Numerické metody
5. přednáška, 18. března 2015

Jiří Zelinka

Opakování

Newtonova metoda, metoda tečen

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Newtonova metoda je metoda druhého řádu pro jednoduchý kořen ξ.

Fourierovy podmínky

Věta

Nechť $f \in C^2[a, b]$ a nechť rovnice $f(x) = 0$ má v intervalu jediný kořen ξ. Nechť f', f'' nemění znaménka na intervalu $[a, b]$, přičemž $f'(x) \neq 0,\ \forall x \in [a, b]$. Nechť počáteční aproximace x^0 je ten z krajních bodů a, b, v němž znaménko funkce je stejné jako znaménko f'' na intervalu $[a, b]$. Pak posloupnost $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ určená Newtonovou metodou konverguje monotonně k bodu ξ.

Metoda sečen

Derivaci v bodě x_i u Newtonovy metody nahradíme směrnicí sečny v bodech $[x_{k-1}, f(x_{k-1})$ a $[x_k, f(x_k)$.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(k_i) - f(x_{k-1})} f(x_k), \qquad i = 1, 2, \dots$$

Pozor! Při pokusu o co nejpřesnější výpočet může dojít k nedefinovanému výrazu typu $0/0$.

Věta

Nechť rovnice $f(x) = 0$ má kořen ξ a nechť derivace f', f'' jsou spojité v okolí bodu ξ, přičemž $f'(\xi) \neq 0$. Posloupnost určená metodou sečen konverguje ke kořenu ξ, pokud zvolíme počáteční aproximace x_0, x_1 dostatečně blízko bodu ξ a metoda je řádu $(1 + \sqrt{5})/2 \doteq 1{,}618$.

Metoda regula falsi

Předpokládejme $f(a)f(b) < 0$, $f \in C[a,b]$. Použijeme metodu sečen, přitom vybíráme iterace tak, aby ve dvou po sobě jdoucích měla f opačné znaménko:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_s}{f(x_k) - f(x_s)} f(x_k), \qquad k = 0, 1, \dots,$$

kde $s = s(k)$ je největší index takový, že $f(x_k)f(x_s) < 0$, přitom $f(x_0)f(x_1) < 0$ (tj. např. $x_0 = a$, $x_1 = b$).

Poznámka: pokud je funkce f konvexní nebo konkávní na $[a,b]$, je x_s jeden z krajní bodů intervalu.

Řád metody: 1

Quasi Newtonova metoda (plus/minus)

Tečnu u Newtonovy metody nahradíme sečnou procházející bodem $(x_k, f(x_k))$ a bodem $(x_k + f(x_k), f(x_k + f(x_k)))$, respektive bodem $(x_k - f(x_k), f(x_k - f(x_k)))$. Přitom pokud je bod x_k blízko hledaného kořene ξ, pak hodnota $f(x_k)$ je blízká nule a sečna procházející uvedenými body je blízká tečně vedené bodem x_k.

$$x_{k+1} = x_k \pm \frac{f^2(x_k)}{f(x_k) - f(x_k \pm f(x_k))}$$

Iterační funkce:

$$g(x) = x \pm \frac{f^2(x)}{f(x) - f(x \pm f(x))}$$

Poznámka:

Quasi Newtonova metoda se také někdy nazývá Steffensenova - viz dále.

Věta

Nechť $f \in C^1[a,b]$, $\xi \in [a,b]$ nechť je řešením rovnice $f(x) = 0$ a $f'(\xi) \neq 0$. Pak existuje $\varepsilon > 0$ tak, že posloupnost $\left\{x^k\right\}_{k=0}^{\infty}$ generovaná quasi Newtonovou metodou konverguje k bodu ξ pro každou počáteční aproximaci $x^0 \in [\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon] \cap [a,b]$. Pokud má funkce f v okolí bodu ξ spojitou druhou derivaci, je řád metody alespoň 2.

Důkaz: L'Hospitalovo pravidlo.

Iterační metody pro násobné kořeny

Kořen ξ násobnosti M

$$f(\xi) = 0, f'(\xi) = 0, \ldots, f^{(M-1)}(\xi) = 0,\ f^{(M)}(\xi) \neq 0$$

Věta

Nechť kořen ξ má násobnost $M > 1$. Pak modifikovaná Newtonova metoda

$$x_{k+1} = x_k - M\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

je metoda druhého řádu.

Důkaz:

Konec opakování

Urychlení konvergence – Aitkenova δ^2-metoda

Věta

Nechť je dána posloupnost $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$, $x_k \neq \xi$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \xi$, a nechť tato posloupnost splňuje podmínky

$$x_{k+1} - \xi = (C + \gamma_k)(x_k - \xi),\ k = 0, 1, 2, \ldots,\ |C| < 1,\ \lim_{k\to\infty} \gamma_k = 0.$$

Pak posloupnost

$$\hat{x}_k = x_k - \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k}$$

je definována pro všechna dostatečně velká k a platí

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\hat{x}_k - \xi}{x_k - \xi} = 0,$$

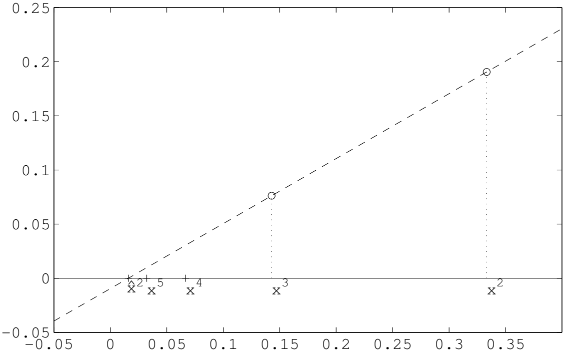
tj. posloupnost $\{\hat{x}_k\}$ konverguje k limitě ξ rychleji než posloupnost $\{x_k\}$.

