

Príklady na precvičovanie – komplexná čísla, postupnosti a funkcie

Neriešené príklady

1. Vypočítajte. Úlohu g) vyriešte bez použitia Moivreovho vzorca.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{(1-i)^3}{(2+i)(1+2i)}, & \text{b)} \quad & \left(\frac{1+2i}{3-i}\right)^2, & \text{c)} \quad & i^{133}, & \text{d)} \quad & \frac{1-i\sqrt{3}}{2e^{i\pi/4}}, \\ \text{e)} \quad & i+i^3+i^{15}+i^{29}, & \text{f)} \quad & \left(-\frac{1}{2}+\frac{i}{2\sqrt{3}}\right)^9, & \text{g)} \quad & \sqrt{60-11i}. \end{aligned}$$

2. Nájdite všetky hodnoty daných odmocnín a zapíšte ich v algebraickom, goniometrickom i exponenciálnom tvare.

$$\text{a)} \quad \sqrt[4]{i}, \quad \text{b)} \quad \sqrt[5]{1}, \quad \text{c)} \quad \sqrt[5]{1-i}, \quad \text{d)} \quad \sqrt[5]{32}, \quad \text{e)} \quad \sqrt[8]{1}.$$

Návod: Pri úlohe b) využite identity

$$\begin{aligned} \sin \frac{2\pi}{5} &= \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}, & \cos \frac{2\pi}{5} &= \frac{-1+\sqrt{5}}{4}, \\ \sin \frac{4\pi}{5} &= \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}, & \cos \frac{4\pi}{5} &= \frac{-1-\sqrt{5}}{4}. \end{aligned}$$

3. Riešte rovnice.

$$\text{a)} \quad z^2 - 3z + 3 + i = 0, \quad \text{b)} \quad z^2 - 3iz - 3 + i = 0.$$

4. Rovnostranný rovinný trojuholník má ťažisko v bode $[0, 0]$ a jeden vrchol v bode $[1, 0]$. Nájdite jeho zvyšné dva vrcholy.

5. Vypočítajte dĺžku strany pravidelného n -uholníka, ktorého vrcholy sú riešeniami rovnice $z^n = 1$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$.

6. Stanovte súčet

$$\sin x - \sin 2x + \sin 3x - \dots + (-1)^{n-1} \sin nx, \quad x \in \mathbb{R}.$$

7. Pre $x \in \mathbb{R}$ vyjadrite $\sin^5 x$ a $\cos^5 x$ ako lineárnu kombináciu sínusov a kosínusov vhodných násobkov argumentu x .

8. Zapište dané množiny a načrtnite ich v komplexnej rovine.

a) $0 < \operatorname{Re} z \leq \operatorname{Im} z$, b) $2 < |z - 1 + 2i| < 4$,

c) $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2}$, d) $1 \leq \operatorname{Re} z \leq 5$.

9. Vypočítajte limity postupností.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + in\right)$, b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - i}{in + 3}$ c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+i}{2}\right)^n$,

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{in\varphi}$, $\varphi \in \mathbb{R}$, e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + i\right) \left(\frac{in - 3}{n\sqrt{n} + 1}\right)$.

10. Rozhodnite o (absolútnej/neabsolútnej) konvergencii/divergencii daných nekonečných radov.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} (e^{-n} + i)$, b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n+1}}{(1+in)^n}$, c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+i}{n^2+i}$.

11. Určte nekonečný súčet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{i^{2n-1}}{2n-1}\right).$$

12. Vypočítajte dané limity funkcií.

a) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{(\operatorname{Re} z^2)^2}{z^2}$, b) $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{iz^2 + 3z}{5z^2 - 9i}$.

13. Nájdite body nespojitosti funkcie

$$f(z) = \frac{z+i}{z^2-i},$$

chápanej ako priradenie na \mathbb{C} , a rozhodnite, či sa jedná o odstrániteľné nespojitosti.

