

Príklady na precvičovanie – komplexná derivácia, holomorfné funkcie, mocninové rady

Riešené príklady

Príklad 1

Dokážte, že funkcia

$$f(z) = iz^4 + 2z$$

je komplexne diferencovateľná v celej komplexnej rovine a určte $f'(z)$. Úlohu vyriešte jednak pomocou definície komplexnej derivácie, a jednak overením Cauchyho–Riemannových rovností pre reálnu a imaginárnu časť funkcie f .

Riešenie:

Nech z_0 je ľubovoľné komplexné číslo. Podľa definície komplexnej derivácie funkcie f platí

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Postupne dostávame

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{iz^4 + 2z - iz_0^4 - 2z_0}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \left[i \cdot \frac{z^4 - z_0^4}{z - z_0} + 2 \cdot \frac{z - z_0}{z - z_0} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} [i \cdot (z^3 + z^2z_0 + zz_0^2 + z_0^3) + 2] = 4iz_0^3 + 2. \end{aligned}$$

Teda f' existuje na celom \mathbb{C} a platí $f'(z) = 4iz^3 + 2$. Túto skutočnosť teraz overíme pomocou vlastností reálnej a imaginárnej časti funkcie f . Máme

$$\begin{aligned} f(z) &= f(x + iy) = i \cdot (x + iy)^4 + 2(x + iy) \\ &= -4x^3y + 4xy^3 + 2x + i \cdot (x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + 2y) \end{aligned}$$

↓

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(z) = -4x^3y + 4xy^3 + 2x,$$

$$v(x, y) = \operatorname{Im} f(z) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + 2y.$$

Funkcie u, v sú iste (reálne) diferencovateľné v celom \mathbb{R}^2 , pričom pre ich prvé parciálne derivácie podľa premenných x, y dostaneme

$$u'_x = -12x^2y + 4y^3 + 2, \quad u'_y = -4x^3 + 12xy^2,$$

$$v'_x = 4x^3 - 12xy^2, \quad v'_y = -12x^2y + 4y^3 + 2.$$

Vidíme, že platí

$$u'_x = v'_y, \quad \text{a} \quad u'_y = -v'_x$$

pre každé x, y . Teda sú splnené Cauchyho–Riemannove rovnosti na celom \mathbb{R}^2 . Preto funkcia f je komplexne diferencovateľná všade v komplexnej rovine a

$$f'(z) = u'_x + iv'_x = -12x^2y + 4y^3 + 2 + i(4x^3 - 12xy^2).$$

Spätným prechodom ku komplexnej premennej $z = x + iy$ dostaneme vyjadrenie $f'(z) = 4iz^3 + 2$.

Poznámka:

Na konci Príkladu 1 sme sa potrebovali vrátiť od vyjadrenia komplexnej funkcie pomocou dvoch reálnych premenných x, y ku jej vyjadreniu pomocou jednej komplexnej premennej $z = x + iy$. Všeobecne sa to robí tak, že do daného výrazu sa za x, y dosadí

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i},$$

a následne sa vzniknutý výraz vhodne upraví. Je to však niekedy fuška :(

Príklad 2

Zistite, kde v \mathbb{C} je funkcia

$$w = z(\bar{z})^2$$

komplexne diferencovateľná.

Riešenie:

V danej funkcii oddelíme jej reálnu a imaginárnu časť. Pre $z = x + iy$ platí

$$w = (x + iy)(x - iy)^2 = x^3 + xy^2 - i \cdot (y^3 + x^2y),$$

teda $u = \operatorname{Re} w = x^3 + xy^2$ a $v = \operatorname{Im} w = -y^3 - x^2y$. Funkcia w má v bode $z_0 = x_0 + iy_0$ komplexnú deriváciu práve vtedy, keď reálne funkcie u, v sú (reálne) diferencovateľné v bode $[x_0, y_0]$ a spĺňajú Cauchyho–Riemannove podmienky

$$u'_x(x_0, y_0) = v'_y(x_0, y_0), \quad u'_y(x_0, y_0) = -v'_x(x_0, y_0).$$

Ľahko vidíme, že funkcie u, v sú diferencovateľné v celom \mathbb{R}^2 . Poďme preveriť, kde platia Cauchyho-Riemannove rovnosti (ďalej len v skratke C–R rovnosti, resp. C–R podmienky). Postupne dostaneme

$$u'_x = 3x^2 + y^2, \quad u'_y = 2xy, \quad v'_x = -2xy, \quad v'_y = -3y^2 - x^2.$$

