Príklady na precvičovanie – komplexné čísla, postupnosti a funkcie

Riešené príklady

Príklad 1
Vypočítajte:

$$\text{a) } \frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} - \frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}, \quad \text{b) } (1+\mathrm{i})^6, \quad \text{c) } \sqrt{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}.$$

Riešenie:
a) Elementárnym vypočtom dostaneme

$$\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} - \frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} \cdot \frac{1+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} - \frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} \cdot \frac{1-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$$
$$= \frac{(1+\mathrm{i})^2}{2} - \frac{(1-\mathrm{i})^2}{2} = 2\mathrm{i}.$$

b) Podobne máme

$$(1+\mathrm{i})^6 = \left[(1+\mathrm{i})^2\right]^3 = [2\mathrm{i}]^3 = -8\mathrm{i}.$$

c) Označme $x + \mathrm{i}\, y = \sqrt{1+\mathrm{i}\,\sqrt{3}}$, kde x, y su neznáme reálne čísla. Potom

$$1+\mathrm{i}\sqrt{3} = (x+\mathrm{i}y)^2 = x^2 - y^2 + 2xy\mathrm{i}.$$

Posledná rovnosť je ekvivalentná so sústavou

$$1 = x^2 - y^2, \quad \sqrt{3} = 2xy.$$

Ďalej môžeme postupovať dvomi vzájomne rovnocennými spôsobmi. Jedna možnosť je priamo vypočítať neznáme x, y z uvedenej sústavy. Platí $y = \sqrt{3}/(2x)$ a po dosadení do prvej rovnice a menšej úprave dostaneme pre x bikvadratickú rovnicu

$$4x^4 - 4x^2 - 3 = 0.$$

Druhý spôsob spočíva v „obohatení“ uvedenej sústavy o ešte jednu rovnicu. Platí napríklad toto

$$\left|1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right| = \left|(x+\mathrm{i}y)^2\right| = |x+\mathrm{i}y|^2 \implies 2 = x^2 + y^2.$$

Máme teda k dispozícii tri rovnice pre neznáme x, y, a to

$$2 = x^2 + y^2, \quad 1 = x^2 - y^2, \quad \sqrt{3} = 2xy.$$

Z prvých dvoch okamžite dostaneme $x^2 = 3/2$ a $y^2 = 1/2$, kým posledná rovnosť naznačuje, že obe neznáme majú rovnaké znamienko. Preto $[x, y] = [\sqrt{3/2}, 1/\sqrt{2}]$ alebo $[x, y] = [-\sqrt{3/2}, -1/\sqrt{2}]$. Teda

$$\sqrt{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}} = \begin{cases} \sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}, \\ -\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Príklad 2

Nájdite všetky hodnoty daných odmocnín a zapíšte ich v algebraickom tvare.

$$\text{a) } \sqrt[3]{1}, \quad \text{b) } \sqrt[6]{1}, \quad \text{c) } \sqrt[3]{1+\mathrm{i}}, \quad \text{d)} \sqrt[6]{-729}.$$

Riešenie:

Pripomeňme, že ak $n > 1$ je pevné prirodzené číslo, potom pre každé $z \in \mathbb{C}$ existuje n-tá odmocnina $\sqrt[n]{z}$ a nadobúda práve n rôznych hodnôt, konkrétne

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left[\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) + \mathrm{i} \sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \right], \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

kde φ označuje hlavný argument $\arg z$ komplexného čísla z.

a) Komplexné číslo 1 prepíšeme do goniometrického tvaru. Nakoľko $|1| = 1$ a $\arg 1 = 0$, platí

$$1 = 1 \cdot (\cos 0 + \mathrm{i} \sin 0).$$

Množina všetkých tretích odmocnín z 1 má potom tvar

$$\sqrt[3]{1} = \cos\frac{2k\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{3}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Postupným výpočtom pre jednotlivé hodnoty k dostaneme

$$\sqrt[3]{1} = \left\{ 1, \quad -\frac{1}{2} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

b) Analogicky ako v predchádzajúcom prípade pre množinu všetkých šiestych odmocnín z 1 platí

$$\sqrt[6]{1} = \cos\frac{2k\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{6} = \cos\frac{k\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{k\pi}{3}, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5.$$

Pre jednotlivé hodnoty k postupne dostávame

$$k = 0 \quad \longrightarrow \quad \cos 0 + \mathrm{i}\sin 0 = 1,$$

$$k = 1 \quad \longrightarrow \quad \cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$k = 2 \quad \longrightarrow \quad \cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$k = 3 \quad \longrightarrow \quad \cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi = -1,$$

$$k = 4 \quad \longrightarrow \quad \cos\frac{4\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3} = \cos\frac{2\pi}{3} - \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$k = 5 \quad \longrightarrow \quad \cos\frac{5\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{3} - \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Teda

$$\sqrt[6]{1} = \left\{\pm 1, \quad \pm\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \pm\left(\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}.$$

c) Ukážeme dva spôsoby riešenia tohto príkladu.
Riešenie 1:
Je navlas podobné predchádzajúcim dvom prípadom. Na oživenie číslo $1 + \mathrm{i}$ teraz prepíšeme do exponenciálneho tvaru ($|1 + \mathrm{i}| = \sqrt{2}$ a $\arg(1 + \mathrm{i}) = \pi/4$)

$$1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}.$$

Potom platí

$$\sqrt[3]{1 + \mathrm{i}} = \sqrt[6]{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi/4 + 2k\pi}{3}} = \sqrt[6]{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12} + \mathrm{i}\frac{2k\pi}{3}}, \quad k = 0,\ 1,\ 2.$$

