} = 0 \quad \text{pre každé } t \in \mathcal{I}.$$

Trojnásobným derivovaním poslednej rovnosti podľa premennej t dostaneme

$$c_3 \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \implies c_3 = 0.$$

Podobne, dvojnásobné derivovanie uvedenej rovnosti spolu s $c_3 = 0$ implikuje

$$c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \implies c_2 = 0.$$

Teda $c_1(t, t)^T = 0$ na \mathcal{I} , z čoho máme i $c_1 = 0$. Preto sú funkcie y_1 , y_2 a y_3 lineárne nezávislé na intervale \mathcal{I} .

Lineárna závislosť a nezávislosť riešení

V prípade riešení systému (20) sa vyšetrovanie lineárnej závislosti, resp. nezávislosti prevádza na problém lineárnej závislosti, resp. nezávislosti n -rozmerných reálnych vektorov.

Veta 4 (Lineárna závislosť riešení)

Nech $k \in \mathbb{N}$ a nech y_1, y_2, \dots, y_k sú úplné riešenia systému (20). Potom funkcie y_1, y_2, \dots, y_k sú lineárne závislé na \mathcal{I} práve vtedy, keď aspoň pre jedno $t_0 \in \mathcal{I}$ sú vektory $y_1(t_0), y_2(t_0), \dots, y_k(t_0) \in \mathbb{R}^n$ lineárne závislé.

Dôkaz.

Implikácia \Rightarrow platí triviálne podľa Definície 1. Naopak, nech pre $t_0 \in \mathcal{I}$ sú vektory $y_1(t_0), y_2(t_0), \dots, y_k(t_0)$ lineárne závislé. Teda existuje nenulová k -tica (c_1, c_2, \dots, c_k) tak, že $c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) + \dots + c_k y_k(t_0) = 0$. Funkcia $y := c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_k y_k$ je riešením rovnice (20) a $y(t_0) = 0$. Z jednoznačnosti riešení podľa Vety 2 máme $y(t) \equiv 0$ na celom \mathcal{I} , čo následne znamená, že funkcie y_1, y_2, \dots, y_k sú lineárne závislé na \mathcal{I} . ■

Dôsledok 1 (Dimenzia priestoru riešení)

Množina riešení rovnice (20) na intervale \mathcal{I} tvorí lineárny priestor dimenzie n .

Dôkaz.

Z Vety 4 vieme, že dimenzia priestoru riešení je najviac n , pretože priestor \mathbb{R}^n je n -dimenzionálny. Na druhej strane, táto dimenzia je aspoň n . Vyplýva to z nasledujúcej úvahy. Nech $\{e_1, \dots, e_n\}$ je kanonická báza priestoru \mathbb{R}^n a nech $t_0 \in \mathcal{I}$. Podľa Vety 2 existujú úplné riešenia y_1, y_2, \dots, y_n systému (20) s

$$y_i(t_0) = e_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Nakoľko vektory $y_1(t_0), y_2(t_0), \dots, y_n(t_0)$ sú lineárne nezávislé, podľa Vety 4 riešenia y_1, y_2, \dots, y_n sú lineárne nezávislé na \mathcal{I} . ■

Fundamentálny systém riešení

Definícia 2 (Fundamentálny systém riešení)

Ľubovoľná báza priestoru všetkých riešení rovnice (20) sa nazýva **fundamentálny systém riešení** rovnice (20).

Ak y_1, y_2, \dots, y_n je nejaký fundamentálny systém riešení rovnice (20), potom pre každé riešenie y sa dá vyjadriť v tvare

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n \quad \text{na } \mathcal{I}, \quad (21)$$

pre vhodné konštanty $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$. Naopak, každá lineárna kombinácia riešení y_1, y_2, \dots, y_n je zrejme opäť riešením systému (20). Riešenie (21) sa preto nazýva **všeobecné riešenie** rovnice (20).

Príklad 7

Uvažujme systém

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{t} \\ -\frac{1}{t} & 0 \end{pmatrix} y$$

na intervale $\mathcal{I} = (0, \infty)$. Dosadením sa ľahko ukáže, že 2-vektorové funkcie

$$y_1(t) = (t, -t)^T, \quad y_2(t) = \left(\frac{1}{t}, \frac{1}{t}\right)^T$$

sú úplné riešenia tohto systému. Navyiac, funkcie y_1 a y_2 sú lineárne nezávislé, pretože napr. vektory $y_1(1) = (1, -1)^T$ a $y_2(1) = (1, 1)^T$ sú lineárne nezávislé. Preto y_1 a y_2 tvoria fundamentálny systém riešení danej rovnice a jej všeobecné riešenie má pre každé $t \in \mathcal{I}$ tvar

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = \begin{pmatrix} c_1 t + \frac{c_2}{t} \\ -c_1 t + \frac{c_2}{t} \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Spolu s vektorovou rovnicou (20) sa súčasne uvažuje aj maticová rovnica

$$Y' = A(t)Y, \quad t \in \mathcal{I}, \quad (22)$$

kde nezáma Y je maticová funkcia rádu n . Ak Y je maticové riešenie rovnice (22) na \mathcal{I} a $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je konštantná matica, potom funkcia YC je riešením rovnice (22) na \mathcal{I} , nakoľko platí

$$(YC)' = Y'C = AYC = A(YC) \quad \text{na } \mathcal{I}.$$

Podobne, pre každý konštantný vektor $\eta \in \mathbb{R}^n$ je funkcia $Y\eta$ riešením rovnice (20). Obzvlášť, každý stĺpec matice Y je riešením systému (20). Maticové riešenie Y sa nazýva **fundamentálne riešenie** systému (22) (resp. **fundamentálna matica** systému (20)), ak stĺpce matice Y tvoria fundamentálny systém riešení rovnice (20), t.j., sú lineárne nezávislé na intervale \mathcal{I} . Preto riešenie Y rovnice (22) je fundamentálne riešenie práve vtedy, keď $\det Y(t) \neq 0$ pre každé $t \in \mathcal{I}$.

Veta 5 (Liouvilleov-Jacobiho vzorec)

Nech Y je maticové riešenie rovnice (22) na intervale \mathcal{I} a nech $t_0 \in \mathcal{I}$. Označme $A(t) = (a_{ij}(t))$. Potom pre každé $t \in \mathcal{I}$ platí

$$\det Y(t) = \det Y(t_0) \exp \left(\int_{t_0}^t \operatorname{Tr} A(s) \, ds \right), \quad (23)$$

kde $\operatorname{Tr} A(s) = a_{11}(s) + a_{22}(s) + \cdots + a_{nn}(s)$ je stopa matice $A(s)$.

Dôkaz (náčrt).