Druhá z C–R podmienok platí pre každé x, y , kým prvá rovnosť dáva

$$3x^2 + y^2 = -3y^2 - x^2 \implies 4x^2 + 4y^2 = 0 \implies x = 0 = y.$$

Preto je funkcia w komplexne diferencovateľná iba v bode $z = 0 + i0 = 0$ a pre jej deriváciu $w'(0)$ platí

$$w'(0) = u'_x(0, 0) + iv'_x(0, 0) = 0.$$

Príklad 3

Preverte platnosť C–R rovností a existenciu komplexnej derivácie funkcie

$$w = \sqrt{|\operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z|}$$

v bode $z = 0$.

Riešenie:

Oddelením reálnej a imaginárnej časti vo funkcii w zistíme, že

$$u(x, y) = \operatorname{Re} w = \sqrt{|xy|}, \quad v(x, y) = \operatorname{Im} w = 0, \quad [x, y] \in \mathbb{R}^2.$$

Funkcie u, v splňajú v bode $z = 0$, t.j., v bode $[x, y] = [0, 0]$, C–R rovnosti, nakoľko platí

$$u'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(x, 0) - u(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x - 0} = 0,$$

$$u'_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{u(0, y) - u(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y - 0} = 0,$$

$$v'_x(0, 0) = 0 = v'_y(0, 0).$$

(parciálne derivácie $u'_x(0, 0)$, $u'_y(0, 0)$ nemôžeme kvôli absolútnej hodnote počítať klasickým derivovaním, iba priamo z definície). Napriek tomu funkcia w nemá v bode $z = 0$ komplexnú deriváciu, pretože limita

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{w(z) - w(0)}{z - 0} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|\operatorname{Re}z \cdot \operatorname{Im}z|}}{z}$$

neexistuje (presvedčte sa samy; rozpíšte túto limitu na reálnu a imaginárnu časť, t.j.,

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|\operatorname{Re}z \cdot \operatorname{Im}z|}}{z} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{x\sqrt{|xy|}}{x^2 + y^2} - i \cdot \frac{y\sqrt{|xy|}}{x^2 + y^2} \right),$$

a ukážte, že ani jedna zo vzniknuté reálnych limit neexistuje :)). Kde je teda zrada? :) Háčik je v tom, že funkcia u nie je diferencovateľná v bode $[0, 0]$, napriek tomu, že má v tomto bode obidve prvé parciálne derivácie. Ak by totiž u bola diferencovateľná v bode $[0, 0]$, potom by limita

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{u(x, y) - u(0, 0) - u'_x(0, 0) \cdot (x - 0) - u'_y(0, 0) \cdot (y - 0)}{\sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2}} \\ = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{musela existovať a byť rovná } 0. \end{aligned}$$

Posledná limita však *neexistuje* (overte samy :)).

Príklad 4

Určte holomorfnú funkciu $f = u + iv$ spĺňajúcu

$$v(x, y) = \operatorname{Im}f(x + iy) = -3x^2y + y^3 - 3x + y, \quad f(-1) = 3i.$$

Riešenie:

Toto je typická úloha na holomorfné funkcie. Máme najst' komplexnú funkciu, ktorá je holomorfná na nejakej oblasti a má dopredu predpísanú svoju imaginárnu (resp. reálnu) časť a hodnotu v nejakom bode. Z teórie holomorfných funkcií vyplýva, že komplexná funkcia f , ktorá je holomorfná na nejakej otvorenej podmnožine v \mathbb{C} , má v tejto množine nielen svoju prvú

komplexnú deriváciu, ale automaticky aj derivácie *všetkých rádov*. Funkcie u, v musia byť preto nekonečnekrát spojito diferencovateľné; obzvlášť, musia mať spojité parciálne derivácie všetkých rádov. Z tohto faktu a z C–R podmienok potom vylýva, že funkcie u, v musia byť *harmonické* na danej otvorenej množine, t.j., musia byť riešením tzv. Laplaceovej rovnice

$$u''_{xx} + u''_{yy} = 0, \quad v''_{xx} + v''_{yy} = 0.$$

Všeobecný postup pri tomto type úloh je nasledovný. Najprv overíme, či predpísaná funkcia v v zadaní je harmonická. Platí

$$v''_{xx} = -6y, \quad v''_{yy} = 6y \implies v''_{xx} + v''_{yy} = 0 \quad \text{na celom } \mathbb{R}^2.$$