Geometrická interpretace

Položme

$$\varepsilon(x_k) = x_k - x_{k+1} = x_k - \xi - (x_{k+1} - \xi) = (x_k - \xi)(1 + C + \gamma_k)$$

$$\varepsilon(x_{k+1}) = x_{k+1} - x_{k+2} = (x_{k+1} - \xi)(1 + C + \gamma_{k+1}) =$$
$$= (x_k - \xi)(C + \gamma_k)(1 + C + \gamma_{k+1}) \approx \varepsilon(x_k)(C + \gamma_k)$$



Rovnice přímky:

$$y - \varepsilon(x_k) = \frac{\varepsilon(x_k) - \varepsilon(x_{k+1})}{x_k - x_{k+1}}(x - x_k)$$

Průsečík s osou x $(y = 0)$ je bod $\hat{x}_k$

$$\hat{x}_k = x_k - \frac{\varepsilon(x_k)(x_k - x_{k+1})}{\varepsilon(x_k) - \varepsilon(x_{k+1})} = x_k - \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k}.$$

Steffensenova metoda

Buď g iterační funkce pro rovnici $x = g(x)$. Položme

$$y_k = g(x_k), \qquad z_k = g(y_k),$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(y_k - x_k)^2}{z_k - 2y_k + x_k}.$$

V tomto případě je tedy $\varepsilon(x_k) = x_k - y_k$, $\varepsilon(y_k) = y_k - z_k$. Tato iterační metoda se nazývá **Steffensenova** a může být popsána iterační funkcí φ:

$$x_{k+1} = \varphi(x_k),$$

kde

$$\varphi(x) = \frac{xg(g(x)) - g^2(x)}{g(g(x)) - 2g(x) + x}, \qquad g^2(x) = (g(x))^2.$$

$$\varphi(x_k) = \frac{x_k g(g(x_k)) - g^2(x_k)}{g(g(x_k)) - 2g(x_k) + x_k} = \frac{x_k g(y_k) - (y_k)^2}{g(y_k) - 2y_k + x_k} =$$

$$= \frac{x_k z_k - (y_k)^2}{z_k - 2y_k + x_k} = \frac{x_k(z_k - 2y_k + x_k) - (y_k - x_k)^2}{z_k - 2y_k + x_k} =$$

$$= x_k - \frac{(y_k - x_k)^2}{z_k - 2y_k + x_k}$$

Věta

1. $\varphi(\xi) = \xi$ implikuje $g(\xi) = \xi$.
2. Jestliže $g(\xi) = \xi$, $g'(\xi)$ existuje a $g'(\xi) \neq 1$, pak $\varphi(\xi) = \xi$.

Věta

Nechť funkce g má spojité derivace až do řádu $p+1$ včetně v okolí bodu $x = \xi$. Nechť iterační metoda $x_{k+1} = g(x_k)$ je řádu p pro bod ξ.
Pak pro $p > 1$ je iterační metoda $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ řádu $2p-1$.
Pro $p = 1$ je tato metoda řádu alespoň 2 za předpokladu $g'(\xi) \neq 1$.

Müllerova metoda

Müllerova metoda je zobecněním metody sečen. Metoda sečen v podstatě znamená, že pro dané aproximace x_k, x_{k-1} bodu ξ aproximujeme funkci f přímkou procházející body $[x_{k-1}, f(x_{k-1})]$, $[x_k, f(x_k)]$ a za další aproximaci bodu ξ vezmeme průsečík této přímky s osou x. Müllerova metoda užívá tři aproximace x_{k-2}, x_{k-1}, x_k a křivku $y = f(x)$ aproximujeme parabolou určenou těmito body. Průsečík této paraboly s osou x, který je nejbližší k x_k, vezmeme za další aproximaci x_{k+1}. Touto metodou lze najít i násobné a komplexní kořeny.

x_{k-2}, x_{k-1}, x_k jsou již vypočtené aproximace. Sestrojme polynom

$$P(x) = a(x - x_k)^2 + b(x - x_k) + c$$

procházející body $[x_{k-2}, f(x_{k-2})]$, $[x_{k-1}, f(x_{k-1})]$, $[x_k, f(x_k)]$, t.j. splňující podmínky $P(x^i) = f(x^i)$, $i = k - 2, k - 1, k$. Z nich plyne

$$\begin{aligned}
c &= f(x_k) \\
b &= \frac{(x_{k-2} - x_k)^2 [f(x_{k-1}) - f(x_k)] - (x_{k-1} - x_k)^2 [f(x_{k-2}) - f(x_k)]}{(x_{k-2} - x_k)(x_{k-1} - x_k)(x_{k-2} - x_{k-1})} \\
a &= \frac{(x_{k-2} - x_k) [f(x_{k-1}) - f(x_k)] - (x_{k-1} - x_k) [f(x_{k-2}) - f(x_k)]}{(x_{k-2} - x_k)(x_{k-1} - x_k)(x_{k-1} - x_{k-2})}
\end{aligned}$$

$$x_{k+1} - x_k = \frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}.$$

Znaménko u odmocniny vybereme tak, aby bylo shodné se znaménkem b. Tato volba znamená, že jmenovatel zlomku bude v absolutní hodnotě největší a tedy výsledná hodnota x_{k+1} bude nejbližší x_k. Je tedy

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2c}{b + (signb)\sqrt{b^2 - 4ac}}.$$