Využitím definície determinantu štvorcovej matice sa dá ukázať, že funkcia $z = \det Y$ vyhovuje na intervale \mathcal{I} homogénnej LDR prvého rádu

$$z' = \operatorname{Tr} A(t) z.$$

Riešením tejto rovnice dostaneme pre funkciu z vyjadrenie v tvrdení, t.j.,

$$z(t) = z(t_0) \exp \left(\int_{t_0}^t \operatorname{Tr} A(s) \, ds \right), \quad t \in \mathcal{I}.$$



Poznámka 4

Z Liouvilleovho-Jacobiho vzorca vyplýva, že pre každé maticové riešenie rovnice (22) platí buď $\det Y(t) \neq 0$ alebo $\det Y(t) = 0$ pre každé $t \in \mathcal{I}$. Preto Y je fundamentálnym riešením práve vtedy, keď $\det Y(t_0) \neq 0$ aspoň pre jedno $t_0 \in \mathcal{I}$. Okrem toho funkcia

$$y = Yc, \quad c \in \mathbb{R}^n \quad (24)$$

je pre každú fundamentálnu maticu Y všeobecným riešením systému (20) na intervale \mathcal{I} . Poznamenajme, že fundamentálna matica systému (20) je určená jednoznačne až na konštantný regulárny násobok sprava. Konkrétne, ak Y je nejaká fundamentálna matica (20) na \mathcal{I} , potom maticová funkcia Z je tiež fundamentálnou maticou systému práve vtedy, keď na \mathcal{I} platí

$$Z = YC, \quad \text{pre nejakú konštantnú štvorcovú maticu } C \text{ s } \det C \neq 0. \quad (25)$$

Obsah

- 1 Obyčajné diferenciálne rovnice prvého rádu – opakovanie
- 2 Systémy lineárnych diferenciálnych rovníc
- 3 Homogénny systém lineárnych diferenciálnych rovníc
- 4 Nehomogénny systém lineárnych diferenciálnych rovníc**
- 5 Lineárne diferenciálne rovnice vyšších rádov
- 6 Systémy s konštantnými koeficientami

Nehomogénny systém

Budeme skúmať všeobecný, nehomogénny systém (11), t.j.,

$$x' = A(t)x + b(t),$$

kde A je maticová funkcia rádu n a b je n -vektorová funkcia, obe definované a spojité na intervale \mathcal{I} .

Veta 6 (Štruktúra riešení nehomogénneho systému)

Nech Y je úplné fundamentálne riešenie rovnice $Y' = A(t)Y$ a nech x_0 je nejaké riešenie nehomogénneho systému (11) na \mathcal{I} . Potom vektorová funkcia x je úplné riešenie rovnice (11) práve vtedy, keď pre nejaké $c \in \mathbb{R}^n$ platí

$$x(t) = Y(t)c + x_0(t) \quad \text{pre každé } t \in \mathcal{I}. \quad (26)$$

Dôkaz Vety 6.

Dosadením do (11) sa ľahko overí, že pre každý konštantný n -vektor c je funkcia x v (26) riešením rovnice (11), pretože

$$x' = Y'c + x'_0 = AYc + Ax_0 + b = A(Yc + x_0) + b = Ax + b \quad \text{na } \mathcal{I}.$$

Naopak, nech x je úplné riešenie systému (11). Potom funkcia $x - x_0$ spĺňa rovnicu (20), nakoľko

$$(x - x_0)' = x' - x'_0 = Ax + b - Ax_0 - b = A(x - x_0) \quad \text{na } \mathcal{I}.$$

Podľa rovnosti (21) v Poznámke 4 preto existuje $c \in \mathbb{R}^n$ tak, že $x - x_0 = Yc$ na celom \mathcal{I} . Teda riešenie $x = Yc + x_0$ má tvar (26). ■

Poznámka 5

Z Vety 6 vyplýva významné pozorovanie o všeobecnom riešení rovnice (11):

$$\begin{pmatrix} \text{všeobecné riešenie} \\ \text{nehom. systému} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{všeobecné riešenie} \\ \text{pridruž. hom. systému} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{partikulárne riešenie} \\ \text{nehom. systému} \end{pmatrix}.$$

Metóda variácie konštant

Na nájdenie partikulárneho riešenia systému (11) sa využíva **metóda variácie konštant**. Nech x je úplné riešenie začiatočnej úlohy (12) na intervale \mathcal{I} , t.j.,

$$x' = A(t)x + b(t), \quad x(t_0) = \eta,$$

pre pevné $t_0 \in \mathcal{I}$ a $\eta \in \mathbb{R}^n$. Pre danú fundamentálnu maticu Y pridruženého homogénneho systému (20) uvažujme vektorovú funkciu $c := Y^{-1}x$. Zrejme c je definovaná a diferencovateľná na celom \mathcal{I} a platí

$$x(t) = Y(t)c(t), \quad t \in \mathcal{I}.$$

Po dosadení tohto vyjadrenia riešenia x do systému (11) a úpravách dostaneme

$$c'(t) = Y^{-1}(t)b(t) \implies c(t) = c(t_0) + \int_{t_0}^t Y^{-1}(s)b(s) ds, \quad t \in \mathcal{I}.$$

Hodnotu $c(t_0)$ určíme pomocou začiatočnej podmienky $x(t_0) = \eta$, konkrétne

$$c(t_0) = Y^{-1}(t_0)\eta.$$

Veta 7 (Metóda variácie konštant)

Začiatočná úloha (12) má jediné úplné riešenie tvaru

$$x(t) = Y(t) Y^{-1}(t_0) \eta + Y(t) \int_{t_0}^t Y^{-1}(s) b(s) ds, \quad \text{pre každé } t \in \mathcal{I}, \quad (27)$$

kde Y je ľubovoľná fundamentálna matica homogénneho systému (20).

Poznámka 6

Všimnime si, že vo vzorci (27) funkcia $x_H(t) := Y(t) Y^{-1}(t_0) \eta$ je partikulárne riešenie homogénneho systému (20) spĺňajúce $x_H(t_0) = \eta$, kým funkcia

$$x_P(t) := Y(t) \int_{t_0}^t Y^{-1}(s) b(s) ds$$

je partikulárne riešenie rovnice (11) s podmienkou $x_P(t_0) = 0$, ako sa možno presvedčiť dosadením. Platí teda $x = x_H + x_P$ v súlade s Poznámkou 5.

Obsah

- 1 Obyčajné diferenciálne rovnice prvého rádu – opakovanie
- 2 Systémy lineárnych diferenciálnych rovníc
- 3 Homogénny systém lineárnych diferenciálnych rovníc
- 4 Nehomogénny systém lineárnych diferenciálnych rovníc
- 5 Lineárne diferenciálne rovnice vyšších rádo**
- 6 Systémy s konštantnými koeficientami

Lineárna diferenciálna rovnica n -tého rádu

Diferenciálna rovnica

$$y^{(n)} + p_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + p_1(t)y' + p_0(t)y = f(t), \quad (28)$$

kde f a p_i , $i = 0, \dots, n-1$, sú reálne skalárne funkcie definované a spojité na intervale $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$, sa nazýva **lineárna diferenciálna rovnica n -tého rádu**. Ak $f(t) \equiv 0$, hovoríme o **homogénnej LDR n -tého rádu**, v opačnom prípade sa jedná o **nehomogénnu** rovnicu. Pre nehomogénnu rovnicu (28) sa rovnica

$$y^{(n)} + p_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + p_1(t)y' + p_0(t)y = 0, \quad (29)$$

označuje ako **pridružená homogénna** rovnica. Ľavá strana rovnice (28) sa často označuje výrazom Ly , kde $L : C^n(\mathcal{I}) \rightarrow C(\mathcal{I})$ je **lineárny diferenciálny operátor n -tého rádu**. (**Úplným**) **riešením** rovnice $Ly = f$ rozumieme funkciu $\psi \in C^n(\mathcal{I})$, ktorá identicky spĺňa rovnicu (28) na intervale \mathcal{I} . **Začiatočná (Cauchyho) úloha (problém)**

$$Ly = f, \quad y(t_0) = \eta_1, \quad y'(t_0) = \eta_2, \quad \dots, \quad y^{n-1}(t_0) = \eta_n, \quad (30)$$

kde $t_0 \in \mathcal{I}$ je pevný bod a $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n \in \mathbb{R}$ sú dané reálne konštanty.

