Numerické metody
12. přednáška, 13. května 2015

Jiří Zelinka

Opakování

- Choleského metoda – rozklad symetrických matic
- Croutova metoda – rozklad třídiagonálních matic

Příklad

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Stabilita, podmíněnost

Definice

Algoritmus pro řešení $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se nazývá *stabilní*, jestliže vypočtené řešení $\hat{\mathbf{x}}$ je takové, že

$$(A + \mathcal{E})\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{b} + \delta\mathbf{b},$$

kde $\mathcal{E}$ a $\delta\mathbf{b}$ jsou malé; $\mathcal{E}$ se nazývá *chybová matice*.

Definice

Pro libovolnou přidruženou maticovou normu definujeme *číslo podmíněnosti* matice A vztahem

$$k(A) = \|A\| \, \|A^{-1}\|.$$

Řekneme, že *matice A je dobře podmíněna*, jestliže $k(A) \approx 1$ a *špatně podmíněna*, jestliže $k(A)$ je podstatně větší než 1.

Příklad

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 101 & 10 \\ 10 & 1 \end{pmatrix} & \Rightarrow \quad \|A\|_1 &= 111 \\ A^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & -10 \\ -10 & 101 \end{pmatrix} & \Rightarrow \quad \|A^{-1}\|_1 &= 111 \end{aligned}$$

Tedy $k(A) = 111^2 = 12321$, A je špatně podmíněna.

Příklad – Hilbertova matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}.$$

Pro $n = 10$ vzhledem k normě $\| \, . \, \|_1$ je $k(A) = 3{,}5353.10^{13}$.

Věta

Jestliže řešíme systém $Ax = \boldsymbol{b}$ v pohyblivé řádové čárce se zaokrouhlováním na t desetinných míst a $k(A) \approx 10^{\alpha}$, pak vypočtené řešení $\tilde{\boldsymbol{x}}$ je správné na $(t - \alpha - 1)$ desetinných míst.

A – pozitivně definitní matice

$\|A\|_2 = \sqrt{\varrho(A^T A)} = \varrho(A)$

$$\|A\|_2 = \max_{1 \le i \le n} \lambda_i$$

a

$$\|A^{-1}\|_2 = (\min_{1 \le i \le n} \lambda_i)^{-1}.$$

$$k(A) = \frac{\max \lambda_i}{\min \lambda_i}.$$

Komplexní kořeny reálných polynomů

Π_n: třída polynomů stupně nejvýše n s reálnými koeficienty.
$P \in \Pi_n$:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \ldots + a_1 x + a_0.$$

$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ kořeny (reálné i komplexní) polynomu P.

Zobecněné Hornerovo schema

Polynom P dělíme kvadratickým trojčlenem
$D(x) = x^2 + px + q$:

$$P(x) = D(x) \cdot Q(x) + Ax + B$$

pro $Q(x) = b_{n-2} x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0$.

Platí:

$$\begin{aligned}
b_{n-2} &= a_n \\
b_{n-3} &= a_{n-1} - pb_{n-2} \\
b_{n-4} &= a_{n-2} - pb_{n-3} - qb_{n-2} \\
&\vdots \\
b_k &= a_{k+2} - pb_{k+1} - qb_{k+2} \\
&\vdots \\
A &= a_1 - pb_0 - qb_1 \\
B &= a_0 - qb_0
\end{aligned}$$

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	a_{n-3}	...	a_1	a_0
$-p$	0	$-pb_{n-2}$	$-pb_{n-3}$	$-pb_{n-4}$	...	$-pb_0$	0
$-q$	0	0	$-qb_{n-2}$	$-qb_{n-3}$	...	$-qb_1$	$-qb_0$
	b_{n-2}	b_{n-3}	b_{n-4}	b_{n-3}	...	A	B

Hodnota polynomu v komplexním čísle:

$z \in \mathbb{C}$, polynom P dělíme
$D(x) = (x - z)(x - \bar{z}) = x^2 + px + q$, $p = -2\mathcal{R}(z)$, $q = |z|^2$
Pak $P(z) = Az + B$.

Bairstowova metoda

Podstatou Bairstowovy metody je myšlenka nalezení kvadratického trojčlenu, který je dělitelem daného polynomu P.
Označme z, $\bar{z}$, $z = u + i\,v$, dvojici komplexně sdružených kořenů polynomu P. Čísla z, $\bar{z}$ jsou kořeny kvadratického trojčlenu $D(x) = x^2 + px + q$, $p = -2u$, $q = u^2 + v^2$. Chceme najít čísla p, q tak, aby polynom D dělil polynom P beze zbytku.

$$P(x) = D(x)Q(x) + Ax + B,$$

kde

$$\begin{aligned} D(x) &= x^2 + px + q, \\ Q(x) &= Q(x, p, q) \qquad \text{je polynom st. } n-2, \\ A &= A(p, q), \\ B &= B(p, q). \end{aligned}$$

Je třeba určit p, q tak, aby

$$A(p, q) = 0, \qquad B(p, q) = 0.$$

Jedná se o systém nelineárních rovnic a budeme ho řešit Newtonovou metodou pro systémy nelineárních rovnic.