Poznamenajme, že symbol $\sqrt[6]{2}$ v poslednom výraze označuje našu starú dobrú a bezpečnú *reálnu* šiestu odmocninu z 2. Voľbou parametra k dostaneme

$$k = 0 \quad \longrightarrow \quad \sqrt[6]{2}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}},$$

$$k = 1 \quad \longrightarrow \quad \sqrt[6]{2}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12} + \mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} = \sqrt[6]{2}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}},$$

$$k = 2 \quad \longrightarrow \quad \sqrt[6]{2}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12} + \mathrm{i}\frac{4\pi}{3}} = \sqrt[6]{2}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{17\pi}{12}} = \sqrt[6]{2}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}}.$$

V poslednej rovnosti sme využili skutočnosť, že

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{17\pi}{12}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{7\pi}{12} + 2\pi\right)} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}}_{\cos 2\pi + \mathrm{i}\sin 2\pi = 1} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}}.$$

Platí teda

$$\sqrt[3]{1+\mathrm{i}} = \{\sqrt[6]{2}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}, \quad \sqrt[6]{2}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}, \quad \sqrt[6]{2}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}}\}.$$

Malá potiaž je v tom, že príslušné tretie odmocniny máme vyjadrené v exponenciálnom tvare, kým podľa zadania máme nájsť ich alegebraické vyjadrenie. Podľa Eulerovho vzorca

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi, \quad \varphi \in \mathbb{R},$$

bude teda nutné explicitne určiť hodnoty kosínusu a sínusu v uhloch $\pi/12$, $3\pi/4$ a $-7\pi/12$:-// Pomôžu nám však goniometrické vzorce pre polovičný uhol, nakoľko napr. $\pi/12 = (\pi/6)/2$:)) Navyše uhol $3\pi/4$ určite nebude robiť problémy. Tak s chuťou do toho:

$$\underbrace{\cos\frac{\pi}{12}}_{\text{toto je kladné}} = \cos\frac{\pi/6}{2} = +\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2},$$

$$\underbrace{\sin\frac{\pi}{12}}_{\text{toto je kladné}} = \sin\frac{\pi/6}{2} = +\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2},$$

$$\cos\left(\frac{-7\pi}{12}\right) = \underbrace{\cos\frac{7\pi}{12}}_{\text{toto je záporné, prečo? :)}} = \cos\frac{7\pi/6}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos\frac{7\pi}{6}}{2}}$$

$$= -\sqrt{\frac{1+\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)}{2}} = -\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2},$$

$$\sin\left(\frac{-7\pi}{12}\right) = -\underbrace{\sin\frac{7\pi}{12}}_{\text{toto je kladné, prečo? :)}} = -\sin\frac{7\pi/6}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos\frac{7\pi}{6}}{2}}$$

$$= -\sqrt{\frac{1-\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)}{2}} = -\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}} = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2},$$

$$\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Takže nájdené tretie odmocniny z čísla $1+\mathrm{i}$ možno zapísať v tvaroch

$$\sqrt[6]{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}} = \sqrt[6]{2}\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt[6]{32}} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt[6]{32}},$$

$$\sqrt[6]{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}} = \sqrt[6]{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt[3]{2}},$$

$$\sqrt[6]{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}} = -\sqrt[6]{2}\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt[6]{32}} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt[6]{32}}.$$

Riešenie 2:

Druhý spôsob je podobný prvému, až do chvíle, keď sme nútení prevádzať vyššie uvedené nechutné výpočty. Je založený na naoko nevinnom pozorovaní

$$\sqrt[3]{1+\mathrm{i}} = \sqrt[3]{(1+\mathrm{i})\cdot 1} = \sqrt[3]{1+\mathrm{i}}\cdot\sqrt[3]{1}.$$

Výborne, túto rovnosť vykrátime výrazom $\sqrt[3]{1+\mathrm{i}}$ a dostaneme $1 = \sqrt[3]{1}$ … ?!?! Letmý pohľad na výsledok prípadu a) vyššie ihneď ukazuje, že niečo nie je v poriadku. Ako to teda je? :) Háčik je v tom, že symbol $\sqrt[3]{1+\mathrm{i}}$ nepredstavuje *jednu hodnotu*, ale *množinu troch hodnôt*. Podobne i výraz $\sqrt[3]{1}$ (v komplexnom ponímaní). Takže ešte raz a teraz už správne

$$\underbrace{\sqrt[3]{1+\mathrm{i}}}_{\text{množina všetkých tretích odmocnín z 1+i}} = \underbrace{\sqrt[3]{1+\mathrm{i}}\cdot\sqrt[3]{1}}_{\text{množina všetkých súčinov prvkov z } \sqrt[3]{1+\mathrm{i}} \text{ a } \sqrt[3]{1}}.$$