Prevod na lineárny systém I

Veta 8 (Prevod na systém)

Nech ψ je (úplné) riešenie rovnice (28) a polořme

$$\varphi_1 = \psi, \quad \varphi_2 = \psi', \quad \dots, \quad \varphi_n = \psi^{n-1}.$$

Potom n -vektorová funkcia $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)^T$ je (úplným) riešením systému

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= x_3, \\ &\vdots \\ x_{n-1}' &= x_n, \\ x_n' &= -p_0(t)x_1 - p_1(t)x_2 - \dots - p_{n-1}(t)x_n + f(t) \end{aligned} \tag{31}$$

na intervale \mathcal{I} . Naopak, pre každé (úplné) riešenie $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)^T$ systému (31) na \mathcal{I} je jeho prvá zložka φ_1 (úplným) riešením rovnice (28).

Prevod na lineárny systém II

Veta 8 (Prevod na systém)

Nech $t_0 \in \mathcal{I}$ a $\eta \in \mathbb{R}^n$. Potom n -vektorová funkcia $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)^T$ je (úplné) riešenie systému (31) spĺňajúce začiatočnú podmienku

$$\varphi(t_0) = \eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)^T$$

práve vtedy, keď jeho prvá zložka φ_1 je (úplné) riešenie rovnice (28) spĺňajúce začiatočnú podmienku

$$\varphi_1(t_0) = \eta_1, \quad \varphi_1'(t_0) = \eta_2, \quad \dots, \quad \varphi_1^{n-1}(t_0) = \eta_n.$$

Systém (31) sa dá prepísať do vektorového tvaru $x' = A(t)x + b$, kde

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -p_0(t) & -p_1(t) & -p_2(t) & \cdots & -p_{n-1}(t) \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -f(t) \end{pmatrix}.$$

Existencia a jednoznačnosť riešení

Veta 9 (Existencia a jednoznačnosť riešení)

Nech f a p_i , $i = 0, \dots, n - 1$, sú reálne skalárne funkcie definované a spojité na intervale \mathcal{I} a nech $t_0 \in \mathcal{I}$ a $\eta_1, \dots, \eta_n \in \mathbb{R}$ sú dané. Potom začiatočná úloha (30) má práve jedno úplné riešenie na celom \mathcal{I} .

Príklad 8

Uvažujme LDR 2. rádu na intervale $\mathcal{I} = (e, \infty)$ a začiatočnú podmienku

$$y'' + \frac{1}{t(1 - \ln t)} y' - \frac{1}{t^2(1 - \ln t)} y = \frac{2 - \ln t}{t(1 - \ln t)}, \quad y(e^2) = e^2, \quad y'(e^2) = 2.$$

Keďže koeficienty a pravá strana rovnice sú funkcie definované a spojité na intervale \mathcal{I} , podľa Vety 9 má daná začiatočná úloha práve jedno úplné riešenie definované na celom intervale \mathcal{I} . Dá sa ukázať, že toto riešenie má tvar

$$y(t) = t \ln t - t, \quad t \in (e, \infty).$$

Obsah

- 1 Obyčajné diferenciálne rovnice prvého rádu – opakovanie
- 2 Systémy lineárnych diferenciálnych rovníc
- 3 Homogénny systém lineárnych diferenciálnych rovníc
- 4 Nehomogénny systém lineárnych diferenciálnych rovníc
- 5 Lineárne diferenciálne rovnice vyšších rádov
- 6 Systémy s konštantnými koeficientami**

Systémy s konštantnými koeficientami

Z predchádzajúcich výsledkov vyplýva, že na úplné určenie množiny všetkých riešení (všeobecného riešenia) systému lineárnych diferenciálnych rovníc I. rádu je nutné a zároveň stačí poznať nejakú fundamentálnu maticu pridruženého homogénneho systému. Vo všeobecnom prípade je to veľmi náročný problém. Budeme sa bližšie zaoberať prípadom homogénneho systému s **konštantnými koeficientami**, t.j. systémom

$$y' = Ay, \quad (32)$$

kde A je konštantná reálna matica rádu n . Každé riešenie systému (32) je definované na intervale $(-\infty, \infty)$. Ukážeme, že pre systém (32) je možné pomerne efektívne určiť všetky jeho fundamentálne riešenia Y , t.j., maticové funkcie Y rádu n spĺňajúce $Y' = AY$ a $\det Y(t) \neq 0$ pre každé $t \in (-\infty, \infty)$.

Exponenciála matice

Nech M je komplexná matica rádu n . Matica definovaná

$$e^M := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} M^k = I + M + \frac{1}{2!} M^2 + \frac{1}{3!} M^3 + \cdots + \frac{1}{k!} M^k + \cdots \quad (33)$$

sa nazýva **exponenciála matice M** . Nekonečný rad v (33) konverguje absolútne pre každú maticu M , a teda matica e^M je korektne definovaná pre každé M .

Poznámka 7 (Niektoré vlastnosti exponenciály matice)

Nech M, N sú komplexné matice rádu n . Potom platia nasledovné tvrdenia.

- $e^0 = I$.
- $e^M e^{-M} = I$, t.j., matica e^M je regulárna a $(e^M)^{-1} = e^{-M}$.
- Ak $MN = NM$, potom $e^M e^N = e^N e^M = e^{M+N}$.
- Ak N je regulárna, potom $e^{NMN^{-1}} = N e^M N^{-1}$.

Exponenciála matica ako fundamentálne riešenie

Veta 10

Nech A je reálna konštantná matica rádu n . Potom exponenciála e^{At} je fundamentálna matica homogénneho systému (32) na $(-\infty, \infty)$.

Dôkaz.

Maticová funkcia $Y(t) = e^{At}$ je maticovým riešením systému (32), nakoľko

$$\begin{aligned} Y' &= (e^{At})' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (At)^k \right)' = \left(I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (At)^k \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!} A^k t^{k-1} \\ &= A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} A^{k-1} t^{k-1} \stackrel{(l=k-1)}{=} A \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} (At)^l = A e^{At} = AY. \end{aligned}$$

Okrem toho $Y(0) = I$, podľa Poznámky 7. Preto $Y(t)$ je regulárna na celom intervale $(-\infty, \infty)$, podľa Liouvilleovho-Jacobiho vzorca vo Vete 5. Teda $Y(t)$ je fundamentálna matica systému (32) na celom $(-\infty, \infty)$. ■

Jordanov kanonický tvar matice

Veta 11 (Jordanova)

Nech M je komplexná matica rádu n . Potom existuje regulárna matica P rádu n tak, že

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} J_0 & O & \cdots & O \\ O & J_1 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ O & O & \cdots & J_m \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Pritom matice $J_0 \in \mathbb{C}^{q \times q}$ a $J_i \in \mathbb{C}^{n_i \times n_i}$ pre $i = 1, \dots, m$ majú tvar

$$J_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_q \end{pmatrix}, \quad J_i = \begin{pmatrix} \lambda_{q+i} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{q+i} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{q+i} \end{pmatrix}, \quad (35)$$

kde λ_j pre $j = 1, \dots, q + m$ sú (nie nutne rôzne) vlastné čísla matice M a platí $q + n_1 + \cdots + n_m = n$.

Matice J_i , $i = 0, \dots, m$, sa nazývajú **Jordanove bloky (klietky)** matice M a stĺpce matice P sa nazývajú **zovšeobecnené vlastné vektory** matice M . Blokovo diagonálna matica

$$Q = \begin{pmatrix} J_0 & O & \cdots & O \\ O & J_1 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ O & O & \cdots & J_m \end{pmatrix} \quad (36)$$

v Jordanovom rozklade (34) je určená jednoznačne až na poradie Jordanových blokov. Matica P nie je určená jednoznačne. Medzi stĺpcami matice P a Jordanovými blokmi matice Q platí nasledovná korešpondencia.

Stĺpce h_1, \dots, h_q sú vlastné vektory matice M odpovedajúce vlastným číslam $\lambda_1, \dots, \lambda_q$.

Stĺpce $h_{q+n_1+\dots+n_{i-1}+1}, \dots, h_{q+n_1+\dots+n_{i-1}+n_i}$ sú zovšeobecnené vlastné vektory matice M odpovedajúce vlastnému číslu λ_{q+n_i} v bloku J_i pre $i = 1, \dots, m$.

Výpočet fundamentálnej matice

Stanovíme teraz fundamentálnu maticu systému (32) ako vhodný pravostranný regulárny násobok exponenciály e^{At} . Nech $t \in (-\infty, \infty)$. Ak P a Q sú matice z Vety 11 odpovedajúce Jordanovmu rozkladu matice A , t.j., $A = PQP^{-1}$, potom podľa Poznámky 7 platí

$$e^{At} = e^{P(Qt)P^{-1}} = Pe^{Qt}P^{-1}, \quad \text{teda} \quad e^{At}P = Pe^{Qt}. \quad (37)$$

Z tvaru matice Q a z definície exponenciály matice vyplýva

$$e^{Qt} = \begin{pmatrix} e^{J_0 t} & O & \cdots & O \\ O & e^{J_1 t} & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ O & O & \cdots & e^{J_m t} \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Pre exponenciálu Jordanovho bloku $J_0 t$ platí

$$e^{J_0 t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_q t} \end{pmatrix}. \quad (39)$$

Výpočet fundamentálnej matice

Blok $J_i t$ pre $i = 1, \dots, m$ má tvar $J_i t = (\lambda_{q+i} t) I_i + M_i t$, kde I_i je identická matica rádu n_i a

$$M_i t = \begin{pmatrix} 0 & t & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (40)$$

Matice $(\lambda_{q+i} t) I_i$ a $M_i t$ komutujú, preto podľa Poznámky 7 platí

$$e^{J_i t} = e^{(\lambda_{q+i} t) I_i + M_i t} = e^{\lambda_{q+i} t} e^{M_i t}. \quad (41)$$

Postupným počítaním mocnín $(M_i t)^k$ pre $k = 0, 1, \dots$ zistíme, že $(M_i t)^k = 0$ pre každé $k \geq n_i$, a teda

$$e^{M_i t} = \sum_{k=0}^{n_i-1} \frac{1}{k!} (M_i t)^k = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{n_i-2}}{(n_i-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \quad (42)$$

Výpočet fundamentálnej matice

Kombináciu formúl (41) a (42) dostaneme tvar exponenciálny bloku $J_i t$

$$e^{J_i t} = e^{\lambda_{q+i} t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{n_i-2}}{(n_i-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad (43)$$

a tým aj, využitím vyjadrení v (38) a (39), exponenciálu matice $Q t$. Podľa Poznámky 4 je matica $e^{A t} P$ fundamentálnou maticou systému (32). Označme

$$P = [h_1, \dots, h_n] \quad \text{a} \quad e^{A t} P = [y_1(t), \dots, y_n(t)].$$

Rovnosť (37) a predchádzajúca analýza implikujú nasledujúce tvrdenie.

Fundamentální systém řešení

Veta 12 (Fundamentální systém řešení)

Vektorové funkce

$$\begin{aligned}
 y_1(t) &= e^{\lambda_1 t} h_1 \\
 &\vdots \\
 y_q(t) &= e^{\lambda_q t} h_q \\
 y_{q+1}(t) &= e^{\lambda_{q+1} t} h_{q+1} \\
 y_{q+2}(t) &= e^{\lambda_{q+1} t} [t h_{q+1} + h_{q+2}] \\
 &\vdots \\
 y_{q+n_1}(t) &= e^{\lambda_{q+1} t} \left[\frac{t^{n_1-1}}{(n_1-1)!} h_{q+1} + \frac{t^{n_1-2}}{(n_1-2)!} h_{q+2} + \cdots + h_{q+n_1} \right] \\
 &\vdots \\
 y_n(t) &= e^{\lambda_{q+m} t} \left[\frac{t^{n_m-1}}{(n_m-1)!} h_{n-n_m+1} + \frac{t^{n_m-2}}{(n_m-2)!} h_{n-n_m+2} + \cdots + h_n \right],
 \end{aligned} \tag{44}$$

tvoria fundamentálny systém riešení rovnice (32) na intervale $(-\infty, \infty)$.

Môžeme preto konštatovať, že zložky vektorových riešení fundamentálneho systému vo Vete 12 majú tvar kvázipolynómov, t.j.,

$$p_k(t) e^{\lambda_k t},$$

kde λ_k je vlastné číslo matice A a $p_k(t)$ sú polynómy v premennej t stupňa menšieho ako je algebraická násobnosť čísla λ_k . Keďže matica A je reálna, s každým nereálnym vlastným číslom $\alpha + i\beta$ má aj komplexne združené vlastné číslo $\alpha - i\beta$. Vo fundamentálnom systéme (44) sa teda s každým nereálnym riešením y nachádza aj komplexne združené riešenie \bar{y} . Nakoľko platí

$$\operatorname{Re} y = \frac{1}{2}(y + \bar{y}), \quad \text{a} \quad \operatorname{Im} y = \frac{1}{2i}(y - \bar{y}),$$

reálne vektorové funkcie $\operatorname{Re} y$ a $\operatorname{Im} y$ sú lineárne nezávislými riešeniami rovnice (32). Preto každú nereálnu dvojicu riešení y a \bar{y} môžeme nahradiť reálnou dvojicou riešení $\operatorname{Re} y$ a $\operatorname{Im} y$. Tým získame reálny fundamentálny systém vektorových riešení, pričom zložky jednotlivých jeho riešení budú mať tvar

$$[p_k(t) \cos((\operatorname{Im} \lambda_k) t) + q_k(t) \sin((\operatorname{Im} \lambda_k) t)] e^{(\operatorname{Re} \lambda_k) t},$$

kde $p_k(t)$ a $q_k(t)$ sú už reálne polynómy v premennej t stupňa menšieho než je algebraická násobnosť čísla λ_k .

Príklad 9

Určíme nejakú fundamentálnu maticu systému

$$x' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x.$$

Podľa Vety 10 stačí nájsť exponenciálu matice At . Matica A systému je už v Jordanovom blokovom tvare

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{2} & \boxed{0} & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & \boxed{-1} & \boxed{1} \\ 0 & 0 & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{-1} \end{pmatrix}$$

a má jednoduché vlastné číslo 2 a štvornásobné vlastné číslo -1 .

Príklad 9

Exponenciála e^{At} má preto tvar

$$Y(t) = e^{At} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} & te^{-t} & \frac{t^2}{2!} e^{-t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Poznamenajme, že fundamentálna matica Y rovnice (32) je normovaná v bode $t_0 = 0$, t.j., platí $Y(0) = I$. Fundamentálna matica Z normovaná napr. v bode $t_0 = 3$, t.j., $Z(3) = I$, má tvar

$$Z(t) = \begin{pmatrix} e^{2(t-3)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-(t-3)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-(t-3)} & (t-3)e^{-(t-3)} & \frac{(t-3)^2}{2!} e^{-(t-3)} \\ 0 & 0 & 0 & e^{-(t-3)} & (t-3)e^{-(t-3)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-(t-3)} \end{pmatrix}.$$

Príklad 10

Nájdime všeobecné riešenie systému

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} x.$$

Zistíme vlastné čísla matice A systému. Jej charakteristický polynóm má tvar

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = -(\lambda - 2)(\lambda - 1)^2.$$

Matice A má teda jednoduché vlastné číslo 2 a dvojnásobné vlastné číslo 1. Vlastnému číslu 2 odpovedá jedno lineárne nezávislé riešenie tvaru

$$x(t) = (a e^{2t}, b e^{2t}, c e^{2t})^T,$$

kde a, b, c sú konštanty. Dosadením tohto riešenia do systému v zadaní dostaneme po úpravách pre a, b, c sústavu troch lineárnych rovníc

$$2a = a - b + c, \quad 2b = a + b - c, \quad 2c = -b + 2c.$$

Táto sústava má jedno lineárne nezávislé riešenie $a = c = 1$ a $b = 0$.

Príklad 10

Vlastnému číslu 1 odpovedajú dve lineárne nezávislé riešenia tvaru

$$x(t) = \begin{pmatrix} (at + b)e^t \\ (ct + d)e^t \\ (ft + g)e^t \end{pmatrix},$$

kde a, b, c, d, f, g sú konštanty. Dosadením tohto riešenia do systému v zadaní dostaneme po úpravách

$$a + (at + b) = (at + b) - (ct + d) + (ft + g)$$

$$c + (ct + d) = (at + b) + (ct + d) - (ft + g)$$

$$f + (ft + g) = -(ct + d) + 2(ft + g).$$

Ak porovnáme koeficienty pri rovnakých mocninách premennej t na oboch stranách týchto rovností, získame 4 nezávislé rovnice pre a, b, c, d, f, g , a to

$$f - c = 0, \quad a - f = 0, \quad a = g - d, \quad c = b - g.$$

Táto sústava má dve lineárne nezávislé riešenia

$$a = c = f = 0, \quad b = d = g = 1 \quad \text{a} \quad a = b = c = f = 1, \quad d = -1, \quad g = 0.$$

Príklad 10

Zostrojili sme teda tri lineárne nezávislé vektorové riešenia rovnice v zadaní, a teda jej fundamentálny systém riešení je

$$\begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \\ e^t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} (t+1)e^t \\ (t-1)e^t \\ te^t \end{pmatrix}.$$

Všeobecné riešenie systému v zadaní má potom pre každé $t \in (-\infty, \infty)$ tvar

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \\ e^t \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} (t+1)e^t \\ (t-1)e^t \\ te^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{2t} + c_2 e^t + c_3 (t+1)e^t \\ c_2 e^t + c_3 (t-1)e^t \\ c_1 e^{2t} + c_2 e^t + c_3 t e^t \end{pmatrix}$$

pre c_1, c_2, c_3 ľubovoľné reálne konštanty. Pre úplnosť poznamenajme, že matica

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^t & (t+1)e^t \\ 0 & e^t & (t-1)e^t \\ e^{2t} & e^t & te^t \end{pmatrix}$$

je fundamentálnou maticou rovnice v zadaní.

Príklad 11

Uvažujme systém

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} x.$$

Matica A systému má jednoduché reálne vlastné číslo 1 a dvojicu jednoduchých nereálnych vlastných čísel $1 \pm 2i$. Fundamentálny systém rovnice v zadaní je preto tvorený tromi lineárne nezávislými vektorovými riešeniami tvaru

$$\begin{pmatrix} a_1 e^t \\ a_2 e^t \\ a_3 e^t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_1 e^{(1+2i)t} \\ b_2 e^{(1+2i)t} \\ b_3 e^{(1+2i)t} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c_1 e^{(1-2i)t} \\ c_2 e^{(1-2i)t} \\ c_3 e^{(1-2i)t} \end{pmatrix},$$

kde a_i, b_i, c_i pre $i = 1, 2, 3$ sú vo všeobecnosti komplexné konštanty. Podobným postupom ako v predchádzajúcom príklade zistíme riešenia

$$\begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ -e^t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2i e^{(1+2i)t} \\ e^{(1+2i)t} \\ 3e^{(1+2i)t} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2i e^{(1-2i)t} \\ e^{(1-2i)t} \\ 3e^{(1-2i)t} \end{pmatrix}.$$

Príklad 11

Získaný fundamentálny systém je nereálny. Nahradením posledných dvoch nereálnych vektorových funkcií ich reálnymi a imaginárnymi časťami dostaneme reálny fundamentálny systém riešení

$$\begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ -e^t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2e^t \sin 2t \\ e^t \cos 2t \\ 3e^t \cos 2t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2e^t \cos 2t \\ e^t \sin 2t \\ 3e^t \sin 2t \end{pmatrix}.$$

Pri výpočte sme využili **Eulerovu identitu**

$$e^{(1 \pm 2i)t} = e^t (\cos 2t \pm i \sin 2t).$$

Príslušná fundamentálna matica $Y(t)$ systému v zadaní má potom pre každé $t \in (-\infty, \infty)$ tvar

$$Y(t) = \begin{pmatrix} 0 & -2e^t \cos 2t & 2e^t \cos 2t \\ e^t & e^t \cos 2t & e^t \sin 2t \\ -e^t & 3e^t \cos 2t & 3e^t \sin 2t \end{pmatrix}.$$

Metóda vlastných vektorov

Nasledujúci spôsob výpočtu fundamentálneho systému riešení rovnice (32) je založený na nasledujúcom pozorovaní. Ak $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastné číslo matice A a $v \in \mathbb{C}^n$ je k nemu prislúchajúci vlastný vektor matice A , t.j., platí

$$Av = \lambda v \iff (A - \lambda I)v = 0,$$

potom n -vektorová funkcia $x(t) = e^{\lambda t}v$ je riešením systému (32) na $(-\infty, \infty)$. To vyplýva z nasledujúceho jednoduchého výpočtu

$$x'(t) = \left(e^{\lambda t}v\right)' = e^{\lambda t}\lambda v = e^{\lambda t}Av = A(t) \left(e^{\lambda t}v\right) = Ax(t).$$

Poznámka 8

- Lineárne nezávislým vlastným vektorom matice A , ktoré prislúchajú rovnakému vlastnému číslu, odpovedajú lineárne nezávislé riešenia systému.
- Lineárne nezávislým vlastným vektorom matice A , ktoré prislúchajú rôznym vlastným číslam, odpovedajú lineárne nezávislé riešenia systému.