Považujeme-li kvadratický trojčlen $D_k(x) = x^2 + p_k x + q_k$ za aproximaci dělitele, dostaneme další aproximaci $D_{k+1}(x) = x^2 + p_{k+1}x + q_{k+1}$, $p_{k+1} = p_k + h$, $q_{k+1} = q_k + g$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial A}{\partial p} & \dfrac{\partial A}{\partial q} \\ \dfrac{\partial B}{\partial p} & \dfrac{\partial B}{\partial q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ g \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} A(p,q) \\ B(p,q) \end{pmatrix}$$

Označme $\dfrac{\partial A}{\partial p} = A'_p$, $\dfrac{\partial A}{\partial q} = A'_q$, $\dfrac{\partial B}{\partial p} = B'_p$, $\dfrac{\partial B}{\partial q} = B'_q$, pak

$$A(p,q) + A'_p(p,q)h + A'_q(p,q)g = 0,$$
$$B(p,q) + B'_p(p,q)h + B'_q(p,q)g = 0.$$

Derivujme vztah $P(x) = D(x)Q(x) + Ax + B$ podle p a q:

$$\begin{aligned} 0 &= xQ(x) + Q'_p(x)D(x) + A'_p x + B'_p \\ 0 &= \ \ Q(x) + Q'_q(x)D(x) + A'_q x + B'_q \end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \qquad xQ(x) = -Q'_p(x)D(x) - A'_p x - B'_p, \\ &\text{(b)} \qquad \ \ Q(x) = -Q'_q(x)D(x) - A'_q x - B'_q. \end{aligned}$$

$-A'_p$, $-B'_p$ resp. $-A'_q$, $-B'_q$ jsou koeficienty lineárních zbytků při dělení polynomu $xQ(x)$ polynomem $D(x)$, resp. $Q(x)$ polynomem $D(x)$. Položme

$$a = -A'_q, \qquad b = -B'_q.$$

Tato čísla lze opět získat zobecněným Hornerovým algoritmem pro dělení polynomů $Q(x)/D(x)$.

Vypočet A_p', B_p':

$$xQ(x) = -xQ_q'(x)D(x) + ax^2 + bx$$

$$xQ(x) = a(x^2 + px + q) + bx - xQ_q'(x)D(x) - apx - aq,$$

a tedy

$$xQ(x) = \left(a - xQ_q'(x)\right) D(x) + (b - ap)x - aq.$$

$$xQ(x) = -xQ_q'(x)D(x) + ax^2 + bx$$

a po úpravě můžeme tento vztah zapsat ve tvaru

$$xQ(x) = a(x^2 + px + q) + bx - xQ_q'(x)D(x) - apx - q,$$

a tedy

$$xQ(x) = \left(a - xQ_q'(x)\right) D(x) + (b - ap)x - aq.$$

Porovnáním rovností dostaneme

$$A_p' = ap - b, \qquad B_p' = aq.$$

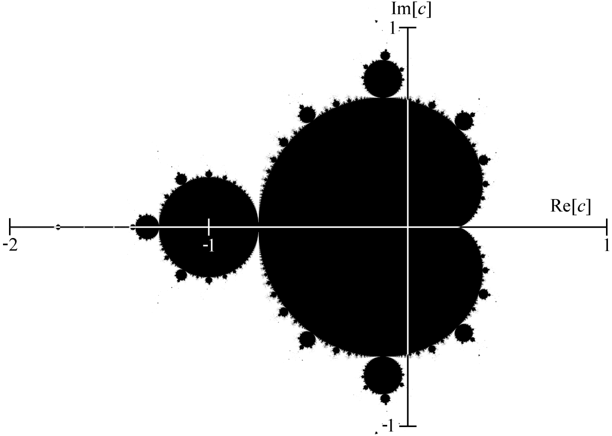
Soustavu pro h a g můžeme nyní zapsat takto:

$$
\begin{aligned}
(ap - b)h - ag + A &= 0, \\
aqh - bg + B &= 0.
\end{aligned}
$$

Vyřešením této soustavy získáme čísla h, g a kvadratický trojčlen $D_{k+1}(x)$.

Madelbrodova množina

Položme $z_0 = 0$, $z_{n+1} = z_n^2 + c$, $c \in \mathbb{C}$. Madelbrodova množina je pak definována jako množina komplexních čísel c, pro která je posloupnost $z_0, z_1, z_2, \ldots$ omezená.



Fraktál Newton (autor John Hubbard)

Newtonova metoda pro funkci $f(x) = x^3 - 1$ v komplexním oboru. Barevně označíme oblasti podle konvergence k jednomu z kořenů: