

Cvičení 4

Příklady na využití Poissonova rozložení

Příklad 1.: Při provozu balicího automatu vznikají během směny náhodné poruchy, které se řídí rozložením $Po(2)$. Jaká je pravděpodobnost, že během směny dojde k aspoň jedné poruše? [0,8647]

Příklad 2.: Telefonní ústředna zapojí během hodiny průměrně 15 hovorů. Jaká je pravděpodobnost, že během 4 minut ústředna zapojí a) právě jeden hovor, b) aspoň dva hovory? [ad a) 0,368, ad b) 0,264]

Příklad 3.: Ze zkušenosti víme, že při správné obsluze stroje je v průměru 0,1% výrobků zmetkových. Ke stroji nastoupil nový pracovník. Za týden vyrobil 5 000 kusů, z nichž 11 bylo zmetkových. Lze takto vysoký počet zmetků vysvětlit působením náhodných vlivů? [Nikoliv, pravděpodobnost, že při správné obsluze stroje se vyrobí aspoň 11 zmetků, je pouze 0,0137.]

Příklad 4.: Semena rostlin určitého druhu jsou znečištěna malým množstvím plevele. Je známo, že na jedné jednotce plochy vyrostou po osetí v průměru 4 rostliny plevele. Vypočítejte pravděpodobnost, že na dané jednotce plochy:
a) nebude žádný plevel,
b) vyrostou nejvýše 3 rostliny plevele,
c) vyrostou aspoň 5, ale nejvýše 7 rostlin plevele.
[ad a) 0,0183, ad b) 0,4335, ad c) 0,32]

Příklad 5.: V prodejně posunuli zavírací dobu ve všední dny z 18 na 19 hodin. Sestrojte 90% přibližný empirický interval spolehlivosti pro střední hodnotu počtu zákazníků v této době, navštívilo-li prodejnu ve 30 náhodně zvolených dnech ve sledované době celkem 225 zákazníků. Přitom předpokládáme, že počet zákazníků v určitém časovém intervalu má Poissonovo rozložení. [Střední hodnota počtu zákazníků se s pravděpodobností přibližně 90 % nachází v mezích od 6,68 do 8,32.]

Příklad 6.: Necht' $X \sim Po(\lambda)$. Dokažte, že pro $\forall x = 1, 2, 3, \dots$ platí: $x\pi(x) = \lambda\pi(x-1)$.
Pravděpodobnostní funkci Poissonova rozložení lze tedy vyjádřit rekurzivně:

$$\pi(x) = \frac{\lambda}{x} \pi(x-1) \text{ pro } x = 1, 2, 3, \dots, \pi(0) = e^{-\lambda}$$

Příklad 7.: Necht' $X \sim Po(\lambda)$. Dokažte, že pro $\forall x = 0, 1, 2, \dots$ platí: $\Phi(x) = \frac{\Gamma(x+1, \lambda)}{\Gamma(x+1)}$, kde

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt, \quad \Gamma(a, \lambda) = \int_{\lambda}^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt,$$

pro přirozené a : $\Gamma(a) = (a-1)!$, $\Gamma(a, \lambda) = e^{-\lambda} \lambda^{a-1} + (a-1)e^{-\lambda} \lambda^{a-2} + \dots + (a-1)!e^{-\lambda}$

Práce se systémem MATLAB

Úkol 1.: Na výrobní lince se zhruba každé dvě hodiny vyskytne porucha. Sestrojte tabulku uvádějící, s jakou pravděpodobností se na této lince během osmihodinové pracovní směny nevyskytne žádná porucha, vyskytne jedna porucha, vyskytnou dvě poruchy atd. až vyskytne deset poruch. S jakou pravděpodobností nastane více než deset poruch? Určete nejpravděpodobnější počet poruch během osmihodinové směny.

Výsledná tabulka:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\pi(n)$	0,0183	0,0733	0,1465	0,1954	0,1954	0,1563	0,1042	0,0595	0,0298	0,0132	0,0053
$\Phi(n)$	0,0183	0,0916	0,2381	0,4335	0,6288	0,7851	0,8893	0,9489	0,9786	0,9919	0,9972

Pravděpodobnost, že počet poruch je větší než deset, je 0,0028.

Nejpravděpodobnější počet poruch během osmihodinové směny je tři až čtyři.

Návod pro MATLAB:

```
x=[0:10]';  
pf=poisspdf(x,4);  
df=poisscdf(x,4);  
[x pf df]
```

Grafické znázornění:

```
plot(x,pf,'o')  
figure  
stairs(x,df)
```

(Samostatný úkol: Jak nakreslit graf distribuční funkce bez svislých čar?)

Jedno z možných řešení:

```
hold on  
for i=1:(length(x)-2) plot([i,i],[0,1],'w'); end
```

Úkol 2.: Pro $n = 30$ a $\vartheta = 0,1$ ilustруйте aproximaci binomického rozložení $Bi(n, \vartheta)$ Poissonovým rozložením $Po(n\vartheta)$. Vypočtené hodnoty obou pravděpodobnostních funkcí v bodech $x = 0, 1, \dots, 30$ zapište do tabulky a znázorněte graficky.

Návod:

```
x=[0:1:30]';  
pf1=binopdf(x,30,0.1);  
pf2=poisspdf(x,3);  
[x pf1 pf2]  
plot(x,pf1,'o',x,pf2,'*')
```

Úkol 3.: Vygenerujte 100 realizací náhodné veličiny s rozložením $Po(2)$ a nakreslete jejich histogram.

Návod:

```
r=poissrnd(2,100,1);  
hist(r,x)
```

Úkol 4.: Odhadněte střední hodnotu a vypočítejte meze 95% intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu na základě proměnné r z předešlého úkolu. (Hodnoty uložené v proměnné r považujeme za realizace náhodného výběru rozsahu 100 z rozložení $Po(2)$.)

Návod:

`[m,meze]=poissfit(r)`

Upozornění: MATLAB počítá meze intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu λ podle vzorce:

$$d = \frac{1}{2n} \chi^2_{\alpha/2}(2nm), \quad h = \frac{1}{2n} \chi^2_{1-\alpha/2}(2(nm+1)),$$

nikoliv podle vzorce $d = m - \sqrt{\frac{m}{n}} u_{1-\alpha/2}$, $h = m + \sqrt{\frac{m}{n}} u_{1-\alpha/2}$, který využívá aproximaci

Poissonova rozložení normálním rozložením.