Cvičení 3

Příklady na využití exponenciálního rozložení

Příklad 1.: Doba do ukončení opravy v opravně obuvi je náhodná veličina, která se řídí exponenciálním rozložením se střední hodnotou 3 dny. Jaká je pravděpodobnost, že oprava bude ukončena do dvou dnů? [0,4866]

Příklad 2.: Životnost žárovky má exponenciální rozložení se střední hodnotou 600 h. Jaká je pravděpodobnost, že žárovka bude svítit dalších aspoň 200 h, jestliže již svítila aspoň 800 h? [0,7165]

Příklad 3.: Náhodné doby života dvou součástek jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny, přičemž $X_i \sim Ex(\lambda_i)$, i = 1, 2. Střední hodnota doby života první součástky je 2 roky, druhé součástky 3 roky. Jaká je pravděpodobnost, že druhá součástka přežije první? [0,6]

Příklad 4.: Doba (v hodinách), která uplyne mezi dvěma naléhavými příjmy v jisté nemocnici, se řídí exponenciálním rozložením se střední hodnotou 2 h. Jaká je pravděpodobnost, že uplyne více než 5 h bez naléhavého příjmu? [0,082]

Příklad 5.: Zkoumá se funkce dvou nezávisle na sobě pracujících přístrojů. Doba bezporuchové funkce i-tého přístroje je náhodná veličina $X_i \sim Ex(\lambda_i)$, i = 1, 2. Jaká je pravděpodobnost, že za dobu $t_0 > 0$ a) ani jeden přístroj neselže, b) selže aspoň jeden přístroj?
Řešení:
[ad a) $e^{-t_0(\lambda_1+\lambda_2)}$, ad b) $1-e^{-t_0(\lambda_1+\lambda_2)}$]

Příklad 6.: Najděte 5. percentil náhodné veličiny X ~ Ex(0,1). [0,5129]

Příklad 7.: Jistý přístroj má poruchu v průměru jednou za 2000 hodin. Doba čekání na poruchu se řídí exponenciálním rozložením. Stanovte dobu t tak, aby pravděpodobnost, že přístroj bude pracovat po dobu delší než t, byla 0,99. [20,1 h]

Příklad 8.: Na základě znalosti 100(1-α)% intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu $\frac{1}{\lambda}$ exponenciálního rozložení (viz věta 3.18.) odvoďte 100(1-α)% interval spolehlivosti pro hodnotu funkce přežití.
[100(1-α)% interval spolehlivosti pro $\Psi(x)$ má meze:
$D = \exp\left(\frac{-x\chi^2_{1-\alpha/2}(2n)}{2nM}\right)$, $H = \exp\left(\frac{-x\chi^2_{\alpha/2}(2n)}{2nM}\right)$]

Příklad 9.: Při zkouškách životnosti určitého elektronického prvku byly zjištěny následující doby života (ve dnech): 4, 13, 26, 36, 51, 75, 100, 111, 162, 174. (Průměrná doba života je tedy $m = \frac{752}{10} = 75{,}2$.) Uvedené hodnoty považujeme za realizace náhodného výběru rozsahu 10 z rozložení Ex(λ). Najděte 95% pravostranný interval spolehlivosti pro pravděpodobnost, že náhodně vybraný elektronický prvek přežije 50 dnů.
[Se spolehlivostí 95 % lze očekávat, že pravděpodobnost přežití 50 dnů je nejvýše 0,7.]