Naviac, obidve množiny $\sqrt[3]{1+\mathrm{i}}$ a $\sqrt[3]{1}$ majú po tri prvky. To znamená, že v súlade s výsledkom prípadu a) pre *akúkoľvek* pevne zvolenú hodnotu $\varepsilon \in \sqrt[3]{1+\mathrm{i}}$ platí

$$\sqrt[3]{1+\mathrm{i}} = \left\{\varepsilon\cdot 1,\quad \varepsilon\cdot\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\quad \varepsilon\cdot\left(-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}.$$

Za ε môžeme vziať napríklad hodnotu $\sqrt[6]{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$, ktorú vieme pomerne ľahko vyčísliť

$$\varepsilon = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt[3]{2}}.$$

Podľa práve získaného vyjadrenia pre $\sqrt[3]{1+\mathrm{i}}$ potom (po úpravách) dostaneme

$$\sqrt[3]{1+\mathrm{i}} = \left\{-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt[3]{2}},\quad -\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt[3]{2}}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt[3]{2}},\quad \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt[3]{2}}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt[3]{2}}\right\}.$$

Poznámka k c):
V prvom spôsobe riešenia sme využívali prevažne hrubú silu, kým druhé riešenie je založené na istom fígli. Obidva prístupy majú svoje kladné stránky, už len tým, že poskytujú dva uhly pohľadu na jednu vec. Nadôvažok, z dvojakého vyjadrenia tretích odmocnín z $1+\mathrm{i}$ ako bonus vyplývajú zaujímavé číselné identity, ktorých overenie je síce triviálna záležitosť, ale ich objavenie nie je celkom jednoduché. Konkrétne, platí

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} \quad \text{a} \quad \sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}.$$

(Samy odvoďte porovnaním výsledkov v prvom a druhom spôsobe riešenia a potom overte i priamym výpočtom.)

d) Namiesto priameho útoku využijeme opäť úskok. Kedysi si niekto všimol, že $3^6 = 729$. My však potrebujeme číslo, ktoré po umocnení na šiestu dá mínus 729. S číslom -3 nepochodíme. Čo tak 3i? Platí

$$(3\mathrm{i})^6 = 3^6\cdot\mathrm{i}^6 = 729\cdot(-1) = -729.$$

To je ono! :) Takže 3i je jedna z hodnôt $\sqrt[6]{-729}$. Ale my ich chceme mať šesť :(Napríklad aj $-3\mathrm{i}$ nám vyhovuje, ale stále je to málo. Pomôžeme si príkladom b) (otázku, prečo by nás malo napadnúť práve toto, nebudeme teraz riešiť :)). Nech ε je nejaká šiesta odmocnina z 1, t.j., $\varepsilon^6 = 1$. Potom

$$(3\mathrm{i} \cdot \varepsilon)^6 = (3\mathrm{i})^6 \cdot \varepsilon^6 = -729 \cdot 1 = -729.$$

Takto to teda je :) A keďže šiestych odmocnín z 1 je práve šesť, platí

$$\sqrt[6]{-729} = \left\{3\mathrm{i} \cdot \varepsilon, \quad \varepsilon \in \sqrt[6]{1}\right\}.$$

Využijúc výsledok z prípadu b) dostaneme

$$\sqrt[6]{-729} = \left\{3\mathrm{i} \cdot (\pm 1), \quad 3\mathrm{i} \cdot \left[\pm\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right], \quad 3\mathrm{i} \cdot \left[\pm\left(\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]\right\}$$

$$= \left\{\pm 3\mathrm{i}, \quad \pm\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{i}\right), \quad \pm\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{i}\right)\right\}.$$

Samozrejme, ten istý výsledok by sme dostali i postupom aplikovaným v prípadoch a), b).

Príklad 3

Nech ω je nejaké riešenie rovnice $x^3 = 1$, pričom $\omega \neq 1$. Bez znalosti explicitnej hodnoty ω vyjadrite čísla

$$\frac{1}{1+\omega}, \quad \frac{1}{1+\omega^2}, \quad \frac{\omega - 1}{1+\omega}, \quad \frac{\omega^2 - 1}{1+\omega^2},$$

v tvare $a + b\,\omega$, kde $a, b \in \mathbb{R}$.