Funkcia v je teda harmonickou na *jednoducho súvislej* oblasti \mathbb{R}^2 , a preto existuje *jediná* komplexná funkcia f , ktorá je holomorfná na celom \mathbb{C} , a ktorá spĺňa $v = \operatorname{Im}f$, $f(-1) = 3i$. Potrebujeme nájsť jej reálnu časť, t.j., funkciu u . Využijeme C–R rovnosti

$$u'_x = v'_y = -3x^2 + 3y^2 + 1,$$

$$u'_y = -v'_x = 6xy + 3.$$

Neznáma funkcia $u(x, y)$ je teda *kmeňová funkcia* pre dvojicu funkcií $(-3x^2 + 3y^2 + 1, 6xy + 3)$ (Vďaka Matematickej analýze II sme už doma :) Nasadiac štandardný aparát samy ukážte, že funkcia u má vo všeobecnosti tvar

$$u(x, y) = -x^3 + 3xy^2 + x + 3y + K,$$

kde K je *reálna* konštanta. Všetky holomorfné funkcie f , ktoré majú za imaginárnu časť funkciu v , sú teda tvaru

$$f(x + iy) = -x^3 + 3xy^2 + x + 3y + K + i \cdot (-3x^2y + y^3 - 3x + y).$$

Neznámu konštantu K stanovíme pomocou podmienky $f(-1) = 3i$. Konkrétne, z práve získaného vyjadrenia s $x = -1$ a $y = 0$ dostaneme hodnotu $K = 0$. Hľadaná funkcia f teda je

$$f(x + iy) = -x^3 + 3xy^2 + x + 3y + i \cdot (-3x^2y + y^3 - 3x + y),$$

resp. $f(z) = -z^3 + (1 - 3i)z$, po prechode ku komplexnej premennej $z = x + iy$.

Príklad 5

Dokážte, že ak f je funkcia holomorfná a nenulová v oblasti $G \subseteq \mathbb{C}$, potom

$$\Delta|f(z)| = \frac{|f'(z)|^2}{|f(z)|}, \quad z \in G,$$

kde $\Delta := \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ je tzv. delta operátor.

Riešenie:

Nech u a v označujú reálnu a imaginárnu časť funkcie f , t.j.,

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Zo zadania príkladu vyplýva, že funkcie u, v sú harmonické na oblasti G , pričom navyše spĺňajú C–R rovnosti. Konkrétne, na G platí

$$\begin{aligned} u''_{xx} + u''_{yy} = 0 &= v''_{xx} + v''_{yy}, \\ u'_x = v'_y, \quad u'_y = -v'_x, \\ f' = u'_x + iv'_x &= v'_y - iv'_y. \end{aligned}$$

Okrem toho máme

$$|f| = \sqrt{u^2 + v^2} \neq 0, \quad |f'| = \sqrt{(u'_x)^2 + (v'_x)^2} = \sqrt{(v'_y)^2 + (u'_y)^2}.$$

Potom platí

$$\Delta|f| = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) |f| = \frac{\partial^2|f|}{\partial x^2} + \frac{\partial^2|f|}{\partial y^2}.$$

Potrebujeme teda vypočítať druhé parciálne derivácie zo zloženej funkcie $|f(z)| = \sqrt{[u(x, y)]^2 + [v(x, y)]^2}$. Postupne dostávame (detaily vynechávame)

$$\begin{aligned} |f|'_x &= \left(\sqrt{u^2 + v^2} \right)'_x = \frac{uu'_x + vv'_x}{\sqrt{u^2 + v^2}}, & |f|'_y &= \left(\sqrt{u^2 + v^2} \right)'_y = \frac{uu'_y + vv'_y}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \\ |f|''_{xx} &= \left(\sqrt{u^2 + v^2} \right)''_{xx} = \frac{(u'_x)^2 + (v'_x)^2 + uu''_{xx} + vv''_{xx}}{\sqrt{u^2 + v^2}} - \frac{(uu'_x + vv'_x)^2}{(u^2 + v^2)^{3/2}}, \\ |f|''_{yy} &= \left(\sqrt{u^2 + v^2} \right)''_{yy} = \frac{(u'_y)^2 + (v'_y)^2 + uu''_{yy} + vv''_{yy}}{\sqrt{u^2 + v^2}} - \frac{(uu'_y + vv'_y)^2}{(u^2 + v^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Po dosadení a úprave máme

