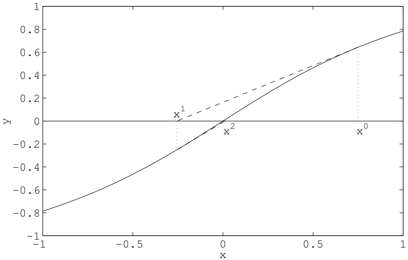
Numerické metody
4. přednáška, 11. března 2015

Jiří Zelinka

Opakování

Newtonova metoda, metoda tečen

Uvažujme opět rovnici $f(x) = 0$. Zvolme x_0 a řešení hledáme na tečně k f v bodě x_0 jako její průsečík s osou x.



$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Iterační funkce:

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Podobně pokračujeme dál: x_{k+1} je průsečík tečny k funkci f v bodě x_k s osou x.

Newtonova metoda je metoda druhého řádu pro jednoduchý kořen ξ.

Fourierovy podmínky

Věta

Nechť $f \in C^2[a, b]$ a nechť rovnice $f(x) = 0$ má v intervalu jediný kořen ξ. Nechť f', f'' nemění znaménka na intervalu $[a, b]$, přičemž $f'(x) \neq 0, \ \forall x \in [a, b]$. Nechť počáteční aproximace x^0 je ten z krajních bodů a, b, v němž znaménko funkce je stejné jako znaménko f'' na intervalu $[a, b]$. Pak posloupnost $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ určená Newtonovou metodou konverguje monotonně k bodu ξ.

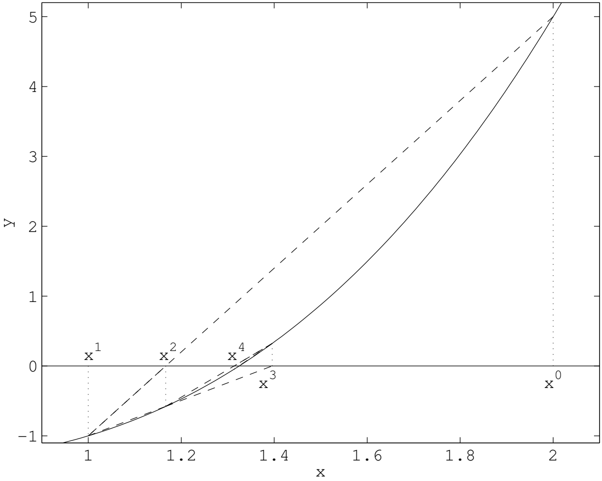
Metoda sečen

Derivaci v bodě x_k u Newtonovy metody nahradíme směrnicí sečny v bodech $[x_{k-1}, f(x_{k-1})$ a $[x_k, f(x_k)$.

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}, \qquad i = 1, 2, \dots$$

Výsledná iterační metoda

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k), \qquad i = 1, 2, \dots$$



Konec opakování

Příklad

Výpočet $\sqrt[3]{10}$:
$f(x) = x^3 - 10$, $x \in I = [2, 3]$ Volíme $x_0 = 2$, $x_1 = 3$, pak
$x_2 = 2.1053$, $x_3 = 2.1391$, $x_4 = 2.11548$, $x_5 = 2.11544$.

Pozor! Při pokusu o co nejpřesnější výpočet může dojít k nedefinovanému výrazu typu $0/0$.

Věta

Nechť rovnice $f(x) = 0$ má kořen ξ a nechť derivace f', f'' jsou spojité v okolí bodu ξ, přičemž $f'(\xi) \neq 0$. Posloupnost určená metodou sečen konverguje ke kořenu ξ, pokud zvolíme počáteční aproximace x_0, x_1 dostatečně blízko bodu ξ a metoda je řádu $(1 + \sqrt{5})/2 \doteq 1{,}618$.

Metoda regula falsi

Předpokládejme $f(a)f(b) < 0$, $f \in C[a,b]$. Použijeme metodu sečen, přitom vybíráme iterace tak, aby ve dvou po sobě jdoucích měla f opačné znaménko:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_s}{f(x_k) - f(x_s)} f(x_k), \qquad k = 0, 1, \dots,$$

kde $s = s(k)$ je největší index takový, že $f(x_k)f(x_s) < 0$, přitom $f(x_0)f(x_1) < 0$ (tj. např. $x_0 = a$, $x_1 = b$).

Poznámka: pokud je funkce f konvexní nebo konkávní na $[a,b]$, je x_s jeden z krajní bodů intervalu.

Řád metody: 1

Quasi Newtonova metoda (plus/minus)

Tečnu u Newtonovy metody nahradíme sečnou procházející bodem $(x_k, f(x_k))$ a bodem $(x_k + f(x_k), f(x_k + f(x_k)))$, respektive bodem $(x_k - f(x_k), f(x_k - f(x_k)))$. Přitom pokud je bod x_k blízko hledaného kořene ξ, pak hodnota $f(x_k)$ je blízká nule a sečna procházející uvedenými body je blízká tečně vedené bodem x_k.

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_k \pm f(x_k))}{x_k - (x_k \pm f(x_k))} = \frac{f(x_k) - f(x_k \pm f(x_k))}{\mp f(x_k)}$$

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \frac{\mp f(x_k)}{f(x_k) - f(x_k \pm f(x_k))} = x_k \pm \frac{f^2(x_k)}{f(x_k) - f(x_k \pm f(x_k))}$$

Iterační funkce:

$$g(x) = x \pm \frac{f^2(x)}{f(x) - f(x \pm f(x))}$$

Poznámka:

Quasi Newtonova metoda se také někdy nazývá Steffensenova - viz dále.

Věta

Nechť $f \in C^1[a,b]$, $\xi \in [a,b]$ nechť je řešením rovnice $f(x) = 0$ a $f'(\xi) \neq 0$. Pak existuje $\varepsilon > 0$ tak, že posloupnost $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ generovaná quasi Newtonovou metodou konverguje k bodu ξ pro každou počáteční aproximaci $x^0 \in [\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon] \cap [a,b]$. Pokud má funkce f v okolí bodu ξ spojitou druhou derivaci, je řád metody alespoň 2.

Důkaz: L'Hospitalovo pravidlo.

Iterační metody pro násobné kořeny

Kořen ξ násobnosti M

$$f(\xi) = 0, f'(\xi) = 0, \ldots, f^{(M-1)}(\xi) = 0,\ f^{(M)}(\xi) \neq 0$$

Věta

Nechť kořen ξ má násobnost $M > 1$. Pak modifikovaná Newtonova metoda

$$x_{k+1} = x_k - M\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

je metoda druhého řádu.