Cvičení 7

Systémy hromadné obsluhy s omezenou kapacitou

1. Systém M/M/n/m/FIFO

Vstupní proud zákazníků je Poissonův proces s parametrem λ, doba obsluhy se řídí rozložením $Ex(\mu)$, v systému je n linek obsluhy, kapacita systému je omezená (je rovna m) a frontový režim je „první vstupuje, první je obsloužen“.

Označme $\beta = \frac{\lambda}{\mu}, \rho = \frac{\beta}{n}$. Systém se může stabilizovat vždy.

Stacionární rozložení: $a_j = \begin{cases} \frac{\beta^j}{j!} a_0 \text{ pro } j = 1,2,\ldots,n \\ \frac{n^n}{n!} \rho^j a_0 \text{ pro } j = n+1,\ldots,m \end{cases}$, kde

$$a_0 = \frac{1}{\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\beta^j}{j!} + \frac{n^n}{n!} \sum_{j=n}^{m} \rho^j}.$$

Charakteristiky stabilizovaného systému:

Pravděpodobnost, že přicházející zákazník bude odmítnut: $P_Z = \frac{n^n}{n!} \rho^m a_0$.

Pravděpodobnost, že přicházející zákazník bude čekat ve frontě:

$$P_Q = \begin{cases} a_n \frac{1-\rho^{m-n}}{1-\rho} \text{ pro } \rho \neq 1 \\ a_n (m-n) \text{ pro } \rho = 1 \end{cases}.$$

Střední hodnota počtu přijatých zákazníků za jednotku času: $\lambda_P = \lambda(1-P_Z)$.

Střední hodnota počtu odmítnutých zákazníků za jednotku času: $\lambda_Z = \lambda P_Z$.

Střední hodnota počtu zákazníků ve frontě: $E(N_Q) = \sum_{j=n+1}^{m} (j-n) a_j$.

Střední hodnota počtu obsluhovaných zákazníků: $E(N_S) = \beta(1-P_Z)$.

Využití systému: $\kappa = \rho(1-P_Z)$.

Ostatní charakteristiky dostaneme pomocí Littleova vzorce.

Charakteristiky tohoto systému počítá funkce odmitani.m

Příklad 1.: V autoservisu jsou 3 mycí rampy a jeden pracovník, jemuž mytí auta trvá v průměru 12 min. Za 1 h přijedou průměrně 3 auta. Jsou-li však v okamžiku příjezdu auta všechny rampy obsazeny, auto nečeká a vrací se později.

a) Jaká je pravděpodobnost, že v autoservisu budou 0, 1, 2, 3 auta?
b) Vypočtěte střední hodnotu počtu zákazníků v autoservisu a ve frontě.
c) Vypočtěte střední hodnotu doby čekání ve frontě.
d) Jaká je pravděpodobnost, že bude volná aspoň jedna rampa?
e) Vypočtěte využití systému.

Výsledky: Jde o systém M/M/n/m/FIFO, kde n = 1, m = 3, $\lambda = 3, \mu = 5, \beta = \frac{3}{5}, \rho = \frac{3}{5}$

ad a) $a_0 = \frac{125}{272}, a_1 = \frac{75}{272}, a_2 = \frac{45}{272}, a_3 = \frac{27}{272}$

ad b) $E(N) = \frac{246}{272}, E(N_Q) = \frac{99}{272}$

ad c) $E(W_Q) = \frac{33}{272} = 7\,\mathrm{min}\,18\mathrm{s}$

ad d) $1 - a_3 = \frac{245}{272}$

ad e) $\kappa = \frac{147}{272} = 0{,}54$

Návod na řešení pomocí MATLABu:

lambda=3;mi=5;n=1;m=3;
[a,PZ,PQ,lambdaP,lambdaZ,kappa,ENS,ENQ,EN,EWS,EWQ,EW]=odmitani(lambda,mi,n,m)

2. Uzavřený systém M/M/n/m/FIFO
V systému je m zákazníků, přičemž mohou čekat v omezené frontě délky $m - n \geq 0$.
Zákazníci po ukončení obsluhy opouštějí systém, ale později se do něj vracejí s novým požadavkem.
Doba pobytu každého zákazníka mimo systém se řídí rozložením $\mathrm{Ex}(\lambda)$, doba obsluhy každé linky se řídí rozložením $\mathrm{Ex}(\mu)$.

Označme $\beta = \frac{\lambda}{\mu}, \rho = \frac{\beta}{n}$.

