

Cvičení 11

Pravděpodobnostní vytvořující funkce

Definice: Necht' X je celočíselná nezáporná náhodná veličina s pravděpodobnostní funkcí

$$P(X = k) = \begin{cases} p_k & \text{pro } k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}. \text{ Pravděpodobnostní vytvořující funkce náhodné veličiny } X \text{ je}$$

dána vztahem: $g_X(z) = E(z^X) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$, kde $|z| \leq 1$.

Vlastnosti:

$$a) p_k = \left. \frac{g_X^{(k)}(z)}{k!} \right|_{z=0} \text{ pro } k = 0, 1, 2, \dots$$

$$b) E(X) = \left. \frac{d}{dz} g_X(z) \right|_{z=1}, D(X) = \left. \frac{d^2}{dz^2} g_X(z) \right|_{z=1} + E(X) - [E(X)]^2.$$

c) X_1, \dots, X_n jsou stochasticky nezávislé celočíselné nezáporné náhodné veličiny, $Y = \sum_{i=1}^n X_i$

$$\Rightarrow g_Y(z) = g_{X_1}(z) \cdot \dots \cdot g_{X_n}(z).$$

d) X_1, \dots, X_n jsou stochasticky nezávislé celočíselné nezáporné náhodné veličiny, které mají všechny stejnou pravděpodobnostní funkci $P(X_i = k) = \begin{cases} p_k & \text{pro } k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Pak transformovaná náhodná veličina $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ má pravděpodobnostní funkci

$$P(Y = k) = \begin{cases} \{p_k\}^{n*} & \text{pro } k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}.$$

e) Necht' X_1, X_2, \dots je posloupnost stochasticky nezávislých celočíselných nezáporných náhodných veličin, které mají všechny stejnou pravděpodobnostní funkci

$$P(X_i = k) = \begin{cases} p_k & \text{pro } k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}, i = 1, 2, \dots \text{ Necht' } N \text{ je celočíselná nezáporná náhodná}$$

veličina nezávislá na X_1, X_2, \dots s pravděpodobnostní funkcí $P(N = n) = \begin{cases} q_n & \text{pro } n = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$.

Pak náhodná veličina $S = X_1 + \dots + X_N$ (tj. součet náhodného počtu náhodných veličin) má

$$\text{pravděpodobnostní funkci } P(S = k) = h_k = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} q_n \{p_k\}^{n*} & \text{pro } k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}.$$

f) Pro pravděpodobnostní vytvořující funkci náhodné veličiny $S = X_1 + \dots + X_N$ platí:

$$g_S(z) = g_N(g_X(z)).$$

$$g) E(S) = E(N)\mu, D(S) = D(N)\mu^2 + E(N)\sigma^2, \text{ kde } \mu = E(X_i), \sigma^2 = D(X_i), i = 1, 2, \dots$$

Příklad 1.: Celočíselná nezáporná náhodná veličina X má pravděpodobnostní funkci

$$P(X = k) = \begin{cases} \frac{1}{k(k+1)} & \text{pro } k = 1, 2, \dots \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}. \text{ Najděte její pravděpodobnostní vytvořující funkci.}$$

Návod: Použijte rozklad na parciální zlomky a Taylorův rozvoj funkce $\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$.

Výsledek: $g_X(z) = 1 + \frac{1-z}{z} \ln(1-z)$

Příklad 2.: Pomocí pravděpodobnostních vytvořujících funkcí najděte střední hodnoty a rozptyly těchto rozložení: a) $A(\vartheta)$, b) $Bi(n, \vartheta)$, c) $Ge(\vartheta)$.

Výsledek: ad a) $E(X) = \vartheta, D(X) = \vartheta(1-\vartheta)$, ad b) $E(X) = n\vartheta, D(X) = n\vartheta(1-\vartheta)$, ad c)

$$E(X) = \frac{1-\vartheta}{\vartheta}, D(X) = \frac{1-\vartheta}{\vartheta^2}$$

Příklad 3.: Provedeme tři nezávislé pokusy, v nichž sledujeme nastoupení úspěchu. V prvním pokusu nastává úspěch s pravděpodobností 0,5, ve druhém 0,2 a ve třetím 0,1. Najděte pravděpodobnostní vytvořující funkci náhodné veličiny Y , která udává počet úspěchů v těchto třech pokusech.

a) Vyjádřete pravděpodobnostní vytvořující funkci náhodné veličiny Y .

b) Pomocí pravděpodobnostní vytvořující funkce najděte střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny Y .

c) Pomocí pravděpodobnostní vytvořující funkce odvoďte pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny Y .

Výsledek:

Ad a) $g_Y(z) = 0,36 + 0,49z + 0,14z^2 + 0,01z^3$

Ad b) $E(Y) = 0,8, D(Y) = 0,5$

Ad c) $p_0 = 0,36, p_1 = 0,49, p_2 = 0,14, p_3 = 0,01$

Příklad 4.: Předpokládejme, že počet vajíček, která snese slepice za sezónu, je náhodná veličina $N \sim Po(\lambda)$. Pravděpodobnost, že se z libovolného vajíčka vylíhne kuře, je ϑ . Pomocí pravděpodobnostní vytvořující funkce odvoďte rozložení náhodné veličiny S , která udává počet kuřat vylíhlých za sezónu z vajíček dané slepice. Pomocí vzorce z bodu (g) vypočtěte též $E(S)$ a $D(S)$.

Výsledek: $S \sim Po(\lambda\vartheta), E(S) = D(S) = \lambda\vartheta$