Riešenie:

Rozkladom $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$ zistíme, že (komplexné) číslo ω jednak spĺňa $\omega^3 = 1$, a jednak je riešením kvadratickej rovnice $\omega^2+\omega+1 = 0$. Vhodným bavkaním sa s týmito poznatkami postupne dostávame

$$\frac{1}{1+\omega} = \frac{1}{\underbrace{1+\omega}_{\text{tento menovateľ je } -\omega^2}} = \frac{1}{-\omega^2} = \frac{\omega}{\underbrace{-\omega^3}_{\text{tento menovateľ je } -1}} = -\omega = 0 + (-1) \cdot \omega,$$

$$\frac{1}{1+\omega^2} = \underbrace{\frac{1}{1+\omega^2}}_{\text{tento menovateľ je } -\omega} = \frac{1}{-\omega} = \frac{\omega^2}{-\omega^3} = -\omega^2 = 1+\omega,$$

$$\frac{\omega-1}{1+\omega} = (\omega-1)\cdot \underbrace{\frac{1}{1+\omega}}_{\text{tento zlomok je } -\omega} = (\omega-1)\cdot(-\omega) = \underbrace{-\omega^2}_{\text{toto je } 1+\omega} + \omega = 1+2\omega,$$

$$\frac{\omega^2-1}{1+\omega^2} = (\omega^2-1)\cdot \underbrace{\frac{1}{1+\omega^2}}_{\text{tento zlomok je } 1+\omega} = (\omega^2-1)\cdot(1+\omega) = (\omega^2-1)\cdot \underbrace{(1+\omega)}_{\text{toto je } -\omega^2}$$

$$= -(\omega^2-1)\cdot\omega^2 = \underbrace{-\omega^4}_{\text{toto je } -\omega} + \underbrace{\omega^2}_{\text{toto je } -1-\omega} = -\omega-1-\omega = -1-2\omega.$$

Príklad 4

Stanovte hodnotu súčtu

$$1+\cos 2x+\cos 4x+\cdots+\cos 2nx, \quad x\in\mathbb{R}, \quad n\in\mathbb{N}_0.$$

Riešenie:

Pri tejto klasickej úlohe aplikujeme Eulerov vzorec a Moivreovu vetu. Konkrétne, pre každé $x\in\mathbb{R}$ a $k\in\mathbb{Z}$ platí

$$\cos x+\mathrm{i}\sin x=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}, \quad (\cos x+\mathrm{i}\sin x)^k=\cos kx+\mathrm{i}\sin kx.$$

Kombináciou týchto poznatkov dostaneme vyjadrenia (overte samy)

$$\cos kx=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}}{2}, \quad \sin kx=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}}{2\mathrm{i}}.$$

Nech $x\in\mathbb{R}$ a $n\in\mathbb{N}_0$ sú dané. Pre súčet v zadaní príkladu potom máme

$$1+\cos 2x+\cos 4x+\cdots+\cos 2nx=\sum_{m=0}^{n}\cos 2mx=\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}mx}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}mx}}{2}\right).$$

Ak $x = l\pi$ pre nejaké celé číslo l, potom $\cos 2mx = \cos 2ml\pi = \cos 0 = 1$ pre každé $m = 0, \dots, n$. V tomto prípade je teda hľadaný súčet $n+1$. Predpokladajme, nech $x \neq l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$. Platí

$$\sum_{m=0}^{n} \cos 2mx = \sum_{m=0}^{n} \left(\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}mx} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}mx}}{2} \right) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{n} \left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}\right)^m + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{n} \left(\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\right)^m .$$

Posledné dve sumy predstavujú súčty konečných geometrických postupností s kvocientami $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}$ a $\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}$. Platí

$$\sum_{m=0}^{n} \left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}\right)^m = \frac{1 - \mathrm{e}^{2\mathrm{i}x(n+1)}}{1 - \mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}}.$$

Získaný súčet teraz vhodne upravíme, resp. budeme sa snažiť ho vyjadriť pomocou reálnych výrazov obsahujúcich sínusy a kosínusy. Postupne dostávame

$$\frac{1 - \mathrm{e}^{2\mathrm{i}x(n+1)}}{1 - \mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x(n+1)} \cdot \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x(n+1)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x(n+1)}\right)}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \cdot \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x(n+1)}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}} \cdot \frac{2\mathrm{i}\sin(n+1)x}{2\mathrm{i}\sin x}$$

$$= \mathrm{e}^{\mathrm{i}xn} \cdot \frac{\sin(n+1)x}{\sin x}.$$

V prvom kroku sme z čitateľa i menovateľa zlomku vynímali pred zátvorku, kým v druhom kroku sme aplikovali vyjadrenie funkcie sínus odvodené v úvode príkladu. Platí teda

$$\sum_{m=0}^{n} \left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}\right)^m = \mathrm{e}^{\mathrm{i}xn} \cdot \frac{\sin(n+1)x}{\sin x}.$$

Analogickým spôsobom dostaneme pre druhú sumu vyjadrenie (overte; napríklad aj tak, že v práve odvodenom výraze zameníte x za $-x$;))

$$\sum_{m=0}^{n} \left(\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\right)^m = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xn} \cdot \frac{\sin(n+1)x}{\sin x}.$$

