Numerické metody
2. přednáška

Jiří Zelinka

25. února 2014

Opakování

Metoda pevného bodu, prostá iterační metoda

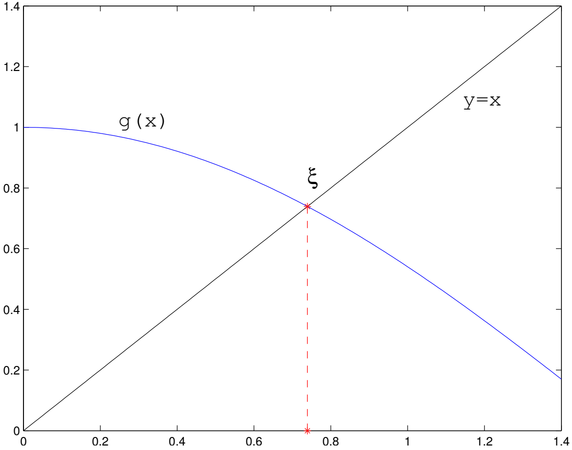
- Tato metoda se používá pro rovnici $x = g(x)$
- Funkce g je spojitá na $I = [a, b]$
- Řešení ξ této rovnice nazýváme **pevným bodem** funkce g

Iterační proces

- Zvolíme $x_0 \in I$ a položíme $x_1 = g(x_0)$
- Obecně $x_{k+1} = g(x_k)$
- Funkce g se nazývá **iterační funkce**

Geometrická interpretace

Pevný bod ξ je průsečík grafu funkce g a přímky $y = x$.



Existence pevného bodu

Věta: Jestliže spojitá funkce g zobrazuje interval I do sebe, tj. pro každé $x \in I$ platí $g(x) \in I$, pak na intervalu I existuje alespoň jeden pevný bod ξ funkce g.

Jednoznačnost pevného bodu

Definice Funkce g zobrazující interval I do sebe se nazývá kontrakce na I, jestliže existuje taková konstanta L (Lipschitzova konstanta), $0 \leq L < 1$, že pro každé $x, y \in I$ platí

$$|g(x) - g(y)| \leq L|x - y|.$$

Banachova věta o pevném bodě

Jestliže g je kontrakce na I, pak g má na tomto intervalu jediný pevný bod a iterační posloupnost definovaná vztahem $x_{k+1} = g(x_k)$ konverguje k pevnému bodu funkce g pro libovolné x_0.

Odhad chyby

Věta: Nechť g je kontrakce s Lipschitzovou konstantou L na I a $x_0 \in I$ je libovolné. Pak pro iterační posloupnost definovanou vztahem $x_{k+1} = g(x_k)$ platí odhad

$$|x_k - \xi| \leq \frac{L^k}{1-L} |x_0 - x_1|$$

Určení konstanty L pomocí derivace

Lagrangeova věta o střední hodnotě:

$$g(x) - g(y) = g'(\mu) \cdot (x - y)$$

Pokud pro každé $x \in I$ platí $|g'(x)| \leq L < 1$ a g zobrazuje I do sebe, je g kontrakce na I.

$$L = \max_{x \in I} |g'(x)|$$

Konec opakování

Klasifikace pevných bodů

Pevný bod ξ funkce g se nazývá

- **přitahující** (atraktivní) pevný bod, jestliže existuje takové okolí V tohoto bodu ξ, že pro každou počáteční aproximaci $x_0 \in V$ posloupnost iterací $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ konverguje k bodu ξ.
- **odpuzující** (repulzivní) pevný bod, jestliže existuje takové okolí U bodu ξ, že pro každou počáteční aproximaci $x^0 \in U, x_0 \neq \xi$, existuje takové k, že $x_k \notin U$.

Věta: Nechť $g \in C[a,b], g : [a,b] \to [a,b]$ a nechť ξ je pevný bod.

- Jestliže pro všechna $x \neq \xi$ z nějakého okolí V bodu ξ platí

$$\left|\frac{g(x) - g(\xi)}{x - \xi}\right| < 1,$$

  pak ξ je přitahující pevný bod.

- Jestliže pro všechna $x \neq \xi$ z nějakého okolí U bodu ξ platí

$$\left|\frac{g(x) - g(\xi)}{x - \xi}\right| > 1,$$

  pak ξ je odpuzující pevný bod.

Důsledek: Nechť $g \in C[a,b], g : [a,b] \to [a,b]$ a nechť g má v bodě ξ derivaci.