Násobnosť vlastného čísla λ matice A ako koreňa charakteristického polynómu matice A sa nazýva **algebraická násobnosť** $m(\lambda)$ vlastného čísla λ . Maximálny počet lineárne nezávislých vlastných vektorov matice A , ktoré prislúchajú danému vlastnému číslu λ , sa označuje ako **geometrická násobnosť** $p(\lambda)$ vlastného čísla λ . Vo všeobecnosti platí nerovnosť

$$1 \leq p(\lambda) \leq m(\lambda). \quad (45)$$

V prípade, ak $p(\lambda) < m(\lambda)$, vlastné číslo λ sa nazýva **defektné**. V opačnom prípade, t.j., ak platí $p(\lambda) = m(\lambda)$, hovoríme o **nedefektnom** vlastnom čísle λ matice A . Ďalej, ak $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sú všetky rôzne vlastné čísla matice A , potom

$$m(\lambda_1) + \dots + m(\lambda_r) = n.$$

Hľadanie fundamentálneho systému riešení rovnice (32) pre maticu A s iba nedefektnými vlastnými číslami sa teda redukuje na zistenie všetkých lineárne nezávislých vlastných vektorov matice A (ich počet je v tomto prípade n).

Príklad 12

Nájdime všeobecné riešenie systému

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} x.$$

Matica A má dve jednoduché vlastné čísla $\lambda_1 = 0$ a $\lambda_2 = 3$, pretože $\det(A - \lambda I) = \lambda(\lambda - 3)$. Číslu $\lambda_1 = 0$ odpovedá jeden lineárne nezávislý vlastný vektor $v_1 = (2, 1)^T$, a následne riešenie rovnice v zadaní tvaru

$$e^{0t}(2, 1)^T = (2, 1)^T.$$

Podobne, vlastnému číslu $\lambda_2 = 3$ odpovedá jeden lineárne nezávislý vlastný vektor $v_2 = (1, -1)^T$ a riešenie tvaru

$$e^{3t}(1, -1)^T = (e^{3t}, -e^{3t})^T.$$

Všeobecné riešenie rovnice v zadaní má potom na intervale $(-\infty, \infty)$ tvar

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{3t} \\ -e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_1 + c_2e^{3t} \\ c_1 - c_2e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Zovšeobecnené vlastné vektory

Ak matica A má aspoň jedno defektné vlastné číslo, potom maximálny počet jej lineárne nezávislých vlastných vektorov je ostro menší než n . Postupom použitým v predchádzajúcom príklade teda nezískame úplný fundamentálny systém riešení rovnice (32). Chýbajúce lineárne nezávislé riešenia zostrojíme pomocou tzv. **zovšeobecnených vlastných vektorov** matice A .

Definícia 3

Nech A je reálna matica rádu n a nech $\lambda \in \mathbb{C}$ je jej vlastné číslo. Pre dané $r \in \mathbb{N}$ sa vektor $v_r \in \mathbb{C}^n$ nazýva **zovšeobecnený vlastný vektor rádu r** matice A prislúchajúci vlastnému číslu λ , ak platí

$$(A - \lambda I)^r v_r = 0 \quad \text{a súčasne} \quad (A - \lambda I)^{r-1} v_r \neq 0. \quad (46)$$

Ak v_r je zovšeobecnený vlastný vektor rádu r matice A prislúchajúci vlastnému číslu λ , potom konečná postupnosť vektorov v_1, v_2, \dots, v_r definovaných ako

$$v_1 = (A - \lambda I)^{r-1} v_r, \quad v_2 = (A - \lambda I)^{r-2} v_r, \quad \dots, \quad v_{r-1} = (A - \lambda I) v_r, \quad v_r,$$

sa nazýva **reťazec rádu r zovšeobecnených vlastných vektorov** generovaný v_r .

Každý vektor $v_p = (A - \lambda I)^{r-p} v_r$, $1 \leq p \leq r$, obsiahnutý v reťazci tvorenom vektorom v_r je zovšeobecnený vlastný vektor rádu p matice A prislúchajúci vlastnému číslu λ , nakoľko platí

$$(A - \lambda I)^p v_p = (A - \lambda I)^p (A - \lambda I)^{r-p} v_r = (A - \lambda I)^r v_r = 0,$$

$$(A - \lambda I)^{p-1} v_p = (A - \lambda I)^{p-1} (A - \lambda I)^{r-p} v_r = (A - \lambda I)^{r-1} v_r \neq 0.$$

Postupnosť v_1, v_2, \dots, v_p je potom (pod)reťazec rádu p zovšeobecnených vlastných vektorov generovaný vektorom v_p .

Veta 13

Pre každú reálnu maticu A rádu n platia nasledujúce tvrdenia.

- 1 Každý reťazec matice A je tvorený lineárne nezávislými vektormi.
- 2 Reťazce matice A generované lineárne nezávislými zovšeobecnenými vlastnými vektormi, ktoré prislúchajú jednému vlastnému číslu, sú lineárne nezávislé.
- 3 Reťazce matice A generované zovšeobecnenými vlastnými vektormi, ktoré prislúchajú rôznym vlastným číslam, sú lineárne nezávislé.

Fundamentálny systém riešení

Veta 14

Nech A je reálna matica rádu n a nech $\lambda \in \mathbb{C}$ je jej vlastné číslo. Nech v_1, v_2, \dots, v_r je nejaký reťazec rádu r zovšeobecnených vlastných vektorov matice A odpovedajúci vlastnému číslu λ . Potom vektorové funkcie

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= e^{\lambda t} v_1, \\
 x_2(t) &= e^{\lambda t} (v_2 + t v_1), \\
 &\vdots \\
 x_p(t) &= e^{\lambda t} \left(v_p + t v_{p-1} + \frac{t^2}{2!} v_{p-2} + \dots + \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} v_1 \right), \\
 &\vdots \\
 x_r(t) &= e^{\lambda t} \left(v_r + t v_{r-1} + \frac{t^2}{2!} v_{r-2} + \dots + \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} v_1 \right),
 \end{aligned} \tag{47}$$

sú lineárne nezávislé riešenia rovnice (32) na intervale $(-\infty, \infty)$.

Veta 15

Nech A je reálna matica rádu n a nech $\lambda \in \mathbb{C}$ je jej vlastné číslo s algebraickou násobnosťou $m(\lambda)$. Potom existuje $m(\lambda)$ lineárne nezávislých zovšeobecnených vlastných vektorov matice A prislúchajúcich vlastnému číslu λ . Tieto vektory sa dajú vhodne rozdeliť do navzájom disjunktných reťazcov.

Dôsledkom Viet 15, 14 a 13 je skutočnosť, že každá reálna matica A rádu n má práve n lineárne nezávislých zovšeobecnených vlastných vektorov, pomocou ktorých vieme podľa (47) zostrojiť úplný fundamentálny systém rovnice (32). V nasledujúcom sa preto zameriame na jednu metódu konštrukcie všetkých lineárne nezávislých zovšeobecnených vlastných vektorov reálnej matice A .