Výsledky

1. a) $-\frac{2}{5}(1-i)$, b) $-\frac{12}{25} + \frac{7}{50}i$, c) i , d) $e^{-i\frac{7}{12}\pi}$, e) 0 , f) $-\frac{1}{81\sqrt{3}}i$, g) $\frac{\pm 11 \mp i}{\sqrt{2}}$

2. a)

$$z_0 = e^{i\pi/8} = \cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{\sqrt[4]{8}} + i \frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt[4]{8}},$$

$$z_1 = e^{i5\pi/8} = \cos \frac{5\pi}{8} + i \sin \frac{5\pi}{8} = -\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt[4]{8}} + i \frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{\sqrt[4]{8}},$$

$$z_2 = e^{i9\pi/8} = \cos \frac{9\pi}{8} + i \sin \frac{9\pi}{8} = -\frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{\sqrt[4]{8}} - i \frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt[4]{8}},$$

$$z_3 = e^{i13\pi/8} = \cos \frac{13\pi}{8} + i \sin \frac{13\pi}{8} = \frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt[4]{8}} - i \frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{\sqrt[4]{8}}.$$

b)

$$z_0 = 1,$$

$$z_1 = e^{i2\pi/5} = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + i \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}},$$

$$z_2 = e^{i4\pi/5} = \cos \frac{4\pi}{5} + i \sin \frac{4\pi}{5} = -\frac{\sqrt{5}+1}{4} + i \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}},$$

$$z_3 = e^{i6\pi/5} = \cos \frac{6\pi}{5} + i \sin \frac{6\pi}{5} = -\frac{\sqrt{5}+1}{4} - i \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}},$$

$$z_4 = e^{i8\pi/5} = \cos \frac{8\pi}{5} + i \sin \frac{8\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} - i \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}.$$

c) Jedna hodnota je napríklad $\sqrt[10]{2}e^{i3\pi/4} = (-1+i)/\sqrt[5]{4}$. Ostatné hodnoty majú tvar

$$\frac{(-1+i)}{\sqrt[5]{4}} \cdot \varepsilon, \quad \varepsilon \in \sqrt[5]{1}.$$

d) $2 \cdot \varepsilon, \varepsilon \in \sqrt[5]{1}$.

e) $\pm 1, \pm i, \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1-i}{\sqrt{2}}$.

3. a) $2 - i$, $1 + i$, b) $1 + i$, $-1 + 2i$.
4. $-\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$.
5. $s = 2 \sin \frac{\pi}{n}$.
6.
$$\begin{cases} -\frac{\sin \frac{n(x+\pi)}{2} \cdot \sin \frac{(n+1)(x+\pi)}{2}}{\cos \frac{x}{2}}, & x \neq (2l-1)\pi, \\ 0, & x = (2l-1)\pi, \end{cases} \quad l \in \mathbb{Z}.$$
7. $\cos^5 x = \frac{\cos 5x + 5 \cos 3x + 10 \cos x}{16}$, $\sin^5 x = \frac{\sin 5x - 5 \sin 3x + 10 \sin x}{16}$.
8. a) $0 < x \leq y$, b) medzikružie so stredom $[1, -2]$ a s polomerami $\sqrt{2}$ a 2 c) kružnica so stredom v bode $[1, 0]$ a s polomerom 1 , okrem bodu $[0, 0]$ d) $1 \leq x \leq 5$.
9. a) ∞ , b) $-2i$, c) 0 , d) pre $\varphi \neq 0$ neexistuje, pre $\varphi = 0$ je hodnota 1 , e) 0 .
10. a) diverguje, b) absolútne konverguje, c) absolútne konverguje.
11. $\frac{\pi^2}{6} + i \frac{\pi}{4}$.
12. a) 0 , b) $\frac{i}{5}$.
13. neodstrániteľné nespojitosti v bodoch $\pm \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.