Numerické metody
3. přednáška, 4. března 2015

Jiří Zelinka

Opakování

Metoda pevného bodu, prostá iterační metoda

- Tato metoda se používá pro rovnici $x = g(x)$
- Funkce g je spojitá na $I = [a, b]$
- Řešení ξ této rovnice nazýváme **pevným bodem** funkce g

Iterační proces

- Zvolíme $x_0 \in I$ a položíme $x_1 = g(x_0)$
- Obecně $x_{k+1} = g(x_k)$
- Funkce g se nazývá **iterační funkce**

Podmínky konvergence

1. Pro každé $x \in I$ platí $g(x) \in I$
2. Existuje L, $0 \leq L < 1$, že pro každé $x, y \in I$ platí

   $$|g(x) - g(y)| \leq L|x - y|.$$

   nebo:
   Pro každé $x \in I$ platí $|g'(x)| \leq L < 1$.

Pak $x_0 \in I$ může být libovolné, iterační proces konverguje.

Řád metody

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1}-\xi|}{|x_k-\xi|^p} = \lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = C \neq 0,$$

p - řád metody

Věta: Nechť funkce g má v okolí bodu ξ derivace až do řádu $p \geq 1$ včetně. Iterační metoda $x_{k+1} = g(x_k), k = 0, 1, \ldots$ je řádu p tehdy a jen tehdy, když platí

$$\xi = g(\xi), \qquad g^{(j)}(\xi) = 0, \qquad 1 \leq j < p, \qquad g^{(p)}(\xi) \neq 0.$$

Volba iterační funkce

$$f(x) = 0 \qquad \longrightarrow \qquad g(x) = x$$
$$g(x) = x - \frac{f(x)}{k}$$
$$g(x) = x - \frac{f(x)}{h(x)}$$

Klasifikace pevných bodů

Pevný bod ξ funkce g se nazývá

- **přitahující** (atraktivní) pevný bod, jestliže existuje takové okolí V tohoto bodu ξ, že pro každou počáteční aproximaci $x_0 \in V$ posloupnost iterací $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ konverguje k bodu ξ.
- **odpuzující** (repulzivní) pevný bod, jestliže existuje takové okolí U bodu ξ, že pro každou počáteční aproximaci $x_0 \in U, x_0 \neq \xi$, existuje takové k, že $x_k \notin U$.

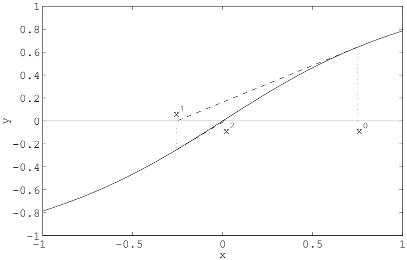
Určení typu pevných bodů:

Nechť $g \in C[a, b], g : [a, b] \to [a, b]$ a nechť g má v bodě ξ derivaci.

- Je-li $|g'(\xi)| < 1$, pak ξ je přitahující pevný bod.
- Je-li $|g'(\xi)| > 1$, pak ξ je odpuzující pevný bod.

Newtonova metoda, metoda tečen

Uvažujme opět rovnici $f(x) = 0$. Zvolme x_0 a řešení hledáme na tečně k f v bodě x_0 jako její průsečík s osou x.



$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Iterační funkce:

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Podobně pokračujeme dál: x_{k+1} je průsečík tečny k funkci f v bodě x_k s osou x.

Věta

Nechť $f \in C^2[a,b]$. Nechť $\xi \in [a,b]$ je kořenem rovnice $f(x) = 0$ a $f'(\xi) \neq 0$. Pak existuje $\delta > 0$ tak, že posloupnost $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ generovaná Newtonovou metodou konverguje k bodu ξ pro každou počáteční aproximaci $x_0 \in [\xi - \delta, \xi + \delta] \subseteq [a,b]$.

Důsledek:

Newtonova metoda je metoda druhého řádu pro jednoduchý kořen ξ.

Příklad

Výpočet $\sqrt[3]{10}$

Konec opakování

Chování chyby u Newtonovy metody

Věta

Nechť jsou splněny předpoklady předchozí věty, $M = \max\limits_{x\in I} |f''(x)|$, $m = \min\limits_{x\in I} |f'(x)| > 0$, $I = [\xi - \delta, \xi + \delta]$. Pak pro posloupnost $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ generovanou Newtonovou metodou platí

$$\begin{aligned} \text{a)}\, |x_{k+1} - \xi| &\leq \tfrac{M}{2m}(x_k - \xi)^2 \\ \text{b)}\, |x_{k+1} - \xi| &\leq \tfrac{M}{2m}(x_{k+1} - x_k)^2 \end{aligned}$$

Důkaz

Z Taylorova rozvoje.

Fourierovy podmínky

Věta
Nechť $f \in C^2[a,b]$ a nechť rovnice $f(x) = 0$ má v intervalu jediný kořen ξ. Nechť f', f'' nemění znaménka na intervalu $[a,b]$, přičemž $f'(x) \neq 0, \ \forall x \in [a,b]$. Nechť počáteční aproximace x_0 je ten z krajních bodů a, b, v němž znaménko funkce je stejné jako znaménko f'' na intervalu $[a,b]$. Pak posloupnost $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ určená Newtonovou metodou konverguje monotonně k bodu ξ.

Příklady – volba počáteční iterace

Výpočet převrácené hodnoty, funkce $\arctan x$.

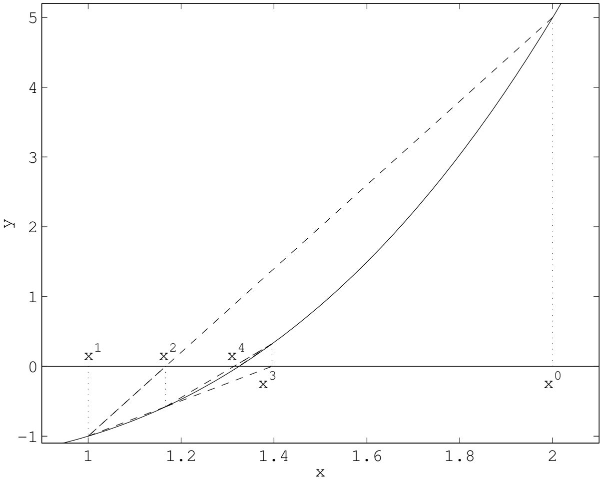
Metoda sečen

Derivaci v bodě x_k u Newtonovy metody nahradíme směrnicí sečny v bodech $[x_{k-1}, f(x_{k-1})$ a $[x_k, f(x_k)$.

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}, \qquad i = 1, 2, \ldots$$

Výsledná iterační metoda

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k), \qquad i = 1, 2, \ldots$$



5
4
3
2
1
0
−1
y
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2
x
x^1
x^2
x^4
x^3
x^0

Věta

Nechť rovnice $f(x) = 0$ má kořen ξ a nechť derivace f', f'' jsou spojité v okolí bodu ξ, přičemž $f'(\xi) \neq 0$. Posloupnost určená metodou sečen konverguje ke kořenu ξ, pokud zvolíme počáteční aproximace x_0, x_1 dostatečně blízko bodu ξ a metoda je řádu $(1+\sqrt{5})/2 \doteq 1{,}618$.

Důkaz

Příklad

Výpočet $\sqrt[3]{10}$:

Pozor! Při pokusu o co nejpřesnější výpočet může dojít k nedefinovanému výrazu typu $0/0$.