Cvičení 3 s návodem

Příklady na využití exponenciálního rozložení

Příklad 1.: Doba do ukončení opravy v opravně obuvi je náhodná veličina, která se řídí exponenciálním rozložením se střední hodnotou 3 dny. Jaká je pravděpodobnost, že oprava bude ukončena do dvou dnů?
Řešení: X ~ Ex(1/3),

$$P(X \le 2) = \int_0^2 \frac{1}{3} e^{-\frac{x}{3}} dx = \left[-e^{-\frac{x}{3}} \right]_0^2 = 1 - e^{-\frac{2}{3}} = 0{,}4866$$

V MATLABu: p = expcdf(2,3)

Příklad 2.: Životnost žárovky má exponenciální rozložení se střední hodnotou 600 h. Jaká je pravděpodobnost, že žárovka bude svítit dalších aspoň 200 h, jestliže již svítila aspoň 800 h?
Řešení: X ~ Ex(1/600), podle věty 3.2 dostáváme

$$P(X \ge 800 + 200 / X \ge 800) = P(X \ge 200) = 1 - P(X \le 200) + P(X = 200)$$

$$= 1 - \int_0^{200} \frac{1}{600} e^{-\frac{x}{600}} dx = 1 - \left[-e^{-\frac{x}{600}} \right]_0^{200} = e^{-\frac{200}{600}} = e^{-\frac{1}{3}} = 0{,}7165$$

V MATLABu: p = 1- expcdf(200,600)

Příklad 3.: Náhodné doby života dvou součástek jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny, přičemž $X_i \sim Ex(\lambda_i)$, i = 1, 2. Střední hodnota doby života první součástky je 2 roky, druhé součástky 3 roky. Jaká je pravděpodobnost, že druhá součástka přežije první?
Řešení:
Podle věty 3.13 dostáváme:

$$P(X_2 > X_1) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{6}} = 0{,}6$$

Příklad 4.: Doba (v hodinách), která uplyne mezi dvěma naléhavými příjmy v jisté nemocnici, se řídí exponenciálním rozložením se střední hodnotou 2 h. Jaká je pravděpodobnost, že uplyne více než 5 h bez naléhavého příjmu?
Řešení: X ~ Ex(1/2),

$$P(X > 5) = 1 - P(X \le 5) = 1 - \int_0^5 \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} dx = 1 - \left[-e^{-\frac{x}{2}} \right]_0^5 = e^{-2{,}5} = 0{,}082$$

V MATLABu: p = 1- expcdf(5,2)

Příklad 5.: Zkoumá se funkce dvou nezávisle na sobě pracujících přístrojů. Doba bezporuchové funkce i-tého přístroje je náhodná veličina $X_i \sim Ex(\lambda_i)$, i = 1, 2. Jaká je pravděpodobnost, že za dobu $t_0 > 0$ a) ani jeden přístroj neselže, b) selže aspoň jeden přístroj?
Řešení:
ad a)

$$P(X_1 > t_0 \wedge X_2 > t_0) = P(X_1 > t_0) P(X_2 > t_0) = [1 - P(X_1 \le t_0)][1 - P(X_2 \le t_0)] =$$

$$= [1 - \Phi_1(t_0)][1 - \Phi_2(t_0)] = e^{-\lambda_1 t_0} e^{-\lambda_2 t_0} = e^{-t_0(\lambda_1 + \lambda_2)}$$

ad b)

$$P(X_1 \le t_0 \vee X_2 \le t_0) = 1 - e^{-t_0(\lambda_1 + \lambda_2)}$$

Příklad 6.: Najděte 5. percentil náhodné veličiny X ~ Ex(0,1).
Řešení:
$$0{,}05 = \Phi\left(K_{0,05}(X)\right) = 1 - \exp\left(-0{,}1K_{0,05}(X)\right) \Rightarrow K_{0,05}(X) =$$
$$= -10\ln 0{,}95 = 0{,}5129$$
V MATLABu: K = expinv(0.05,10)

Příklad 7.: Jistý přístroj má poruchu v průměru jednou za 2000 hodin. Doba čekání na poruchu se řídí exponenciálním rozložením. Stanovte dobu t tak, aby pravděpodobnost, že přístroj bude pracovat po dobu delší než t, byla 0,99.
Řešení: X … doba čekání na poruchu, X ~ Ex(1/2000)
$$0{,}99 = P(X > t) = 1 - P(X \le t) = 1 - \Phi(t) = e^{-\frac{t}{2000}} \Rightarrow$$
$$t = -2000 \cdot \ln 0{,}99 = 20{,}1\mathrm{h}$$
V MATLABu: t=expinv(0.01,2000)

Příklad 8.: Na základě znalosti 100(1-α)% intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu $\frac{1}{\lambda}$ exponenciálního rozložení (viz věta 3.18.) odvoďte 100(1-α)% interval spolehlivosti pro hodnotu funkce přežití.
Řešení: Funkce přežití exponenciálního rozložení má tvar $\Psi(x) = \begin{cases} e^{-\lambda x} \text{ pro } x > 0 \\ 1 \text{ pro } x \le 0 \end{cases}$. Stačí tedy získat meze 100(1-α)% interval spolehlivosti pro intenzitu poruchy λ, vynásobit x a použít funkci exp.
Ve větě 3.18. bylo odvozeno, že
$\forall\lambda > 0 : 1-\alpha \le P\left(\frac{2nM}{\chi^2_{1-\alpha/2}(2n)} < \frac{1}{\lambda} < \frac{2nM}{\chi^2_{\alpha/2}(2n)}\right)$. Odtud plyne, že 100(1-α)% interval spolehlivosti pro intenzitu poruchy λ má meze:
$$\forall\lambda > 0 : 1-\alpha \le P\left(\frac{\chi^2_{\alpha/2}(2n)}{2nM} < \lambda < \frac{\chi^2_{1-\alpha/2}(2n)}{2nM}\right).$$
100(1-α)% interval spolehlivosti pro $e^{-\lambda x}$ má tedy meze:
$$D = \exp\left(\frac{-x\chi^2_{1-\alpha/2}(2n)}{2nM}\right),\ H = \exp\left(\frac{-x\chi^2_{\alpha/2}(2n)}{2nM}\right).$$

Příklad 9.: Při zkouškách životnosti určitého elektronického prvku byly zjištěny následující doby života (ve dnech): 4, 13, 26, 36, 51, 75, 100, 111, 162, 174. (Průměrná doba života je tedy $m = \frac{752}{10} = 75{,}2$.) Uvedené hodnoty považujeme za realizace náhodného výběru rozsahu 10 z rozložení Ex(λ). Najděte 95% pravostranný interval spolehlivosti pro pravděpodobnost, že náhodně vybraný elektronický prvek přežije 50 dnů.
Řešení: n = 10, m = 75,2, x = 50, α = 0,05.
$$h = \exp\left(\frac{-x\chi^2_{\alpha}(2n)}{2nm}\right) = \exp\left(\frac{-50\chi^2_{0,05}(20)}{2\cdot 10\cdot 75{,}2}\right) = \exp\left(\frac{-50\cdot 10{,}85}{2\cdot 10\cdot 75{,}2}\right) = 0{,}7$$
Se spolehlivostí 95 % lze očekávat, že pravděpodobnost přežití 50 dnů je nejvýše 0,7.