Stacionární rozložení: $a_j = \begin{cases} \binom{m}{j}\beta^j a_0 \text{ pro } j = 1,2,\ldots,n \\ \frac{n^n m!}{n!(m-j)!}\rho^j a_0 \text{ pro } j = n+1, n+2,\ldots,m \end{cases}$, kde $a_0 = 1 - \sum_{j=1}^{m} a_j$

Pravděpodobnost, že přicházející zákazník bude čekat ve frontě: $P_Q = a_0 \frac{\beta^n}{n!(1-\rho)}$

Charakteristiky stabilizovaného systému:

Střední hodnota počtu zákazníků v systému: $E(N) = \sum_{j=0}^{m} j a_j$.

Střední hodnota počtu obsluhovaných zákazníků: $E(N_S) = \sum_{j=0}^{n-1} j a_j + n\sum_{j=n}^{m} a_j$.

Střední hodnota počtu zákazníků mimo systém: $E(N_R) = m - E(N)$.
Střední hodnota počtu zákazníků přicházejících za jednotku času (intenzita vstupního proudu): $\lambda_R = \lambda E(N_R)$.
Využití systému: $\kappa = \rho E(N_R)$.
Ostatní charakteristiky dostaneme pomocí Littleova vzorce.

Charakteristiky tohoto systému počítá funkce uzavreny.m

Příklad 2.: V uzavřeném systému M/M/n/m/FIFO, kde n = 1, m = 2, $\lambda = 3, \mu = 2$ vypočtěte stacionární rozložení a základní charakteristiky systému.
Úlohy řešte pomocí funkce uzavreny.m.
Výsledek:
Stacionární rozložení: $\mathbf{a} = \left(\frac{2}{17}, \frac{6}{17}, \frac{9}{17}\right) = (0{,}1176; 0{,}3529; 0{,}5294)$
Střední hodnota počtu zákazníků v systému je 1,41.
Střední hodnota počtu obsluhovaných zákazníků je 0,88.
Střední hodnota počtu zákazníků ve frontě je 0,53.
Střední hodnota počtu zákazníků mimo systém je 0,59.
Intenzita vstupního proudu zákazníků je 1,76.
Systém je využit na 88 %.

Návod na řešení pomocí MATLABu:
lambda=3;mi=2;n=1;m=2;
function[a,ENS,ENR,EN,lambdaR,kappa]=uzavreny(lambda,mi,n,m)

Příklad 3.: Skupinu pěti stejných strojů má na starosti jeden údržbář. Doba bezporuchového provozu stroje má exponenciální rozložení se střední hodnotou 1/2 směny a doba opravy má rovněž exponenciální rozložení se střední hodnotou 1/20 směny.
a) Jaká je pravděpodobnost, že všechny stroje pracují?
b) Jaká je pravděpodobnost, že budou současně vyřazeny aspoň dva stroje?
Úlohy řešte pomocí funkce uzavreny.m.
Výsledek:
Jde o uzavřený systém M/M/n/m/FIFO, kde n = 1, m = 5, $\lambda = 2, \mu = 20, \beta = \frac{1}{10}, \rho = \frac{1}{10}$
Ad a) 0,564
Ad b) 0,154

Návod na řešení pomocí MATLABu:
lambda=2;mi=20;n=1;m=5;
function[a,ENS,ENR,EN,lambdaR,kappa]=uzavreny(lambda,mi,n,m)

Příklad k samostatnému řešení:
Do univerzitního bufetu s kapacitou osm stolků po čtyřech místech přichází v průměru 25 studentů za hodinu. V průměru se student zdrží 30 minut.
Můžeme předpokládat, že vstupní proud studentů je Poissonův proces a doba pobytu má exponenciální rozložení. Jaké jsou pravděpodobnosti, že bufet bude prázdný neb o naopak plně obsazen? Na kolik procent je bufet vyžíván? Jaký je průměrný počet volných míst k sezení? Jaký je průměrný počet studentů, kteří si nemají kam sednout za hodinu provozu bufetu?
Výsledky: Pravděpodobnost, že bufet bude prázdný, je $3{,}2767 \cdot 10^{-6.}$ Pravděpodobnost, že bufet bude plně obsazen, je $1{,}787 \cdot 10^{-6}$. Bufet je využíván na 39,1 %. Počet volných míst k sezení je asi 19. Průměrný počet studentů, kteří si nemají kam sednout za hodinu provozu bufetu, je asi $44{,}675 \cdot 10^{-6}$.