Pre súčet v zadaní príkladu potom dostaneme formulu

$$\sum_{m=0}^{n} \cos 2mx = \frac{1}{2} \cdot \left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}xn} \cdot \frac{\sin(n+1)x}{\sin x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xn} \cdot \frac{\sin(n+1)x}{\sin x} \right]$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}xn} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xn}}{2} \cdot \frac{\sin(n+1)x}{\sin x} = \frac{\cos nx \cdot \sin(n+1)x}{\sin x}.$$

Zistili sme teda, že platí

$$\sum_{m=0}^{n} \cos 2mx = \begin{cases} \dfrac{\cos nx \cdot \sin(n+1)x}{\sin x}, & x \neq l\pi, \\ n+1, & x = l\pi, \end{cases} \qquad l \in \mathbb{Z}.$$

Príklad 5

Pre $x \in \mathbb{R}$ vyjadrite $\sin 5x$, $\cos 5x$, $\operatorname{tg} 5x$ a $\operatorname{cotg} 5x$ pomocou mocnín $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$.

Riešenie:

Existujú minimálne dve cesty, ako postupovať pri tomto príklade. V prvej z nich budeme priamo postupne „roz-sínusovávať“, resp. „roz-kosínusovávať“, resp. „roz-tangensovávať“, resp. „roz-kotangensovávať“ výrazy $\sin 5x$, $\cos 5x$, $\operatorname{tg} 5x$ a $\operatorname{cotg} 5x$. Síce sa nám tým výrazne zlepšia naše manuálne počtárske zručnosti, ale výdatne si tým aj odskáčeme všetku tú špinavú prácu, ktorú matematika so sebou prináša :) Pozor, je to skutočne len pre silné a otrlé žalúdky! My si teraz zvolíme ťahať za trochu ľahší koniec :) Starý Abraham de Moivre (a neskôr ešte lepšie – ako inak – i Leonhard Euler) si jedného dňa všimol takúto roztomilú vec

$$(\cos x + \mathrm{i} \sin x)^5 = \cos 5x + \mathrm{i} \sin 5x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Rovnako ako teraz našich čitateľov i jeho napadlo, že by nebolo od veci roznásobiť ľavú stranu spôsobom, ako to robieval Isaac Newton. Chalaniská sa totiž veľmi kamošili, už nejednu konvergentnú i divergentnú párty zažili, takže Abraham dôverne poznal Isaacovu – ako sa dnes hovorí – binomickú vetu. Skrátka, po konečných úpravách dostal toto

$$(\cos x + \mathrm{i} \sin x)^5 = \cos^5 x - 10 \cos^3 x \sin^2 x + 5 \cos x \sin^4 x$$

$$+ \mathrm{i}(5 \cos^4 x \sin x - 10 \cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x).$$

Nuž ale, objaviteľsky vykríkol Moivre, potom musí predsa platiť, že

$$\cos 5x = \cos^5 x - 10 \cos^3 x \sin^2 x + 5 \cos x \sin^4 x,$$

$$\sin 5x = 5\cos^4 x \sin x - 10\cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x.$$

Ľaľa ho, vzrušene si pomädlil ruky Moivre, dve muchy jednou ranou. A keďže bol povaha dôkladná, zvedavá a hlavne nebojácna, neprestal a plný posvätného napätia pokračoval ďalej

$$\operatorname{tg} 5x = \frac{\sin 5x}{\cos 5x} = \frac{5\cos^4 x \sin x - 10\cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x}{\cos^5 x - 10\cos^3 x \sin^2 x + 5\cos x \sin^4 x}$$

$$= \frac{\cos^5 x \cdot (5\operatorname{tg} x - 10\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^5 x)}{\cos^5 x \cdot (1 - 10\operatorname{tg}^2 x + 5\operatorname{tg}^4 x)} = \frac{5\operatorname{tg} x - 10\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^5 x}{1 - 10\operatorname{tg}^2 x + 5\operatorname{tg}^4 x}.$$

Abraham, dojatý ako storočný miliardár, kontemplujúci svoje skromné imanie, si uvedomil, že narazil na zlatý dol a bezostyšne sa mu už zbiehali slinky na ďalšie sústo

$$\operatorname{cotg} 5x = \frac{1}{\operatorname{tg} 5x} = \frac{1 - 10\operatorname{tg}^2 x + 5\operatorname{tg}^4 x}{5\operatorname{tg} x - 10\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^5 x}$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^5 x \cdot (\operatorname{cotg}^5 x - 10\operatorname{cotg}^3 x + 5\operatorname{cotg} x)}{\operatorname{tg}^5 x \cdot (5\operatorname{cotg}^4 x - 10\operatorname{cotg}^2 x + 1)} = \frac{\operatorname{cotg}^5 x - 10\operatorname{cotg}^3 x + 5\operatorname{cotg} x}{5\operatorname{cotg}^4 x - 10\operatorname{cotg}^2 x + 1}.$$