Weyrova teória charakteristických čísel matice

Nech A je matica rádu n a nech $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastné číslo matice A s algebraickou násobnosťou $m(\lambda)$. Uvažujme nasledovnú postupnosť matíc

$$(A - \lambda I)^0 = I, \quad (A - \lambda I)^1 = A - \lambda I, \quad (A - \lambda I)^2, \quad \dots, \quad (A - \lambda I)^l, \quad \dots,$$

a k nej prislúchajúcu postupnosť ich hodností

$$n = h_0, \quad h_1, \quad h_2, \quad \dots, \quad h_l, \quad \dots. \quad (48)$$

Pomocou Jordanovho rozkladu vo Vete 11 sa dá ukázať, že postupnosť (48) je ostro klesajúca s eventuálnou hodnotou $n - m(\lambda)$, t.j., existuje najmenší index k taký, že platí

$$n = h_0 > h_1 > h_2 > \dots > h_{k-1} > h_k = n - m(\lambda), \quad (49)$$

a $h_l = n - m(\lambda)$ pre každé $l > k$. To znamená, že nulity $\nu_l = n - h_l$ matíc $(A - \lambda I)^l$ (t.j., dimenzie jadier matíc $(A - \lambda I)^l$) pre $l = 0, \dots, k$ spĺňajú

$$0 = \nu_0 < \nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_{k-1} < \nu_k = m(\lambda). \quad (50)$$

Prirodzené čísla σ_l definované

$$\sigma_l := \nu_l - \nu_{l-1}, \quad l = 1, \dots, k, \quad (51)$$

sa nazývajú **Weyrove charakteristiky (charakteristické čísla) matice A** prislúchajúce vlastnému číslu λ . Z (51) ihneď vyplýva, že číslo σ_l vyjadruje celkový počet lineárne nezávislých reťazcov rádu l zovšeobecnených vlastných vektorov matice A , odpovedajúcich vlastnému číslu λ . A keďže všetky takéto reťazce obsahujú podreťazce rádu $l - 1$, ktoré sú opäť lineárne nezávislé, máme $\sigma_{l-1} \geq \sigma_l$ pre každé $l = 1, \dots, k$. Platí teda

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_{k-1} \geq \sigma_k > 0, \quad (52)$$

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_{k-1} + \sigma_k = \nu_k - \nu_0 = m(\lambda). \quad (53)$$

Poznamenajme, že rovnosť (53) ako aj vyššie uvedené skutočnosti sú v súlade s výsledkom Vety 15. Lineárne nezávislé zovšeobecnené vlastné vektory matice A odpovedajúce vlastnému číslu λ sa dajú vhodne usporiadať do tzv. **Weyrovej tabuľky**, kde stĺpce predstavujú jednotlivé lineárne nezávislé reťazce a riadky obsahujú lineárne nezávislé zovšeobecnené vlastné vektory rovnakého rádu.

Tabuľka zovšeobecnených vlastných vektorov

$v_{1,1}$	$v_{1,2}$	$v_{1,3}$	\cdots	v_{1,σ_k}	\cdots	v_{1,σ_3}	\cdots	v_{1,σ_2}	\cdots	v_{1,σ_1}
$v_{2,1}$	$v_{2,2}$	$v_{2,3}$	\cdots	v_{2,σ_k}	\cdots	v_{2,σ_3}	\cdots	v_{2,σ_2}		
$v_{3,1}$	$v_{3,2}$	$v_{3,3}$	\cdots	v_{3,σ_k}	\cdots	v_{3,σ_3}				
\vdots	\vdots	\vdots	\cdots	\vdots						
$v_{k,1}$	$v_{k,2}$	$v_{k,3}$	\cdots	v_{k,σ_k}						

(54)

Pri zostavovaní Weyrovej tabuľky zovšeobecnených vlastných vektorov určíme najprv najspodnejšie vektory v každom stĺpci, t.j., vektory

$$\begin{aligned}
 &v_{k,1}, \cdots, v_{k,\sigma_k}, \\
 &v_{k-1,\sigma_k+1}, \cdots, v_{k-1,\sigma_{k-1}}, \\
 &\quad \vdots \\
 &v_{l,\sigma_{l+1}+1}, \cdots, v_{l,\sigma_l}, \\
 &\quad \vdots \\
 &v_{2,\sigma_3+1}, \cdots, v_{2,\sigma_2}, \\
 &v_{1,\sigma_2+1}, \cdots, v_{1,\sigma_1}.
 \end{aligned}
 \tag{55}$$

Napr. posledných $\sigma_l - \sigma_{l+1}$ vektorov $v_{l,\sigma_{l+1}+1}, \dots, v_{l,\sigma_l}$ v l -tom riadku tabuľky stanovíme ako niektoré lineárne nezávislé riešenia sústavy

$$(A - \lambda I)^l v = 0, \quad (A - \lambda I)^{l-1} v \neq 0.$$

Násobením vektorov v (55) mocninami matice $A - \lambda I$ postupne dostaneme ostatné vektory Weyrovej tabuľky (54). Jednotlivé vektory v (55) volíme tak, aby všetky postupne vznikajúce vektory tabuľky boli lineárne nezávislé. Postup ilustrujeme na konkrétnych príkladoch. Poznamenajme, že sústava lineárne nezávislých zovšeobecnených vlastných vektorov matice A , ktoré odpovedajú danému vlastnému číslu λ , nie je určená jednoznačne, avšak pre konštrukciu úplného fundamentálneho systému riešení rovnice (32) podľa Vety 14 nezáleží na jej konkrétnom výbere.

Príklad 13

Uvažujme systém

$$x' = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} x.$$

Matica A má dve dvojnásobné vlastné čísla $\lambda_1 = 3$ a $\lambda_2 = 2$, nakoľko

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda - 3)^2(\lambda - 2)^2.$$

Pre $\lambda_1 = 3$ je teda $m = 2$, $n - m = 4 - 2 = 2$ a $h_0 = n = 4$. Ďalej máme

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (A - 3I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Platí $h_1 = 3$ a $h_2 = 2$, a teda index $k = 2$. Príslušná postupnosť nulít je

$$\nu_0 = 0 < \nu_1 = 1 < \nu_2 = 2,$$

Príklad 13

ktorá dáva dve Weyrove charakteristiky $\sigma_1 = \nu_1 - \nu_0 = 1$ a $\sigma_2 = \nu_2 - \nu_1 = 1$. Weyrova tabuľka zovšeobecnených vlastných vektorov pre vlastné číslo $\lambda_1 = 3$ bude teda mať $k = 2$ riadky, pričom v prvom riadku bude $\sigma_1 = 1$ vektor a v druhom riadku bude $\sigma_2 = 1$ vektor

$$\begin{array}{c} v_{1,1} \\ v_{2,1} \end{array}$$

Vektor $v_{2,1}$ spĺňa $(A - 3I)^2 v_{2,1} = 0$ a $(A - 3I) v_{2,1} \neq 0$, teda napríklad

$$v_{2,1} = (0, 4, 1, -1)^T.$$

Pre vektor $v_{1,1}$ potom platí $v_{1,1} = (A - 3I) v_{2,1}$, teda $v_{1,1} = (1, -1, -1, 2)^T$. Vlastnému číslu λ_1 teda odpovedajú dve lineárne nezávislé vektorové riešenia

$$x_1(t) = e^{\lambda_1 t} v_{1,1} = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ -e^{3t} \\ -e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}, \quad x_2(t) = e^{\lambda_1 t} (v_{2,1} + t v_{1,1}) = \begin{pmatrix} t e^{3t} \\ -(t-4) e^{3t} \\ -(t-1) e^{3t} \\ (2t-1) e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Príklad 13

Podobne pre $\lambda_2 = 2$ je $m = 2$, $n - m = 4 - 2 = 2$ a $h_0 = n = 4$. Ďalej máme

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Platí $h_1 = 2$, a teda index $k = 1$. Príslušná postupnosť nulít je

$$\nu_0 = 0 < \nu_1 = 2,$$

ktorá dáva jednu Weyrovu charakteristiku $\sigma_1 = \nu_1 - \nu_0 = 2$. Weyrova tabuľka zovšeobecnených vlastných vektorov pre vlastné číslo $\lambda_2 = 2$ bude teda mať $k = 1$ riadok s $\sigma_1 = 2$ vektormi

$v_{1,1}$	$v_{1,2}$
-----------	-----------

Vektory $v_{1,1}$ a $v_{1,2}$ spĺňajú $(A - 2I)v_{1,1} = 0 = (A - 2I)v_{1,2}$ a $v_{1,1} \neq 0$, $v_{1,2} \neq 0$. Sú to teda lineárne nezávislé vlastné vektory odpovedajúce vlastnému číslu $\lambda_2 = 2$. Výpočtom napríklad dostaneme

Príklad 13

$$v_{1,1} = (0, 1, 0, 0)^T, \quad v_{1,2} = (0, 0, 0, 1)^T.$$

Vlastnému číslu λ_2 teda odpovedajú dve lineárne nezávislé vektorové riešenia

$$x_3(t) = e^{\lambda_2 t} v_{1,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_4(t) = e^{\lambda_2 t} v_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Nakoniec, fundamentálna matica systému v zadaní má tvar

$$Y(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)) = \begin{pmatrix} e^{3t} & te^{3t} & 0 & 0 \\ -e^{3t} & -(t-4)e^{3t} & e^{2t} & 0 \\ -e^{3t} & -(t-1)e^{3t} & 0 & 0 \\ 2e^{3t} & (2t-1)e^{3t} & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Príklad 14

Uvažujme systém

$$x' = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} x.$$

Matica A má jedno trojnásobné vlastné číslo $\lambda = 2$, nakoľko

$$\det(A - \lambda I) = -(\lambda - 2)^3.$$

Teda $m = 3$, $n - m = 3 - 3 = 0$ a $h_0 = n = 3$. Ďalej máme

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (A - 2I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (A - 2I)^3 = 0.$$

Platí $h_1 = 2$, $h_2 = 1$, $h_3 = 0$, a teda index $k = 3$. Príslušná postupnosť nulít je

$$\nu_0 = 0 < \nu_1 = 1 < \nu_2 = 2 < \nu_3 = 3,$$

ktorá dáva tri Weyrove charakteristiky $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 1$ a $\sigma_3 = 1$. Weyrova tabuľka zovšeobecnených vlastných vektoroů bude teda mať $k = 3$ riadky,

Príklad 14

príčom v každom z nich bude jeden vektor

$$\begin{array}{c} v_{1,1} \\ v_{2,1} \\ v_{3,1} \end{array}$$

Vektor $v_{3,1}$ spĺňa $(A - 2I)^3 v_{3,1} = 0$ a $(A - 2I)^2 v_{3,1} \neq 0$, teda napríklad $v_{1,2} = (0, 0, 1)^T$. Pre vektor $v_{2,1}$ potom platí $v_{2,1} = (A - 2I) v_{3,1}$, teda $v_{2,1} = (0, -1, -1)^T$, a pre vektor $v_{1,1}$ platí $v_{1,1} = (A - 2I)^2 v_{3,1}$, teda $v_{1,1} = (1, 2, 1)^T$. Danému vlastnému číslu teda odpovedajú tri lineárne nezávislé vektorové riešenia

$$x_1(t) = e^{\lambda t} v_{1,1} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \quad x_2(t) = e^{\lambda t} (v_{2,1} + t v_{1,1}) = \begin{pmatrix} t e^{2t} \\ (2t - 1) e^{2t} \\ (t - 1) e^{2t} \end{pmatrix},$$

$$x_3(t) = e^{\lambda t} \left(v_{3,1} + t v_{2,1} + \frac{t^2}{2} v_{1,1} \right) = \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2} e^{2t} \\ (t^2 - t) e^{2t} \\ \left(\frac{t^2}{2} - t + 1 \right) e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Příklad 14

Fundamentální matice systému v zadání má potom tvar

$$Y(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & \frac{t^2}{2} e^{2t} \\ 2e^{2t} & (2t-1)e^{2t} & (t^2-t)e^{2t} \\ e^{2t} & (t-1)e^{2t} & \left(\frac{t^2}{2} - t + 1\right) e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Příklad 15

Uvažujme systém

$$x' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} x.$$

Matice A má jedno trojnásobné vlastní číslo $\lambda = 1$, protože

$$\det(A - \lambda I) = -(\lambda - 1)^3.$$

Teda $m = 3$, $n - m = 3 - 3 = 0$ a $h_0 = n = 3$. Dále máme

Príklad 15

$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (A - I)^2 = 0.$$

Platí $h_1 = 1$ a $h_2 = 0$, a teda index $k = 2$. Príslušná postupnosť nulít je

$$\nu_0 = 0 < \nu_1 = 2 < \nu_2 = 3,$$

ktorá dáva dve Weyrove charakteristiky $\sigma_1 = 2$ a $\sigma_2 = 1$. Weyrova tabuľka zovšeobecnených vlastných vektorov bude teda mať $k = 2$ riadky, pričom v prvom riadku budú $\sigma_1 = 2$ vektory a v druhom riadku bude $\sigma_2 = 1$ vektor

$v_{1,1}$	$v_{1,2}$
$v_{2,1}$	

Vektor $v_{2,1}$ spĺňa $(A - I)^2 v_{2,1} = 0$, $(A - I) v_{2,1} \neq 0$, napr. $v_{2,1} = (1, 1, -1)^T$.

Pre vektor $v_{1,1}$ potom platí $v_{1,1} = (A - I) v_{2,1}$, teda $v_{1,1} = (1, 2, -1)^T$.

Vektor $v_{1,2}$ je vlastný vektor, t.j., $(A - I) v_{1,2} = 0$, lineárne nezávislý s $v_{1,1}$ a $v_{2,1}$. Takýmto vektorom je napr. $v_{1,2} = (0, 1, -1)^T$.

Příklad 15

Vlastnému číslu $\lambda = 1$ teda odpovedajú tri lineárne nezávislé vektorové riešenia

$$x_1(t) = e^{\lambda t} v_{1,1} = \begin{pmatrix} e^t \\ 2e^t \\ -e^t \end{pmatrix}, \quad x_2(t) = e^{\lambda t} (v_{2,1} + t v_{1,1}) = \begin{pmatrix} (t+1)e^t \\ (2t+1)e^t \\ -(t+1)e^t \end{pmatrix},$$

$$x_3(t) = e^{\lambda t} v_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ -e^t \end{pmatrix}.$$

Príslušná fundamentálna matica rovnice v zadaní má potom tvar

$$Y(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = \begin{pmatrix} e^t & (t+1)e^t & 0 \\ 2e^t & (2t+1)e^t & e^t \\ -e^t & -(t+1)e^t & -e^t \end{pmatrix}.$$