$$\begin{aligned} \Delta|f| &= \frac{\overbrace{(u'_x)^2 + (v'_x)^2}^{|f'|^2} + \overbrace{(u'_y)^2 + (v'_y)^2}^{|f'|^2} + u \cdot \overbrace{(u''_{xx} + u''_{yy})}^0 + v \cdot \overbrace{(v''_{xx} + v''_{yy})}^0}{\sqrt{u^2 + v^2}} \\ &\quad - \frac{(uu'_x + vv'_x)^2 + (uu'_y + vv'_y)^2}{(u^2 + v^2)^{3/2}} \\ &= \frac{2|f'|^2}{\sqrt{u^2 + v^2}} - \frac{(uu'_x + vv'_x)^2 + (uu'_y + vv'_y)^2}{(u^2 + v^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Ďalej z C-R podmienok vyplýva

$$\begin{aligned} (uu'_x + vv'_x)^2 + (uu'_y + vv'_y)^2 &= (uu'_x + vv'_x)^2 + (-uv'_x + vu'_x)^2 \\ &= u^2 \underbrace{[(u'_x)^2 + (v'_x)^2]}_{|f'|^2} + v^2 \underbrace{[(v'_x)^2 + (u'_x)^2]}_{|f'|^2} = (u^2 + v^2)|f'|^2. \end{aligned}$$

Takže napokon získame identitu v zadaní príkladu

$$\Delta|f| = \frac{2|f'|^2}{\sqrt{u^2 + v^2}} - \frac{(u^2 + v^2)|f'|^2}{(u^2 + v^2)^{3/2}} = \frac{|f'|^2}{\underbrace{\sqrt{u^2 + v^2}}_{|f|}} = \frac{|f'|^2}{|f|}.$$

Príklad 6

Nájdite obor konvergence funkcionálneho radu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^n.$$

Riešenie:

Postupujeme analogicky ako pri reálnych funkcionálnych radoch. Použijeme napríklad limitné D'Alembertovo kritérium. Platí

$$\left| \frac{\frac{1}{(n+2)^2} \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^{n+1}}{\frac{1}{(n+1)^2} \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^n} \right| = \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^2 \left| \frac{z+1}{z-1} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z+1}{z-1} \right|.$$

Takže pre $\left|\frac{z+1}{z-1}\right| < 1$ rad absolútne konverguje a pre $\left|\frac{z+1}{z-1}\right| > 1$ rad diverguje. Pre z spĺňajúce $\left|\frac{z+1}{z-1}\right| = 1$ rad v zadaní konverguje absolútne, pretože v tomto prípade máme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{(n+1)^2} \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^n \right| = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}}_{\text{toto konverguje}}.$$

Obor konvergence vyšetřovaného funkcionálneho radu je teda podmnožina komplexných čísel daná reláciou

$$\left| \frac{z+1}{z-1} \right| \leq 1.$$

Nie je ťažké overiť, že sa jedná práve o tie komplexné čísla z , pre ktoré $\operatorname{Re} z \leq 0$. Oborom konvergence je teda druhý a tretí kvadrant spolu s imaginárnou osou.

Príklad 7

Určte polomer konvergence mocninového radu

$$\sum_{n=0}^{\infty} [3 + (-1)^n]^n z^n.$$

Riešenie:

Podľa definície pre polomer konvergence tohto radu platí

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|[3 + (-1)^n]^n|}} = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} |3 + (-1)^n|}.$$

Nakoľko máme

$$|3 + (-1)^n| = \begin{cases} 4, & 2 \mid n, \\ 2, & 2 \nmid n, \end{cases}$$

postupnosť $|3 + (-1)^n|$ má dva hromadné body 4 a 2. Preto

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |3 + (-1)^n| = 4 \implies R = 1/4.$$

Daný mocninový rad preto absolútne konverguje pre $|z| < 1/4$, kým diverguje pre $|z| > 1/4$. Navyše, všade na konvergenčnej kružnici $|z| = 1/4$ rad diverguje (overte samy :)).

Príklad 8

Vyšetríte konvergenciu mocninového radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

na jeho konvergenčnej kružnici.