Príklad 6

Zapíšte a načrtnite v komplexnej rovine uvedené množiny bodov.

$$\text{a) } |z-1| \le \operatorname{Re} z, \quad \text{b) } |z-1| + |z-3| < 3.$$

Riešenie:

Využijeme pozorovanie, že každé komplexné číslo $z = x + \mathrm{i}y$ je možné reprezentovať ako bod $[x, y]$ v (euklidovskej) rovine (a naopak). Potom v prípade a) máme

$$|z-1| \le \operatorname{Re} z,$$
$$0 \le |(x-1) + \mathrm{i}y| \le x,$$
$$0 \le \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \le x,$$
$$(x-1)^2 + y^2 \le x^2,$$
$$-2x + 1 + y^2 \le 0 \implies y^2 \le 2x - 1.$$

Jedná sa teda o množinu bodov vo vnútri a na parabole $y^2 = 2x - 1$. V prípade b) si môžeme pomôcť geometrickou interpretáciou absolútnej hodnoty.

Vieme, že pre $z = x + \mathrm{i}y$ výraz $|z-1|$ vyjadruje (euklidovskú) vzdialenosť bodu $[x, y]$ od bodu $[1, 0]$, resp. výraz $|z-3|$ vyjadruje (euklidovskú) vzdialenosť bodu $[x, y]$ od bodu $[3, 0]$. Máme teda nájsť množinu všetkých bdoch v rovine, ktorých súčet vzdialeností od pevne daných bodov $[1, 0]$ a $[3, 0]$ je menší ako 3. Takúto vlastnosť má práve vnútro elipsy s ohniskami v bodoch $[1, 0]$ a $[3, 0]$ a s dĺžkou hlavnej polosi 3/2. Overte, že elipsa s takýmito parametrami skutočne existuje a nájdite jej stred, dĺžku vedľajšej polosi a nakoniec i jej analytické vyjadrenie :) Mal by ste dostať výsledok

$$\frac{(x-2)^2}{9/4} + \frac{y^2}{5/4} < 1.$$

Príklad 7

Vypočítajte limitu postupnosti.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{i}}{n} \left(\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^n.$$

Riešenie:

V limitovanon výraze sa pokúsime oddeliť reálnu a imaginárnu časť. Najschodnejšie sa ukazuje previesť číslo $(1+\mathrm{i})/\sqrt{2}$ na goniometrický tvar a následne na jeho n-tú mocninu aplikovať Moivreho vzorec. Platí

$$\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4},$$

$$\left(\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^n = \cos\frac{\pi n}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi n}{4}.$$

Potom dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{i}}{n} \left(\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{i}}{n} \left(\cos\frac{\pi n}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi n}{4}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{\sin\frac{\pi n}{4}}{n} + \mathrm{i}\,\frac{\cos\frac{\pi n}{4}}{n}\right).$$

Pre uvedenú postupnosť existuje limita práve vtedy, keď existujú limity z jej reálnej i imaginárnej časti. Avšak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{\pi n}{4}}{n} = 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{\cos\frac{\pi n}{4}}{n},$$

ako sa môžeme ľahko presvedčiť. Preto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{i}}{n}\left(\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^n = 0 + \mathrm{i}\cdot 0 = 0.$$

Príklad 8

Dokážte.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(-1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^{3n-2}}{8^n-1} = \frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{8}.$$

Riešenie:

Máme vlastne ukázať, že

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\left(-1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^{3n-2}}{8^n-1} - \left(\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{8}\right)\right] = 0.$$

Toto je však ekvivalentné s tým, že

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(-1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^{3n-2}}{8^n-1} - \left(\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{8}\right)\right| = 0$$

(dobre si to premyslite :)). Túto limitu z *reálnej* postupnosti teraz budeme vhodne upravovať, pričom ukážeme, že skutočne je nulová. Komplexné číslo $-1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ prepíšeme napríklad do exponenciálneho tvaru

$$-1+\mathrm{i}\sqrt{3} = 2\,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}.$$

Dosadením postupne dostaneme

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(2\,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}\right)^{3n-2}}{8^n-1} - \frac{2\,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}}{8}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|2\,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}\cdot\left(\frac{\left(2\,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}\right)^{3n-3}}{8^n-1} - \frac{1}{8}\right)\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2\cdot\underbrace{\left|\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}\right|}_{\text{toto je 1}}\cdot\left|\frac{2^{3n-3}\cdot\overbrace{\mathrm{e}^{2(n-1)\pi\mathrm{i}}}^{\text{toto je 1}}}{8^n-1} - \frac{1}{8}\right| = 2\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{3n-3}}{8^n-1} - \frac{1}{8}\right|$$

$$= 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \left| \frac{8^{n-1}}{8^n - 1} - \frac{1}{8} \right| = 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \left| \frac{8^n - 8^n + 1}{8\,(8^n - 1)} \right| = 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{8\,(8^n - 1)} = 0.$$