- Je-li $|g'(\xi)| < 1$, pak ξ je přitahující pevný bod.
- Je-li $|g'(\xi)| > 1$, pak ξ je odpuzující pevný bod.

Hledání vhodného tvaru iterační funkce

$$f(x) = 0 \qquad \longrightarrow \qquad g(x) = x$$

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{k}$$

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{h(x)}$$

Řád metody

Řád konvergence posloupnosti

Definice Mějme posloupnost (x_n) $\lim_{n \to \infty} = \xi$.
Chyba v k-tém členu: $e_k = x_k - \xi$
Existuje-li nyní reálné číslo $p \geq 1$ takové, že platí

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|x_{k+1} - \xi|}{|x_k - \xi|^p} = \lim_{k \to \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = C \neq 0,$$

řekneme, **řád konvergence** posloupnosti je p.
Pokud posloupnost (x_n) byla získána nějakou iterační metodou, říkáme, že **metoda je řádu** p.

Poznámka: Definici lze použít pro libovolné (např. vícekrokové nebo nestacionární) iterační metody.

Řád prosté iterační metody

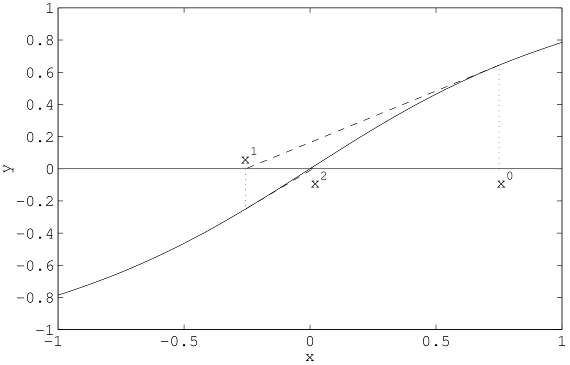
Věta: Nechť funkce g má v okolí bodu ξ derivace až do řádu $p \geq 1$ včetně. Iterační metoda $x_{k+1} = g(x_k), k = 0, 1, \ldots$ je řádu p tehdy a jen tehdy, když platí

$$\xi = g(\xi), \qquad g^{(j)}(\xi) = 0, \qquad 1 \leq j < p, \qquad g^{(p)}(\xi) \neq 0.$$

Důkaz: Z Taylorova rozvoje.

Newtonova metoda

Uvažujme opět rovnici $f(x) = 0$. Zvolme x_0 a řešení hledáme na tečně k f v bodě x_0 jako její průsečík s osou x.



Podobně pokračujeme dál: x_{k+1} je průsečík tečny k funkci f v bodě x_K s osou x.

Rovnice tečny:

$$y = f'(x_k)(x - x_k) + f(x_k)$$

$$y = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Máme tedy iterační funkci

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Newtonova metoda se také nazývá **metoda tečen**.

Věta

Nechť $f \in C^2[a, b]$. Nechť $\xi \in [a, b]$ je kořenem rovnice $f(x) = 0$ a $f'(\xi) \neq 0$. Pak existuje $\delta > 0$ tak, že posloupnost $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ generovaná Newtonovou metodou konverguje k bodu ξ pro každou počáteční aproximaci $x^0 \in [\xi - \delta, \xi + \delta] \subseteq [a, b]$.

Důkaz

Ukážeme, že na $[\xi - \delta, \xi + \delta]$ je funkce $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ kontrakcí.

Důsledek:

Newtonova metoda je metoda druhého řádu pro jednoduchý kořen ξ.

Příklad

Výpočet $\sqrt[3]{10}$:
$f(x) = x^3 - 10,\ x \in I = [2, 3]$

$$g(x) = x - \frac{x^3 - 10}{3x^2} = \frac{2}{3}x + \frac{10}{3x^2}$$

$$x_0 = 2, \quad x_1 = 2.1667, \quad x_2 = 2.1545, \quad x_3 = 2.1544$$

Chování chyby u Newtonovy metody

Věta

Nechť jsou splněny předpoklady předchozí věty,
$M = \max_{x\in I} |f''(x)|$, $m = \min_{x\in I} |f'(x)| > 0$, $I = [\xi - \delta, \xi + \delta]$. Pak pro posloupnost $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ generovanou Newtonovou metodou platí

$$\begin{aligned} \text{a)}\ |x_{k+1} - \xi| &\le \frac{M}{2m}(x_k - \xi)^2 \\ \text{b)}\ |x_{k+1} - \xi| &\le \frac{M}{2m}(x_{k+1} - x_k)^2 \end{aligned}$$

Důkaz

Z Taylorova rozvoje.