Riešenie:

Stanovíme najprv polomer konvergenzie daného radu. Platí

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} \right|} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1}} = 1.$$

Príslušná konvergenčná kružnica radu je preto $|z| = 1$. Každý jej bod môžeme vyjadriť v tvare $z = e^{i\alpha}$, kde $\alpha \in [-\pi, \pi)$. Skúmame teda konvergenciu číselného radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\alpha}}{n}$$

v závislosti na reálnom parametri $\alpha \in [-\pi, \pi)$. V tomto rade, využijúc Eulerov vzorec

$$e^{in\alpha} = \cos n\alpha + i \sin n\alpha,$$

oddelíme jeho reálnu a imaginárnu časť

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\alpha}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n} + i \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n}.$$

Pri vyšetrovaní týchto dvoch reálnych radov si však, bohužiaľ, nevystačíme s tradičným aparátom :(Ani porovnávanie, ani D'Alembert, ani Cauchy, ani Raabe, ba ani integrálne kritérium v tomto prípade nefungujú :-/ Učinné je

až *Dirichletovo kritérium* :) Jeho aplikáciu si však musíme trochu odpracovať. Na konci ukážeme, že reálne rady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n}$$

súčasne konvergujú pre každé $\alpha \neq 2m\pi$, kde m je nejaké celé číslo.

Príprava:

- *Dirichletovo kritérium* – nech $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ sú dve postupnosti reálnych čísel také, že $\{b_n\}$ je monotónna s $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ a rad $\sum a_n$ má ohraničené čiastočné súčty, t.j., postupnosť

$$\left\{ \sum_{k=1}^n a_k \right\}$$

je ohraničená (členy tejto postupnosti sa indexujú podľa n). Potom rad $\sum a_n b_n$ konverguje (nie však nutne absolútne).

- Pre každé $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 2m\pi$ pre celé m , platia identity

$$\sum_{k=1}^n \cos k\alpha = \frac{\cos \frac{(n+1)\alpha}{2} \sin \frac{n\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}},$$

$$\sum_{k=1}^n \sin k\alpha = \frac{\sin \frac{(n+1)\alpha}{2} \sin \frac{n\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Pokúste sa dokázať tieto dve identity :) Inšpirujte sa riešením Príkladu 4 z úvodného materiálu o komplexných číslach ;)

Tak a teraz sme už pripravení dokončiť Príklad 8 :) Uvažujme napríklad rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n}$$

pre $\alpha \neq 2m\pi$, kde m je celé číslo. V Dirichletovom kritériu položíme

$$a_n := \cos n\alpha, \quad b_n := 1/n.$$

Postupnosť $\{b_n\}$ je zrejme monotónna a $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$. Ďalej platí

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k \right| = \left| \sum_{k=1}^n \cos k\alpha \right| = \left| \frac{\cos \frac{(n+1)\alpha}{2} \sin \frac{n\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \right| = \frac{\left| \cos \frac{(n+1)\alpha}{2} \sin \frac{n\alpha}{2} \right|}{\left| \sin \frac{\alpha}{2} \right|} \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{\alpha}{2} \right|}.$$

To znamená, že postupnosť $\{\sum_{k=1}^n a_k\}$ je ohraničená (nezávisle na n). Sú teda splnené všetky požiadavky Dirichletovho kritéria. Preto rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n}$$

pre $\alpha \neq 2m\pi$, kde m je celé číslo, konverguje. V prípade, ak $\alpha = 2m\pi$ pre nejaké celé číslo m , potom $\cos n\alpha = 1$ pre každé $n \in \mathbb{N}$, a rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{diverguje.}$$

Analogickým spôsobom samy ukážte, že rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n}$$

konverguje pre každé $\alpha \in \mathbb{R}$;)

Vrátíme sa na úvod nášho príkladu. Platí teda, že komplexný rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\alpha}}{n}, \quad \alpha \in [-\pi, \pi),$$

konverguje práve vtedy, keď konverguje súčasne jeho reálna i imaginárna časť. Vo svetle práve získaných výsledkov to nastane práve vtedy, keď parameter $\alpha \neq 0$ (premýšlite si to :)). Takže komplexný mocninový rad v zadaní príkladu konverguje všade na svojej konvergenčnej kružnici, s výnimkou bodu $z = 1$ (i toto si premýšlite :)).