Príklad 9

Rozhodnite o konvergencii nekonečného radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}}}{n}.$$

Riešenie:

V n-tom člene daného radu oddelíme jeho reálnu a imaginárnu časť

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos(\pi/n)}{n} + \mathrm{i} \cdot \frac{\sin(\pi/n)}{n} \right).$$

Potrebujeme teda vyšetriť konvergenciu *reálnych* radov

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi/n)}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi/n)}{n}.$$

Platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\cos(\pi/n)}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \cos(\pi/n) = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sin(\pi/n)}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\pi/n)}{\frac{1}{n}} = \pi.$$

Podľa limitného porovnávacieho kritéria (pre reálne rady) to znamená, že kosínusový rad sa pre veľké n správa ako harmonický rad $\sum(1/n)$, a teda diverguje, kým sínusový rad sa pre veľké n javí ako rad $\sum(1/n^2)$, a teda konverguje. Preto komplexný rad v zadaní príkladu diverguje.

Príklad 10

Nájdite súčet nekonečného radu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{i}^n}{2^n} + \frac{\mathrm{i}^{2n}}{n!} \right).$$

Riešenie:
Intuitívne cítime, že ak by sa nám pošťastilo určiť súčty radov

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{2^n}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^{2n}}{n!},$$

máme vyhraté. Prvý z týchto radov je geometrický s kvocientom $q = \mathrm{i}/2$, a nakoľko

$$|q| = \left|\frac{\mathrm{i}}{2}\right| = \frac{|\mathrm{i}|}{2} = \frac{1}{2} < 1,$$

je to konvergetný rad so súčtom

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{2^n} = 1 \cdot \frac{1}{1 - \frac{\mathrm{i}}{2}} = \frac{2}{2 - \mathrm{i}} = \frac{2\,(2 + \mathrm{i})}{5} = \frac{4 + 2\mathrm{i}}{5}.$$

Druhý rad je dokonca reálny, pretože $\mathrm{i}^{2n} = (-1)^n$. Z teórie mocninových radov vyplýva, že

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \mathrm{e}^{-1}$$

(platí $\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty}(x^n/n!)$ pre každé reálne x). Preto súčet pôvodného radu v zadaní existuje a spĺňa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{i}^n}{2^n} + \frac{\mathrm{i}^{2n}}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{2^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^{2n}}{n!} = \frac{4 + 2\mathrm{i}}{5} + \frac{1}{\mathrm{e}} = \frac{1}{\mathrm{e}} + \frac{4}{5} + \mathrm{i} \cdot \frac{2}{5}.$$

Príklad 11
Určte limitu funkcie.

$$\lim_{z \to -\mathrm{i}} \frac{z^2 + 1}{z^3 + \mathrm{i}z^2 - z - \mathrm{i}}.$$

Riešenie:
Dosadením $z = -\mathrm{i}$ dostaneme neurčitý výraz $0/0$, ako sa možno ľahko presvedčiť. Postupujeme preto štandardne ako pri reálnych funkciách reálnej premennej. Platí napríklad

$$\lim_{z \to -\mathrm{i}} \frac{z^2 + 1}{z^3 + \mathrm{i}z^2 - z - \mathrm{i}} = \lim_{z \to -\mathrm{i}} \frac{(z + \mathrm{i})(z - \mathrm{i})}{(z + \mathrm{i})(z^2 - 1)} = \lim_{z \to -\mathrm{i}} \frac{z - \mathrm{i}}{z^2 - 1} = \mathrm{i}.$$

Príklad 12
Nájdite body nespojitosti funkcie f danej predpisom

$$f(z) = \frac{z\,\mathrm{Re} z}{|z|}$$

a rozhodnite, či sa jedná o odstrániteľné nespojitosti.

Riešenie:
Výraz $z\,\mathrm{Re}z/|z|$ rozdelíme na jeho reálnu a imaginárnu časť. Pre $z = x + \mathrm{i}y$ je zrejme $\mathrm{Re}z = x$ a

$$\frac{z\,\mathrm{Re} z}{|z|} = \frac{(x+\mathrm{i}y)x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^2+\mathrm{i}yx}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \mathrm{i}\,\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Reálne funkcie

$$u(x,y) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad v(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

sú zrejme spojité všade na $\mathbb{R}^2$ okrem bodu $[0,0]$, kde ani jedna z nich nie je definovaná. Preto funkcia f je spojitá na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, a teda má jediný bod nespojitosti $z = 0$. Vypočítajme limitu f v tomto bode

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \mathrm{i}\,\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right).$$

Úloha sa nám redukuje na určenie reálnych limít

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Nasadiac klasický aparát diferenciálneho počtu reálnych funkcií dvoch reálnych premenných (napríklad prevod do polárnych súradníc), dostaneme

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

To znamená, že platí $\lim_{z\to 0} f(z) = 0$. Funkcia f má preto v bode $z = 0$ odstrániteľnú nespojitosť, pričom funkcia g definovaná priradením

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{z\,\mathrm{Re}z}{|z|}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0, \end{cases}$$

je už spojitá v celej komplexnej rovine.

Poznámka k Príkladu 12:

V príklade sme ukázali, že funkcia f nie je definovaná v bode $z = 0$, a to je dôvod, prečo nie je v tomto bode spojitá. Je potrebné si však uvedomiť, čo je príčinou toho, že f nie je definovaná v 0. Hlavným dôvodom nie je to, že po dosadení hodnoty $z = 0$ do predpisu funkcie f dostaneme nulu v menovateli. Skutočnou príčinou je fakt, že $f(0)$ je *neurčitý výraz*, konkrétne typu $0/0$. Túto divnú alchýmiu si bližšie osvetlíme v nasledujúcom príklade :)

Príklad 13

Vyšetrite spojitosť funkcie

$$f(z) = \frac{z}{z^2+1}$$

ako priradenia

$$\text{a) } f\,:\,\mathbb{C}\to\mathbb{C}, \quad \text{b) } f\,:\,\mathbb{C}\to\tilde{\mathbb{C}},$$

kde $\tilde{\mathbb{C}} := \mathbb{C}\cup\{\infty\}$.

Riešenie:

a) Funkciu f chápeme ako priradenie z $\mathbb{C}$ do $\mathbb{C}$, t.j., do f môžeme napchať *iba konečné hodnoty* argumentu z, pričom výsledok $f(z)$ musí byť zas len *konečný* (takéto funkcie sa priliehavo nazývajú *konečné* :)). Z predpisu pre f ihneď vidno, že problém môžu robiť iba (konečné) hodnoty $z = \pm\mathrm{i}$. Platí

$$f(\mathrm{i}) = \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}^2+1} = \frac{\mathrm{i}}{0} = \infty, \qquad f(-\mathrm{i}) = \frac{-\mathrm{i}}{(-\mathrm{i})^2+1} = \frac{-\mathrm{i}}{0} = \infty,$$

podľa definičných vlastností komplexného nekonečna. Teda $f(\mathrm{i}), f(-\mathrm{i}) \notin \mathbb{C}$, t.j., hodnoty $f(\mathrm{i})$, $f(-\mathrm{i})$ nie sú konečné, a preto funkcia f nie je spojitá v bodoch $\pm\mathrm{i}$ (konkrétne, nie je definovaná v bodoch $\pm\mathrm{i}$).

b) Teraz síce vkladáme do f zas len konečné hodnoty z, ale $f(z)$ môže byť aj *nekonečné*. Takže nás nijako nevzrušuje fakt, že $f(\pm\mathrm{i}) = \infty$. Funkcia f *je definovaná* v bodoch $z = \pm\mathrm{i}$ (premyslite si, že okrem iného je to dôsledok faktu, že máme zavedené len jedno komplexné nekonečno). To však, ako vieme, nestačí na jej spojitosť. Poďme sa pozrieť na limity f v bodoch $\pm\mathrm{i}$

$$\lim_{z\to\mathrm{i}} f(z) = \lim_{z\to\mathrm{i}} \frac{\overbrace{z}^{\text{toto konverguje do i}}}{\underbrace{z^2+1}_{\text{toto konverguje do 0}}} = \frac{\mathrm{i}}{0} = \infty = f(\mathrm{i}),$$

$$\lim_{z\to-\mathrm{i}} f(z) = \lim_{z\to-\mathrm{i}} \frac{\overbrace{z}^{\text{toto konverguje do }-\mathrm{i}}}{\underbrace{z^2+1}_{\text{toto konverguje do 0}}} = \frac{-\mathrm{i}}{0} = \infty = f(-\mathrm{i}).$$

Žiadne prekvapenie. Teda v tomto ponímaní je f funkciou spojitou v celej komplexnej rovine $\mathbb{C}$.

Uvedený výpočet limít sa môže zdať veľmi svojvoľný a tak trochu aj účelový, aby nám niečo pekné vyšlo :) Pridáme teda korektnejší výpočet. Určíme limitu absolútnej hodnoty f v bode $z = \mathrm{i}$. Poznamenajme, že $|f|$ je reálna funkcia (komplexnej premennej). Platí

$$\lim_{z\to\mathrm{i}} |f(z)| = \lim_{z\to\mathrm{i}} \frac{\overbrace{|z|}^{\text{toto konverguje do 1}}}{\underbrace{|z^2+1|}_{\text{toto konverguje do 0 sprava}}} = \frac{1}{0^+} = +\infty,$$

kde $+\infty$ je staré dobré *reálne* plus nekonečno. To znamená, že pre $z \to \mathrm{i}$ sa funkčné hodnoty $f(z)$ *neobmedzene vzďaľujú* od začiatku súradnicovej sústavy. Teda skutočne $f(z) \to \infty$, kde ∞ teraz značí *jediné* komplexné nekonečno. Podobný záver platí aj pre limitu $\lim_{z\to-\mathrm{i}} f(z)$.